Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тихомиров, Модули математических инстантонных векторных расслоений с четным c_2 на проективном пространстве, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 6, 139–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:38:00

УДК 512.723

А. С. Тихомиров

Модули математических инстантонных векторных расслоений с четным c_2 на проективном пространстве

Исследуется проблема неприводимости пространства модулей I_n инстантонных векторных расслоений ранга 2 со вторым классом Черна $n \geq 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ (неприводимость I_n для нечетных значений n была доказана автором в 2012 г.). Доказана неприводимость пространства I_n для произвольного четного значения $n \geq 2$, что влечет неприводимость I_n для всех $n \geq 1$.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: векторные расслоения, математические инстантоны, пространство модулей.

DOI: 10.4213/im7952

§ 1. Введение

Математическим n -инстантонным векторным расслоением (кратко *n -инстантоном*) на 3-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ называется алгебраическое векторное расслоение E ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = n, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

удовлетворяющее условиям

$$h^0(E) = h^1(E(-2)) = 0. \quad (1.2)$$

Обозначим через I_n множество классов изоморфизма n -инстантонов. Это пространство не пусто для любого $n \geq 1$ (см., например, [1, § 1]). Из условия $h^0(E) = 0$, налагаемого на n -инстантон E , следует, что расслоение E стабильно в смысле Гизекера–Маруямы. Поэтому I_n является подмножеством схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 0)$ полустабильных пучков ранга 2 без кручения на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = n$, $c_3 = 0$. Условие $h^1(E(-2)) = 0$ для $[E] \in I_n$ (называемое *инстантонным условием*) в силу полунепрерывности влечет, что I_n – открытое по Зарискому подмножество в $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 0)$, т. е. I_n является квазипроективной схемой, которая называется *схемой модулей математических n -инстантонов*.

В настоящей статье исследуется проблема неприводимости схемы I_n (об истории этой проблемы см. [1, § 1]). В работе [1] автор доказал, что для любого нечетного $n \geq 1$ пространство I_n как схема неприводимо, приведено (т. е. является целой схемой) и имеет размерность $8n - 3$. В настоящей статье завершается

исследование проблемы неприводимости схемы I_n . А именно, мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого четного натурального числа $n \geq 2$ схема модулей I_n математических n -инстантонов является целой схемой размерности $8n - 3$.*

Из теоремы 1.1 и полученного результата для нечетных n вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Для любого натурального числа n схема модулей I_n математических n -инстантонов является целой схемой размерности $8n - 3$.*

Представим кратко содержание статьи. В § 2 мы вводим обозначения и напоминаем известное описание математических инстантонов посредством связок квадрик, которое будет использоваться в статье, а также доказываем основной результат статьи – теорему 1.1. Наше доказательство отчасти аналогично доказательству основного результата работы [1] и существенно основано на другом ключевом результате из [1], касающемся целостности схемы Z_m , введенной в [1, § 7]. В доказательстве мы используем один результат общего положения для связок квадрик – теорему 3.1, доказательство которой занимает оставшуюся часть статьи. В § 4 изучаются свойства инстантонных связок квадрик по той же схеме, как и в [1, § 11]. Результаты этого параграфа затем используются в § 5 для доказательства теоремы 3.1.

Автор благодарит за поддержку Математический институт им. М. Планка в г. Бонне, где во время пребывания автора зимой 2011 г. была начата работа над настоящей статьей.

§ 2. Инстантоны и связки квадрик. Множество MI_n

2.1. Обозначения и соглашения. В настоящей статье мы пользуемся обозначениями и соглашениями из работы [1]. Основное поле $\mathbf{k}$ предполагается алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Мы отождествляем векторные расслоения с локально свободными пучками. Если $\mathcal{F}$ – пучок $\mathcal{O}_X$ -модулей на алгебраическом многообразии или схеме X , то через $n\mathcal{F}$ обозначается прямая сумма n копий пучка $\mathcal{F}$, $H^i(\mathcal{F})$ – i -я группа когомологий пучка $\mathcal{F}$, $h^i(\mathcal{F}) := \dim H^i(\mathcal{F})$, а $\mathcal{F}^\vee$ – пучок, двойственный к $\mathcal{F}$, т.е. пучок $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$. Если $X = \mathbb{P}^r$ и t – целое число, то через $\mathcal{F}(t)$ мы обозначаем пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(t)$. Через $[\mathcal{F}]$ обозначается класс изоморфизма пучка $\mathcal{F}$. Для произвольного морфизма $\mathcal{O}_X$ -пучков $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ и произвольного $\mathbf{k}$ -векторного пространства U (соответственно, произвольного гомоморфизма $f: U \rightarrow U'$ $\mathbf{k}$ -векторных пространств) мы будем для краткости обозначать той же буквой f индуцированный морфизм пучков $\mathrm{id} \otimes f: U \otimes \mathcal{F} \rightarrow U \otimes \mathcal{F}'$ (соответственно, индуцированный морфизм пучков $f \otimes \mathrm{id}: U \otimes \mathcal{F} \rightarrow U' \otimes \mathcal{F}$).

Всюду далее через V обозначается фиксированное векторное пространство размерности 4 над $\mathbf{k}$, и мы полагаем $\mathbb{P}^3 := P(V)$. Сохраним буквы u и v для

обозначения двух морфизмов в точной последовательности Эйлера

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{u} V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{v} T_{\mathbb{P}^3}(-1) \rightarrow 0.$$

Для произвольных $\mathbf{k}$ -векторных пространств U и W и произвольного вектора

$$\varphi \in \text{Hom}(U, W \otimes \wedge^2 V^\vee) \subset \text{Hom}(U \otimes V, W \otimes V^\vee),$$

понимаемого как гомоморфизм $\varphi : U \otimes V \rightarrow W \otimes V^\vee$, или, что то же, как гомоморфизм $\sharp\varphi : U \rightarrow W \otimes \wedge^2 V^\vee$, будем обозначать через $\tilde{\varphi}$ композицию

$$U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\sharp\varphi} W \otimes \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\varepsilon} W \otimes \Omega_{\mathbb{P}^3}(2),$$

где ε – индуцированный морфизм в точной тройке

$$0 \rightarrow \wedge^2 \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) \xrightarrow{\wedge^2 v^\vee} \wedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow 0,$$

получаемой переходом ко вторым внешним степеням в двойственной точной последовательности Эйлера.

Далее, для произвольного натурального числа n через H_n и H'_n обозначены фиксированные n -мерные векторные пространства над $\mathbf{k}$. Везде далее для $m \geq 1$ мы обозначаем через $\mathbf{S}_m$ векторное пространство $S^2 H_m^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$.

Все рассматриваемые в статье схемы являются нётеровыми. Под неприводимой схемой понимается схема, подлежащее топологическое пространство которой неприводимо. Под целой схемой мы понимаем приведенную неприводимую схему. Кроме того, под размерностью данной схемы понимается максимальная из размерностей ее неприводимых компонент. Под общей точкой неприводимой (но не обязательно приведенной) схемы $\mathcal{X}$ мы подразумеваем произвольную замкнутую точку, принадлежащую некоторому плотному открытому подмножеству в $\mathcal{X}$.

2.2. Инстантоны и связки квадрик. Множество MI_n . Здесь мы напомним хорошо известное описание математических инстантонов посредством связок квадрик (см., например, [1, § 3]). Связкой квадрик в пространстве H_n называем произвольную точку $A \in \mathbf{S}_n = S^2 H_n^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$. Интерпретируя точку A как гомоморфизм $A : H_n \otimes V \rightarrow H_n^\vee \otimes V^\vee$, положим $W_A := H_n \otimes V / \ker A$ и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker A & \longrightarrow & H_n \otimes V & \xrightarrow{c_A} & W_A \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow A & & \cong \downarrow q_A \\ 0 & \longleftarrow & \ker A^\vee & \longleftarrow & H_n^\vee \otimes V^\vee & \xleftarrow{-c_A^\vee} & W_A^\vee \longleftarrow 0 \end{array} \quad (2.1)$$

где $q_A : W_A \xrightarrow{\cong} W_A^\vee$ – индуцированный антиавтอดуальный изоморфизм, а c_A – канонический эпиморфизм. Эпиморфизм c_A определяет морфизм пучков

$$a_A : H_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{u} H_n \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{c_A} W_A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \quad (2.2)$$

и мы рассмотрим множество n -инстантных связок квадрик

$$MI_n := \left\{ A \in \mathbf{S}_n \left| \begin{array}{l} \text{(i) } \operatorname{rk}(A: H_n \otimes V \rightarrow H_n^\vee \otimes V^\vee) = 2n + 2; \\ \text{(ii) морфизм } a_A^\vee: W_A^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow H_n^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1), \text{ опреде-} \\ \text{ляемый в (2.2) по точке } A, \text{ сюръективен;} \\ \text{(iii) } h^0(E_2(A)) = 0, \text{ где } E_2(A) := \ker(a_A^\vee \circ q_A) / \operatorname{ima}_A, \\ \text{а } q_A: W_A \xrightarrow{\cong} W_A^\vee \text{ — симплектический изоморфизм,} \\ \text{определяемый связкой } A \text{ в диаграмме (2.1)} \end{array} \right. \right\}. \quad (2.3)$$

Условия (i)–(iii) в (2.3) (называемые *условиями Барта*) определяют монаду

$$0 \rightarrow H_n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{a_A} W_A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{{}^t a_A} H_n^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

$$E_2(A) = \ker({}^t a_A) / \operatorname{im}(a_A),$$

где ${}^t a_A := a_A^\vee \circ q_A$. Кроме того, эти условия показывают, что MI_n снабжено естественной структурой локально замкнутой подсхемы в векторном пространстве $\mathbf{S}_n$, и из (2.3) следует, что определен морфизм $\pi_n: MI_n \rightarrow I_n$, $A \mapsto [E(A)]$, являющийся главным $(\operatorname{GL}(H_n)/\{\pm \operatorname{id}\})$ -расслоением в этальной топологии (см. [2], [1, § 3]). Поэтому неприводимость I_n равносильна неприводимости схемы MI_n и равенство $\dim I_{2m} = 16m - 3$ равносильно равенству

$$\dim MI_{2m} = \dim(\operatorname{GL}(H_{2m})/\{\pm \operatorname{id}\}) + 16m - 3 = 4m^2 + 16m - 3. \quad (2.5)$$

Утверждение теоремы 1.1 для $m = 1, 2$ хорошо известно (см. [3]–[5]). Для $m \geq 3$ доказательство неприводимости схемы MI_{2m} и равенства (2.5) мы дадим в следующем параграфе. Рассуждение, показывающее, что схема I_{2m} приведена, проводится так же, как и в [1, § 7]. Этим завершается доказательство теоремы 1.1 для произвольного $m \geq 1$.

§ 3. Разложение $H_{2m} \simeq H_m \oplus H'_m$ и связанные с ним конструкции. Доказательство основной теоремы

3.1. Разложение $H_{2m} \simeq H_m \oplus H'_m$. Зафиксируем изоморфизм

$$\xi: H_m \oplus H'_m \xrightarrow{\cong} H_{2m}, \quad (3.1)$$

и пусть

$$H_m \xrightarrow{i_\xi} H_m \oplus H'_m \xleftarrow{i'_\xi} H'_m \quad (3.2)$$

— мономорфизмы прямых слагаемых.

Пользуясь этими обозначениями, мы можем представить связку квадрик $A \in \mathbf{S}_{2m}$, рассматриваемую как гомоморфизм $A: H_m \otimes V \oplus H'_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee \oplus (H'_m)^\vee \otimes V^\vee$, в виде $(8m \times 8m)$ -матрицы гомоморфизмов

$$A = \begin{pmatrix} A_1(\xi) & A_2(\xi) \\ -A_2(\xi)^\vee & A_3(\xi) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &\in \mathbf{S}_m, & A_2(\xi) &\in \Sigma_m := \text{Hom}(H_m, (H'_m)^\vee) \otimes \wedge^2 V^\vee, \\ A_3(\xi) &\in \mathbf{S}'_m := S^2(H'_m)^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этих обозначениях разложение (3.1) индуцирует изоморфизм

$$\tilde{\xi}: \mathbf{S}_m \oplus \Sigma_m \oplus \mathbf{S}'_m \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}_{2m}, \quad (A_1, A_2, A_3) \mapsto A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2^\vee & A_3 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

для которого

$$\tilde{\xi}^{-1}: A \mapsto (A_1(\xi), A_2(\xi), A_3(\xi)). \quad (3.6)$$

Заметим, что точка $A \in MI_{2m}$, рассматриваемая как матрица (3.3), имеет ранг $4m + 2$ согласно условию Барта (i) в (2.3). Пусть Isom_{2m} – множество всех изоморфизмов ξ из (3.1). Кроме того, пусть $\mathcal{S}_{2m} = \{[E] \in I_{2m} \mid \text{существует прямая } l \subset \mathbb{P}^3 \text{ максимального подскока для } E, \text{ т. е. такая прямая } l, \text{ что } h^0(E(-2m)|_l) \neq 0\}$. Как известно из [6], $\mathcal{S}_{2m}$ является замкнутым подмножеством размерности $12m + 2$ в I_{2m} . Поэтому, так как $\dim_{[E]} I_{2m} \geq 16m - 3$ в каждой точке $[E] \in I_{2m}$ (см., например, [1, § 3]), получаем, что $I'_{2m} := I_{2m} \setminus \mathcal{S}_{2m}$ – плотное открытое подмножество в I_{2m} и $MI'_{2m} := \pi_{2m}^{-1}(I'_{2m})$ – плотное открытое подмножество в MI_{2m} . При этом равенство (2.5) равносильно равенству

$$\dim MI'_{2m} = 4m^2 + 16m - 3. \quad (3.7)$$

Далее нам потребуется следующий результат, доказательство которого занимает § 4, 5 и который аналогичен результату из [1, теорема 4.1].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $m \geq 3$. Для произвольной инстантной связки квадрат $A \in MI'_{2m}$ и общего разложения $\xi \in \text{Isom}_{2m}$ в (3.1), дающего представление A в виде блочной матрицы вида (3.3), $(4m \times 4m)$ -подматрица $A_1(\xi)$ в A имеет ранг $4m$, т. е. является обратимой.

Для A и ξ , взятых из теоремы 3.1, после умножения матрицы A слева на обратимую матрицу гомоморфизмов

$$\begin{pmatrix} A_1(\xi)^{-1} & \mathbf{0} \\ A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} & \text{id}_{(H'_m)^\vee \otimes V^\vee} \end{pmatrix}$$

имеем следующую матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \text{id}_{H'_m \otimes V^\vee} & A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi) \\ \mathbf{0} & A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi) + A_3(\xi) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Поскольку $\text{rk } \tilde{A} = \text{rk } A = 4m + 2$, находим следующее соотношение между матрицами $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ и $A_3(\xi)$:

$$\text{rk}(A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi) + A_3(\xi)) = 2. \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) будет играть важную роль в дальнейшем при описании множества MI_{2m} .

Для произвольного $\xi \in \text{Isom}_{2m}$ введем по аналогии с [1, (4.12)] следующее обозначение:

$$MI_{2m}(\xi) := \{A \in MI'_{2m} \mid \text{гомоморфизм } A_1(\xi) \text{ в (3.3) обратим}\}. \quad (3.10)$$

С учетом этого обозначения имеем следующий результат, аналогичный [1, теорема 4.3].

ТЕОРЕМА 3.2. (i) Для $m \geq 3$ множества $MI_{2m}(\xi)$, $\xi \in \text{Isom}_{2m}$, являются плотными открытыми подмножествами в MI'_{2m} и составляют открытое покрытие множества MI'_{2m} .

(ii) Для произвольного $\xi \in \text{Isom}_{2m}$ и произвольной точки $A \in MI_{2m}(\xi)$ имеет место соотношение (3.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) получается повторением доказательства теоремы 4.3 из [1] с заменой $2m + 1$ на $2m$.

Утверждение (ii) является следствием из (3.9) и теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из теоремы 3.2 и равенства (3.7) следует, что неприводимость MI_{2m} эквивалентна неприводимости $MI_{2m}(\xi)$ для произвольного $\xi \in \text{Isom}_{2m}$, а равенство (2.5) равносильно равенству $\dim MI_{2m}(\xi) = 4m^2 + 16m - 3$ для произвольного $\xi \in \text{Isom}_{2m}$.

3.2. Множества Y_m и Y_m^0 . Биекция между $MI_{2m}(\xi)$ и Y_m^0 . Рассмотрим вложение грассманиана

$$G := \text{Gr}(2, (H'_m)^\vee \otimes V^\vee) \hookrightarrow P(\wedge^2((H'_m)^\vee \otimes V^\vee)),$$

и пусть $KG \subset \wedge^2((H'_m)^\vee \otimes V^\vee)$ – аффинный конус над G . Положим $KG^* := KG \setminus \{0\}$. Перепишем (3.9) в виде

$$A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi) + A_3(\xi) \in KG^*, \quad \xi \in \text{Isom}_{2m}, \quad (3.11)$$

где

$$A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi) \in \wedge^2((H'_m)^\vee \otimes V^\vee), \quad A_3(\xi) \in \mathbf{S}'_m \quad (3.12)$$

(ср. (3.4)). Положим

$$\mathbf{S}_m^0 := \{A \in \mathbf{S}_m \mid \text{гомоморфизм } A: H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee \text{ обратим}\} \quad (3.13)$$

и рассмотрим множество

$$Y_m := \{(A_1, A_2, C) \in \mathbf{S}_m^0 \times \Sigma_m \times KG^* \mid C - A_2^\vee \circ A_1^{-1} \circ A_2 \in \mathbf{S}'_m\}. \quad (3.14)$$

Пусть $\Lambda'_m := \wedge^2(H'_m)^\vee \otimes S^2V^\vee$ и

$$\text{pr}_2: \wedge^2((H'_m)^\vee \otimes V^\vee) = \mathbf{S}'_m \oplus \Lambda'_m \rightarrow \Lambda'_m$$

– проекция на прямое слагаемое. Перепишем определение Y_m из (3.14) в виде

$$Y_m := \{(A_1, A_2, C) \in \mathbf{S}_m^0 \times \Sigma_m \times KG^* \mid \text{pr}_2(C - A_2^\vee \circ A_1^{-1} \circ A_2) = 0\}. \quad (3.15)$$

Поскольку для произвольной точки $y = (A_1, A_2, C) \in Y_m$ точка $\tilde{\xi}(A_1, A_2, C - A_2^\vee \circ A_1^{-1} \circ A_2)$ лежит в $\mathbf{S}_{2m}$, а значит, может рассматриваться как гомоморфизм

$$A_y: (H_m \oplus H'_m) \otimes V \rightarrow (H_m \oplus H'_m)^\vee \otimes V^\vee$$

ранга $4m + 2$, то определено $(4m + 2)$ -мерное векторное пространство

$$W_{4m+2}(y) := (H_m \oplus H'_m) \otimes V / \ker A_y$$

вместе с каноническим эпиморфизмом

$$c_y: (H_m \oplus H'_m) \otimes V \twoheadrightarrow W_{4m+2}(y)$$

и индуцированным антиавтодуальным изоморфизмом

$$q_y: W_{4m+2}(y) \xrightarrow{\sim} W_{4m+2}(y)^\vee$$

такими, что

$$A_y = c_y^\vee \circ q_y \circ c_y.$$

Поэтому корректно определены морфизм пучков

$$a_y: (H_m \oplus H'_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{u} (H_m \oplus H'_m) \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{c_y} W_{4m+2}(y) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$$

и транспонированный к нему морфизм

$${}^t a_y = a_y^\vee \circ q_y: W_{4m+2}(y) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow (H_m \oplus H'_m)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1).$$

Рассмотрим следующее открытое подмножество Y_m^0 множества Y_m :

$$Y_m^0 := \left\{ y \in Y_m \left| \begin{array}{l} \text{(i) } {}^t a_y \text{ — эпиморфизм;} \\ \text{(ii) } h^0(\ker {}^t a_y / \operatorname{im} a_y) = 0 \\ \text{и } [\ker {}^t a_y / \operatorname{im} a_y] \notin \mathcal{S}_{2m} \end{array} \right. \right\}. \quad (3.16)$$

(Условия (i) и (ii) в (3.16) для точки y , очевидно, являются открытыми.)

Теперь для произвольного $\xi \in \operatorname{Isom}_{2m}$ получаем изоморфизм между $MI_{2m}(\xi)$ и Y_m^0 , рассматриваемыми как приведенные схемы

$$f: MI_{2m}(\xi) \xrightarrow{\sim} Y_m^0, \quad (3.17)$$

который задается формулами

$$f: A \mapsto (A_1(\xi), A_2(\xi), A_2(\xi)^\vee \circ A_1(\xi)^{-1} \circ A_2(\xi) + A_3(\xi)), \quad (3.18)$$

$$f^{-1}: (A_1, A_2, C) \mapsto \tilde{\xi}(A_1, A_2, C - A_2^\vee \circ A_1^{-1} \circ A_2). \quad (3.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Проблема неприводимости MI_{2m} с учетом замечания 3.3 сводится к неприводимости Y_m^0 . Поскольку Y_m^0 — непустое открытое подмножество в Y_m , то достаточно доказать неприводимость Y_m . Более того, из замечания 3.3 также следует, что (2.5) равносильно равенству $\dim Y_m = 4m^2 + 16m - 3$.

3.3. Неприводимость Y_m . Доказательство основной теоремы. Положим

$$\tilde{Y}_m := \{(A_1, A_2, C) \in \mathbf{S}_m^0 \times \Sigma_m \times KG \mid \text{pr}_2(C - A_2^\vee \circ A_1^{-1} \circ A_2) = 0\}. \quad (3.20)$$

Сравнивая определение $\tilde{Y}_m$ с определением множества Y_m в (3.15), мы видим, что Y_m открыто в $\tilde{Y}_m$, поэтому для получения неприводимости Y_m достаточно доказать неприводимость $\tilde{Y}_m$.

Докажем неприводимость $\tilde{Y}_m$. Полагая $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 := \{A \in \mathbf{S}_m^\vee \mid A: H_m^\vee \otimes V^\vee \rightarrow H_m \otimes V \text{ обратим}\}$, перепишем определение $\tilde{Y}_m$ в виде

$$\tilde{Y}_m := \{(A, B, C) \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Sigma_m \times KG \mid \text{pr}_2(C - B^\vee \circ A \circ B) = 0\}. \quad (3.21)$$

Отсюда следует, что для произвольной точки $y \in \tilde{Y}_m$

$$\begin{aligned} \dim_y \tilde{Y}_m &\geq \dim(\mathbf{S}_m^\vee)^0 + \dim \Sigma_m + \dim KG - \dim \mathbf{L}_m \\ &= 3m(m+1) + 6m^2 + 8m - 3 - 5m(m-1) = 4m^2 + 16m - 3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее, из определения $\tilde{Y}_m$ вытекает, что $\tilde{Y}_m$ — замкнутая подсхема в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Sigma_m \times KG$, задаваемая уравнениями

$$\text{pr}_2(C - B^\vee \circ A \circ B) = 0. \quad (3.23)$$

Рассмотрим проекцию

$$\pi: \tilde{Y}_m \rightarrow KG, \quad (A, B, C) \mapsto C. \quad (3.24)$$

Нулевой слой $\pi^{-1}(0)$ проекции π схемно-теоретически описывается следующим образом:

$$\pi^{-1}(0) = \{(A, B) \in (\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Sigma_m \mid \text{pr}_2(B^\vee \circ A \circ B) = 0\}. \quad (3.25)$$

Данное описание показывает, что $\pi^{-1}(0)$ как схема совпадает со схемой Z_m , определенной в [1, § 7, формула (7.5)]. Из [1, теорема 7.2] известно, что Z_m — целая подсхема в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Sigma_m$ размерности

$$\dim \pi^{-1}(0) = \dim Z_m = 4m(m+2). \quad (3.26)$$

Сравнивая (3.26) с (3.22), имеем

$$\dim_y \tilde{Y}_m \leq (8m-3) + 4m(m+2) = \dim KG + \dim \pi^{-1}(0). \quad (3.27)$$

Теперь рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{A}^N := \mathbf{S}_m^\vee \times \Sigma_m$, $N = 3m(m+1)$ и его стандартное пополнение $\mathbb{P}^N := \mathbb{A}^N \cup \mathbb{P}_\infty^{N-1}$. Дополнение T к $(\mathbf{S}_m^\vee)^0$ в $\mathbf{S}_m^\vee$ есть гиперповерхность, которая является конусом с вершиной в $\{0\} \times \Sigma_m$; соответственно, $\mathbb{T} = T \times \Sigma_m$ — конус в $\mathbb{A}^N$ с вершиной в $\{0\} \times \Sigma_m$, и его замыкание $\overline{\mathbb{T}}$ в $\mathbb{P}^N$ пересекает $\mathbb{P}_\infty^{N-1}$ по гиперповерхности, которую мы обозначим через D_T . Пусть $U_T := \mathbb{P}_\infty^{N-1} \setminus D_T$.

Заметим, что по определению Z_m является конусом в $(\mathbf{S}_m^\vee)^0 \times \Sigma_m = \mathbb{A}^N \setminus \mathbb{T}$ с удаленной вершиной $\{0\} \times \Sigma_m$, поэтому его пополнение в $\mathbb{P}^N$ пересекает U_T по многообразию, которое мы обозначим через $\underline{Z}_U$, задаваемому уравнениями $B^\vee \circ A \circ B \in \mathbf{S}_m$, где элементы матриц A и B рассматриваются как однородные координаты в $\mathbb{P}_\infty^{N-1}$. Пусть схема $\underline{Z}_m$ – схемное замыкание схемы $\underline{Z}_U$ в $\mathbb{P}_\infty^{N-1}$ в смысле [7, гл. II, упражнение 3.11, (d)]. Поскольку схема Z_m приведена и неприводима, отсюда следует, что схема $\underline{Z}_m$ также приведена и неприводима.

Далее, пусть $\mathbf{Y}_m$ – замыкание $\tilde{Y}_m$ в $\mathbb{P}^N \times KG$. Уравнения (3.23), очевидно, продолжаются до уравнений $\mathbf{Y}_m$ в $(\mathbb{P}^N \setminus \overline{\mathbb{T}}) \times KG$, и из этих уравнений вытекает, что для произвольной точки $x \in KG$ имеет место равенство

$$\mathbb{P}_\infty^{N-1} \times \{x\} \cap \mathbf{Y}_m = \underline{Z}_m \times \{x\}. \quad (3.28)$$

Из (3.26) и (3.28) следует, что

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{Y}_m &= \dim \underline{Z}_m + \dim KG = \dim Z_m + \dim KG \\ &= 4m(m+2) + 8m - 3 = 4m^2 + 16m - 3. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Поскольку $\mathbb{P}_\infty^{N-1}$ – гиперплоскость в $\mathbb{P}^N$, соотношение (3.29) вместе с неприводимостью схем $\underline{Z}_m$ и KG немедленно влечет неприводимость множества $\mathbf{Y}_m$, а значит, и множеств $\tilde{Y}_m$, Y_m . При этом (3.29) влечет равенства $\dim Y_m = \dim \mathbf{Y}_m = 4m^2 + 16m - 3$. Отсюда и из замечания 3.4 вытекает утверждение теоремы 1.1.

§ 4. Результат общего положения для $2m$ -инстантонных связок квадрик

В этом параграфе мы докажем один результат общего положения для $2m$ -инстантонных связок квадрик – теорему 4.1. Мы воспользуемся этим результатом при доказательстве теоремы 3.1, которое будет дано в следующем параграфе.

Зафиксируем натуральное число $m \geq 3$ и $2m$ -инстантон E такие, что $[E] \in I'_{2m}$, и обозначим $H_{2m} = H^2(E(-3))$, $W_{4m-2} = H^2(E(-4))$ и $W_{4m+2} = H^2(E \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-4))$. Точная последовательность Эйлера индуцирует следующую точную тройку:

$$0 \rightarrow E(-4) \rightarrow V \otimes E(-3) \rightarrow E \otimes T_{\mathbb{P}^3}(-4) \rightarrow 0,$$

из которой вытекает точная тройка когомологий

$$0 \rightarrow W_{4m-2} \rightarrow H_{2m} \otimes V \rightarrow W_{4m+2} \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Тройку (4.1) можно отождествить с верхней тройкой в коммутативной диаграмме (2.1), где $n = 2m$, A – связка квадрик из MI'_{2m} такая, что $E = E(A)$,

$W_A = W_{4m+2}$ и $W_{4m-2} = \ker A$. Имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & W_{4m-2} & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V & \xrightarrow{c_A} & W_{4m+2} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow A & & \downarrow \cong q_A \\
 0 & \longleftarrow & W_{4m-2}^\vee & \longleftarrow & H_{2m}^\vee \otimes V^\vee & \xleftarrow{-c_A^\vee} & W_{4m+2}^\vee \longleftarrow 0
 \end{array} \quad (4.2)$$

Заметим, что в этих обозначениях монада (2.4) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) &\xrightarrow{a_A} W_{4m+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{t_{a_A}} H_{2m}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow 0, \\
 E &= \ker({}^t a_A) / \operatorname{im} a_A.
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $m \geq 3$, и пусть $A \in MI'_{2m} - 2m$ -инстантонная связка квадрик. Для $E = E(A)$ рассмотрим векторные пространства $H_{2m} = H^2(E(-3))$ и $W_{4m-2} = H^2(E(-4))$ вместе с мономорфизмом $W_{4m-2} \hookrightarrow H_{2m} \otimes V$, определенным в (4.1). Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Для общего m -мерного подпространства V_m в H_{2m} имеем

$$W_{4m-2} \cap V_m \otimes V = \{0\}.$$

Более того, пусть $G = \operatorname{Gr}(m, H_{2m})$ – грассманиан m -мерных подпространств в H_{2m} , и пусть $D(A) = \{V_m \in G \mid W_{4m-2} \cap V_m \otimes V \neq \{0\}\}$. Тогда

$$\operatorname{codim}_G D(A) \geq 2. \quad (4.4)$$

(ii) Для общего $(m+1)$ -мерного подпространства V_{m+1} в H_{2m} имеем

$$\dim(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) = 2. \quad (4.5)$$

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 4.1, напомним один элементарный результат о детерминантных многообразиях (см. [1, § 11]). Для формулировки этого результата дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть U и U' – векторные пространства размерностей m и n соответственно, $m \geq n$. Рассмотрим проективное пространство $P(U \otimes U')$. Будем говорить, что точка $x \in P(U \otimes U')$ имеет ранг r (и обозначим это $\operatorname{rk}(x) = r$), если:

(i) существуют единственное подпространство $U_r(x) \subset U$ и единственное подпространство $U'_r(x) \subset U'$ размерности $\dim U_r(x) = \dim U'_r(x) = r$ такие, что $x \in P(U_r(x) \otimes U'_r(x))$;

(ii) не существует подпространств $\tilde{U} \subset U$ и $\tilde{U}' \subset U'$ размерности $\dim \tilde{U} = \dim \tilde{U}' < r$ таких, что $x \in P(\tilde{U} \otimes \tilde{U}')$.

Результат, который нам потребуется, составляет содержание следующей леммы (см. [1, лемма 11.2]).

ЛЕММА 4.3. *Каждая точка $x \in P(U \otimes U')$ имеет однозначно определенный ранг $1 \leq \text{rk}(x) \leq n$. Более того, для данной точки $x \in P(U \otimes U')$ ранга r такой, что $x \in W \otimes W'$ для некоторых подпространств $W \subset U$ и $W' \subset U'$, подпространства $U_r(x) \subset U$ и $U'_r(x) \subset U'$ размерности $\dim U_k(x) = \dim U'_k(x) = r$ из определения 4.2, (i) таковы, что $U_r(x) \subset W$ и $U'_r(x) \subset W'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. В соответствии с определением 4.2, в котором мы полагаем $U = H_{2m}$, $U' = V$, каждая точка $x \in P(H_{2m} \otimes V)$ имеет ранг¹ $\text{rk}(x)$, $1 \leq \text{rk}(x) \leq \dim V = 4$. Таким образом,

$$P(W_{4m-2}) = \bigcup_{r=1}^4 Z_r, \quad (4.6)$$

где

$$Z_r := \{x \in P(W_{4m-2}) \mid \text{rk}(x) = r\}, \quad 1 \leq r \leq 4,$$

– локально замкнутые подмножества в $P(W_{4m-2})$. Рассмотрим локально замкнутые подмножества грассманиана $G = \text{Gr}(m, H_{2m})$, определенные как

$$\Sigma_r := \{V_m \in G \mid \exists x \in Z_r: V_m \supset U_r(x)\}, \quad 1 \leq r \leq 4. \quad (4.7)$$

Ввиду леммы 4.3 условие $x \in Z_r \cap P(V_m \otimes V)$ означает, что $x \in Z_r \cap P(U_r \otimes V)$ для некоторого r -мерного подпространства $U_r = U_r(x) \subset V_m$. Отсюда и из соотношений (4.6) и (4.7) получаем

$$\{V_m \in G \mid P(V_m \otimes V) \cap P(W_{4m-2}) \neq \emptyset\} = \bigcup_{r=1}^4 \Sigma_r.$$

В этих обозначениях утверждение (i) теоремы означает, что $\bigcup_{r=1}^4 \Sigma_r \subsetneq G$ и, более того, $\text{codim}_G(\bigcup_{r=1}^4 \Sigma_r) \geq 2$. Таким образом, для доказательства этого утверждения достаточно показать, что

$$\text{codim}_G \Sigma_r \geq 2, \quad 1 \leq r \leq 4. \quad (4.8)$$

Далее, рассмотрим грассманиан

$$\tilde{G} = \text{Gr}(m+1, H_{2m})$$

и пусть

$$\tilde{\Sigma} := \{V_{m+1} \in \tilde{G} \mid \dim(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \geq 3\}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Sigma}_r := \{V_{m+1} \in \tilde{\Sigma} \mid P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_r \text{ — плотное открытое подмножество в } P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V)\}, \quad 1 \leq r \leq 4. \quad (4.10)$$

¹Всюду в этом доказательстве под рангом точки x из данного подпространства в пространстве $P(H_{2m} \otimes V)$ мы понимаем ее ранг как точки в $P(H_{2m} \otimes V)$.

Из (4.6), (4.9) и (4.10) следует, что $\tilde{\Sigma} = \bigcup_{r=1}^4 \tilde{\Sigma}_r$, и утверждение (ii) теоремы означает, что $\text{codim}_{\tilde{G}} \tilde{\Sigma} \geq 1$. Таким образом, для доказательства утверждения (ii) достаточно показать, что

$$\text{codim}_{\tilde{G}} \tilde{\Sigma}_r \geq 1, \quad 1 \leq r \leq 4. \quad (4.11)$$

Докажем соотношения (4.8) и (4.11) для $r = 4, 3, 2, 1$.

Случай $r = 4$. Положим $\Gamma_4 := \{(x, U) \in P(W_{4m-2}) \times \text{Gr}(4, H_{2m}) \mid \text{rk}(x) = 4, U = U_4(x)\}$, и пусть $P(W_{4m-2}) \xleftarrow{p_4} \Gamma_4 \xrightarrow{q_4} \text{Gr}(4, H_{2m})$ – проекции. По построению $p_4(\Gamma_4) = Z_4$ и проекция $p_4: \Gamma_4 \rightarrow Z_4$ является биекцией. Следовательно,

$$\dim q_4(\Gamma_4) \leq \dim \Gamma_4 = \dim Z_4 \leq \dim P(W_{4m-2}) = 4m - 3. \quad (4.12)$$

Рассмотрим график инцидencji

$$\Pi_4 = \{(U, V_m) \in q_4(\Gamma_4) \times \Sigma_4 \mid U \subset V_m\}$$

с сюръективными проекциями $q_4(\Gamma_4) \xleftarrow{\text{pr}_1} \Pi_4 \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_4$ и слоем

$$\text{pr}_1^{-1}(U) \simeq \text{Gr}(m - 4, H_{2m}/U) \quad (4.13)$$

над произвольной точкой $U \in q_4(\Gamma_4)$. (В самом деле, условие $U \subset V_m \subset H_{2m}$ означает, что $V_m/U \in \text{Gr}(m - 4, H_{2m}/U)$.) Следовательно,

$$\begin{aligned} \dim \Sigma_4 &\leq \dim \Pi_4 = \dim q_4(\Gamma_4) + \dim \text{Gr}(m - 4, H_{2m}/U) \\ &\leq 4m - 3 + (m - 4)m = m^2 - 3 = \dim G - 3, \end{aligned}$$

т. е. (4.8) верно для $r = 4$.

Теперь положим $R_4 := \{(x, U, V_{m+1}) \in P(W_{4m-2}) \times \text{Gr}(4, H_{2m}) \times \tilde{\Sigma}_4 \mid x \in P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_4, U = U_4(x) \subset V_{m+1}\}$, и пусть $\tilde{p}_4: R_4 \rightarrow P(W_{4m-2}) \times \text{Gr}(4, H_{2m})$ и $\tilde{q}_4: R_4 \rightarrow \tilde{\Sigma}_4$ – проекции. По построению $\tilde{p}_4(R_4) \subset \Gamma_4$, так что из (4.12) вытекает, что $\dim \tilde{p}_4(R_4) \leq 4m - 3$.

Далее, слой проекции $\tilde{p}_4$ над произвольной точкой $(x, U) \in \tilde{p}_4(R_4)$ изоморфен грассмариану $\text{Gr}(m - 3, H_{2m}/U)$, поэтому

$$\dim R_4 = \dim \tilde{p}_4(R_4) + \dim \text{Gr}(m - 3, H_{2m}/U) \leq 4m - 3 + (m - 3)(m - 1) = m^2.$$

Кроме того, ввиду (4.10) слой проекции $\tilde{q}_4: R_4 \rightarrow \tilde{\Sigma}_4$ над произвольной точкой $V_{m+1} \in \tilde{\Sigma}_4$ есть открытое плотное подмножество $P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_4$ проективного пространства $P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V)$, а значит, с учетом (4.9) оно имеет размерность ≥ 2 . Таким образом, $\dim \tilde{\Sigma}_4 \leq m^2 - 2 = \dim \tilde{G} - 1$, т. е. соотношение (4.11) выполнено для $r = 4$.

Случай $r = 3$. Рассмотрим проекцию $f_3: Z_3 \rightarrow P(V^\vee) = (\mathbb{P}^3)^\vee$, $x \mapsto V_3(x)$, где пара $(U_3(x), V_3(x))$ трехмерных пространств таких, что $U_3(x) \subset H_{2m}$ и $V_3(x) \subset V$, определена однозначно по точке x в силу условия $x \in P(U_3(x) \otimes V_3(x))$, поскольку $\text{rk}(x) = 3$ (см. определение 4.2 и лемму 4.3). Теперь для произвольного трехмерного подпространства $V_3 \subset V$ положим

$$\Sigma_3(V_3) = \{V_m \in G \mid \exists x \in f_3^{-1}(V_3): V_m \supset U_3(x)\}. \quad (4.14)$$

Сравнивая это с (4.7) для $r = 3$, находим

$$\Sigma_3 = \bigcup_{V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee} \Sigma_3(V_3). \quad (4.15)$$

Получим теперь оценку размерности множества $\Sigma_3(V_3)$ для произвольного трехмерного подпространства V_3 в V . Это подпространство определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) & \equiv & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & V_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & V_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^3}(-4) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (4.16)$$

где $\mathbb{P}^2 = P(V)$ – проективная плоскость в $\mathbb{P}^3$. Переходя к когомологиям в диаграмме (4.16), подкрученной на E , получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & H^1(E_{\mathbb{P}^2}(-3)) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & W_{4m-2} & \equiv & W_{4m-2} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_3 & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V & \longrightarrow & H_{2m} & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 & \\ H^1(E_{\mathbb{P}^2}(-3)) \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_3 & \longrightarrow & W_{4m+2} & \xrightarrow{\varepsilon_1} & H^2(E_{\mathbb{P}^2}(-3)) & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Заметим, что, поскольку $h^0(E_{\mathbb{P}^2}(-3)) = 0$ и

$$h^2(E_{\mathbb{P}^2}(-3)) = h^0(E_{\mathbb{P}^2}) \leq 1 \quad (4.17)$$

(см. [1, (12.18)]), по теореме Римана–Роха имеем $h^1(E_{\mathbb{P}^2}(-3)) = 2m - 2 + \delta$, где $\delta = 0$ либо $\delta = 1$. Кроме того, поскольку $c_2(E) = 2m \geq 2$, ввиду [8, теорема 3] размерность множества $B(E) = \{V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee \mid h^0(E_{P(V_3)}) \neq 0\}$ удовлетворяет неравенству $\dim B(E) \leq 2$. Отсюда в силу (4.15) следует, что

$$\dim \Sigma_3 \leq \max \left(\max_{V_3 \in B(E)} \dim \Sigma_3(V_3) + 2, \max_{V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee \setminus B(E)} \dim \Sigma_3(V_3) + 3 \right). \quad (4.18)$$

Теперь, полагая $W_{2m-2+\delta}(V_3) := H^1(E_{\mathbb{P}^2}(-3))$, $\dim W_{2m-2+\delta}(V_3) = 2m - 2 + \delta$, где $\delta = 1$ для $V_3 \in B(E)$ и $\delta = 0$ для $V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee \setminus B(E)$, перепишем предыдущую диаграмму следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & W_{2m-2+\delta}(V_3) & \longrightarrow & W_{4m-2} & \longrightarrow & \ker \varepsilon_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_3 & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V & \longrightarrow & H_{2m} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker \varepsilon_1 & \longrightarrow & W_{4m+2} & \longrightarrow & H^2(E_{\mathbb{P}^2}(-3)) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Отсюда получаем соотношение

$$W_{2m-2+\delta}(V_3) = H_{2m} \otimes V_3 \cap W_{4m-2}, \quad (4.19)$$

где пересечение берется в $H_{2m} \otimes V$. Положим

$$Z_3(V_3) := \{x \in P(W_{2m-2+\delta}(V_3)) \mid \text{rk}(x) = 3\}.$$

Соотношение (4.19) и лемма 4.3 влекут биекцию

$$Z_3(V_3) \xrightarrow{\simeq} f_3^{-1}(V_3). \quad (4.20)$$

Рассмотрим график инциденции $\Gamma_3(V_3) := \{(x, U) \in Z_3(V_3) \times \text{Gr}(3, H_{2m}) \mid U = U_3(x)\}$ с проекциями $Z_3(V_3) \xleftarrow{p_3} \Gamma_3(V_3) \xrightarrow{q_3} \text{Gr}(3, H_{2m})$. По лемме 4.3 имеем $p_3(\Gamma_3(V_3)) = Z_3(V_3)$, и проекция $p_3: \Gamma_3(V_3) \rightarrow Z_3(V_3)$ является биекцией. Поэтому

$$\dim q_3(\Gamma_3(V_3)) \leq \dim \Gamma_3(V_3) = \dim Z_3(V_3) \leq \dim P(W_{2m-2+\delta}(V_3)) = 2m - 3 + \delta. \quad (4.21)$$

Рассмотрим другой график инциденции

$$\Pi_3(V_3) = \{(U, V_m) \in q_3(\Gamma_3(V_3)) \times \Sigma_3(V_3) \mid U \subset V_m\}$$

с проекциями $q_3(\Gamma_3(V_3)) \xleftarrow{\text{pr}_1} \Pi_3(V_3) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_3(V_3)$ и слоем

$$\text{pr}_1^{-1}(U) \simeq \text{Gr}(m-3, H_{2m}/U) \quad (4.22)$$

над произвольной точкой $U \in q_3(\Gamma_3(V_3))$ (ср. (4.13)). Проекция $\Pi_3(V_3) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_3(V_3)$ сюръективна ввиду (4.20). Поэтому, используя (4.21), мы получаем

$$\begin{aligned}
 \dim \Sigma_3(V_3) &\leq \dim \Pi_3(V_3) = \dim q_3(\Gamma_3(V_3)) + \dim \text{Gr}(m-3, H_{2m}/U) \\
 &\leq 2m - 3 + \delta + (m-3)m = m^2 - (m+3) + \delta.
 \end{aligned}$$

Поскольку $\delta = 1$ для $V_3 \in B(E)$ и $\delta = 0$ для $V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee \setminus B(E)$, последнее неравенство вместе с (4.18) и условием $m \geq 3$ дает $\dim \Sigma_3 \leq m^2 - 2 = \dim G - 2$, т. е. (4.8) выполняется для $r = 3$. Заметим, что, как и выше, $\delta = 1$ для $V_3 \in B(E)$ и $\delta = 0$ для $V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee \setminus B(E)$, где $\dim B(E) \leq 2$.

Теперь для произвольного $V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee$ положим $\tilde{\Sigma}_3(V_3) := \{V_{m+1} \in \tilde{\Sigma}_3 \mid \exists x \in P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_3: V_3 = V_3(x)\}$ и $R_3(V_3) := \{(x, U, V_{m+1}) \in P(W_{4m-2}) \times \text{Gr}(3, H_{2m}) \times \tilde{\Sigma}_3(V_3) \mid x \in P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_3, U = U_3(x) \subset V_{m+1}\}$, и пусть $\tilde{p}_3: R_3(V_3) \rightarrow P(W_{4m-2}) \times \text{Gr}(3, H_{2m})$ и $\tilde{q}_3: R_3(V_3) \rightarrow \tilde{\Sigma}_3(V_3)$ – проекции. По построению $\tilde{p}_3(R_3(V_3)) \subset \Gamma_3(V_3)$, поэтому из (4.21) получаем, что

$$\dim \tilde{p}_3(R_3(V_3)) \leq 2m - 3 + \delta.$$

Далее, по построению слой проекции $\tilde{p}_3$ над произвольной точкой $(x, U) \in \tilde{p}_3(R_3(V_3))$ лежит в грассманиане $\text{Gr}(m - 2, H_{2m}/U)$, так что

$$\begin{aligned} \dim R_3(V_3) &\leq \dim \tilde{p}_3(R_3(V_3)) + \dim \text{Gr}(m - 2, H_{2m}/U) \\ &\leq 2m - 3 + (m - 2)(m - 1) + \delta = m^2 - m - 1 + \delta. \end{aligned}$$

Кроме того, ввиду (4.10) слой проекции $\tilde{q}_3: R_3(V_3) \rightarrow \tilde{\Sigma}_3(V_3)$ над произвольной точкой $V_{m+1} \in \tilde{\Sigma}_3(V_3)$ является плотным открытым подмножеством $P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_3$ проективного пространства $P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V)$, так что ввиду (4.9) оно имеет размерность ≥ 2 . Тем самым, $\dim \tilde{\Sigma}_3(V_3) \leq m^2 - m - 3 + \delta$. Теперь, поскольку $\tilde{\Sigma}_3 = \bigcup_{V_3 \in (\mathbb{P}^3)^\vee} \tilde{\Sigma}_3(V_3)$, последнее неравенство ввиду условия $m \geq 3$ дает

$$\dim \tilde{\Sigma}_3 \leq m^2 - m - 3 + 3 = \dim \tilde{G} - (m - 1) < \dim \tilde{G},$$

т. е. (4.11) выполнено для $r = 3$.

Перед тем как перейти к рассмотрению случая $r = 2$, отметим несколько свойств прямых подскока расслоения E (см. лемму 4.4 ниже). Введем некоторые дополнительные обозначения. Для произвольной прямой $l \subset \mathbb{P}^3$ мы имеем $E|l \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ для некоторого однозначно определенного неотрицательного целого d , называемого *подскоком расслоения* $E|l$ и обозначаемого также через $d_E(l)$; соответственно, прямая l называется *прямой подскока расслоения* E , имеющей *подскок* d . Пусть $G_{2,4} := \text{Gr}(2, V^\vee)$, $J_k(E) := \{l \in G_{2,4} \mid d_E(l) \leq k\}$ и $J_k^*(E) := J_k(E) \setminus J_{k+1}(E)$, $k \geq 0$. Из полунепрерывности $h^i(E|l)$, $l \in G_{2,4}$, следует, что $J_k(E)$ (соответственно, $J_k^*(E)$) – замкнутое (соответственно, локально замкнутое) подмножество в $G_{2,4}$, $k \geq 0$. Более того, по теореме Грауэрта–Мюлиха $J_0^*(E)$ – плотное открытое подмножество в $G_{2,4}$. Далее, так как $[E] \in I'_{2m}$, то, значит,

$$J_{2m}(E) = \emptyset, \quad (4.23)$$

так что

$$J_{2m-1}(E) = J_{2m-1}^*(E), \quad J_{2m-2}(E) = J_{2m-2}^*(E) \sqcup J_{2m-1}(E). \quad (4.24)$$

Ниже нам потребуется следующая

ЛЕММА 4.4. Пусть $[E] \in I'_{2m}$, $m \geq 3$. Тогда:

- (i) $\dim J_{2m-1}(E) \leq \dim J_{2m-2}(E) \leq 1$;
- (ii) $\dim J_k^*(E) \leq 3$ для $1 \leq k \leq 2m-3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения (i) предположим противное, т. е. $\dim J_{2m-2}(E) \geq 2$. Возьмем любую неприводимую поверхность $S \subset J_{2m-2}(E)$, и пусть D – степень S относительно пучка $\mathcal{O}_{G_{2,4}}(1)$. Зафиксируем целое число $r \geq 5$ и рассмотрим произвольную неприводимую кривую C , принадлежащую линейному ряду $|\mathcal{O}_{G_{2,4}}(r)|_S|$. Тогда степень $\deg C$ относительно пучка $\mathcal{O}_{G_{2,4}}(1)$ равна Dr , а значит, $\deg C \geq 5$. Поэтому в силу [9, лемма 6] существуют две различные прямые, скажем $l_1, l_2 \in C$, которые пересекаются в $\mathbb{P}^3$. Пусть плоскость $\mathbb{P}^2$ есть линейная оболочка прямых l_1 и l_2 в $\mathbb{P}^3$. Точная тройка $0 \rightarrow E(-2)|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow E|_{l_1 \cup l_2} \rightarrow 0$ влечет точную тройку

$$H^0(E|_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^0(E|_{l_1 \cup l_2}) \rightarrow H^1(E(-2)|_{\mathbb{P}^2}). \quad (4.25)$$

Далее, поскольку $[E] \in I_{2m}$, имеем $h^0(E(-1)) = h^1(E(-2)) = 0$, поэтому точная тройка $0 \rightarrow E(-2) \rightarrow E(-1) \rightarrow E(-1)|_{\mathbb{P}^2} \rightarrow 0$ влечет равенство

$$H^0(E(-1)|_{\mathbb{P}^2}) = 0. \quad (4.26)$$

Кроме того, из равенства (4.26), теоремы Римана–Роха и двойственности Серра для векторного расслоения $E(-1)|_{\mathbb{P}^2}$ следует, что $h^1(E(-2)|_{\mathbb{P}^2}) = 2m$. Отсюда ввиду (4.25) и (4.17) получаем

$$h^0(E|_{l_1 \cup l_2}) \leq 2m + 1. \quad (4.27)$$

С другой стороны, пусть $x := l_1 \cap l_2$. Поскольку по построению $l_1, l_2 \in J_{2m-2}(E)$, из (4.24) следует, что либо $E|_{l_i} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2m-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2-2m)$, либо $E|_{l_i} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2m-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1-2m)$, откуда $h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_i}) \geq 2m-2$, $i = 1, 2$. Отсюда находим

$$h^0(E|_{l_1 \cup l_2}) \geq h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_1 \cup l_2}) \geq h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_1}) + h^0(E \otimes \mathcal{I}_{x, l_2}) = 4m - 4.$$

Сравнивая это с (4.27), мы получаем неравенство $2m + 1 \geq 4m - 4$, т. е. $m \leq 2$. Это противоречит предположению $m \geq 3$. Отсюда вытекает утверждение (i).

Утверждение (ii) немедленно следует из теоремы Грауэрта–Мюлиха. Лемма доказана.

Случай $r = 2$. Здесь используем обозначения и рассуждения, аналогичные тем, которые использовались в случае $r = 3$. Рассмотрим морфизм $f_2: Z_2 \rightarrow G_{2,4}$, $x \mapsto V_2(x)$, где пара двумерных пространств $(U_2(x), V_2(x))$, $U_2(x) \subset H_{2m}^\vee$ и $V_2(x) \subset V$, определена однозначно согласно условию $x \in P(U_2(x) \otimes V_2(x))$, поскольку $\text{rk}(x) = 2$ (см. лемму 4.3).

В соответствии с (4.23) мы можем полагать, что $l \in J_k^*(E)$ для некоторого $0 \leq k \leq 2m-1$, т. е.

$$h^0(E|l) = 2, \quad h^1(E|l) = 0, \quad l \in J_0^*(E),$$

и, соответственно,

$$h^0(E(-2)|l) = k - 1, \quad h^1(E(-2)|l) = k + 1, \quad l \in J_k^*(E), \quad 1 \leq k \leq 2m - 1. \quad (4.28)$$

Теперь для $1 \leq k \leq 2m - 1$ и произвольного подпространства $V_2 \in J_k^*(E)$ положим

$$\Sigma_{2,k}(V_2) = \{V_m \in G \mid \exists x \in f_2^{-1}(V_2): V_m \supset U_2(x)\}. \quad (4.29)$$

Тогда по аналогии с (4.15) имеем

$$\Sigma_2 = \bigcup_{k=0}^{2m-1} \bigcup_{V_2 \in J_k^*(E)} \Sigma_{2,k}(V_2).$$

Следовательно, в силу леммы 4.4

$$\dim \Sigma_2 \leq \max_{\substack{V_2 \in J_k^*(E) \\ 0 \leq k \leq 2m-1}} (\dim \Sigma_{2,k}(V_2) + \dim J_k^*(E)). \quad (4.30)$$

Получим теперь оценку размерности $\Sigma_{2,k}(V_2)$ для произвольного двумерного подпространства $V_2 \in J_k^*(E)$, $0 \leq k \leq 2m - 1$. Это подпространство определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & V_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & V'_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & V_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^3}(-4) & \longrightarrow & \mathcal{I}_l(-2) & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (4.31)$$

где $l = P(V_2)$ – проективная прямая в $\mathbb{P}^3$. Переходя к когомологиям в диаграмме (4.31), подкрученной на E , получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & H^0(E(-2)|l) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & W_{4m-2} & \xlongequal{\quad} & W_{4m-2} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_2 & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V'_2 & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 & \\ H^0(E(-2)|l) \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_2 & \longrightarrow & W_{4m+2} & \xrightarrow{\varepsilon_1} & H^1(E(-2)|l) & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (4.32)$$

Предположим для определенности, что $1 \leq k \leq 2m-1$. (Случай $k=0$ разбирается аналогично.) Положим $W_{k-1}(V_2) := H^0(E(-2)|l)$, где $\dim W_{k-1}(V_2) = k-1$ в соответствии с (4.28). В этом случае диаграмма (4.32) приводит к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & W_{k-1}(V_2) & \longrightarrow & W_{4m-2} & \longrightarrow & \ker \varepsilon_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_2 & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V'_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 \\
 0 & \longrightarrow & \ker \varepsilon_1 & \longrightarrow & W_{4m+2} & \xrightarrow{\varepsilon_1} & H^1(E(-2)|l) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

из которой вытекает соотношение (ср. (4.19))

$$W_{k-1}(V_2) = H_{2m} \otimes V_2 \cap W_{4m-2}, \quad (4.33)$$

где пересечение берется в $H_{2m} \otimes V$. Положим

$$Z_{2,k}(V_2) := \{x \in P(W_{k-1}(V_2)) \mid \text{rk}(x) = 2\}.$$

Соотношение (4.33) и лемма 4.3 влекут биекцию

$$Z_{2,k}(V_2) \xrightarrow{\sim} f_2^{-1}(V_2). \quad (4.34)$$

Рассмотрим график инциденции $\Gamma_{2,k}(V_2) := \{(x, U) \in Z_{2,k}(V_2) \times \text{Gr}(2, H_{2m}) \mid U = U_2(x)\}$ с проекциями $Z_{2,k}(V_2) \xleftarrow{p_2} \Gamma_{2,k}(V_2) \xrightarrow{q_2} \text{Gr}(2, H_{2m})$. По построению $p_{2,k}(\Gamma_{2,k}(V_2)) = Z_{2,k}(V_2)$ и проекция $p_2: \Gamma_{2,k}(V_2) \rightarrow Z_{2,k}(V_2)$ является биекцией. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \dim q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) &\leq \dim \Gamma_{2,k}(V_2) = \dim Z_{2,k}(V_2) \\
 &\leq \dim P(W_{k-1}(V_2)) = k-2, \quad k \geq 2,
 \end{aligned} \quad (4.35)$$

и, соответственно, $P(W_{k-1}(V_2)) = \emptyset$ для $k=0,1$. Рассмотрим график инциденции

$$\Pi_{2,k}(V_2) = \{(U, V_m) \in q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) \times \Sigma_{2,k}(V_2) \mid U \subset V_m\}$$

с проекциями $q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) \xleftarrow{\text{pr}_1} \Pi_{2,k}(V_2) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_{2,k}(V_2)$ и слоем

$$\text{pr}_1^{-1}(U) \simeq \text{Gr}(m-2, H_{2m}/U)$$

над произвольной точкой $U \in q_2(\Gamma_{2,k}(V_2))$ (ср. (4.13) и (4.22)). Проекция $\Pi_{2,k}(V_2) \xrightarrow{\text{pr}_2} \Sigma_{2,k}(V_2)$ сюръективна ввиду (4.34). Поэтому, используя (4.35),

находим

$$\begin{aligned} \dim \Sigma_{2,k}(V_2) &\leq \dim \Pi_{2,k}(V_2) = \dim q_2(\Gamma_{2,k}(V_2)) + \dim \text{Gr}(m-2, H_{2m+1}/U) \\ &\leq k-2 + (m-2)m = m^2 - (2m+2-k) \\ &= \dim G - (2m-k+2), \quad 2 \leq k \leq 2m-1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

В случаях $k=0,1$ имеем $h^0(E(-2)|l) = 0$, так что $\Sigma_{2,0}(V_2) = \Sigma_{2,1}(V_2) = \emptyset$. Это вместе с соотношениями (4.36), (4.30) и леммой 4.4 дает $\dim \Sigma_2 \leq \dim G - 2$, т. е. (4.8) верно для $r=2$.

Теперь для произвольного $V_2 \in J_k^*(E)$ положим

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{2,k}(V_2) &:= \{V_{m+1} \in \tilde{\Sigma}_2 \mid \\ &\quad \exists x \in P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_2: V_2 = V_2(x)\}, \\ R_{2,k}(V_2) &:= \{(x, U, V_{m+1}) \in P(W_{4m-2}) \times G(2, H_{2m}) \times \tilde{\Sigma}_{2,k}(V_2) \mid \\ &\quad x \in P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_2, U = U_2(x) \subset V_{m+1}\}, \end{aligned}$$

и пусть $\tilde{p}_{2k}: R_{2,k}(V_2) \rightarrow P(W_{4m-2}) \times G(2, H_{2m})$ и $\tilde{q}_{2k}: R_{2,k}(V_2) \rightarrow \tilde{\Sigma}_{2,k}(V_2)$ — проекции. По построению $\tilde{p}_{2k}(R_{2,k}(V_2)) \subset \Gamma_{2,k}(V_2)$, поэтому из (4.35) следует, что $\dim \tilde{p}_{2k}(R_{2,k}(V_2)) \leq k-2$. (Здесь в силу вышеизложенного достаточно рассмотреть случай $k \geq 2$.)

Далее, по построению слой проекции $\tilde{p}_{2k}$ над произвольной точкой $(x, U) \in \tilde{p}_{2k}(R_{2,k}(V_2))$ лежит в грассманиане $\text{Gr}(m-1, H_{2m}/U)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \dim R_{2,k}(V_2) &\leq \dim \tilde{p}_{2k}(R_{2,k}(V_2)) + \dim \text{Gr}(m-1, H_{2m}/U) \\ &\leq k-2 + (m-1)^2 = m^2 - 1 - (2m-k). \end{aligned}$$

Кроме того, ввиду (4.9) и (4.10) слой проекции $\tilde{q}_{2k}: R_{2,k}(V_2) \rightarrow \tilde{\Sigma}_{2,k}(V_2)$ над произвольной точкой $V_{m+1} \in \tilde{\Sigma}_{2,k}(V_2)$ есть плотное открытое подмножество $P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V) \cap Z_2$ проективного пространства $P(W_{4m-2} \cap V_{m+1} \otimes V)$, поэтому его размерность ≥ 2 . Таким образом, $\dim \tilde{\Sigma}_{2,k}(V_2) \leq m^2 - 3 - (2m-k)$. Теперь поскольку

$$\tilde{\Sigma}_2 = \bigcup_{2 \leq k \leq 2m-1} \left(\bigcup_{V_2 \in J_k^*(E)} \tilde{\Sigma}_{2,k}(V_2) \right),$$

последнее неравенство вместе с леммой 4.4 дает $\dim \tilde{\Sigma}_2 \leq m^2 - 3 = \dim \tilde{G} - 2 < \dim \tilde{G}$, т. е. (4.11) верно для $r=2$.

Случай $r=1$. Здесь снова наши обозначения и рассуждения подобны тем, которые использовались в случаях $r=4,3,2$. Рассмотрим проекцию $f_1: Z_1 \rightarrow P(V) = \mathbb{P}^3$, $x \mapsto V_1(x)$, где пара одномерных пространств $(U_1(x), V_1(x))$, $U_1(x) \subset H_{2m}$ и $V_1(x) \subset V$, однозначно определяется точкой x в силу условия $x \in P(U_1(x) \otimes V_1(x))$, поскольку $\text{rk}(x) = 1$ (см. лемму 4.3). Теперь для произвольного подпространства $V_1 \in \mathbb{P}^3$ положим

$$\Sigma_1(V_1) := \{V_m \in G \mid \exists x \in f_1^{-1}(V_1): V_m \supset U_1(x)\}.$$

Тогда по аналогии с (4.15) имеем

$$\Sigma_1 = \bigcup_{V_1 \in \mathbb{P}^3} \Sigma_1(V_1). \quad (4.37)$$

Покажем, что $\Sigma_1(V_1) = \emptyset$ для произвольного одномерного подпространства V_1 в V . Это подпространство V_1 определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & V_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & V_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & V_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) & \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^3}(-4) & \longrightarrow & F(-3) & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (4.38)$$

где $V_3 = V/V_1$, F – рефлексивный пучок ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, входящий в точную последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \rightarrow \mathbf{k}_x \rightarrow 0$, а $x = P(V_1)$ – точка в $\mathbb{P}^3$. Подкручивая эту последовательность на $E(-3)$ и переходя к когомологиям, ввиду равенств $h^0(E(-1)) = h^1(E(-2)) = 0$ получаем $h^1(E \otimes F(-3)) = 0$. Используя последнее равенство и переходя к когомологиям в диаграмме (4.38), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & W_{4m-2} & \xlongequal{\quad} & W_{4m-2} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_1 & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V & \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_3 & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & H_{2m} \otimes V_1 & \longrightarrow & H_{4m+2} & \longrightarrow & H^1(E|_{P(V_1)}) & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array} \quad (4.39)$$

Из диаграммы (4.39) следует, что $H_{2m} \otimes V_1 \cap W_{4m-2} = \{0\}$, где пересечение берется в $H_{2m} \otimes V$. Следовательно, $\Sigma_1(V_1) = \emptyset$. Поскольку V_1 – произвольное одномерное подпространство в V , ввиду (4.37) получаем, что $\Sigma_1 = \emptyset$. Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3.1

В этом параграфе мы доказываем теорему 3.1. Для доказательства нам потребуются некоторые вспомогательные результаты, которые приведены в п. 5.1. Доказательство теоремы 3.1 дано в п. 5.2.

5.1. Вспомогательные результаты. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5.1. *В условиях теоремы 4.1 рассмотрим мономорфизм $i: H_m \hookrightarrow H_{2m}$, удовлетворяющий следующим условиям:*

- (i) $W_{4m-2} \cap i(H_m) \otimes V = \{0\}$;
- (ii) индуцированный гомоморфизм

$$A_1(i): H_m \otimes V \xrightarrow{i} H_{2m} \otimes V \xrightarrow{\cong} H_{2m}^\vee \otimes V^\vee \xrightarrow{i^\vee} H_m^\vee \otimes V^\vee \quad (5.1)$$

не является обратимым.

Тогда $\text{rk } A_1(i) = 4m - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.1) и (4.2) следует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_m \otimes V & \xrightarrow{c_A \circ i} & W_{4m+2} \\ A_1(i) \downarrow & & \cong \downarrow q_A \\ H_m^\vee \otimes V^\vee & \xleftarrow{(c_A \circ i)^\vee} & W_{4m+2}^\vee \end{array} \quad (5.2)$$

Здесь инъективность $c_A \circ i$ следует из (4.2) и условия (i) леммы. Возьмем произвольное подпространство U в $H_m \otimes V$ максимальной возможной размерности, изотропное относительно симплектической формы $A_1(i)$, т. е. такое, что композиция $U \xrightarrow{j} H_m \otimes V \xrightarrow{A_1(i)} H_m^\vee \otimes V^\vee \xrightarrow{j^\vee} U^\vee$ равна нулю. Поскольку $c_A \circ i$ инъективно, из последнего условия и (5.2) следует, что U можно рассматривать как изотропное подпространство относительно симплектической формы q_A на W_{4m+2} . Форма q_A не вырождена, поэтому $\dim U \leq \dim W_{4m+2}/2 = 2m+1$. С другой стороны, так как U – изотропное подпространство максимальной размерности относительно формы $A_1(i)$, имеем $\dim \ker A_1(i) = 2 \dim U - \dim(H_m \otimes V) = 2 \dim U - 4m$. Следовательно, $\dim \ker A_1(i) \leq 2$. Поскольку по условию (ii) леммы $\ker A_1(i) \neq 0$, отсюда следует, что $\dim \ker A_1(i) = 2$, и мы получаем утверждение леммы.

Теперь рассмотрим произвольный флаг

$$\mathcal{F} = \{H_{m-1} \subset H_{m+1}\} \quad (5.3)$$

подпространств пространства H_{2m} и положим

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathcal{F}) := \{t \in G \mid H_{m-1} \subset V_m(t) \subset H_{m+1}\} \quad (5.4)$$

(здесь через $V_m(t)$ обозначено подпространство в H_{2m} , соответствующее точке $t \in G$). Заметим, что кривая $\mathbb{P}^1$ является проективной прямой, лежащей линейно в G в том смысле, что $\mathcal{O}_G(1)|_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$.

Для произвольного $t \in \mathbb{P}^1$ рассмотрим пространство $V_m(t)$ как образ мономорфизма $i_t: H_m \hookrightarrow H_{2m}$,

$$V_m(t) = \text{im}(i_t: H_m \hookrightarrow H_{2m}). \quad (5.5)$$

Семейство таких подпространств над всеми точками t прямой $\mathbb{P}^1$ является морфизмом подрасслоения

$$\mathcal{H}_m \xrightarrow{t} H_{2m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1},$$

причем $\mathcal{H}_m$ по построению входит в точные тройки

$$0 \rightarrow H_{m-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{i_{m-1}} \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \rightarrow 0, \quad (5.6)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_m \xrightarrow{i_{m+1}} H_{m+1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \rightarrow 0, \quad (5.7)$$

где H_{m-1} и H_{m+1} – компоненты флага (5.3).

Предположим, что в обозначениях теоремы 4.1

$$\mathbb{P}^1(\mathcal{F}) \cap D(A) = \emptyset. \quad (5.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Условие (5.8) означает, что мономорфизм $i_t: H_m \hookrightarrow H_{2m}$ удовлетворяет условию (i) леммы 5.1 для каждого $t \in \mathbb{P}^1$.

Используя обозначение (4.2), рассмотрим композицию

$$i: \mathcal{H}_m \otimes V \xhookrightarrow{t} H_{2m} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{c_A} W_{4m+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}.$$

Из условия (5.8) вытекает, что i – морфизм подрасслоения с факторрасслоением $\mathcal{Q}$ ранга 2 и ввиду (5.6) этот морфизм входит в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & \mathcal{H}_m \otimes V & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow i & & \\ & & W_{4m+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} = W_{4m+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) & \longrightarrow & 6\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (5.9)$$

Отсюда имеем

$$\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k), \quad 0 \leq k \leq 2. \quad (5.10)$$

Теперь рассмотрим композицию

$$\mathcal{A}_1: \mathcal{H}_m \otimes V \xrightarrow{i} W_{2m+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow[\simeq]{q_A} W_{2m+2}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{H}_m^\vee \otimes V^\vee. \quad (5.11)$$

Для любого $t \in \mathbb{P}^1$ гомоморфизм $\mathcal{A}_1 \otimes \mathbf{k}_t: V_m(t) \otimes V \rightarrow V_m(t)^\vee \otimes V^\vee$ совпадает с гомоморфизмом $A_1(i)$ в (5.1) для $i = i_t$:

$$A_1(i_t) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathbf{k}_t: V_m(t) \otimes V \rightarrow V_m(t)^\vee \otimes V^\vee. \quad (5.12)$$

Предположим, что

$$\mathrm{rk} \mathcal{A}_1 < 4m. \quad (5.13)$$

Это означает, что для любого $t \in \mathbb{P}^1$ гомоморфизм $\mathcal{A}_1 \otimes \mathbf{k}_t$ не является изоморфизмом, а тем самым, он удовлетворяет условию (ii) леммы 5.1. В силу замечания 5.2 он также удовлетворяет условию (i) леммы 5.1 для каждого $t \in \mathbb{P}^1$. Следовательно, по этой лемме пучки $\ker \mathcal{A}_1$ и $\mathrm{coker} \mathcal{A}_1$ являются локально свободными $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ -пучками ранга 2, а инъективный морфизм пучков $\ker \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{H}_m \otimes V$ является морфизмом подрасслоения.

Это означает, что в коммутативной диаграмме локально свободных пучков

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \ker \mathcal{A}_1 & \rightarrow & \mathcal{H}_m \otimes V & \xrightarrow{\mathcal{A}_1} & \mathcal{H}_m^\vee \otimes V^\vee \rightarrow \mathrm{coker} \mathcal{A}_1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow i & & \downarrow i^\vee & & \\ & & W_{2m+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \xrightarrow[\simeq]{q_A} & W_{2m+2}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^\vee & & \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & \mathcal{Q} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{Q}^\vee & & \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (5.14)$$

все морфизмы являются морфизмами векторных расслоений, т. е. имеют одинаковый ранг во всех точках $t \in \mathbb{P}^1$. Отсюда следует, что существует изоморфизм локально свободных пучков

$$\ker \mathcal{A}_1 \xrightarrow[\simeq]{\varphi} \mathcal{Q}^\vee \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k), \quad 0 \leq k \leq 2. \quad (5.15)$$

(Здесь последний изоморфизм вытекает из (5.10).) В частности,

$$\dim \ker A_1(i_t) = 2, \quad t \in \mathbb{P}^1. \quad (5.16)$$

Теперь предположим, что флаг $\mathcal{F} = \{H_{m-1} \subset H_{m+1}\}$ в (5.3) удовлетворяет условию (4.5), в котором мы полагаем $V_{m+1} = H_{m+1}$,

$$\dim(W_{4m-2} \cap H_{m+1} \otimes V) = 2. \quad (5.17)$$

ЛЕММА 5.3. В предположениях (5.8), (5.13) и (5.17) получаем, что $k \geq 1$ в (5.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим определенный в (4.2) симплектический изоморфизм $q_A: W_{2m+2} \xrightarrow{\simeq} W_{2m+2}^\vee$; для произвольного подпространства U в W_{2m+2} обозначим через $q_{A,U}: U \rightarrow U^\vee$ индуцированный гомоморфизм

$$q_{A,U}: U \xrightarrow{i} W_{2m+2} \xrightarrow[\simeq]{q_A} W_{2m+2}^\vee \xrightarrow{i^\vee} U^\vee$$

и положим

$$U^\perp := \{v \in W_{2m+2} \mid q_{A,U}(u)(v) = 0, u \in U\}.$$

Заметим, что

$$\dim U^\perp = \operatorname{codim}_{W_{4m+2}} U = 4m + 2 - \dim U, \quad (5.18)$$

$$U \cap U^\perp = \ker(q_{A,U}: U \rightarrow U^\vee), \quad (5.19)$$

и для любых двух подпространств U, V в W_{4m+2} выполняется следующее соотношение:

$$(U^\perp \cap V^\perp)^\perp = \operatorname{Span}(U, V). \quad (5.20)$$

Далее, для произвольного $t \in \mathbb{P}^1$ в обозначениях (5.4) и (5.5) рассмотрим подпространство $U_t := c_A(V_m(t) \otimes V)$ в W_{4m+2} , $\dim U_t = 4m$, так что гомоморфизм $\mathcal{A}_1(i_t)$ в (5.12) отождествляется с гомоморфизмом

$$q_A(U_t): U_t \rightarrow U_t^\vee, \quad t \in \mathbb{P}^1. \quad (5.21)$$

Кроме того, равенство (5.16) ввиду (5.18) может быть переписано в виде $\dim \ker q_A(U_t) = 2 = \dim U_t^\perp$, и поэтому в силу (5.19) имеем

$$\ker q_A(U_t) = U_t^\perp, \quad t \in \mathbb{P}^1. \quad (5.22)$$

Теперь предположим, что $k = 0$ в (5.15), т. е.

$$\ker \mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}.$$

Это означает, что существует канонически определенное тривиальное подрасслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ векторного расслоения $\ker \mathcal{A}_1$, а значит, расслоения $\mathcal{H}_m \otimes V$ и, как следствие, тривиального расслоения $W_{2m+2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Ввиду (5.22) это равносильно тому, что определено одномерное подпространство V_1 в W_{2m+2} , содержащееся в $U_t^\perp$ для всех $t \in \mathbb{P}^1$:

$$V_1 \subset U_t^\perp, \quad t \in \mathbb{P}^1.$$

Следовательно, в силу (5.20) имеем $V_1^\perp = (\bigcap_{t \in \mathbb{P}^1} U_t^\perp)^\perp = \operatorname{Span}(\bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} U_t)$, и согласно (5.18) выполнено $\dim V_1^\perp = 4m + 1$, т. е.

$$\dim \operatorname{Span}\left(\bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} U_t\right) = 4m + 1. \quad (5.23)$$

Далее, по определению $\text{Span}(\bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} U_t) = c_A(\text{Span}(\bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} V_m(t) \otimes V))$, где согласно (5.4) мы имеем $\text{Span}(\bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} V_m(t) \otimes V) = H_{m+1} \otimes V$. Следовательно, равенство (5.23) влечет

$$\dim c_A(H_{m+1} \otimes V) = 4m + 1. \quad (5.24)$$

С другой стороны, условие (5.17) вместе с (4.2) означает, что $c_A(H_{m+1} \otimes V) = W_{4m+2}$ вопреки (5.24). Мы пришли к противоречию, доказывающему лемму.

Теперь в предположениях (5.8), (5.13) и (5.17) рассмотрим верхнюю горизонтальную последовательность расслоений в диаграмме (5.14) и обозначим через $\mathcal{U}_{4m-2}$ векторное расслоение $\mathcal{H}_m \otimes V / \ker \mathcal{A}_1$ ранга $4m - 2$. Это расслоение вместе с тройкой (5.6), тензорно умноженной на V , входит в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_m \otimes V & \longrightarrow & \mathcal{U}_{4m-2} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array} \quad (5.25)$$

Согласно (5.15) и лемме 5.3 имеем

$$\ker \mathcal{A}_1 \simeq 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \quad \text{или} \quad \ker \mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1). \quad (5.26)$$

Отсюда получаем

$$\text{Hom}(\ker \mathcal{A}_1, H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0, \quad (5.27)$$

и диаграмма (5.25) продолжается до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \xlongequal{\quad} & H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker \mathcal{A}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_m \otimes V & \longrightarrow & \mathcal{U}_{4m-2} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{j} & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) & \longrightarrow & \text{coker } j \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array} \quad (5.28)$$

Средняя вертикальная тройка в этой диаграмме распадается, откуда с учетом соотношения (5.27) следует, что j – морфизм подрасслоения, так что ввиду (5.26) получаем, что либо

$$\operatorname{coker} j = 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \quad (5.29)$$

либо

$$\operatorname{coker} j = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1). \quad (5.30)$$

Теперь рассмотрим многообразие $B := \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ с проекциями $\mathbb{P}^3 \xleftarrow{p_1} B \xrightarrow{p_2} \mathbb{P}^1$ и введем обозначение $\mathcal{O}(m, n) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, для обратимых пучков на B . Используя точную последовательность Эйлера, получаем коммутативную диаграмму $\mathcal{O}_B$ -пучков

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{m-1} \otimes \mathcal{O}(-1, 0) & \longrightarrow & H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_B & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{H}_m & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m \otimes V & & (5.31) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1, -1) & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}(0, -1) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Рассмотрим правую половину диаграммы, полученной из (5.28) применением функтора p_2^* :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_B & \equiv & H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_B & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m \otimes V & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{U}_{4m-2} & & & & (5.32) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ V \otimes \mathcal{O}(0, -1) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \operatorname{coker} j & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Комбинируя диаграммы (5.31) и (5.32), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & H_{m-1} \otimes \mathcal{O}(-1, 0) & \xrightarrow{b} & H_{m-1} \otimes V \otimes \mathcal{O}_B \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{H}_m & \xrightarrow{c} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{U}_{4m-2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1, -1) & \xrightarrow{e} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \text{coker } j \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (5.33)$$

Здесь b является морфизмом подрасслоения. Поэтому диаграмма, двойственная к (5.33), имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 H_{m-1}^\vee \otimes V^\vee \otimes \mathcal{O}_B & \xrightarrow{b^\vee} & H_{m-1}^\vee \otimes \mathcal{O}(1, 0) & \longrightarrow & 0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{U}_{4m-2}^\vee & \xrightarrow{c^\vee} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{H}_m^\vee & \longrightarrow & \text{coker}(c^\vee) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes (\text{coker } j)^\vee & \xrightarrow{e^\vee} & \mathcal{O}(1, 1) & \longrightarrow & \text{coker}(e^\vee) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & & 0 & & & &
 \end{array} \quad (5.34)$$

Рассмотрим оба возможных случая (5.29) и (5.30) для $\text{coker } j$.

В случае (5.29) имеем $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes (\text{coker } j)^\vee = 2\mathcal{O}_B$, так что

$$\text{coker}(c^\vee) = \text{coker}(e^\vee) = \mathcal{O}_S(1, 1), \quad S := (e^\vee)_0, \quad (5.35)$$

где S – одна из следующих схем:

(1.i) линейчатая поверхность в B , изоморфная $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и такая, что $\mathcal{O}(m, n)|_S \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2m) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$;

(1.ii) приводимая поверхность $\mathbb{P}^2 \times \{x\} \cup S'$, где x – точка в $\mathbb{P}^1$, а S' – такая поверхность типа $\mathbb{F}_1$ с проекциями $\mathbb{P}^2 \xleftarrow{\sigma} S \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$, что $\mathcal{O}(m, n)|_{S'} \simeq \sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m) \otimes \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$;

(1.iii) приводимая поверхность $\mathbb{P}^2 \times \{x_1\} \cup \mathbb{P}^2 \times \{x_2\} \cup S''$, где x_1, x_2 – две точки в $\mathbb{P}^1$, не обязательно различные, а S'' – поверхность, изоморфная $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и такая, что $\mathcal{O}(m, n)|_{S''} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$;

(1.iv) объединение $\mathbb{P}^3 \times \{x\} \cup S''$, где x – точка в $\mathbb{P}^1$, а S'' – та же поверхность, что и в (1.iii);

(1.v) дивизор типа $(1, 1)$ (возможно, приводимый) на B , если $\mathcal{O}_B = \ker(e^\vee)$;

(1.vi) B , если $e^\vee = 0$.

Используя это описание схемы S и равенство $\operatorname{coker} \mathcal{A}_1 = (\ker \mathcal{A}_1)^\vee = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4 - k)$, $1 \leq k \leq 2$ (см. (5.26)), во всех случаях (1.i)–(1.vi) имеем

$$\operatorname{coker} \varepsilon \neq 0 \quad \forall \varepsilon \in \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \operatorname{coker} \mathcal{A}_1, \mathcal{O}_S(1, 1)). \quad (5.36)$$

В случае (5.30) мы имеем $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes (\operatorname{coker} j)^\vee = \mathcal{O}(0, 1) \oplus \mathcal{O}(0, -1)$, и снова верно соотношение (5.35), где S – одна из следующих схем:

(2.i) дивизор типа $(1, 2)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ (возможно, приводимый);

(2.ii) дивизор типа $(1, 2)$ на B (возможно, приводимый), если $e^\vee|_{\mathcal{O}(0,1)} = 0$ и $e^\vee \neq 0$;

(2.iii) B , если $e^\vee = 0$.

Легко видеть, что во всех трех случаях (2.i)–(2.iii) верно (5.36).

Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \boxtimes \mathcal{H}_m & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{H}_m^\vee & \longrightarrow & \operatorname{coker} \alpha \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & \downarrow u & & \downarrow v^\vee & & \downarrow \\
 0 \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \ker \mathcal{A}_1 \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m \otimes V & \xrightarrow{\mathcal{A}_1} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m^\vee \otimes V^\vee \rightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \operatorname{coker} \mathcal{A}_1 \rightarrow & 0 \\
 & \downarrow & \downarrow v & & \downarrow u^\vee & & \downarrow \varepsilon \\
 0 \longrightarrow & (\operatorname{coker} \alpha)^\vee \longrightarrow & T_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{H}_m & \xrightarrow{-\alpha^\vee} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \boxtimes \mathcal{H}_m^\vee & \longrightarrow & \operatorname{coker}(-\alpha^\vee) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array} \quad (5.37)$$

в которой средняя горизонтальная последовательность получается применением функтора p_2^* к верхней горизонтальной последовательности в (5.14), а две средние вертикальные последовательности получаются применением функтора p_1^* к точной последовательности Эйлера на $\mathbb{P}^3$ и последующим тензорным умножением на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m^\vee$ соответственно. Существование морфизма α (соответственно, $-\alpha^\vee$), делающего эту диаграмму коммутативной, вытекает из того факта, что $\mathcal{A}_1$ является семейством связок квадрик над $\mathbb{P}^1$, т. е. подрасслоением векторного расслоения $S^2\mathcal{H}^\vee \otimes \wedge^2 V^\vee$, а значит, и векторного расслоения $\wedge^2(\mathcal{H}^\vee \otimes V^\vee)$. Отсюда следует, что композиция $u^\vee \circ \mathcal{A}_1 \circ u$ равна нулю, так что морфизм α в этой диаграмме корректно определен.

Заметим, что морфизм $\mathcal{A}_1$ включается в диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m \otimes V & \xrightarrow{\mathcal{A}_1} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{H}_m^\vee \otimes V^\vee \\ \downarrow e & & \uparrow e^\vee \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{U}_{4m-2} & \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{A}_1(\mathcal{U})} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \mathcal{U}_{4m-2}^\vee \end{array} \quad (5.38)$$

где, как и выше, $\mathcal{U}_{4m-2} = \mathcal{H}_m \otimes V / \ker \mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_1(\mathcal{U})$ – индуцированный симплектический изоморфизм. Теперь стандартный диаграммный поиск, примененный к диаграммам (5.37) и (5.38), показывает, что $u^\vee \circ e^\vee$ совпадает с морфизмом $c^\vee$ в (5.34), так что $(-\alpha^\vee) \circ v = c^\vee \circ \mathcal{A}_1(\mathcal{U}) \circ e$. Это показывает, что $\text{im}(c^\vee) = \text{im}(-\alpha^\vee)$, а следовательно, $\text{coker}(c^\vee) = \text{coker}(-\alpha^\vee)$, т.е. ввиду диаграммы (5.37) морфизм $\varepsilon: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \boxtimes \text{coker} \mathcal{A}_1 \rightarrow \text{coker}(c^\vee)$ эпиморфен. Это, однако, противоречит (5.35) и (5.36).

Таким образом, мы показали, что предположения (5.8), (5.13) и (5.17) приводят к противоречию. Этим доказывается следующая лемма, в которой $\mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m})$ является многообразием флагов подпространств (5.3) в H_{2m} .

ЛЕММА 5.4. *Если флаг $\mathcal{F} = \{H_{m-1} \subset H_{m+1}\} \in \mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m})$ удовлетворяет условиям (5.8) и (5.17), то для общей точки $t \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathcal{F})$ имеет место равенство $\text{rk } A_1(t) = 4m$, т.е. гомоморфизм $A_1(t): H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee$ обратим.*

5.2. Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим многообразие $\mathbf{F}(m-1, m, m+1, H_{2m})$ флагов подпространств $H_{m-1} \subset H_m \subset H_{m+1}$ пространства H_{2m} вместе с его естественными проекциями $G = \text{Gr}(m, H_{2m}) \xleftarrow{\text{pr}_1} \mathbf{F}(m-1, m, m+1, H_{2m}) \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m})$ и $\text{pr}_3: \mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m}) \rightarrow \tilde{G} := \text{Gr}(m+1, H_{2m})$. Здесь по определению слой проекции pr_1 изоморфен $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{m-1}$ и, соответственно, слой проекции pr_2 изоморфен $\mathbb{P}^1$. Поэтому, рассматривая подмножество $D(A)$ в G , определенное в теореме 4.1, ввиду (4.4) получаем

$$\begin{aligned} \dim \text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(D(A))) &\leq \dim \text{pr}_1^{-1}(D(A)) = \dim D(A) + 2(m-1) \\ &\leq \dim G - 2 + 2(m-1) = m^2 + 2m - 4 = \dim \mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m}) - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(D(A)))$ – собственное замкнутое подмножество в $\mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m})$. По построению, взяв произвольную точку

$$\mathcal{F} \in \mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m}) \setminus \text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(D(A))), \quad (5.39)$$

мы получаем, что проективная прямая $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathcal{F})$ удовлетворяет (5.8). Кроме того, утверждение (ii) теоремы 4.1 означает, что существует открытое плотное подмножество U в $\tilde{G}$ такое, что $\mathcal{F} \in \text{pr}_3^{-1}(U)$ удовлетворяет (5.17). Это вместе с (5.39) показывает, что общий флаг $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(m-1, m+1, H_{2m})$ удовлетворяет условиям (5.8) и (5.17). Взяв любой такой флаг $\mathcal{F}$, по лемме 5.4 для

общей точки $t \in \mathbb{P}^1(\mathcal{F})$ мы получаем обратимый гомоморфизм (связку квадрик) $A_1(t): H_m \otimes V \rightarrow H_m^\vee \otimes V^\vee$. Связка $A_1(t)$ по определению есть композиция

$$H_m \otimes V \xrightarrow{i_t} H_{2m} \otimes V \xrightarrow[\simeq]{A} H_{2m}^\vee \otimes V^\vee \xrightarrow{i_t^\vee} H_m^\vee \otimes V^\vee.$$

Другими словами, связка $A_1(t)$ совпадает со связкой $A_1(\xi)$ для разложения ξ в (3.1), взятого таким образом, что $i_\xi = i_t$ в (3.2). Итак, для этого ξ получаем, что гомоморфизм $A_1(\xi)$ обратим. Теорема 3.1 доказана.

Список литературы

1. А. С. Тихомиров, “Модули математических инстантонных векторных расслоений с нечетным c_2 на проективном пространстве”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:5 (2012), 143–224; англ. пер.: A. S. Tikhomirov, “Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd c_2 on projective space”, *Izv. Math.*, **76**:5 (2012), 991–1073.
2. I. Coandă, A. Tikhomirov, G. Trautmann, “Irreducibility and smoothness of the moduli space of mathematical 5-instantons over $\mathbb{P}_3$ ”, *Internat. J. Math.*, **14**:1 (2003), 1–45.
3. R. Hartshorne, “Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}_3$ ”, *Math. Ann.*, **238**:3 (1978), 229–280.
4. W. Barth, “Irreducibility of the space of mathematical instanton bundles with rank 2 and $c_2 = 4$ ”, *Math. Ann.*, **258**:1 (1981), 81–106.
5. J. Le Potier, “Sur l’espace de modules des fibrés de Yang et Mills”, *Mathematics and physics* (Paris, 1979/1982), Progr. Math., **37**, Birkhäuser, Boston, 1983, 65–137.
6. M. Skiti, “Sur une famille de fibrés instantons”, *Math. Z.*, **225**:3 (1997), 373–394.
7. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
8. W. Barth, “Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbf{P}_n$ ”, *Math. Ann.*, **226**:2 (1977), 125–150.
9. I. Coandă, “On Barth’s restriction theorem”, *J. Reine Angew. Math.*, **428** (1992), 97–110.

А. С. ТИХОМИРОВ

(A. S. TIKHOMIROV)

Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского

E-mail: astikhomirov@mail.ru

Поступило в редакцию

28.12.2011