Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Н. Белянова, О наростах бикомпактных расширений локально бикомпактных отображений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 5–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/im795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:00:42

УДК 515.12

Э. Н. Белянова

О наростах бикомпактных расширений локально бикомпактных отображений

Приведены, во-первых, обобщение теоремы Магилла на локально бикомпактные хаусдорфовы отображения, во-вторых, еще одно описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова пространства и обобщение этого описания на локально бикомпактные хаусдорфовы и тихоновские отображения.

Библиография: 4 наименования.

Введение

В настоящей работе пространство будем понимать как топологическое пространство, непрерывное отображение – как непрерывное отображение пространств, бикомпактификацию – как (если не оговорено иное) хаусдорфову бикомпактификацию пространства или отображения.

ТЕОРЕМА МАГИЛЛА [1]. *Бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда B – непрерывный образ стоун-чеховского нароста $\beta X \setminus X$.*

§ 1. Первое описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова отображения (теорема Магилла для отображений)

Напомним некоторые необходимые определения.

Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется:

- а) *бикомпактным*, если оно совершенно;
- б) *хаусдорфовым*, если для любых двух точек x и x' из X таких, что $x \neq x'$, $f(x) = f(x')$, существуют в X дизъюнктные окрестности;
- в) *локально бикомпактным*, если для любой точки x из X существуют её окрестность U в X и окрестность V точки $f(x)$ в Y такие, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно;
- г) *отделимо бикомпактифицируемым*, если существует бикомпактификация (бикомпактное хаусдорфово отображение $c_f: c_f X \rightarrow Y$ такое, что X всюду плотно в $c_f X$ и $c_f|_X = f$) отображения f .

Для отделимо бикомпактифицируемых отображений определение в) эквивалентно определению

д) отображение $f: X \rightarrow Y$ локально бикомпактно, если X открыто в $c_f X$ для любой бикомпактификации c_f отображения f .

Обобщим теорему Магилла на локально бикомпактные хаусдорфовы отображения.

ТЕОРЕМА 1. *Бикомпактное хаусдорфово отображение $g: Z \rightarrow Y$ является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного отделимо бикомпактифицируемого хаусдорфова отображения $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда существует морфизм нароста $\chi_f \setminus f$ максимальной бикомпактификации χ_f отображения f на отображение g .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение g является наростом некоторой бикомпактификации c_f локально бикомпактного отделимо бикомпактифицируемого хаусдорфова отображения f . В статье [2] доказано существование максимальной бикомпактификации χ_f отображения f . Поскольку существует морфизм максимальной бикомпактификации χ_f на бикомпактификацию c_f , то существует морфизм нароста $\chi_f \setminus f$ на нарост g .

Пусть теперь λ – морфизм нароста $\chi_f \setminus f$ на отображение g . Докажем, что отображение λ бикомпактно. Нарост $\chi_f X \setminus X$ замкнут в $\chi_f X$ и отображение χ_f бикомпактно, следовательно, бикомпактно отображение $\chi_f \setminus f$. Так как $\chi_f \setminus f = g \circ \lambda$, отображение $\chi_f \setminus f$ бикомпактно и отображение g хаусдорфово, то λ есть бикомпактное отображение [3].

Пусть $c_f X$ – дизъюнктное объединение множеств X и Z , и пусть $\varphi = \text{id}_X \cup \lambda: \chi X \rightarrow X \cup Z$. Введем на множестве $c_f X$ факторную относительно отображения φ топологию. Поскольку множество X открыто в χX , то на множестве $X \subseteq c_f X$ индуцируется исходная топология и оно открыто в $c_f X$, кроме того, оно всюду плотно в $c_f X$. Рассмотрим отображение $c_f: X \cup Z \rightarrow Y$ такое, что $\chi f = c_f \circ \varphi$. Это отображение непрерывно (так как непрерывно χf и факторно φ) и бикомпактно (так как бикомпактно χf). Следовательно, отображение $c_f: X \cup Z \rightarrow Y$ является бикомпактификацией отображения f , для которой $c_f \setminus f = g$ (как отображение множества).

Докажем, что исходная топология пространства Z совпадает с ограничением топологии пространства $c_f X$ на множество Z . Пусть множество A замкнуто в исходном пространстве Z ; тогда множество $\varphi^{-1} A = \lambda^{-1} A$ замкнуто в замкнутом в $\chi_f X$ множестве $\chi_f X \setminus X$ и, следовательно, замкнуто в $\chi_f X$. Получаем, что множество A замкнуто в пространстве $c_f X$. Обратно, если множество $A \subseteq Z = c_f X \setminus X$ замкнуто в $c_f X \setminus X$, то оно замкнуто в $c_f X$ и множество $\varphi^{-1} A$ замкнуто в $\chi_f X$ и $\chi_f X \setminus X$. Так как отображение λ бикомпактно, то множество $A = \lambda \lambda^{-1} (A \cap Z)$ замкнуто в исходной топологии пространства Z . Следовательно, нарост $c_f \setminus f$ гомеоморфен отображению g .

Докажем хаусдорфовость бикомпактификации c_f . Для этого докажем сначала, что отображение φ бикомпактно. Поскольку бикомпактное отображение λ определено на замкнутом подмножестве пространства $\chi_f X \setminus X$, то для

любого замкнутого в $\chi_f X$ множества A множество $\varphi^{-1}\varphi A = A \cup \lambda^{-1}\lambda(A \cap (\chi_f X \setminus X))$ замкнуто. Получаем, что отображение φ замкнуто и, очевидно, бикомпактно.

Пусть теперь различные точки x_1, x_2 принадлежат пространству $c_f X$ и $c_f(x_1) = c_f(x_2) = y$. Так как отображение φ бикомпактно, а отображение χ_f хаусдорфово, то дизъюнктные бикомпактные множества $\varphi^{-1}x_1$ и $\varphi^{-1}x_2$ отделены насыщенными окрестностями W_1 и W_2 в $\chi_f X$. Образы φW_1 и φW_2 и будут дизъюнктными окрестностями точек x_1, x_2 . Хаусдорфовость отображения c_f доказана.

Таким образом, отображение c_f является бикомпактификацией отображения f , на рост которой $c_f \setminus f$ есть отображение g . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае одноточечного пространства Y из теоремы 1 следует теорема Магилла.

§ 2. Второе описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова отображения

Напомним еще одно описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4]. Подмножество U пространства X называется *ограниченным* в X , если $[U]_X$ – бикомпакт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [4]. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Z$ называется *приложением пространства X к бикомпакту B в пространстве Z* , если:

- 1) $[f(X)]_Z$ – бикомпакт;
- 2) $[f(X \setminus U)]_Z = f(X \setminus U) \cup B$ для любого открытого и ограниченного в X множества U ;
- 3) для любой окрестности W бикомпакта B в пространстве Z существует ограниченное в X множество U такое, что $f(X \setminus U) \subseteq W$.

ТЕОРЕМА 2 [4]. *Бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда существует приложение пространства X к бикомпакту B в хаусдорфовом пространстве Z .*

Обобщим этот результат на локально бикомпактные хаусдорфовы отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – локально бикомпактное хаусдорфово отображение, $g: Z \rightarrow Y$ – хаусдорфово отображение, $\tilde{g}: R \rightarrow Y$ – бикомпактное подотображение отображения g и $\lambda: f \rightarrow g$ – морфизм отображения f в отображение g . Морфизм λ называется *приложением отображения f к подотображению $\tilde{g}$ отображения g* , если:

- 1) $R \cap g^{-1}V \subseteq [\lambda(f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V})]_Z$ для любого открытого множества V в Y и любого открытого множества U в X таких, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно;

2) для любой точки $y \in \tilde{g}R$ и любой окрестности W в Z слоя $\tilde{g}^{-1}y$ существуют окрестность V точки y и множество $U \subseteq f^{-1}V$ такие, что отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно и $\lambda(f^{-1}V \setminus U) \subseteq W$;

3) отображение $f_R = f: (X \setminus f^{-1}(\tilde{g}R)) \rightarrow Y \setminus \tilde{g}R$ бикомпактно.

ТЕОРЕМА 3. *Если существует приложение λ локально бикомпактного хаусдорфова отображения $f: X \rightarrow Y$ к бикомпактному подотображению $\tilde{g}: R \rightarrow Y$ хаусдорфова отображения $g: Z \rightarrow Y$, то существуют бикомпактификация $c_f: c_f X \rightarrow Y$ отображения f такая, что $c_f \setminus f = \tilde{g}$, и морфизм $c\lambda: c_f \rightarrow g$ такой, что $c\lambda$ является продолжением морфизма λ и $c\lambda: c_f \setminus f \rightarrow \tilde{g}$ – изоморфизм $c_f \setminus f$ на $\tilde{g}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_f X = X \cup R$ и $c_f = f \cup \tilde{g}: X \cup R \rightarrow Y$. Рассмотрим отображение $c\lambda = \lambda \cup \text{id}_{\tilde{g}}: X \cup R \rightarrow Z$. Докажем, что $c\lambda$ есть морфизм c_f в g . Если $x \in X$, то $c_f(x) = f(x) = g(\lambda(x)) = g(c\lambda(x))$. Если $x \in R$, то $c_f(x) = \tilde{g}(x) = g(c\lambda(x))$. Таким образом, $c_f = g \circ c\lambda$.

Введем на $c_f X$ топологию, база B которой состоит из всех множеств, открытых в пространстве X , а также всех подмножеств пространства $c_f X$ вида $(c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$, где множество O открыто в Z , множество V открыто в Y , множество U открыто в X , $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно. Докажем, что база B определена корректно. Достаточно доказать, что пересечение двух множеств из B указанного вида также является элементом B .

Пусть $W_i = (c\lambda)^{-1}(O_i \cap g^{-1}V_i) \setminus [U_i]_{f^{-1}V_i}$, где множество O_i открыто в Z , множество V_i открыто в Y , множество U_i открыто в X , $U_i \subseteq f^{-1}V_i$ и отображение $f: [U_i]_{f^{-1}V_i} \rightarrow V_i$ бикомпактно, $i = 1, 2$. Поскольку отображение

$$f: [(U_1 \cup U_2) \cap f^{-1}(V_1 \cap V_2)]_{f^{-1}(V_1 \cap V_2)} \rightarrow V_1 \cap V_2$$

бикомпактно, то

$$W_1 \cap W_2 = c\lambda^{-1}((O_1 \cap O_2) \cap g^{-1}(V_1 \cap V_2)) \setminus [(U_1 \cup U_2) \cap f^{-1}(V_1 \cap V_2)]_{f^{-1}(V_1 \cap V_2)}$$

есть элемент базы.

Заметим, что $(c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V} = ((c_f)^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}) \cap (c\lambda)^{-1}O$. Если в качестве множества V взять все пространство Y , в качестве множества U взять пустое множество, то видно, что прообраз при отображении $c\lambda$ любого открытого в пространстве Z множества открыт в $c_f X$. Поэтому отображение $c\lambda$ непрерывно. Кроме того, по построению морфизм $c\lambda$ является продолжением морфизма λ и $c\lambda: c_f \setminus f \rightarrow \tilde{g}$ – изоморфизм $c_f \setminus f$ на $\tilde{g}$.

Отображение c_f непрерывно, так как $c_f = g \circ c\lambda$ и непрерывны отображения g и $c\lambda$. Докажем, что отображение c_f является бикомпактификацией отображения f . Сначала докажем, что c_f является расширением отображения f . Множество X открыто в $c_f X$. Докажем, что оно всюду плотно в $c_f X$. Достаточно доказать, что любая точка множества $c_f X \setminus X = R$ является точкой прикосновения множества X . Рассмотрим в $c_f X \setminus X$ произвольную точку r и ее базисную окрестность $W = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$, где множество O

открыто в Z , множество V открыто в Y , множество U открыто в X , $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно. Поскольку $r \in W \cap (c_f X \setminus X)$, то

$$\begin{aligned} r &\equiv c\lambda(r) \subseteq c\lambda((c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}) \cap (c_f X \setminus X)) \\ &\subseteq c\lambda((c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V)) \cap c\lambda(c_f X \setminus X) \subseteq O \cap g^{-1}V \cap R. \end{aligned}$$

Множество $O \cap g^{-1}V$ является окрестностью точки r в Z , и так как для морфизма λ выполняется условие 1) определения 3, то

$$(O \cap g^{-1}V) \cap \lambda(f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}) \neq \emptyset.$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \lambda^{-1}(O \cap g^{-1}V) \cap (f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}) \\ &= (\lambda^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}) \cap f^{-1}V \subseteq (\lambda^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}) \cap X, \end{aligned}$$

следовательно, $W = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$ имеет с X непустое пересечение. Получаем, что множество X всюду плотно в $c_f X$. Таким образом, отображение c_f является расширением отображения f .

Докажем, что отображение c_f хаусдорфово. Пусть $x_1 \neq x_2$ и $c_f(x_1) = c_f(x_2) = y$. В случае $x_1, x_2 \in X$ существование дизъюнктных окрестностей точек x_1 и x_2 в $c_f X$ следует из хаусдорфовости отображения f и определения топологии на $c_f X$. Пусть $x_1, x_2 \in R$. Так как отображение g хаусдорфово, то существуют окрестности O_1 и O_2 точек x_1 и x_2 в Z такие, что $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Тогда дизъюнктными окрестностями точек x_1 и x_2 в $c_f X$ являются базисные окрестности $(c\lambda)^{-1}O_1$ и $(c\lambda)^{-1}O_2$. Пусть теперь $x_1 \in X$, $x_2 \in R$. В силу локальной бикомпактности отображения f существуют окрестность $U \subseteq X$ точки x_1 и открытое множество $V \subseteq Y$ такие, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно. Тогда множества U и $(c\lambda)^{-1}(Z \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$ являются дизъюнктными окрестностями точек x_1, x_2 в $c_f X$.

Докажем, что отображение c_f замкнуто во всех точках $y \in Y$. Пусть $y \in \tilde{g}R \subseteq Y$ и W есть произвольная окрестность множества $(c_f)^{-1}y = f^{-1}y \cup \tilde{g}^{-1}y$ в пространстве $c_f X$. Поскольку подотображение $\tilde{g} = c_f \setminus f$ бикомпактно, то существует конечное покрытие слоя $\tilde{g}^{-1}y$ в $c_f X$ базисными множествами

$$S_i = (c\lambda)^{-1}(O_i \cap g^{-1}V_i) \setminus [U_i]_{f^{-1}V_i}$$

(где множество O_i открыто в Z , множество V_i открыто в Y , множество U_i открыто в X , $U_i \subseteq f^{-1}V_i$ и отображение $f: [U_i]_{f^{-1}V_i} \rightarrow V_i$ бикомпактно, $i = 1, \dots, n$) такое, что $\cup\{S_i: i = 1, \dots, n\} \subseteq W$.

Докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если существует конечное покрытие слоя $\tilde{g}^{-1}y$ в $c_f X$ базисными множествами $S_i = (c\lambda)^{-1}(O_i \cap g^{-1}V_i) \setminus [U_i]_{f^{-1}V_i}$, где множество O_i открыто в Z , множество V_i открыто в Y , множество U_i открыто в X , $U_i \subseteq f^{-1}V_i$ и отображение $f: [U_i]_{f^{-1}V_i} \rightarrow V_i$ бикомпактно, $i = 1, \dots, n$, то существует открытое базисное множество $S = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V^1) \setminus [U^1]_{f^{-1}V^1}$

(где множество O открыто в Z , множество V^1 открыто в Y , множество U^1 открыто в X , $U^1 \subseteq f^{-1}V^1$ и отображение $f: [U^1]_{f^{-1}V^1} \rightarrow V^1$ бикомпактно) такое, что $\tilde{g}^{-1}y \subseteq S \subseteq \cup\{S_i: i = 1, \dots, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V^1 = \cap\{V_i: i = 1, \dots, n\}$, $O = \cup\{O_i: i = 1, \dots, n\}$, $U^1 = (\cup\{U_i: i = 1, \dots, n\}) \cap f^{-1}V^1$. Так как

$$\begin{aligned} [U^1]_{f^{-1}V^1} &= [(\cup\{U_i: i = 1, \dots, n\}) \cap f^{-1}V^1]_{f^{-1}V^1} \\ &= \cup\{[U_i \cap f^{-1}V^1]_{f^{-1}V^1}: i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

и отображения $f: [U_i]_{f^{-1}V_i} \rightarrow V_i$, $i = 1, \dots, n$, бикомпактны, то отображение $f: [U^1]_{f^{-1}V^1} \rightarrow V^1$ бикомпактно. Поэтому открытое множество $S = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V^1) \setminus [U^1]_{f^{-1}V^1}$ является базисным и $\tilde{g}^{-1}y \subseteq S \subseteq \cup\{S_i: i = 1, \dots, n\}$. Утверждение доказано.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть S , U^1 и V^1 – такие, как в утверждении. Поскольку отображение $\tilde{g}$ замкнуто и для морфизма λ выполняется условие 2) определения 3, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\tilde{g}^{-1}V^1 \subseteq S$ и для окрестности $O \cap g^{-1}V^1$ слоя $\tilde{g}^{-1}y$ в Z существует множество $U^2 \subseteq f^{-1}V^1$ такое, что отображение $f: [U^2]_{f^{-1}V^1} \rightarrow V^1$ бикомпактно и $\lambda(f^{-1}V^1 \setminus U^2) \subseteq O \cap g^{-1}V^1$. Так как отображение $f: [U^1 \cup U^2]_{f^{-1}V^1} \rightarrow V^1$ бикомпактно, то для окрестности W слоя $f^{-1}y \cap [U^1 \cup U^2]_{f^{-1}V^1}$ существует окрестность V^2 точки y такая, что $f^{-1}V^2 \cap [U^1 \cup U^2]_{f^{-1}V^1} \subseteq W$. Тогда для окрестности $V^* = V^1 \cap V^2$ точки y выполнено $(cf)^{-1}V^* \subseteq W$.

Пусть теперь $y \in Y \setminus \tilde{g}R$ и W – произвольная окрестность множества $cf^{-1}y = f^{-1}y$ в c_fX . Отображение f_R замкнуто, следовательно, для окрестности $W \cap (X \setminus f^{-1}\tilde{g}R)$ множества $f_R^{-1}y = f^{-1}y$ существует окрестность V точки y в $Y \setminus \tilde{g}R$, а значит, и в пространстве Y такая, что $f^{-1}V \subseteq W \cap (X \setminus f^{-1}\tilde{g}R) \subseteq W$. Замкнутость отображения cf доказана.

Докажем, что прообраз каждой точки $y \in Y$ при отображении cf бикомпактен. Если $y \in Y \setminus \tilde{g}R$, то множество $cf^{-1}y$ бикомпактно в силу бикомпактности отображения f_R . Пусть $y \in \tilde{g}R$. Возьмем произвольное открытое покрытие S множества $(cf)^{-1}y = f^{-1}y \cup \tilde{g}^{-1}y$ в пространстве c_fX . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что оно состоит из базисных множеств. Выберем из него конечное подпокрытие бикомпактного слоя $\tilde{g}^{-1}y$. По утверждению существует открытое базисное множество $S_0 = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$ (где множество O открыто в Z , множество V открыто в Y , множество U открыто в X , $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно) такое, что $\tilde{g}^{-1}y \subseteq S_0$. Можно считать, что $S_0 \in S$. Для окрестности $(O \cap g^{-1}V)$ слоя $\tilde{g}^{-1}y$ в Z по условию 2) определения 3 существуют окрестность V_0 точки y и множество $U_0 \subseteq f^{-1}V_0$ такие, что отображение $f: [U_0]_{f^{-1}V_0} \rightarrow V_0$ бикомпактно и $\lambda(f^{-1}V_0 \setminus U_0) \subseteq (O \cap g^{-1}V)$. Выберем из S конечные подсистемы S_1 и S_2 , покрывающие бикомпактные множества $f^{-1}y \cap [U]_{f^{-1}V}$ и $f^{-1}y \cap [U_0]_{f^{-1}V_0}$ соответственно. Тогда система $S_0 \cup S_1 \cup S_2$ является конечным подпокрытием покрытия S . Послойная бикомпактность отображения cf доказана.

Очевидно, ограничение отображения cf на множество $c_f X \setminus X = R$ совпадает с отображением $\tilde{g}$. Таким образом, отображение $cf: c_f X \rightarrow Y$ является бикомпактификацией отображения f такой, что $cf \setminus f = \tilde{g}$. Теорема доказана.

ЛЕММА. Для любой бикомпактификации cf локально бикомпактного хаусдорфова отображения $f: X \rightarrow Y$ тождественный морфизм отображения f в cf является приложением отображения f к подотображению $cf \setminus f$ отображения cf .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $cf: c_f X \rightarrow Y$ – бикомпактификация отображения f . Отображение $cf \setminus f$ бикомпактно как сужение бикомпактного отображения cf на замкнутое подмножество $c_f X \setminus X = R$. Пусть λ – тождественный морфизм отображения f в отображение cf . Докажем, что λ является приложением отображения f к подотображению $cf \setminus f$ отображения cf .

Докажем, что выполняется условие 1) определения 3. Пусть множество V открыто в Y , множество U открыто в X , $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно. Рассмотрим произвольную окрестность O_z в пространстве $c_f X$ точки $z \in R \cap g^{-1}V = R \cap (cf)^{-1}V$. Множество $O_z \cap ((cf)^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V})$ также является окрестностью точки z в $c_f X$. Поскольку $R \subseteq [X]_{c_f X}$, то

$$\emptyset \neq (O_z \cap ((cf)^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V})) \cap X = O_z \cap (f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}).$$

Значит,

$$R \cap (cf)^{-1}V \subseteq [(f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V})]_Z = [\lambda(f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V})]_Z$$

для любого открытого множества V в Y и любого открытого множества U в X таких, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно.

Докажем, что выполняется условие 2) определения 3. Рассмотрим $y \in \tilde{g}R$ и произвольную окрестность W слоя $\tilde{g}^{-1}y$ в $c_f X$. Так как $\tilde{g}$ является бикомпактным отображением, то существует окрестность V точки y такая, что $\tilde{g}^{-1}V \subseteq W \cap R$. Множество $U = (cf)^{-1}V \setminus W \subseteq f^{-1}V$ замкнуто в $c_f^{-1}V$, следовательно, $f = cf: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow V$ бикомпактно и $f^{-1}V \setminus U = \lambda(f^{-1}V \setminus U) \subseteq W$.

Докажем, что выполняется условие 3) определения 3. Отображение $f_R = f: (X \setminus f^{-1}(\tilde{g}R)) \rightarrow Y \setminus \tilde{g}R$ бикомпактно как сужение бикомпактного отображения cf на полный прообраз множества $Y \setminus \tilde{g}R$.

Таким образом, морфизм λ является приложением отображения f к подотображению $cf \setminus f$ отображения cf .

ТЕОРЕМА 4. Бикомпактное отображение $\tilde{g}: R \rightarrow Y$ является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова отображения $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда существуют хаусдорфова отображение $g: Z \rightarrow Y$, имеющее $\tilde{g}$ в качестве подотображения, и приложение λ отображения f к подотображению $\tilde{g}$ отображения g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть cf – бикомпактификация отображения f такая, что $cf \setminus f = \tilde{g}$. По лемме тождественный морфизм λ отображения f в cf является приложением отображения f к подотображению $\tilde{g} = cf \setminus f$ хаусдорфова отображения $g = cf$.

Пусть теперь существуют хаусдорфово отображение $g: Z \rightarrow Y$, имеющее $\tilde{g}$ в качестве подотображения, и приложение λ отображения f к подотображению $\tilde{g}$ отображения g . Тогда по теореме 3 существует бикомпактификация $cf: cfX \rightarrow Y$ отображения f такая, что $cf \setminus f = \tilde{g}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае одноточечного пространства Y из определения 3 получается новое определение приложения пространства X к бикомпакту B в пространстве Z , которое отличается от определения 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение $f: X \rightarrow Z$ называется *приложением пространства X к бикомпакту B в пространстве Z* , если:

- 1) $B \subseteq [f(X \setminus U)]_Z$ для любого открытого и ограниченного в X множества U ;
- 2) для любой окрестности W бикомпакта B в пространстве Z существует ограниченное в X множество U такое, что $f(X \setminus U) \subseteq W$.

В случае одноточечного пространства Y из доказанной теоремы 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Верны следующие утверждения:*

- 1) бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда существует приложение пространства X к бикомпакту B в хаусдорфовом пространстве Z в смысле определения 4;
- 2) бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда существует приложение пространства X к бикомпакту B в хаусдорфовом пространстве Z в смысле определения 2.

§ 3. Описание всех наростов тихоновских бикомпактификаций локально бикомпактных тихоновских отображений

Обобщим результат теоремы 2 на локально бикомпактные тихоновские отображения.

Напомним, что непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется:

- а) *T_0 -отображением*, если для любых двух точек x и x' из X таких, что $x \neq x'$, $f(x) = f(x')$, хотя бы для одной из них найдется в X окрестность, не содержащая другую точку;
- б) *функционально хаусдорфовым*, если для любых двух точек x и x' из X таких, что $x \neq x'$, $f(x) = f(x')$, найдется окрестность O точки $f(x)$, в прообразе которой $f^{-1}O$ множества $\{x\}$ и $\{x'\}$ функционально отделимы;
- в) *вполне регулярным*, если для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого в X множества F , не содержащего точку x , найдется окрестность O точки $f(x)$, в прообразе которой $f^{-1}O$ множества $\{x\}$ и F функционально отделимы.

Вполне регулярное T_0 -отображение называется *тихоновским*.

ТЕОРЕМА 5. *Бикомпактное тихоновское отображение $\tilde{g}: R \rightarrow Y$ является наростом некоторой тихоновской бикомпактификации локально бикомпактного тихоновского отображения $f: X \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда существуют тихоновское отображение $g: Z \rightarrow Y$, имеющее $\tilde{g}$ в качестве подотображения, и приложение λ отображения f к подотображению $\tilde{g}$ отображения g .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что бикомпактное тихоновское отображение $\tilde{g}: R \rightarrow Y$ является наростом некоторой тихоновской бикомпактификации cf локально бикомпактного тихоновского отображения $f: X \rightarrow Y$. По лемме тождественный морфизм отображения f в cf является приложением отображения f к подотображению $\tilde{g} = cf \setminus f$ тихоновского отображения $g = cf$.

Пусть теперь существуют тихоновское отображение $g: Z \rightarrow Y$, имеющее $\tilde{g}$ в качестве подотображения, и приложение λ отображения f к подотображению $\tilde{g}$ отображения g . По теореме 3 существуют бикомпактификация $cf: cfX \rightarrow Y$ отображения f такая, что $cf \setminus f = \tilde{g}$, и морфизм $c\lambda: cf \rightarrow g$ такой, что $c\lambda$ является продолжением морфизма λ и $c\lambda: cf \setminus f \rightarrow \tilde{g}$ есть изоморфизм $cf \setminus f$ на $\tilde{g}$.

Докажем, что отображение cf тихоновское. Поскольку отображение cf бикомпактно и хаусдорфово, то для этого достаточно доказать функциональную хаусдорфовость отображения cf во всех точках cfX .

Пусть $r_1, r_2 \in cfX \setminus X$, $r_1 \neq r_2$, $cf(r_1) = cf(r_2) = y$. Так как $c\lambda(r_1) \equiv r_1$, $c\lambda(r_2) \equiv r_2$ и отображение g является тихоновским, то существуют окрестность V точки y и функция $\varphi: g^{-1}V \rightarrow [0, 1]$ такая, что $r_1 \in \varphi^{-1}(0)$ и $r_2 \in \varphi^{-1}(1)$. Определим функцию $\varphi': (cf)^{-1}V \rightarrow [0, 1]$ так, что $\varphi' = \varphi \circ c\lambda$. Эта функция непрерывна, $r_1 \in (\varphi')^{-1}(0)$ и $r_2 \in (\varphi')^{-1}(1)$. Таким образом, отображение cf в точках множества $cfX \setminus X$ функционально хаусдорфово.

Докажем, что отображение cf в точках множества X вполне регулярно. Пусть $x \in X$ и O – произвольная окрестность точки x в cfX . Поскольку отображение f локально бикомпактно, то существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y такие, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f: [U]_{f^{-1}V} \rightarrow f^{-1}V$ бикомпактно. Можно считать, что $O \subseteq U$. Отображение f тихоновское, значит, не ограничивая общности рассуждений, для окрестности V точки y существует функция $\varphi: f^{-1}V \rightarrow [0, 1]$ такая, что $x \in \varphi^{-1}(0)$ и $f^{-1}V \setminus O \subseteq \varphi^{-1}(1)$. Определим функцию $\tilde{\varphi}: (cf)^{-1}V \rightarrow [0, 1]$ так, что $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, если $x \in f^{-1}V$, и $\tilde{\varphi} = 1$, если $x \in (cf)^{-1}V \setminus f^{-1}V$. Так как $(cf)^{-1}V = [U]_{f^{-1}V} \cup ((cf)^{-1}V \setminus U)$, функция $\tilde{\varphi}$ непрерывна на замкнутом в $(cf)^{-1}V$ множестве $[U]_{f^{-1}V}$ и тождественно равна 1 на замкнутом в $(cf)^{-1}V$ множестве $(cf)^{-1}V \setminus U$, то функция $\tilde{\varphi}: (cf)^{-1}V \rightarrow [0, 1]$ непрерывна, $x \in \tilde{\varphi}^{-1}(0)$ и $(cf)^{-1}V \setminus O \subseteq \tilde{\varphi}^{-1}(1)$. Таким образом, отображение cf в точках множества X вполне регулярно. Отображение cf хаусдорфово, следовательно, в точках множества X оно функционально хаусдорфово.

Докажем функциональную хаусдорфовость отображения cf в произвольных точках $x \in X$ и $r \in cfX \setminus X$, где $cf(x) = cf(r) = y$. Множество $(cf)^{-1}V \setminus f^{-1}V$ не содержит точку x и замкнуто в слое $(cf)^{-1}V$ для любой окрестности V точки y , отображение cf вполне регулярно в точках множества X . Значит, точка x

и множество $(cf)^{-1}V \setminus f^{-1}V$ функционально отделимы в прообразе некоторой окрестности точки y . Точка r принадлежит $(cf)^{-1}V \setminus f^{-1}V$, следовательно, функционально отделимы точки x и r . Таким образом, отображение cf функционально хаусдорфово в произвольных точках $x \in X$ и $r \in c_f X \setminus X$. Теорема доказана.

Список литературы

1. K. D. Magill, jr., “A note on compactifications”, *Math. Z.*, **94**:5 (1966), 322–325.
2. I. V. Bludova, G. Nardo, “On the posets of all the Hausdorff and all the Tychonoff compactifications of mappings”, *Questions Answers Gen. Topology*, **17**:1 (1999), 47–55.
3. Б. А. Пасынков, “О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств”, *Отображения и функторы*, Изд-во МГУ, М., 1984, 72–102.
4. Э. Н. Белянова, “Описание всех T_2 -бикомпактификаций локально бикомпактного T_2 -пространства”, *Науч. тр. МПГУ*, Прометей, М., 2004, 13–19.

Э. Н. БЕЛЯНОВА (E. N. BELYANOVA)
Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: elvbel@rol.ru

Поступило в редакцию
07.02.2006