Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Мамай, Пространство модулей модельных поверхностей с одномерной комплексной касательной, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 2, 139–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:53:45

УДК 517.55+512.745.2

И. Б. Мамай

Пространство модулей модельных поверхностей с одномерной комплексной касательной

Рассматриваются пространства модулей $\mathcal{M}(n, K)$, которые параметризуют совокупность попарно неэквивалентных модельных поверхностей. Построены пространства модулей $\mathcal{M}(1, K)$ при $K \leq 13$. Доказан ряд утверждений о строении пространств $\mathcal{M}(1, K)$ для произвольного K .

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: многомерный комплексный анализ, CR-многообразие, теория инвариантов.

DOI: 10.4213/im7941

§ 1. Введение

В 1907 г. вышла работа А. Пуанкаре, где он изучал вещественные трехмерные гиперповерхности двумерного комплексного пространства и их свойства, инвариантные относительно локально обратимых голоморфных преобразований [1]. Он обнаружил, что среди всех ростков гиперповерхностей, невырожденных по Леви, самым голоморфно симметричным является росток стандартной трехмерной сферы. Подход к изучению прочих гиперповерхностей, предложенный Пуанкаре, состоял в том, чтобы каждую невырожденную гиперповерхность рассматривать как возмущение сферы. Для вещественных гиперповерхностей комплексного пространства произвольной размерности такой подход был реализован С. Черном и Ю. Мозером в работе [2]. В серии работ В. Белошапки [3]–[6] этот подход был реализован для произвольных значений размерности и коразмерности. С ростком порождающего вещественного многообразия произвольного типа была ассоциирована некоторая специальная вещественно-алгебраическая поверхность того же типа – модельная поверхность, которая обладает набором свойств, аналогичных свойствам сферы из работы Пуанкаре или гиперквадрики из работы Черна и Мозера. В частности, это, в определенном смысле, самые голоморфно симметричные поверхности. Однако в общей ситуации проявляется особенность, которой нет в случае, рассмотренном Пуанкаре, и которая слабо проявлена в случае, рассмотренном Черном и Мозером. Различные ростки одного типа (размерность, коразмерность) могут быть ассоциированы с голоморфно неэквивалентными модельными поверхностями, причем семейства неэквивалентных поверхностей могут

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-3476.2010.1) и стипендии им. А. Г. Витушкина.

задаваться большим числом параметров. Модельные поверхности обладают также следующим свойством. Две такие поверхности голоморфно локально эквивалентны (не важно в какой точке, поскольку они голоморфно однородны) лишь в том случае, если они эквивалентны линейно. В связи с этим задача описания пространства параметров (пространства модулей), нумерующих совокупность голоморфно неэквивалентных модельных поверхностей, погружается в контекст теории инвариантов. Соответствующий метод был приведен в работе [7], он основан на теореме Гильберта о базисе и использует конструкцию рационального фактора [8]. В работе [7] были разобраны простейшие примеры нетривиальных пространств модулей, а также было предложено применение этой конструкции к построению характеристических CR-классов.

В настоящей работе рассмотрены более сложные примеры пространств модулей (все они относятся к многообразиям с одномерной комплексной касательной) и получены конечные системы образующих поля рациональных инвариантов действия линейной группы на пространстве параметров для многообразий типа $(1, K)$ при $K = 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13$. Показано, что пространство модулей для произвольного многообразия CR-размерности один имеет структуру факторпространства вещественного многообразия Грассмана по некоторому действию группы $U(1)$. Доказана теорема о том, что пространство модулей для многообразий CR-размерности один и избыточной коразмерности один (см. § 2) является либо вещественным проективным пространством, либо вещественной сферой.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 изложены сведения, необходимые для понимания формулировок и доказательств утверждений. В § 3–5 рассмотрены пространства модулей модельных поверхностей типов $(1, K)$ при $K = 4, 7, 13$. В этих случаях избыточная коразмерность равна единице. В § 6 рассмотрен случай $(1, 8)$, в котором избыточная коразмерность равна двум. В § 7 рассмотрен случай $(1, 9)$, в котором избыточная коразмерность равна трем. В § 8 демонстрируется двойственность для пространств модулей и на основе лемм, доказанных в этом параграфе, получено описание для случаев $(1, 10)$ и $(1, 11)$. В § 9 доказано, что нахождение пространства модулей для многообразий CR-размерности один сводится к нахождению факторпространства вещественного многообразия Грассмана по некоторому действию группы $U(1)$. В § 10 доказано, что пространство модулей для многообразий CR-размерности один и избыточной коразмерности один является либо вещественным проективным пространством, либо вещественной сферой.

Автор приносит благодарность за помощь в работе и подготовке статьи В. К. Белошапке, Е. М. Чирке, П. И. Кацыле и И. Г. Коссовскому.

§ 2. Необходимые понятия и сведения

Введем необходимые понятия. Гладкое подмногообразие M пространства $\mathbb{C}^N$ называется *порождающим в точке* $\xi \in M$, если линейная оболочка объединения пространств $T_\xi M$ и $i \cdot T_\xi M$ совпадает с объемлющим пространством $\mathbb{C}^N$.

Если гладкое многообразие M в $\mathbb{C}^N$ является порождающим в точке $\xi \in M$, то оно будет порождающим в некоторой окрестности этой точки. Пусть M – гладкое порождающее подмногообразие комплексного пространства в точке ξ , n – комплексная размерность комплексной касательной, K – вещественная коразмерность; тогда $n + K = N$ – размерность объемлющего комплексного пространства. Пара (n, K) называется *типом* подмногообразия M . Многообразие M будем называть *вполне невырожденным*, если распределение комплексных касательных $T^{\mathbb{C}}M$ вполне не вырождено, т. е. для цепочки распределений (алгебры Леви–Танаки)

$$T^{\mathbb{C}}M = D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_{\ell} = TM,$$

где $D_{j+1} = [D_j, D_1] + D_j$, увеличение размерности пространства $(D_j)_{\xi}$ является максимально возможным. При этом ℓ называется *длиной* алгебры Леви–Танаки. Тип (n, K) для вполне невырожденного многообразия однозначно определяет длину ℓ .

Пусть M_{ξ} – росток вполне невырожденного вещественного порождающего подмногообразия M в точке ξ . Каждому ростку M_{ξ} ставится в соответствие его полиномиальная модель Q_{ξ} (см. [6]). Модельная поверхность произвольного типа (n, K) строится в результате рекуррентного процесса. На первом шаге переменной $z \in \mathbb{C}^n$ присваивается вес 1. Далее идет процесс вычисления некоторой последовательности данных. Приведем список данных с номером j : прямое разложение пространства вещественных многочленов веса j в сумму пространства плюригармонических форм $\mathcal{H}_j$ и его дополнения $\mathcal{CH}_j$ – пространства нормализованных многочленов веса j ; k_j – размерность пространства $\mathcal{CH}_j$; пространство $\mathbb{C}^{k_j}$ с координатами $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$. Веса переменных задаются естественным образом: $[z] = 1$, $[\mathbf{w}_j] = j$. Процесс заканчивается на ℓ -м шаге, где ℓ – длина алгебры Леви–Танаки. Отметим, что в данном построении подразумевается, что $\ell \geq 3$. Условием окончания процесса является попадание коразмерности K в следующий диапазон:

$$k_2 + \dots + k_{\ell-1} < K \leq k_2 + \dots + k_{\ell}.$$

При этом *избыточная коразмерность* $k = K - (k_2 + \dots + k_{\ell-1})$ может изменяться в пределах от 1 до k_{ℓ} . В результате модельная поверхность типа (n, K) – это вещественно-алгебраическая поверхность $Q_{\xi} = Q(M_{\xi})$ в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{k_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{k_{\ell-1}} \oplus \mathbb{C}^k$ с координатами $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^{k_j}$, $\mathbf{w}_j = (w_{k_2+\dots+k_{j-1}+1}, \dots, w_{k_2+\dots+k_j})^T$, $j = 2, \dots, \ell - 1$, $\mathbf{w}_{\ell} = \mathbf{u}_{\ell} + i\mathbf{v}_{\ell} \in \mathbb{C}^k$, $\mathbf{w}_{\ell} = (w_{K-k+1}, \dots, w_K)^T$, $z \in \mathbb{C}^n$, заданная соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \Phi_2(z, \bar{z}), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{v}_j &= \Phi_j(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{j-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{v}_{\ell-1} &= \Phi_{\ell-1}(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{\ell-2}), \\ \mathbf{v}_{\ell} &= \Phi_{\ell}(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{\ell-1}), \end{aligned}$$

где координаты векторной формы Φ_j веса j (при $j = 2, \dots, \ell - 1$) – это произвольный вещественный базис пространства $\mathcal{CH}_j$, а координаты векторной формы Φ_ℓ – линейно независимые элементы $\mathcal{CH}_\ell$.

Любой вполне невырожденный росток обратимой полиномиальной заменой может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} v_2 &= \Phi_2(z, \bar{z}) + O(3), \\ &\dots\dots\dots \\ v_j &= \Phi_j(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{j-1}) + O(j+1), \\ &\dots\dots\dots \\ v_{\ell-1} &= \Phi_{\ell-1}(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{\ell-2}) + O(\ell), \\ v_\ell &= \Phi_\ell(z, \bar{z}, u_2, \dots, u_{\ell-1}) + O(\ell+1), \end{aligned}$$

где $O(j)$ – сумма мономов веса j и выше.

Отметим, что в работе рассматриваются модельные поверхности типа $(1, K)$, для которых $n = 1$, следовательно, переменная $z \in \mathbb{C}$ одномерна.

Координаты формы $\Phi_\ell = (\Phi_\ell^1, \dots, \Phi_\ell^k)^T$ для удобства можно записать в виде матрицы. Мы будем использовать две различные матричные формы записи координат Φ_ℓ .

Первая форма записи. Рассмотрим базис $\{e_1, \dots, e_{k_\ell}\}$ специального вида в пространстве $\mathcal{CH}_\ell$, состоящий из k_ℓ вещественных форм веса ℓ , имеющих вид

$$e_{2t-1} = 2 \operatorname{Re}(z^p \bar{z}^q u_2^{s_2} \dots u_{\ell-1}^{s_{\ell-1}}), \quad e_{2t} = 2 \operatorname{Im}(z^p \bar{z}^q u_2^{s_2} \dots u_{\ell-1}^{s_{\ell-1}}), \quad p > q,$$

где $t = \overline{1, m_\ell}$, $0 \leq 2m_\ell \leq k_\ell$ (такие формы будем называть *парными*), и вид

$$e_r = z^p \bar{z}^p u_2^{s_2} \dots u_{\ell-1}^{s_{\ell-1}}, \quad r = \overline{2m_\ell + 1, k_\ell}$$

(такие формы будем называть *непарными*).

Процесс построения такого базиса изложен в работе [6]. Отметим, что число m_ℓ определено однозначно и равно числу парных форм в вышеупомянутом базисе пространства $\mathcal{CH}_\ell$. Каждая форма Φ_ℓ^i , $i = \overline{1, k}$, – это форма веса ℓ , которая разлагается в сумму k_ℓ базисных форм $\{e_1, \dots, e_{k_\ell}\}$ с вещественными коэффициентами a_{ij} , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k_\ell}$. Запишем вещественные коэффициенты a_{ij} , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, k_\ell}$, в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk_\ell} \end{pmatrix}.$$

Это и будет первая форма записи координат формы Φ_ℓ в виде матрицы. Отметим, что A – вещественная матрица размера $k \times k_\ell$. Координаты векторной формы Φ_ℓ – линейно независимые элементы $\mathcal{CH}_\ell$, следовательно, $\operatorname{rk}(A) = k$. Пространство матриц такого вида будем обозначать через A_{k, k_ℓ} .

Приведем примеры.

При $\ell = 4$ количество базисных форм k_4 равно 3, а сами формы имеют вид

$$e_1 = 2 \operatorname{Re}(z^3 \bar{z}), \quad e_2 = 2 \operatorname{Im}(z^3 \bar{z}), \quad e_3 = z^2 \bar{z}^2.$$

Следовательно, форма Φ_4 имеет вид

$$\Phi_4 = \begin{pmatrix} \Phi_4^1 \\ \dots \\ \Phi_4^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} \operatorname{Re}(z^3 \bar{z}) + 2a_{12} \operatorname{Im}(z^3 \bar{z}) + a_{13} z^2 \bar{z}^2 \\ \dots \\ 2a_{k1} \operatorname{Re}(z^3 \bar{z}) + 2a_{k2} \operatorname{Im}(z^3 \bar{z}) + a_{k3} z^2 \bar{z}^2 \end{pmatrix},$$

где $k \in \{1, 2, 3\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, 3}$, – коэффициенты при базисных формах в разложении формы Φ_4^i , $i = \overline{1, k}$. Тогда матрица координат формы Φ_4 в первой форме записи будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

При $\ell = 5$ количество базисных форм есть $k_5 = 6$, а сами формы имеют вид

$$\begin{aligned} e_1 &= 2 \operatorname{Re}(z^4 \bar{z}), & e_2 &= 2 \operatorname{Im}(z^4 \bar{z}), & e_3 &= 2 \operatorname{Re}(z^3 \bar{z}^2), \\ e_4 &= 2 \operatorname{Im}(z^3 \bar{z}^2), & e_5 &= 2 \operatorname{Re}(u_2 z^2 \bar{z}), & e_6 &= 2 \operatorname{Im}(u_2 z^2 \bar{z}). \end{aligned}$$

Следовательно, форма Φ_5 имеет вид

$$\Phi_5 = \begin{pmatrix} \Phi_5^1 \\ \dots \\ \Phi_5^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} \operatorname{Re}(z^4 \bar{z}) + 2a_{12} \operatorname{Im}(z^4 \bar{z}) + 2a_{13} \operatorname{Re}(z^3 \bar{z}^2) \\ \dots \\ 2a_{k1} \operatorname{Re}(z^4 \bar{z}) + 2a_{k2} \operatorname{Im}(z^4 \bar{z}) + 2a_{k3} \operatorname{Re}(z^3 \bar{z}^2) \\ + 2a_{14} \operatorname{Im}(z^3 \bar{z}^2) + 2a_{15} \operatorname{Re}(u_2 z^2 \bar{z}) + 2a_{16} \operatorname{Im}(u_2 z^2 \bar{z}) \\ \dots \\ + 2a_{k4} \operatorname{Im}(z^3 \bar{z}^2) + 2a_{k5} \operatorname{Re}(u_2 z^2 \bar{z}) + 2a_{k6} \operatorname{Im}(u_2 z^2 \bar{z}) \end{pmatrix},$$

где $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, 6}$, – коэффициенты при базисных формах в разложении формы Φ_5^i , $i = \overline{1, k}$. Тогда матрица координат формы Φ_5 в первой форме записи будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} & a_{k5} & a_{k6} \end{pmatrix}.$$

Вторая форма записи. Перейдем к новому базису:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{2t-1} &= \frac{e_{2t-1} + ie_{2t}}{2}, & \hat{e}_{2t} &= \frac{e_{2t-1} - ie_{2t}}{2}, & \hat{e}_r &= e_r, \\ t &= \overline{1, m_\ell}, & 0 &\leq 2m_\ell \leq k_\ell, & r &= \overline{2m_\ell + 1, k_\ell}. \end{aligned}$$

Запишем координаты формы Φ_ℓ в базисе $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{k_\ell}\}$ и получим матрицу $\hat{A}$ вида

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \bar{\alpha}_{11} & \dots & \alpha_{1m_\ell} & \bar{\alpha}_{1m_\ell} & a_{1,2m_\ell+1} & \dots & a_{1,k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \bar{\alpha}_{k1} & \dots & \alpha_{km_\ell} & \bar{\alpha}_{km_\ell} & a_{k,2m_\ell+1} & \dots & a_{k,k_\ell} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{jt} = a_{j,2t-1} - ia_{j,2t}$, $j = \overline{1, k}$, $t = \overline{1, m_\ell}$. Это и будет вторая форма записи координат формы Φ_ℓ в виде матрицы. Полученная матрица $\hat{A}$ является комплексной матрицей специального вида (в ней первые $2m_\ell$ столбцов разбиваются на пары комплексно-сопряженных, а последние $k_\ell - 2m_\ell$ столбцов вещественны). Также отметим, что $\text{rk}(\hat{A}) = \text{rk}(A) = k$ (так как эти матрицы эквивалентны с точностью до замены координат). Пространство матриц такого вида будем обозначать через $\hat{A}_{k,k_\ell}$.

Приведем пример.

При $\ell = 4$ в первой форме записи мы получили матрицу $A \in A_{k,3}$ координат формы Φ_4 , имеющую вид (1), где $k \in \{1, 2, 3\}$. Тогда во второй форме записи мы получим матрицу $\hat{A} \in \hat{A}_{k,3}$ координат формы Φ_4 , имеющую вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \bar{\alpha}_{11} & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \bar{\alpha}_{k1} & a_{k3} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{j1} = a_{j1} - ia_{j2}$, $j = \overline{1, k}$.

Если две модельные поверхности с наборами правых частей $\Phi = (\Phi_2, \dots, \Phi_\ell)$ и $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_2, \dots, \tilde{\Phi}_\ell)$ голоморфно эквивалентны, то они эквивалентны линейно (как упоминалось во введении), причем такое линейное преобразование имеет вид

$$z \mapsto Cz, \quad w_2 \mapsto \rho_2 w_2, \quad \dots, \quad w_\ell \mapsto \rho_\ell w_\ell,$$

где $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $\rho_2 \in \text{GL}(k_2, \mathbb{R})$, $\dots$, $\rho_{\ell-1} \in \text{GL}(k_{\ell-1}, \mathbb{R})$, $\rho_\ell \in \text{GL}(k, \mathbb{R})$ и для всех $j = 2, \dots, \ell$ выполнены соотношения

$$\Phi_j(Cz, \overline{Cz}, \rho_2 w_2, \dots, \rho_{j-1} w_{j-1}) = \rho_j \tilde{\Phi}_j(z, \bar{z}, w_2, \dots, w_{j-1}). \quad (2)$$

Обозначим через $\mathcal{CH} = \mathcal{CH}(n, K)$ пространство вида $\mathcal{CH}_2^{k_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{CH}_{\ell-1}^{k_{\ell-1}} \oplus \mathcal{CH}_\ell^k$, где под $\mathcal{CH}_i^j$ понимаем прямую сумму j экземпляров линейного пространства $\mathcal{CH}_i$. Тогда правые части уравнений всевозможных модельных поверхностей типа (n, K) – это элементы $\mathcal{CH}$. Точнее, если принять во внимание условие невырожденности, это элементы $\mathcal{CH}^\circ$ – открытой плотной части $\mathcal{CH}$, так как условие невырожденности можно понимать как линейную независимость правых частей уравнений, задающих модельную поверхность. Модельные поверхности голоморфно эквивалентны в том и только в том случае, если правые

части, т. е. элементы пространства $\mathcal{CH}^0$, принадлежат одной орбите следующего действия группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(k_2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(k_{\ell-1}, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} &\Phi_2(z, \bar{z}) \mapsto \rho_2^{-1}\Phi_2(Cz, \overline{Cz}), \\ &..... \\ &\Phi_j(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{j-1}) \mapsto \rho_j^{-1}\Phi_j(Cz, \overline{Cz}, \rho_2\mathbf{u}_2, \dots, \rho_{j-1}\mathbf{u}_{j-1}), \quad (3) \\ &..... \\ &\Phi_\ell(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{\ell-1}) \mapsto \rho^{-1}\Phi_\ell(Cz, \overline{Cz}, \rho_2\mathbf{u}_2, \dots, \rho_{\ell-1}\mathbf{u}_{\ell-1}), \end{aligned}$$

но действие $\mathrm{GL}(k_j, \mathbb{R})$ при $j = 2, \dots, \ell - 1$ на базисах пространства $\mathcal{CH}_j$ является свободным и транзитивным. Поэтому если отметить в каждом из этих пространств некоторый базис и считать, что отмеченный базис остается неподвижным, то при фиксированном C соотношения (2) однозначно разрешимы относительно $\rho_2, \dots, \rho_{\ell-1}$. Если обозначить через $\tau_j(C)$ единственное решение соотношения $\Phi_j(Cz, \overline{Cz}, \rho_2 \mathbf{u}_2, \dots, \rho_{j-1} \mathbf{u}_{j-1}) = \rho_j \Phi_j(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{j-1})$ относительно ρ_j , то мы видим, что $C \mapsto \tau_j(C)$ – некоторое представление $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ в $\mathrm{GL}(k_j, \mathbb{R})$. Теперь становится ясно, что орбиты действия (3) находятся в естественном соответствии с орбитами действия $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ вида

$$\Phi_\ell(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{\ell-1}) \mapsto \rho^{-1} \Phi_\ell(Cz, \overline{Cz}, \tau_2(C)\mathbf{u}_2, \dots, \tau_{\ell-1}(C)\mathbf{u}_{\ell-1}) \quad (4)$$

на пространстве $(\mathcal{CH}_\ell^k)^\circ$, т. е. пространстве наборов из k линейно независимых элементов $\mathcal{CH}_\ell$. В дальнейшем будем говорить, что действие вида (3) группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(k_2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(k_{\ell-1}, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ может быть редуцировано к действию вида (4) группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Отметим, что в ядре действия (4) содержатся вещественные скалярные растяжения. Поэтому можно от группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ перейти к подгруппе матриц с определителем, равным по модулю единице. В дальнейшем мы будем изучать случай $n = 1$, поэтому отметим, что в этом случае $\{C \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) : |\det C| = 1\} = U(1)$, т. е. при $n = 1$ действие группы $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(k_2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(k_{\ell-1}, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ может быть редуцировано к действию группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)$.

В работе [9] были изучены автоморфизмы модельных поверхностей Q_ξ типов $(1, 8), \dots, (1, 12)$. Соответствие $M_\xi \rightarrow Q_\xi$ голоморфно инвариантно, причем голоморфной эквивалентности ростков соответствует линейная эквивалентность их модельных поверхностей. Таким образом, задача голоморфной классификации модельных поверхностей сводится к их линейной классификации, и эта задача погружается в контекст линейных алгебраических групп и теории инвариантов. В работе [7] вводится пространство модулей $\mathcal{M}(n, K)$ совокупности полиномиальных моделей типа (n, K) , т. е. пространство, параметризующее голоморфно неэквивалентные полиномиальные модели. Основой построения пространства модулей $\mathcal{M}(n, K)$ является построение конечного набора образующих поля рациональных инвариантов. В настоящей работе это построение осуществляется для случая, когда размерность комплексной касательной равна единице ($n = 1$), а коразмерность не выше тринадцати. Нетрудно убедиться

в том, что модельные поверхности типов $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ и $(1, 6)$ единственны с точностью до линейной эквивалентности. Модельные поверхности типов $(1, 4)$, $(1, 5)$ и $(1, 7)$ рассмотрены в работе [7], а в нашей работе рассмотрены модельные поверхности типа $(1, K)$ при $K = 8, 9, 10, 11, 12, 13$. В конце работы приводится общее утверждение о строении пространства модулей $\mathcal{M}(1, K)$ для произвольного K .

Как отмечалось выше, действие линейной группы на пространстве модельных поверхностей типа $(1, K)$ допускает естественную редукцию к действию группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)$. Если рассмотреть первую или вторую форму записи, то получим действие группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве матриц A_{k, k_ℓ} или $\hat{A}_{k, k_\ell}$ соответственно. Во второй форме записи действие элементов $G \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $e^{i\varphi} \in U(1)$ на матрицу $\hat{A} \in \hat{A}_{k, k_\ell}$ задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} G \circ \hat{A} &= \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{k1} & \dots & g_{kk} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \bar{\alpha}_{11} & \dots & \alpha_{1m_\ell} & \bar{\alpha}_{1m_\ell} & a_{1,2m_\ell+1} & \dots & a_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \bar{\alpha}_{k1} & \dots & \alpha_{km_\ell} & \bar{\alpha}_{km_\ell} & a_{k,2m_\ell+1} & \dots & a_{kk_\ell} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{k1} & \dots & g_{kk} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \check{\alpha}_{11} & \dots & \check{\alpha}_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ \check{\alpha}_{k1} & \dots & \check{\alpha}_{kk_\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k g_{1j} \check{\alpha}_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^k g_{1j} \check{\alpha}_{jk_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^k g_{kj} \check{\alpha}_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^k g_{kj} \check{\alpha}_{jk_\ell} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\check{\alpha}_{i,2j-1} = \alpha_{ij}$, $\check{\alpha}_{i,2j} = \bar{\alpha}_{ij}$ при $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m_\ell}$ и $\check{\alpha}_{ij} = a_{ij}$ при $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{2m_\ell + 1, k_\ell}$;

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \circ \hat{A} &= e^{i\varphi} \circ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \bar{\alpha}_{11} & \dots & \alpha_{1m_\ell} & \bar{\alpha}_{1m_\ell} & a_{1,2m_\ell+1} & \dots & a_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \bar{\alpha}_{k1} & \dots & \alpha_{km_\ell} & \bar{\alpha}_{km_\ell} & a_{k,2m_\ell+1} & \dots & a_{kk_\ell} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(p_1-q_1)\varphi} \alpha_{11} & e^{-i(p_1-q_1)\varphi} \bar{\alpha}_{11} & \dots & e^{i(p_{m_\ell}-q_{m_\ell})\varphi} \alpha_{1m_\ell} & e^{-i(p_{m_\ell}-q_{m_\ell})\varphi} \bar{\alpha}_{1m_\ell} & a_{1,2m_\ell+1} & \dots & a_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i(p_1-q_1)\varphi} \alpha_{k1} & e^{-i(p_1-q_1)\varphi} \bar{\alpha}_{k1} & \dots & e^{i(p_{m_\ell}-q_{m_\ell})\varphi} \alpha_{km_\ell} & e^{-i(p_{m_\ell}-q_{m_\ell})\varphi} \bar{\alpha}_{km_\ell} & a_{k,2m_\ell+1} & \dots & a_{kk_\ell} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где числа p_j, q_j , $j = \overline{1, m_\ell}$, определяются из того условия, что α_{ij} , $i = \overline{1, k}$, — коэффициенты при базисной форме вида $z^{p_j} \bar{z}^{q_j} u_2^{s_2} \dots u_{\ell-1}^{s_{\ell-1}}$ в разложении формы Φ_ℓ^j по базису $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{k_\ell}\}$.

Действия групп $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $U(1)$ коммутируют. Действительно, нетрудно показать, что

$$e^{i\varphi} \circ G \circ \hat{A} = e^{i\varphi} \circ (g_{rs}) \circ (\check{\alpha}_{ij}) = e^{i\varphi} \circ \left(\sum_{n=1}^k g_{in} \check{\alpha}_{nj} \right) = \left(e^{i\sigma_j \varphi} \sum_{n=1}^k g_{in} \check{\alpha}_{nj} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=1}^k g_{in} (e^{i\sigma_j \varphi} \check{a}_{nj}) \right) = (g_{pq}) \circ (e^{i\sigma_j \varphi} \check{a}_{ij}) \\
&= (g_{pq}) \circ e^{i\varphi} \circ (\check{a}_{ij}) = G \circ e^{i\varphi} \circ \hat{A},
\end{aligned}$$

где $\sigma_{2j-1} = p_j - q_j$, $\sigma_{2j} = -(p_j - q_j)$ при $j = \overline{1, m_\ell}$ и $\sigma_j = 0$ при $j = \overline{2m_\ell + 1, k_\ell}$.

Таким образом, можно корректно задать действие группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)$ следующим образом: $(G, e^{i\varphi}) \circ \hat{A} = G \circ e^{i\varphi} \circ \hat{A}$, где $(G, e^{i\varphi}) \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)$. Тогда можно записать, что $\mathcal{M}(1, K) = \mathcal{A}/(\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1))$, где $\mathcal{A} = \hat{A}_{k, k_\ell}$.

Для первой формы записи действие элемента $G \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ на матрицу $A \in A_{k, k_\ell}$ имеет тот же вид, что и для второй формы записи, а действие элемента $e^{i\varphi} \in U(1)$ имеет другой вид, который мы не будем использовать, а потому не будем выписывать явно.

Как было отмечено во введении, в данной работе для построения факторпространства $\mathcal{M}(1, K) = \mathcal{A}/(\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1))$ будет использоваться конструкция рационального фактора, которая заключается в задании конечного набора образующих поля рациональных инвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве параметров $\mathcal{A}$ (см. [8]).

§ 3. Случай $K = 4$

В случае $K = 4$ модельная поверхность задается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
v_2 &= z\bar{z}, \\
v_3 &= 2 \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}), \\
v_4 &= 2 \operatorname{Im}(z^2 \bar{z}), \\
v_5 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha z^3 \bar{z}) + bz^2 \bar{z}^2, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Отметим, что первые три уравнения свободны от параметров, а потому не существенны для построения пространства модулей $\mathcal{M}(1, 4)$. Параметры присутствуют только в уравнениях $\mathbf{v}_\ell = \Phi_\ell(z, \bar{z}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{\ell-1})$, отвечающих избыточной коразмерности. Поэтому в дальнейшем мы будем выписывать только эти уравнения. В данном случае мы имеем одно уравнение, содержащее параметры:

$$v_5 = 2 \operatorname{Re}(\alpha z^3 \bar{z}) + bz^2 \bar{z}^2, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что здесь мы используем векторные переменные $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ и одномерные $w_j = u_j + iv_j$, причем они связаны следующим образом (для рассматриваемого в работе случая $n = 1$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_2 &= w_2, \\
\mathbf{w}_3 &= (w_3, w_4)^T, \\
&\dots\dots\dots \\
\mathbf{w}_{\ell-1} &= (w_{k_2+\dots+k_{\ell-2}+2}, \dots, w_{k_2+\dots+k_{\ell-1}+1})^T, \\
\mathbf{w}_\ell &= (w_{k_2+\dots+k_{\ell-1}+1}, \dots, w_{K+1})^T.
\end{aligned}$$

Пусть $X(1, 4) = (\alpha, b)$ – пространство параметров. Действие группы голоморфных автоморфизмов на пространстве модельных поверхностей типа $(1, 4)$ может быть редуцировано к такому действию группы $G = \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве $X(1, 4)$ (этот факт подробно обсуждался в § 2), которое имеет вид

$$(p, e^{i\varphi}) \circ (\alpha, b) = (p^4 e^{2i\varphi} \alpha, p^4 b), \quad (p, e^{i\varphi}) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times U(1).$$

Очевидно, что следующая функция является инвариантом действия группы G на пространстве $X(1, 4)$:

$$f_1 = \frac{\alpha \bar{\alpha}}{b^2} \in \mathbb{R}.$$

Комплексифицируем данное действие:

$$\begin{aligned} X^{\mathbb{C}}(1, 4) &= (\alpha, \tilde{\alpha}, \beta), \quad \alpha, \tilde{\alpha}, \beta \in \mathbb{C}, \\ (p, c) \circ (\alpha, \tilde{\alpha}, \beta) &= (p^4 c \alpha, p^4 c^{-1} \tilde{\alpha}, p^4 \beta), \quad (p, c) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \\ f_1^{\mathbb{C}} &= \frac{\alpha \tilde{\alpha}}{\beta^2} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что функция $f_1^{\mathbb{C}}$ разделяет орбиты общего положения на комплексифицированном пространстве. Если конечное подмножество поля рациональных инвариантов разделяет орбиты общего положения, то оно порождает поле рациональных инвариантов (см. [8]). Следовательно, функция $f_1^{\mathbb{C}}$ порождает поле рациональных инвариантов на комплексифицированном пространстве, а значит, функция f_1 порождает поле рациональных инвариантов на исходном пространстве. Поле рациональных инвариантов действия группы G на пространстве $X(1, 4)$ будем обозначать через $\mathbb{R}(X(1, 4))^G$.

Тем самым доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Инвариант*

$$f_1 = \frac{\alpha \bar{\alpha}}{b^2}$$

порождает поле рациональных инвариантов $\mathbb{R}(X(1, 4))^G$, т. е. поле $\mathbb{R}(X(1, 4))^G$ состоит из рациональных функций от f_1 .

Отметим, что в данном и в последующих параграфах мы будем считать задачу построения пространства модулей решенной, если найден конечный набор инвариантов, порождающий поле рациональных инвариантов действия алгебраической группы G на пространстве параметров $\mathcal{A}$. При этом топологическое строение пространства модулей будет рассмотрено лишь в специальных случаях в § 10.

§ 4. Случай $K = 7$

В случае $K = 7$ модельная поверхность задается системой уравнений, в которой содержит параметры лишь одно уравнение

$$v_8 = 2 \operatorname{Re}(\alpha z^4 \bar{z} + \beta z^3 \bar{z}^2 + \gamma u_2 z^2 \bar{z}), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Пусть $X(1, 7) = (\alpha, \beta, \gamma)$ – пространство параметров. Действие группы голоморфных автоморфизмов на пространстве модельных поверхностей типа $(1, 7)$ может быть редуцировано к такому действию группы $G = \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве $X(1, 7)$, которое имеет вид

$$(p, e^{i\varphi}) \circ (\alpha, \beta, \gamma) = (p^5 e^{3i\varphi} \alpha, p^5 e^{i\varphi} \beta, p^5 e^{i\varphi} \gamma), \quad (p, e^{i\varphi}) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times U(1).$$

Очевидно, что следующие функции являются инвариантами действия группы G на пространстве $X(1, 7)$:

$$f_1 = \frac{\beta}{\gamma}, \quad f_2 = \frac{\alpha \bar{\beta}}{\gamma^2} \in \mathbb{C}.$$

Комплексифицируем данное действие:

$$\begin{aligned} X^{\mathbb{C}}(1, 7) &= (\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, \gamma, \tilde{\gamma}), \quad \alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, \gamma, \tilde{\gamma} \in \mathbb{C}, \\ (p, c) \circ (\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, \gamma, \tilde{\gamma}) &= (p^5 c^3 \alpha, p^5 c^{-3} \tilde{\alpha}, p^5 c \beta, p^5 c^{-1} \tilde{\beta}, p^5 c \gamma, p^5 c^{-1} \tilde{\gamma}), \\ (p, c) &\in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \\ f_1^{\mathbb{C}} &= \frac{\beta}{\gamma}, \quad \tilde{f}_1^{\mathbb{C}} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}}, \quad f_2^{\mathbb{C}} = \frac{\alpha \tilde{\beta}}{\gamma^2}, \quad \tilde{f}_2^{\mathbb{C}} = \frac{\tilde{\alpha} \beta}{\tilde{\gamma}^2} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Простыми вычислениями можно показать, что набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}\}$ разделяет орбиты общего положения на комплектифицированном пространстве, следовательно, этот набор порождает поле рациональных инвариантов на комплектифицированном пространстве. Таким образом, набор функций $\{f_1, f_2\}$ порождает поле рациональных инвариантов на исходном пространстве.

Тем самым доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Набор инвариантов*

$$f_1 = \frac{\beta}{\gamma}, \quad f_2 = \frac{\alpha \bar{\beta}}{\gamma^2}$$

порождает поле рациональных инвариантов $\mathbb{R}(X(1, 7))^G$, т. е. поле $\mathbb{R}(X(1, 7))^G$ состоит из рациональных функций от f_1 и f_2 .

§ 5. Случай $K = 13$

В случае $K = 13$ модельная поверхность задается системой уравнений, в которой содержит параметры лишь одно уравнение

$$v_{14} = 2 \operatorname{Re}(\alpha z^5 \bar{z} + \beta z^4 \bar{z}^2 + \gamma u_2 z^3 \bar{z}) + m z^3 \bar{z}^3 + n u_2 z^2 \bar{z}^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

Пусть $X(1, 13) = (\alpha, \beta, \gamma, m, n)$ – пространство параметров. Действие группы голоморфных автоморфизмов на пространстве модельных поверхностей типа $(1, 13)$ может быть редуцировано к такому действию группы $G = \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве $X(1, 13)$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} (p, e^{i\varphi}) \circ (\alpha, \beta, \gamma, m, n) &= (p^6 e^{4i\varphi} \alpha, p^6 e^{2i\varphi} \beta, p^6 e^{2i\varphi} \gamma, p^6 m, p^6 n), \\ (p, e^{i\varphi}) &\in \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) \times U(1). \end{aligned}$$

Очевидно, что следующие функции являются инвариантами действия группы G на пространстве $X(1, 13)$:

$$f_1 = \frac{\beta}{\gamma}, \quad f_2 = \frac{\alpha m}{\gamma^2} \in \mathbb{C}, \quad f_3 = \frac{m}{n}, \quad f_4 = \frac{n^2}{\gamma \bar{\gamma}} \in \mathbb{R}.$$

Комплексифицируем данное действие:

$$\begin{aligned} X^{\mathbb{C}}(1, 13) &= (\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, \gamma, \tilde{\gamma}, \mu, \nu), \quad \alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, \gamma, \tilde{\gamma}, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \\ (p, c) \circ (\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, \gamma, \tilde{\gamma}, \mu, \nu) \\ &= (p^6 c^4 \alpha, p^6 c^{-4} \tilde{\alpha}, p^6 c^2 \beta, p^6 c^{-2} \tilde{\beta}, p^6 c^2 \gamma, p^6 c^{-2} \tilde{\gamma}, p^6 \mu, p^6 \nu), \\ (p, c) &\in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \\ f_1^{\mathbb{C}} &= \frac{\beta}{\gamma}, \quad \tilde{f}_1^{\mathbb{C}} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\gamma}}, \quad f_2^{\mathbb{C}} = \frac{\alpha \mu}{\gamma^2}, \quad \tilde{f}_2^{\mathbb{C}} = \frac{\tilde{\alpha} \mu}{\tilde{\gamma}^2}, \quad f_3^{\mathbb{C}} = \frac{\mu}{\nu}, \quad f_4^{\mathbb{C}} = \frac{\nu^2}{\gamma \tilde{\gamma}} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Простыми вычислениями можно показать, что набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}, f_3^{\mathbb{C}}, f_4^{\mathbb{C}}\}$ разделяет орбиты общего положения на комплектифицированном пространстве, следовательно, этот набор порождает поле рациональных инвариантов на комплектифицированном пространстве. Таким образом, набор функций $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ порождает поле рациональных инвариантов на исходном пространстве.

Тем самым доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Набор инвариантов*

$$f_1 = \frac{\beta}{\gamma}, \quad f_2 = \frac{\alpha m}{\gamma^2}, \quad f_3 = \frac{m}{n}, \quad f_4 = \frac{n^2}{\gamma \bar{\gamma}}$$

порождает поле рациональных инвариантов $\mathbb{R}(X(1, 13))^G$.

§ 6. Случай $K = 8$

В случае $K = 8$ модельная поверхность задается системой уравнений, в которой содержат параметры следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} v_8 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha_{11} z^4 \bar{z} + \alpha_{12} z^3 \bar{z}^2 + \alpha_{13} u_2 z^2 \bar{z}), \\ v_9 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha_{21} z^4 \bar{z} + \alpha_{22} z^3 \bar{z}^2 + \alpha_{23} u_2 z^2 \bar{z}), \\ \alpha_{ij} &\in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Наличие здесь двух уравнений, содержащих параметры, отражает тот факт, что в данном случае избыточная коразмерность k равна двум. В § 3–5 были рассмотрены случаи, в которых избыточная коразмерность k равна единице, а потому в этих случаях мы имели лишь одно уравнение, содержащее параметры.

Рассмотрим вторую форму записи формы Φ_5 в виде матрицы $\hat{A} \in \hat{A}_{2,6}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \bar{\alpha}_{11} & \alpha_{12} & \bar{\alpha}_{12} & \alpha_{13} & \bar{\alpha}_{13} \\ \alpha_{21} & \bar{\alpha}_{21} & \alpha_{22} & \bar{\alpha}_{22} & \alpha_{23} & \bar{\alpha}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{\alpha}_{11} & \dots & \check{\alpha}_{16} \\ \check{\alpha}_{21} & \dots & \check{\alpha}_{26} \end{pmatrix}.$$

Действие группы голоморфных автоморфизмов на пространстве модельных поверхностей типа $(1, 8)$ может быть редуцировано к такому действию группы $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве $\hat{A}_{2,6}$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, e^{i\varphi} \right) \circ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \bar{\alpha}_{11} & \alpha_{12} & \bar{\alpha}_{12} & \alpha_{13} & \bar{\alpha}_{13} \\ \alpha_{21} & \bar{\alpha}_{21} & \alpha_{22} & \bar{\alpha}_{22} & \alpha_{23} & \bar{\alpha}_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3i\varphi}(g_{11}\alpha_{11} + g_{12}\alpha_{21}) & e^{-3i\varphi}(g_{11}\bar{\alpha}_{11} + g_{12}\bar{\alpha}_{21}) & e^{i\varphi}(g_{11}\alpha_{12} + g_{12}\alpha_{22}) \\ e^{3i\varphi}(g_{21}\alpha_{11} + g_{22}\alpha_{21}) & e^{-3i\varphi}(g_{21}\bar{\alpha}_{11} + g_{22}\bar{\alpha}_{21}) & e^{i\varphi}(g_{21}\alpha_{12} + g_{22}\alpha_{22}) \\ e^{-i\varphi}(g_{11}\bar{\alpha}_{12} + g_{12}\bar{\alpha}_{22}) & e^{i\varphi}(g_{11}\alpha_{13} + g_{12}\alpha_{23}) & e^{-i\varphi}(g_{11}\bar{\alpha}_{13} + g_{12}\bar{\alpha}_{23}) \\ e^{-i\varphi}(g_{21}\bar{\alpha}_{12} + g_{22}\bar{\alpha}_{22}) & e^{i\varphi}(g_{21}\alpha_{13} + g_{22}\alpha_{23}) & e^{-i\varphi}(g_{21}\bar{\alpha}_{13} + g_{22}\bar{\alpha}_{23}) \end{pmatrix}, \\ & \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, e^{i\varphi} \right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times U(1). \end{aligned}$$

Полуинварианты действия группы G (т.е. функции, у которых множество нулей является инвариантным относительно действия группы G) на пространстве $\hat{A}_{2,6}$ – это миноры матрицы $A \in \hat{A}_{2,6}$ следующего вида [10]:

$$d_{ij} = \det \begin{pmatrix} \check{a}_{1i} & \check{a}_{1j} \\ \check{a}_{2i} & \check{a}_{2j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i < j \leq 6.$$

Набор соотношений (сизигий) между этими полуинвариантами имеет вид [10]

$$d_{ij}d_{kl} + d_{il}d_{jk} - d_{ik}d_{jl} = 0, \quad 1 \leq i < j < k < l \leq 6. \quad (5)$$

Поскольку пространство матриц $\hat{A}_{2,6}$ имеет специальный вид (более подробно об этом см. § 2), возникают дополнительные соотношения между полуинвариантами

$$i \cdot d_{12} \in \mathbb{R}, \quad i \cdot d_{34} \in \mathbb{R}, \quad i \cdot d_{56} \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

$$d_{13} = \bar{d}_{24}, \quad d_{14} = \bar{d}_{23}, \quad d_{15} = \bar{d}_{26}, \quad (7)$$

$$d_{16} = \bar{d}_{25}, \quad d_{35} = \bar{d}_{46}, \quad d_{36} = \bar{d}_{45} \quad (8)$$

и дополнительные условия для сизигий. Часть сизигий разбивается на пары комплексно-сопряженных, а оставшиеся сизигии являются чисто вещественными соотношениями. Выпишем независимый набор сизигий. Он состоит из трех вещественных сизигий

$$\begin{aligned} d_{12}d_{34} + |d_{14}|^2 - |d_{13}|^2 &= 0, & d_{12}d_{56} + |d_{16}|^2 - |d_{15}|^2 &= 0, \\ d_{34}d_{56} + |d_{36}|^2 - |d_{35}|^2 &= 0 \end{aligned}$$

и шести комплексных

$$\begin{aligned} d_{12}d_{35} + d_{15}\bar{d}_{14} - d_{13}\bar{d}_{16} &= 0, & d_{12}d_{36} + d_{16}\bar{d}_{14} - d_{13}\bar{d}_{15} &= 0, \\ d_{13}\bar{d}_{36} + d_{15}d_{34} - d_{14}d_{35} &= 0, & d_{13}\bar{d}_{35} + d_{16}d_{34} - d_{14}d_{36} &= 0, \\ d_{13}d_{56} + d_{16}d_{35} - d_{15}d_{36} &= 0, & d_{14}d_{56} + d_{16}\bar{d}_{36} - d_{15}\bar{d}_{35} &= 0. \end{aligned}$$

Для рассмотрения набора полуинвариантов d_{ij} , $1 \leq i < j \leq 6$, и сизигий между ними удобно использовать их визуальное представление. Нарисуем на плоскости полный граф с шестью вершинами (пересечения ребер в таком графе избежать не удастся, так как он не является планарным, но для нас это не имеет значения). Пронумеруем вершины числами от 1 до 6 (рис. 1). Каждому полуинварианту d_{ij} , $1 \leq i < j \leq 6$, поставим в соответствие ребро графа, соединяющее вершины с номерами i и j .

Рис. 1

Отметим, что в произвольной сизигии, заданной формулой (5), участвуют шесть полуинвариантов d_{ij} , d_{kl} , d_{il} , d_{jk} , d_{ik} , d_{jl} , которым соответствуют ребра ij , kl , il , jk , ik , jl на графе, причем эти ребра образуют полный граф на четырех вершинах i, j, k, l . Таким образом, каждая сизигия связывает набор полуинвариантов, которым на графе соответствует полный подграф из четырех вершин. Из этого следует, что если мы хотим выбрать набор полуинвариантов, между которыми нет соотношений, то этому набору должен соответствовать граф, у которого нет полных подграфов из четырех вершин (например, такой, как на рис. 2).

Рис. 2

Если теперь учесть дополнительные соотношения (6)–(8), получим, что из набора полуинвариантов, которому соответствует граф на рис. 2, нужно удалить часть полуинвариантов. Например, удалим полуинварианты d_{23} , d_{24} , d_{36} , d_{46} , так как

$$d_{23} = \bar{d}_{14}, \quad d_{24} = \bar{d}_{13}, \quad d_{36} = \bar{d}_{45}, \quad d_{46} = \bar{d}_{35}.$$

Полученный набор полуинвариантов будет независимым (ему соответствует граф, изображенный на рис. 3). При этом данный набор полуинвариантов является полным (т.е. произвольный полуинвариант можно рационально выразить через элементы этого набора).

Рис. 3

Из данного набора полуинвариантов можно теперь составлять инварианты действия группы G на пространстве $\hat{A}_{2,6}$.

Очевидно, что следующие функции являются инвариантами действия группы G на пространстве $\hat{A}_{2,6}$:

$$f_1 = \frac{d_{14}}{d_{35}}, \quad f_2 = \frac{d_{45}}{d_{34}}, \quad f_3 = \frac{d_{13}d_{34}}{d_{35}^2} \in \mathbb{C}, \quad f_4 = \frac{d_{35}\bar{d}_{35}}{d_{34}^2} = \frac{d_{35}d_{46}}{d_{34}^2} \in \mathbb{R}.$$

Комплексифицируем данное действие:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{2,6}^{\mathbb{C}} &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \tilde{\alpha}_{11} & \alpha_{12} & \tilde{\alpha}_{12} & \alpha_{13} & \tilde{\alpha}_{13} \\ \alpha_{21} & \tilde{\alpha}_{21} & \alpha_{22} & \tilde{\alpha}_{22} & \alpha_{23} & \tilde{\alpha}_{23} \end{pmatrix}, \\ \alpha_{ij} &\in \mathbb{C}, \quad \tilde{\alpha}_{ij} \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \\ \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, c \right) &\circ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \tilde{\alpha}_{11} & \alpha_{12} & \tilde{\alpha}_{12} & \alpha_{13} & \tilde{\alpha}_{13} \\ \alpha_{21} & \tilde{\alpha}_{21} & \alpha_{22} & \tilde{\alpha}_{22} & \alpha_{23} & \tilde{\alpha}_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^3(g_{11}\alpha_{11} + g_{12}\alpha_{21}) & c^{-3}(g_{11}\tilde{\alpha}_{11} + g_{12}\tilde{\alpha}_{21}) & c(g_{11}\alpha_{12} + g_{12}\alpha_{22}) \\ c^3(g_{21}\alpha_{11} + g_{22}\alpha_{21}) & c^{-3}(g_{21}\tilde{\alpha}_{11} + g_{22}\tilde{\alpha}_{21}) & c(g_{21}\alpha_{12} + g_{22}\alpha_{22}) \\ c^{-1}(g_{11}\tilde{\alpha}_{12} + g_{12}\tilde{\alpha}_{22}) & c(g_{11}\alpha_{13} + g_{12}\alpha_{23}) & c^{-1}(g_{11}\tilde{\alpha}_{13} + g_{12}\tilde{\alpha}_{23}) \\ c^{-1}(g_{21}\tilde{\alpha}_{12} + g_{22}\tilde{\alpha}_{22}) & c(g_{21}\alpha_{13} + g_{22}\alpha_{23}) & c^{-1}(g_{21}\tilde{\alpha}_{13} + g_{22}\tilde{\alpha}_{23}) \end{pmatrix}, \\ &\left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, c \right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \\ f_1^{\mathbb{C}} &= \frac{d_{14}^{\mathbb{C}}}{d_{35}^{\mathbb{C}}}, \quad \tilde{f}_1^{\mathbb{C}} = \frac{d_{23}^{\mathbb{C}}}{d_{46}^{\mathbb{C}}}, \quad f_2^{\mathbb{C}} = \frac{d_{45}^{\mathbb{C}}}{d_{34}^{\mathbb{C}}}, \quad \tilde{f}_2^{\mathbb{C}} = \frac{d_{36}^{\mathbb{C}}}{d_{34}^{\mathbb{C}}} \in \mathbb{C}, \\ f_3^{\mathbb{C}} &= \frac{d_{13}^{\mathbb{C}}d_{34}^{\mathbb{C}}}{(d_{35}^{\mathbb{C}})^2}, \quad \tilde{f}_3^{\mathbb{C}} = \frac{d_{24}^{\mathbb{C}}d_{34}^{\mathbb{C}}}{(d_{46}^{\mathbb{C}})^2}, \quad f_4^{\mathbb{C}} = \frac{d_{35}^{\mathbb{C}}d_{46}^{\mathbb{C}}}{(d_{34}^{\mathbb{C}})^2} \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

где минор $d_{ij}^{\mathbb{C}}$ матрицы $\hat{A}^{\mathbb{C}} \in \hat{A}_{2,6}^{\mathbb{C}}$ определяется так же, как мы определили минор d_{ij} матрицы $\hat{A} \in \hat{A}_{2,6}$.

ЛЕММА 1. Набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}, f_3^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_3^{\mathbb{C}}, f_4^{\mathbb{C}}\}$ разделяет орбиты общего положения действия комплексифицированной группы $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ на комплексифицированном пространстве $\hat{A}_{2,6}^{\mathbb{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сечение $L \subset \hat{A}_{2,6}^{\mathbb{C}}$ вида

$$L = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_3 & 1 & 0 & \tau_5 & 1 \\ \tau_2 & \tau_4 & 0 & 1 & \tau_6 & \tau_7 \end{pmatrix}, \quad \tau_j \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1, 7},$$

и отображение $\rho: \mathbb{C}(\hat{A}_{2,6}^{\mathbb{C}})^{G^{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{C}(L)^W$, индуцированное вложением $L \subset \hat{A}_{2,6}^{\mathbb{C}}$. Здесь $W = W(L)$ – группа Вейля, она определяется следующим образом (см. [8]):

$$W(L) = N(L)/Z(L) = \{g \in G \mid gL = L\} / \{g \in G \mid \forall l \in L: gl = l\}.$$

В нашем случае $W = E$. Находим

$$\begin{aligned} \rho(f_1^{\mathbb{C}}) &= \frac{\tau_1}{\tau_6}, & \rho(\tilde{f}_1^{\mathbb{C}}) &= \tau_4, & \rho(f_2^{\mathbb{C}}) &= -\tau_5, \\ \rho(\tilde{f}_2^{\mathbb{C}}) &= \tau_7, & \rho(f_3^{\mathbb{C}}) &= -\frac{\tau_2}{\tau_6}, & \rho(\tilde{f}_3^{\mathbb{C}}) &= \tau_3, & \rho(f_4^{\mathbb{C}}) &= -\tau_6. \end{aligned}$$

Набор функций $\{\rho(f_1^{\mathbb{C}}), \rho(\tilde{f}_1^{\mathbb{C}}), \rho(f_2^{\mathbb{C}}), \rho(\tilde{f}_2^{\mathbb{C}}), \rho(f_3^{\mathbb{C}}), \rho(\tilde{f}_3^{\mathbb{C}}), \rho(f_4^{\mathbb{C}})\}$ разделяет точки сечения L , при этом сечение L пересекает орбиты общего положения. Следовательно, набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}, f_3^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_3^{\mathbb{C}}, f_4^{\mathbb{C}}\}$ разделяет орбиты общего положения. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}, f_3^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_3^{\mathbb{C}}, f_4^{\mathbb{C}}\}$ порождает поле рациональных инвариантов на комплексифицированном пространстве (см. [8]). Следовательно, набор функций $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ порождает поле рациональных инвариантов на исходном пространстве.

Тем самым доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Набор инвариантов

$$f_1 = \frac{d_{14}}{d_{35}}, \quad f_2 = \frac{d_{45}}{d_{34}}, \quad f_3 = \frac{d_{13}d_{34}}{d_{35}^2}, \quad f_4 = \frac{d_{35}d_{46}}{d_{34}^2}$$

порождает поле рациональных инвариантов $\mathbb{R}(\hat{A}_{2,6})^G$.

§ 7. Случай $K = 9$

В случае $K = 9$ модельная поверхность задается системой уравнений, в которой содержат параметры следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} v_8 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha_{11}z^4\bar{z} + \alpha_{12}z^3\bar{z}^2 + \alpha_{13}u_2z^2\bar{z}), \\ v_9 &= 2 \operatorname{Re}(\alpha_{21}z^4\bar{z} + \alpha_{22}z^3\bar{z}^2 + \alpha_{23}u_2z^2\bar{z}), \\ v_{10} &= 2 \operatorname{Re}(\alpha_{31}z^4\bar{z} + \alpha_{32}z^3\bar{z}^2 + \alpha_{33}u_2z^2\bar{z}), \\ \alpha_{ij} &\in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В данном случае избыточная коразмерность k равна трем.

Будем рассматривать вторую форму записи формы Φ_5 в виде матрицы $\hat{A} \in \hat{A}_{3,6}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \bar{\alpha}_{11} & \alpha_{12} & \bar{\alpha}_{12} & \alpha_{13} & \bar{\alpha}_{13} \\ \alpha_{21} & \bar{\alpha}_{21} & \alpha_{22} & \bar{\alpha}_{22} & \alpha_{23} & \bar{\alpha}_{23} \\ \alpha_{31} & \bar{\alpha}_{31} & \alpha_{32} & \bar{\alpha}_{32} & \alpha_{33} & \bar{\alpha}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{\alpha}_{11} & \dots & \check{\alpha}_{16} \\ \check{\alpha}_{21} & \dots & \check{\alpha}_{26} \\ \check{\alpha}_{31} & \dots & \check{\alpha}_{36} \end{pmatrix}.$$

Действие группы голоморфных автоморфизмов на пространстве модельных поверхностей типа $(1, 9)$ может быть редуцировано к такому действию группы $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве $\hat{A}_{3,6}$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, e^{i\varphi} \right) \circ \begin{pmatrix} \check{\alpha}_{11} & \dots & \check{\alpha}_{16} \\ \check{\alpha}_{21} & \dots & \check{\alpha}_{26} \\ \check{\alpha}_{31} & \dots & \check{\alpha}_{36} \end{pmatrix} \\ &= ((g_{rs}), e^{i\varphi}) \circ (\check{\alpha}_{ij}) = \left(e^{i\sigma_j \varphi} \sum_{t=1}^3 g_{it} a_{tj} \right), \quad r, s, i = 1, 2, 3, \quad j = \overline{1, 6}, \end{aligned}$$

где $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = -3, \sigma_3 = \sigma_5 = 1, \sigma_4 = \sigma_6 = -1$.

Очевидно, что следующие функции являются инвариантами действия группы G на пространстве $\hat{A}_{3,6}$:

$$f_1 = \frac{d_{125}}{d_{123}}, \quad f_2 = \frac{d_{134}}{d_{136}}, \quad f_3 = \frac{d_{145}}{d_{134}}, \quad f_4 = \frac{d_{146}}{d_{123}} \in \mathbb{C},$$

где

$$d_{ijh} = \det \begin{pmatrix} \check{\alpha}_{1i} & \check{\alpha}_{1j} & \check{\alpha}_{1h} \\ \check{\alpha}_{2i} & \check{\alpha}_{2j} & \check{\alpha}_{2h} \\ \check{\alpha}_{3i} & \check{\alpha}_{3j} & \check{\alpha}_{3h} \end{pmatrix}.$$

Комплексифицируем данное действие:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{3,6}^{\mathbb{C}} &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \tilde{\alpha}_{11} & \alpha_{12} & \tilde{\alpha}_{12} & \alpha_{13} & \tilde{\alpha}_{13} \\ \alpha_{21} & \tilde{\alpha}_{21} & \alpha_{22} & \tilde{\alpha}_{22} & \alpha_{23} & \tilde{\alpha}_{23} \\ \alpha_{31} & \tilde{\alpha}_{31} & \alpha_{32} & \tilde{\alpha}_{32} & \alpha_{33} & \tilde{\alpha}_{33} \end{pmatrix}, \\ \alpha_{ij} &\in \mathbb{C}, \quad \tilde{\alpha}_{ij} \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \\ & \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, c \right) \circ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \tilde{\alpha}_{11} & \alpha_{12} & \tilde{\alpha}_{12} & \alpha_{13} & \tilde{\alpha}_{13} \\ \alpha_{21} & \tilde{\alpha}_{21} & \alpha_{22} & \tilde{\alpha}_{22} & \alpha_{23} & \tilde{\alpha}_{23} \\ \alpha_{31} & \tilde{\alpha}_{31} & \alpha_{32} & \tilde{\alpha}_{32} & \alpha_{33} & \tilde{\alpha}_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^3 \sum_{t=1}^3 g_{1t} \alpha_{t1} & c^{-3} \sum_{t=1}^3 g_{1t} \tilde{\alpha}_{t1} & c \sum_{t=1}^3 g_{1t} \alpha_{t2} & c^{-1} \sum_{t=1}^3 g_{1t} \tilde{\alpha}_{t2} & c \sum_{t=1}^3 g_{1t} \alpha_{t3} & c^{-1} \sum_{t=1}^3 g_{1t} \tilde{\alpha}_{t3} \\ c^3 \sum_{t=1}^3 g_{2t} \alpha_{t1} & c^{-3} \sum_{t=1}^3 g_{2t} \tilde{\alpha}_{t1} & c \sum_{t=1}^3 g_{2t} \alpha_{t2} & c^{-1} \sum_{t=1}^3 g_{2t} \tilde{\alpha}_{t2} & c \sum_{t=1}^3 g_{2t} \alpha_{t3} & c^{-1} \sum_{t=1}^3 g_{2t} \tilde{\alpha}_{t3} \\ c^3 \sum_{t=1}^3 g_{3t} \alpha_{t1} & c^{-3} \sum_{t=1}^3 g_{3t} \tilde{\alpha}_{t1} & c \sum_{t=1}^3 g_{3t} \alpha_{t2} & c^{-1} \sum_{t=1}^3 g_{3t} \tilde{\alpha}_{t2} & c \sum_{t=1}^3 g_{3t} \alpha_{t3} & c^{-1} \sum_{t=1}^3 g_{3t} \tilde{\alpha}_{t3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, c \right) \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*,$$

$$f_1^{\mathbb{C}} = \frac{d_{125}^{\mathbb{C}}}{d_{123}^{\mathbb{C}}}, \quad \tilde{f}_1^{\mathbb{C}} = \frac{d_{126}^{\mathbb{C}}}{d_{124}^{\mathbb{C}}}, \quad f_2^{\mathbb{C}} = \frac{d_{134}^{\mathbb{C}}}{d_{136}^{\mathbb{C}}}, \quad \tilde{f}_2^{\mathbb{C}} = \frac{d_{234}^{\mathbb{C}}}{d_{245}^{\mathbb{C}}} \in \mathbb{C},$$

$$f_3^{\mathbb{C}} = \frac{d_{145}^{\mathbb{C}}}{d_{134}^{\mathbb{C}}}, \quad \tilde{f}_3^{\mathbb{C}} = \frac{d_{236}^{\mathbb{C}}}{d_{234}^{\mathbb{C}}}, \quad f_4^{\mathbb{C}} = \frac{d_{146}^{\mathbb{C}}}{d_{123}^{\mathbb{C}}}, \quad \tilde{f}_4^{\mathbb{C}} = \frac{d_{235}^{\mathbb{C}}}{d_{124}^{\mathbb{C}}} \in \mathbb{C},$$

где минор $d_{ijh}^{\mathbb{C}}$ матрицы $\hat{A}^{\mathbb{C}} \in \hat{A}_{3,6}^{\mathbb{C}}$ определяется так же, как мы определили минор d_{ijh} матрицы $\hat{A} \in \hat{A}_{3,6}$.

ЛЕММА 2. *Набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}, f_3^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_3^{\mathbb{C}}, f_4^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_4^{\mathbb{C}}\}$ разделяет орбиты общего положения действия комплексифицированной группы $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ на комплексифицированном пространстве $\hat{A}_{3,6}^{\mathbb{C}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сечение $L \subset \hat{A}_{3,6}^{\mathbb{C}}$ вида

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau_1 & 0 & \tau_3 & \tau_6 \\ 0 & 1 & 0 & \tau_2 & \tau_4 & \tau_7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \tau_5 & \tau_8 \end{pmatrix} \quad \tau_j \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1, 8},$$

и отображение $\rho: \mathbb{C}(\hat{A}_{3,6}^{\mathbb{C}})^{G^{\mathbb{C}}} \rightarrow \mathbb{C}(L)^W$, индуцированное вложением $L \subset \hat{A}_{3,6}^{\mathbb{C}}$, где W – группа Вейля (в нашем случае $W = E$). Находим

$$\rho(f_1^{\mathbb{C}}) = \tau_5, \quad \rho(\tilde{f}_1^{\mathbb{C}}) = \tau_8, \quad \rho(f_2^{\mathbb{C}}) = \frac{\tau_2}{\tau_7}, \quad \rho(\tilde{f}_2^{\mathbb{C}}) = -\frac{\tau_1}{\tau_3},$$

$$\rho(f_3^{\mathbb{C}}) = \frac{\tau_4}{\tau_2} - \tau_5, \quad \rho(\tilde{f}_3^{\mathbb{C}}) = \tau_8 - \frac{\tau_6}{\tau_1}, \quad \rho(f_4^{\mathbb{C}}) = \tau_2\tau_8 - \tau_7, \quad \rho(\tilde{f}_4^{\mathbb{C}}) = \tau_3 - \tau_1\tau_5.$$

Набор функций $\{\rho(f_1^{\mathbb{C}}), \rho(\tilde{f}_1^{\mathbb{C}}), \rho(f_2^{\mathbb{C}}), \rho(\tilde{f}_2^{\mathbb{C}}), \rho(f_3^{\mathbb{C}}), \rho(\tilde{f}_3^{\mathbb{C}}), \rho(f_4^{\mathbb{C}}), \rho(\tilde{f}_4^{\mathbb{C}})\}$ разделяет точки общего положения сечения L , при этом сечение L пересекает орбиты общего положения. Следовательно, набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}, f_3^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_3^{\mathbb{C}}, f_4^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_4^{\mathbb{C}}\}$ разделяет орбиты общего положения. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что набор функций $\{f_1^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_1^{\mathbb{C}}, f_2^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_2^{\mathbb{C}}, f_3^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_3^{\mathbb{C}}, f_4^{\mathbb{C}}, \tilde{f}_4^{\mathbb{C}}\}$ порождает поле рациональных инвариантов на комплексифицированном пространстве (см. [8]). Следовательно, набор функций $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ порождает поле рациональных инвариантов на исходном пространстве.

Тем самым доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Набор инвариантов*

$$f_1 = \frac{d_{125}}{d_{123}}, \quad f_2 = \frac{d_{134}}{d_{136}}, \quad f_3 = \frac{d_{145}}{d_{134}}, \quad f_4 = \frac{d_{146}}{d_{123}}$$

порождает поле рациональных инвариантов $\mathbb{R}(\hat{A}_{3,6})^G$.

§ 8. Двойственность

ЛЕММА 3. Факторпространства $A_{k,k_\ell}/\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $A_{k_\ell-k,k_\ell}/\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ изоморфны для всех $k = 1, \dots, k_\ell - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим взаимно однозначное отображение ψ набора полуинвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ на пространстве A_{k,k_ℓ} в набор полуинвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ на пространстве $A_{k_\ell-k,k_\ell}$, при котором сизигии первого набора полуинвариантов перейдут в сизигии второго набора полуинвариантов.

Набор полуинвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ на пространстве

$$A_{k,k_\ell} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk_\ell} \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид (см. [11]):

$$d_{i_1 i_2 \dots i_k} = \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{ki_1} & \dots & a_{ki_k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k_\ell,$$

набор сизигий между этими полуинвариантами имеет вид (см. [11])

$$\sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j_t} d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1}} = 0$$

для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k_\ell$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq k_\ell$.

Набор полуинвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ на пространстве

$$A_{k_\ell-k,k_\ell} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k_\ell-k,1} & \dots & a_{k_\ell-k,k_\ell} \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$d_{i_1 i_2 \dots i_{k_\ell-k}} = \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_{k_\ell-k}} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k_\ell-k,i_1} & \dots & a_{k_\ell-k,i_{k_\ell-k}} \end{pmatrix},$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k_\ell-k} \leq k_\ell,$$

набор сизигий между этими полуинвариантами имеет вид

$$\sum_{t=1}^{k_\ell-k+1} (-1)^t d_{i_1 i_2 \dots i_{k_\ell-k-1} j_t} d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k_\ell-k+1}} = 0$$

для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_{k_\ell-k-1} \leq k_\ell$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{k_\ell-k+1} \leq k_\ell$.

Для мультииндекса $i_1 i_2 \dots i_k$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k_\ell$, определим двойственный мультииндекс $\overline{i_1 i_2 \dots i_k}$, в котором по возрастанию выписаны все элементы множества $\{1, 2, \dots, k_\ell\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Отображение ψ определим формулой

$$\psi: d_{i_1 i_2 \dots i_k} \mapsto d_{\overline{i_1 i_2 \dots i_k}}$$

для любых $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k_\ell$. Это отображение определяет взаимно однозначное соответствие между полуинвариантами действия группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ в пространстве A_{k, k_ℓ} и полуинвариантами действия группы $\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ в пространстве $A_{k_\ell - k, k_\ell}$ (так как при этом отображении разные полуинварианты переходят в разные, а количества полуинвариантов в первом и во втором пространствах совпадают: $C_{k_\ell}^k = C_{k_\ell}^{k_\ell - k}$). При этом индуцированное отображение ψ^* переводит сизигию первого пространства

$$\sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j_t} d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1}} = 0$$

в соотношение

$$\sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t d_{\overline{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j_t}} d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1}} = 0.$$

Докажем, что последнее соотношение является сизигией второго пространства. Пусть $l_1, \dots, l_{k_\ell - 2k}$ — упорядоченный по возрастанию набор индексов множества $\{1, \dots, k_\ell\} \setminus \{i_1, \dots, i_{k-1}, j_1, \dots, j_{k+1}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(d_{i_1 \dots i_{k-1} j_t}) &= \psi((-1)^{k-r-1} d_{i_1 \dots i_r j_t i_{r+1} \dots i_{k-1}}) = (-1)^{k-r-1} \psi(d_{i_1 \dots \overleftarrow{i_{k-1} j_t}}) \\ &= (-1)^{k-r-1} d_{j_1 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1} l_1 \dots l_{k_\ell - 2k}}, \end{aligned}$$

где r — такое число, что $i_r < j_t \leq i_{r+1}$, а выражение $\overleftarrow{i_1 \dots i_{k-1} j_t}$ обозначает упорядоченный набор индексов (т.е. в данной ситуации — индекс $i_1 \dots i_r j_t i_{r+1} \dots i_{k-1}$). Далее,

$$\begin{aligned} \psi(d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_k}) &= d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_k} = d_{\overleftarrow{i_1 \dots i_{k-1} l_1 \dots l_{k_\ell - 2k} j_t}} \\ &= (-1)^s (-1)^{k-r-1} d_{\overleftarrow{i_1 \dots i_{k-1} l_1 \dots l_{k_\ell - 2k} j_t}}, \end{aligned}$$

где s — такое число, что $l_{p-s} < j_t < l_{p-s+1}$.

Также нам понадобится следующий факт:

$$d_{\overleftarrow{i_1 \dots i_{k-1} l_1 \dots l_{k_\ell - 2k} l_t}} = 0 \quad \forall t = \overline{1, k_\ell - 2k}.$$

Из полученных соотношений следует:

$$\begin{aligned}
 \psi^* & \left(\sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j_t} d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1}} \right) \\
 &= \sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t (-1)^{k-r-1} d_{\underbrace{j_1 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1} l_1 \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow}} (-1)^s (-1)^{k-r-1} d_{\underbrace{i_1 \dots i_{k-1} l_1 \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow} j_t} \\
 &= \sum_{t=1}^{k+1} (-1)^{t+s} d_{\underbrace{j_1 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1} l_1 \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow}} d_{\underbrace{i_1 \dots i_{k-1} l_1 \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow} j_t} \\
 &= \sum_{t=1}^{k+1} (-1)^{t+s} d_{\underbrace{j_1 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1} l_1 \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow}} d_{\underbrace{i_1 \dots i_{k-1} l_1 \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow} j_t} \\
 &\quad + \sum_{t=1}^{k_\ell-2k} (-1)^{f(s)} d_{\underbrace{j_1 \dots j_{k+1} l_1 \dots \widehat{l_t} \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow}} d_{\underbrace{i_1 \dots i_{k-1} l_1 \dots l_{k_\ell-2k}}_{\leftarrow} j_t}.
 \end{aligned}$$

Последнее выражение является в точности сизигией второго пространства. Следовательно, отображение ψ^* переводит сизигии первого пространства в сизигии второго пространства. Нетрудно убедиться в том, что отображение ψ^* инъективно. При этом количество сизигий набора полуинвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ на пространстве A_{k, k_ℓ} совпадает с количеством сизигий набора полуинвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ на пространстве $A_{k_\ell - k, k_\ell}$. Следовательно, отображение ψ^* взаимно однозначно. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Факторпространства $\hat{A}_{k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $\hat{A}_{k_\ell - k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ изоморфны для всех $k = 1, \dots, k_\ell - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факторпространства $\hat{A}_{k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $A_{k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ получаются факторизацией одного и того же пространства форм Φ_ℓ по действию одной и той же группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, но записанного в разных базисах. Следовательно, факторпространства $\hat{A}_{k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $A_{k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ изоморфны (изоморфизмом является замена базиса). Аналогично получаем, что факторпространства $\hat{A}_{k_\ell - k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ и $A_{k_\ell - k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ изоморфны. Следовательно, из леммы 3 вытекает, что факторпространства $\hat{A}_{k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $\hat{A}_{k_\ell - k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ изоморфны. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Факторпространства*

$$\hat{A}_{k, k_\ell} / (\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)), \quad \hat{A}_{k_\ell - k, k_\ell} / (\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R}) \times U(1))$$

изоморфны для всех $k = 1, \dots, k_\ell - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Набор полуинвариантов действия группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ на пространстве

$$\hat{A}_{k, k_\ell} = \begin{pmatrix} \check{a}_{11} & \dots & \check{a}_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ \check{a}_{k1} & \dots & \check{a}_{kk_\ell} \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$d_{i_1 i_2 \dots i_k} = \det \begin{pmatrix} \check{a}_{1i_1} & \dots & \check{a}_{1i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \check{a}_{ki_1} & \dots & \check{a}_{ki_k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k_\ell,$$

набор сизигий между этими полуинвариантами имеет вид

$$\sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j_t} d_{j_1 j_2 \dots \widehat{j_t} \dots j_{k+1}} = 0$$

для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k_\ell$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq k_\ell$.

Действие группы $U(1)$ на наборе полуинвариантов $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ имеет следующий вид:

$$e^{i\varphi} \circ d_{i_1 i_2 \dots i_k} = e^{i(\sigma_{i_1} + \sigma_{i_2} + \dots + \sigma_{i_k})\varphi} d_{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad e^{i\varphi} \in U(1),$$

где числа σ_j , $j = \overline{1, k_\ell}$, определены в § 2.

Легко проверить, что действие группы $U(1)$ на наборе сизигий оказывается тривиальным (под действием группы $U(1)$ сизигии умножаются на ненулевой множитель, что, естественно, не меняет сизигию).

Теперь рассмотрим набор полуинвариантов $d_{i_1 i_2 \dots i_{k_\ell-k}}$ действия группы $\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ на пространстве $\hat{A}_{k_\ell-k, k_\ell}$.

Действие группы $U(1)$ на наборе полуинвариантов $d_{i_1 i_2 \dots i_{k_\ell-k}}$ имеет следующий вид:

$$e^{i\varphi} \circ d_{i_1 i_2 \dots i_{k_\ell-k}} = e^{i(\sigma_{i_1} + \sigma_{i_2} + \dots + \sigma_{i_{k_\ell-k}})\varphi} d_{i_1 i_2 \dots i_{k_\ell-k}}, \quad e^{i\varphi} \in U(1).$$

Далее, так как $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{k_\ell} = 0$, получим

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \circ \psi(d_{i_1 i_2 \dots i_k}) &= e^{i\varphi} \circ d_{\overline{i_1 i_2 \dots i_k}} = e^{i(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{k_\ell})\varphi} e^{-i(\sigma_{i_1} + \sigma_{i_2} + \dots + \sigma_{i_k})\varphi} d_{\overline{i_1 i_2 \dots i_k}} \\ &= e^{i(\sigma_{i_1} + \sigma_{i_2} + \dots + \sigma_{i_k})(-\varphi)} d_{\overline{i_1 i_2 \dots i_k}}, \end{aligned}$$

при этом

$$e^{i(-\varphi)} \circ d_{i_1 i_2 \dots i_k} = e^{i(\sigma_{i_1} + \sigma_{i_2} + \dots + \sigma_{i_k})(-\varphi)} d_{i_1 i_2 \dots i_k},$$

т. е. элемент группы $e^{i\varphi} \in U(1)$ действует на полуинвариант $\psi(d_{i_1 i_2 \dots i_k})$ так же, как элемент группы $e^{-i\varphi} \in U(1)$ действует на полуинвариант $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Следовательно, вся группа $U(1)$ действует на орбиты полуинвариантов $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ и $\psi(d_{i_1 i_2 \dots i_k})$ одинаково, а на сизигии вообще действует тривиально. Таким образом, действие группы $U(1)$ на двух изоморфных между собой пространствах $\hat{A}_{k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ и $\hat{A}_{k_\ell-k, k_\ell} / \mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R})$ одинаково, а значит, пространства $\hat{A}_{k, k_\ell} / (\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1))$ и $\hat{A}_{k_\ell-k, k_\ell} / (\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R}) \times U(1))$ изоморфны. Лемма доказана.

Отображение двойственности ψ в силу леммы 5 позволяет строить конечную систему инвариантов, порождающую поле рациональных инвариантов, для факторпространства $\hat{A}_{k, k_\ell} / (\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1))$, если уже построена конечная система инвариантов, порождающая поле рациональных инвариантов, двойственного факторпространства $\hat{A}_{k_\ell-k, k_\ell} / (\mathrm{GL}(k_\ell - k, \mathbb{R}) \times U(1))$. С учетом изложенного выше из утверждений 2, 4 получаем следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Набор инвариантов*

$$f_1 = \frac{d_{12456}}{d_{12346}}, \quad f_2 = \frac{d_{23456}d_{12356}}{d_{12346}^2} \in \mathbb{C}$$

порождает поле рациональных инвариантов $\mathbb{R}(\hat{A}_{5,6})^G$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Набор инвариантов*

$$f_1 = \frac{d_{2356}}{d_{1246}}, \quad f_2 = \frac{d_{1236}}{d_{1256}}, \quad f_3 = \frac{d_{2456}d_{1256}}{d_{1246}^2}, \quad f_4 = \frac{d_{1246}d_{1235}}{d_{1256}^2}$$

порождает поле рациональных инвариантов $\mathbb{R}(\hat{A}_{4,6})^G$.

Утверждения 6, 7 дают нам конечную систему инвариантов, порождающую поле рациональных инвариантов действия линейной группы на пространстве модельных поверхностей типа $(1, 11)$ и $(1, 10)$ соответственно. Для типов $(1, 11)$ и $(1, 10)$ значение избыточной коразмерности равно пяти и четырем соответственно.

Пространство модулей $\mathcal{M}(1, 12)$ состоит из одной точки, так как имеется единственная с точностью до действия группы $G = \mathrm{GL}(6, \mathbb{R}) \times U(1)$ модельная поверхность типа $(1, 12)$.

Тем самым, мы рассмотрели все пространства модулей пятого периода ($\ell = 5$): $\mathcal{M}(1, 7)$, $\mathcal{M}(1, 8)$, $\mathcal{M}(1, 9)$, $\mathcal{M}(1, 10)$, $\mathcal{M}(1, 11)$ и $\mathcal{M}(1, 12)$.

§ 9. Общий случай для типа $(1, K)$ при $K \geq 4$

В § 2 была определена величина ℓ – длина алгебры Леви–Танаки, а также величина k – избыточная коразмерность. Для вполне невырожденного ростка пара ℓ, k взаимно однозначно определяется по паре чисел n и K . Пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ мы будем описывать в терминах величин ℓ и k .

Если $k = k_\ell$ (как, например, для $K = 12$), то модельная поверхность типа $(1, K)$ единственна с точностью до линейной эквивалентности, а пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ состоит из одной точки.

В § 2 уже обсуждалось, что при $K = 1, 2, 3$ модельная поверхность типа $(1, K)$ единственна с точностью до линейной эквивалентности. Следовательно, пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ при $K = 1, 2, 3$ состоит из одной точки. Поэтому в настоящем параграфе мы будем рассматривать $K \geq 4$. Если $k < k_\ell$, а $K \geq 4$, то пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ будет не тривиально из соображений размерности.

Итак, пусть $k < k_\ell$. Действие линейной группы на пространстве модельных поверхностей типа $(1, K)$ допускает естественную редукцию (см. [7]) к действию группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве матриц $A \in A_{k, k_\ell}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k_\ell} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk_\ell} \end{pmatrix}.$$

Действие группы $GL(k, \mathbb{R}) \times U(1)$ на пространстве A_{k, k_ℓ} изложено во введении. Пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ получается как факторпространство $\mathcal{M}(1, K) = A_{k, k_\ell} / (GL(k, \mathbb{R}) \times U(1))$.

Рассмотрим действие вещественной линейной группы $GL(k, \mathbb{R})$ на вещественном пространстве матриц A_{k, k_ℓ} . Полуинвариантами этого действия будут миноры матрицы $A \in A_{k, k_\ell}$, которые имеют следующий вид (см. [11]):

$$d_{i_1 i_2 \dots i_k} = \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \dots & a_{1i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{ki_1} & \dots & a_{ki_k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k_\ell.$$

Набор сизигий между этими полуинвариантами имеет следующий вид (см. [11]):

$$\sum_{t=1}^{k+1} (-1)^t d_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j_t} d_{j_1 j_2 \dots \hat{j}_t \dots j_{k+1}} = 0,$$

где $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq k_\ell$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq k_\ell$.

Будем рассматривать полуинварианты $d_{i_1 i_2 \dots i_k}$ как плюскеровы координаты в вещественном проективном пространстве $\mathbb{RP}^{C_{k_\ell}^k}$. Тогда сизигии между этими полуинвариантами зададут в пространстве $\mathbb{RP}^{C_{k_\ell}^k}$ вещественное многообразие Грассмана $\text{Gr}(k, k_\ell)$ (см. [11]). Итак, можно заключить, что $A_{k, k_\ell} / GL(k, \mathbb{R}) \simeq \text{Gr}(k, k_\ell)$. Следовательно, $\mathcal{M}(1, K) \simeq \text{Gr}(k, k_\ell) / U(1)$.

Таким образом, в дополнение к подробно рассмотренным в § 3–8 случаям, можно добавить следующее утверждение о строении пространства модулей $\mathcal{M}(1, K)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. При $k = k_\ell$ пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ состоит из одной точки. При $k < k_\ell$ пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ изоморфно факторпространству вещественного многообразия Грассмана $\text{Gr}(k, k_\ell)$ по некоторому действию группы $U(1)$.

§ 10. Случай $k = 1$ для типа $(1, K)$ при $K \geq 4$

В настоящем параграфе мы рассмотрим случай $k = 1$, где k – избыточная коразмерность (см. § 2). Из утверждения 8 следует, что в данном случае

$$\mathcal{M}(1, K) = \text{Gr}(1, k_\ell) / U(1) = \mathbb{RP}^{k_\ell-1} / U(1).$$

Действие группы $U(1)$ на пространстве $\mathbb{RP}^{k_\ell-1}$ определено в § 2. Выпишем его во второй форме записи. Итак, на проективном пространстве параметров вида

$$(\alpha_1 : \dots : \alpha_{m_\ell} : a_{2m_\ell+1} : \dots : a_{k_\ell}),$$

$$\alpha_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, m_\ell, \quad a_r \in \mathbb{R}, \quad r = 2m_\ell + 1, \dots, k_\ell,$$

задано действие элемента группы $e^{i\varphi} \in U(1)$ следующим образом:

$$e^{i\varphi} \circ (\alpha_1 : \dots : \alpha_{m_\ell} : a_{2m_\ell+1} : \dots : a_{k_\ell})$$

$$= (e^{i(p_1 - q_1)\varphi} \alpha_1 : \dots : e^{i(p_{m_\ell} - q_{m_\ell})\varphi} \alpha_{m_\ell} : a_{2m_\ell+1} : \dots : a_{k_\ell}),$$

где целые числа $p_j, q_j, j = 1, \dots, m_\ell$, определены в § 2. Введем следующее обозначение: $t_j = p_j - q_j, j = 1, \dots, m_\ell$. Нетрудно показать, что если длина ℓ нечетна, то все числа $|t_1|, \dots, |t_{m_\ell}|$ нечетны и хотя бы одно из этих чисел равно единице. Если длина ℓ четна, то все числа $|t_1|, \dots, |t_{m_\ell}|$ четны и хотя бы одно из этих чисел равно двум. Пусть t_{j_0} – такое число (равное по модулю единице при нечетном ℓ и двум при четном ℓ). Тогда все отношения вида

$$\frac{t_j}{t_{j_0}}, \quad j = 1, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots, m_\ell, \quad (9)$$

являются целыми числами.

Рассмотрим сечение $L \subset \mathbb{RP}^{k_\ell-1}$ вида

$$\begin{aligned} L &= (\alpha_1 : \dots : \alpha_{m_\ell} : a_{2m_\ell+1} : \dots : a_{k_\ell}), \\ \alpha_j &\in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots, m_\ell, \quad \alpha_{j_0} \in \mathbb{R}, \\ a_r &\in \mathbb{R}, \quad r = 2m_\ell + 1, \dots, k_\ell. \end{aligned}$$

Пусть W – группа Вейля, отвечающая этому сечению (см. [8]). Тогда

$$\mathcal{M}(1, K) \simeq L/W.$$

Нетрудно показать, что если $2m_\ell = k_\ell$ (т. е. в базисе пространства $\mathcal{CH}_\ell$, который был задан в § 2, нет непарных форм) и все отношения (9) являются нечетными числами, то $W = E$, в противном случае $W = \mathbb{Z}_2$. Первый случай реализуется, например, при $K = 7$, а второй – при $K = 4$ и $K = 13$. Итак, в первом случае, когда $W = E$, получаем

$$\mathcal{M}(1, K) \simeq L \simeq \mathbb{RP}^{k_\ell-2}.$$

Несложными рассуждениями можно показать, что во втором случае

$$\mathcal{M}(1, K) \simeq L/\mathbb{Z}_2 \simeq S^{k_\ell-2}.$$

Таким образом, можно сформулировать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. При $k = 1$, где k – избыточная коразмерность, пространство модулей $\mathcal{M}(1, K)$ изоморфно либо вещественному проективному пространству $\mathbb{RP}^{k_\ell-2}$, либо вещественной сфере $S^{k_\ell-2}$.

Список литературы

1. М. Н. Poincaré, “Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **23**:1 (1907), 185–220.
2. С. С. Чжень, Ю. К. Мозер, “Вещественные гиперповерхности в комплексных многообразиях”, *УМН*, **38**:2 (1983), 149–193; пер. с англ.: S. S. Chern, J. K. Moser, “Real hypersurfaces in complex manifolds”, *Acta Math.*, **133**:1 (1974), 219–271.
3. В. К. Белашапка, “О голоморфных преобразованиях квадрики”, *Матем. сб.*, **182**:2 (1991), 203–219; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “On holomorphic transformations of a quadric”, *Math. USSR-Sb.*, **72**:1 (1992), 189–205.

4. В. К. Белошапка, “Кубическая модель вещественного многообразия”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 503–519; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “A cubic model of a real variety”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 457–470.
5. В. К. Белошапка, “Вещественные подмногообразия комплексного пространства: их полиномиальные модели, автоморфизмы и проблемы классификации”, *УМН*, **57**:1 (2002), 3–44; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Real submanifolds in complex space: polynomial models, automorphisms, and classification problems”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 1–41.
6. В. К. Белошапка, “Универсальная модель вещественного подмногообразия”, *Матем. заметки*, **75**:4 (2004), 507–522; англ. пер.: V. K. Beloshapka, “Universal models for real submanifolds”, *Math. Notes*, **75**:4 (2004), 475–488.
7. V. K. Beloshapka, “Moduli space of model real submanifolds”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:3 (2006), 245–252.
8. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления*, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, Eh. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic geometry. IV: Linear algebraic groups, invariant theory*, *Encycl. Math. Sci.*, **55**, 1994, 123–278.
9. I. B. Mamai, “Model CR -manifolds with one-dimensional complex tangent”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:1 (2009), 97–102.
10. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, часть 2, 4-е изд., Лань, СПб., 2004; фр. пер. 3-го изд.: B. V. Shabat, *Introduction à l'analyse complexe*, Tome 2, Mir, Moscow, 1990.
11. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, 3-е изд., МЦНМО, М., 2007; англ. пер. 2-го изд.: I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

И. Б. МАМАЙ (I. B. MAMAÏ)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: mibig@rambler.ru

Поступило в редакцию

02.12.2011

13.06.2012