Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 2, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:45:09

УДК 517.988.28

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения

Для некоторых интегральных преобразований, связанных с оператором сферического среднего на двухточечно-однородных пространствах, решены следующие основные проблемы интегральной геометрии: получены необходимые и достаточные условия инъективности; найдено описание ядра в случае неинъективности; найдена формула обращения. Полученные результаты нашли неожиданные приложения к переопределенным интерполяционным задачам в теории целых функций.

Библиография: 37 наименований.

Ключевые слова: сферические средние, преобразование Помпейю, симметрические пространства, формулы обращения.

DOI: 10.4213/im7956

§ 1. Введение

Пусть X – риманово двухточечно-однородное пространство [1, гл. 3], G – группа изометрий X , $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i=1}^s$ – заданное семейство распределений с компактным носителем в X . Для $g \in G$ обозначим через gT_i распределение, действующее на $C^\infty(X)$ по правилу

$$\langle gT_i, f \rangle = \langle T_i, f \circ g^{-1} \rangle, \quad f \in C^\infty(X).$$

Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset X$ такого, что каждое из множеств

$$\Lambda(\mathcal{U}, T_i) = \{g \in G: \operatorname{supp} gT_i \subset \mathcal{U}\}, \quad i = 1, \dots, s,$$

непусто, рассмотрим преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$, отображающее $C^\infty(\mathcal{U})$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_1)) \times \dots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_s))$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}(f)(g) = (\langle gT_1, f \rangle, \dots, \langle gT_s, f \rangle). \quad (1)$$

Преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ называется *преобразованием Помпейю*, связанным с семейством $\mathcal{F}$ и множеством $\mathcal{U}$.

Данное определение включает ряд известных примеров интегральных преобразований, возникающих в интегральной геометрии и многочисленных приложениях (см. [1]–[3]). Например, если $X = \mathbb{S}^2$ – двумерная сфера, $s = 1$ и T_1 – поверхностная дельта-функция большой окружности на $\mathbb{S}^2$, то $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, X}$ совпадает

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00384-а, № 12-01-00155-а).

с классическим преобразованием Минковского–Функа. Функции с нулевыми интегралами по окружностям фиксированного радиуса на $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ и плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ изучались И. Радонам. Сферические средние в $\mathbb{R}^n$ исследовались Ф. Йоном в связи с приложениями в теории дифференциальных уравнений в частных производных. В случае, когда $X = \mathbb{R}^2$, $s = 1$, а $T_1 = \chi_E$ – индикатор открытого ограниченного множества E , преобразование (1) было введено Д. Помпейю в 1929 г. Отметим также, что незначительные модификации определения $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$, связанные с рассмотрением других пространств основных функций и распределений, приводят к классическому преобразованию Радона и его обобщениям (см. [3, § 3]).

Для заданных семейства $\mathcal{F}$ и множества $\mathcal{U}$ возникают следующие проблемы (см., например, [3, § 3]):

- (i) *выяснить, является ли преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ инъективным;*
- (ii) *если $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ не является инъективным, то описать его ядро;*
- (iii) *если $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ инъективно, то найти обратное отображение.*

Помимо самостоятельного интереса, эти задачи имеют глубокие связи с периодичностью в среднем, теорией гармонических функций, рядами экспонент, теорией аппроксимации, микролокальным анализом, с оценками плотности упаковок в комбинаторной геометрии, а также различными вопросами комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории отображений, сохраняющих меру, и теории графов (см. обзоры [3]–[7], а также [8]). В нетривиальных случаях они являются, как правило, весьма трудными и содержат в себе некоторые открытые старые проблемы и гипотезы. Отметим, например, известную гипотезу Шиффера [3, § 3]: если E – область в $\mathbb{R}^n$ с границей, гомеоморфной сфере, то преобразование $\mathcal{P}_{\{\chi_E\}, \mathbb{R}^n}$ неинъективно тогда и только тогда, когда E является шаром.

Следуя классическим работам Г. Минковского, П. Функа, И. Радона, Д. Помпейю и Ф. Йона, многие авторы изучали проблемы (i)–(iii), когда $\mathcal{U} = X$, а T_i равно χ_{r_i} или σ_{r_i} , где χ_{r_i} – индикатор шара B_{r_i} радиуса r_i , σ_{r_i} – поверхностная дельта-функция сферы ∂B_{r_i} , $i = 1, \dots, s$. Для их исследования в основном применялись аппарат преобразования Фурье и соответствующие методы многомерного комплексного анализа. Среди результатов в этом направлении можно отметить теорему о двух радиусах для сферических средних, полученную Л. Зальцманом и К.А. Беренстейном, а также близкую по смыслу теорему Д. Дельсарта, характеризующую гармонические функции в терминах теоремы о среднем [3, § 3]. Оказалось, что критерием инъективности преобразований Помпейю, соответствующих этим случаям, является отсутствие общих нулей у сферических преобразований всех распределений $T_i \in \mathcal{F}$. Подобные результаты для семейств $\mathcal{F}$, состоящих из радиальных распределений, получены в [9].

Для $\mathcal{U} \neq X$ решение сформулированных задач даже в модельных случаях шаровых и сферических средних далеко от завершения и известно лишь при $s = 1$ [8, ч. 2], [10], [11]. В этих случаях преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ не является инъективным. Его ядро представляет собой замыкание в C^∞ -топологии множества всех линейных комбинаций собственных функций оператора Лапласа–

Бельтрами на X , соответствующих специальному множеству собственных значений, зависящему от $\mathcal{F}$. Для семейства $\mathcal{F} = \{\chi_{r_1}, \chi_{r_2}\}$ и $\mathcal{U} = B_R$ найдены необходимые и достаточные условия инъективности $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ [11]–[19], а по проблемам (ii), (iii) получены только некоторые частные результаты [20]–[23]. При $s \geq 3$ даже исследование инъективности $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ в рассматриваемой ситуации наталкивается на непреодолимые трудности. Немногочисленные результаты в этом направлении содержатся в [24, ч. 4]. Отметим также, что до настоящего времени не было получено явных формул обращения локального преобразования Помпейю ни для одного нетривиального случая. Наиболее существенные трудности, возникающие в случае $\mathcal{U} \neq X$, связаны с нарушением групповой структуры сдвигов и, соответственно, невозможностью применения преобразования Фурье.

В недавнее время авторами настоящей работы были разработаны новые методы, которые сыграли ключевую роль в решении некоторых известных проблем для уравнений свертки и их систем [25]–[27]. Эти методы основаны на построении и изучении трансмутационных операторов специального вида. Развитие этих методов в данной работе позволило получить полное решение проблем (i)–(iii) для $\mathcal{F} = \{\chi_r, \sigma_r\}$ и $\mathcal{U} = B_R$ (см. теоремы 1, 2 в § 3). В частности, в теореме 1 впервые получено описание ядра преобразования Помпейю для случая, когда $s = 2$, а теорема 2 содержит явную формулу обращения. Одним из следствий этих результатов является новая теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по всем сферам и шарам фиксированного радиуса, которая носит окончательный характер (см. теорему 3). Кроме того, указанные вопросы оказались тесно связанными с некоторыми аспектами теории интерполяции. В частности, описание ядра $\mathcal{P}_{\{\chi_r, \sigma_r\}, B_R}$ для $R < 2r$ нашло принципиально новые и неожиданные приложения к переопределенным интерполяционным задачам в теории целых функций (см. теорему 4). Некоторые промежуточные результаты работы представляют самостоятельный интерес (см. леммы 7–9).

§ 2. Обозначения и предварительные конструкции

В настоящей работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ – соответственно множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел; $[t]$ – целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; $\bar{\lambda}$ – комплексное сопряжение к числу $\lambda \in \mathbb{C}$; $\delta_{A,B}$ – символ Кронекера; $(\lambda)_l$ – символ Похгаммера ($(\lambda)_0 = 1$ и $(\lambda)_l = \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + l - 1)$ при $l \in \mathbb{N}$); Γ – гамма-функция; J_ν – функция Бесселя первого рода с индексом ν ; $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса;

$$R_\mu^{(\alpha, \beta)}(t) = F\left(-\mu, \mu + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-t}{2}\right)$$

– функции Якоби первого рода; $P_l^{(\alpha, \beta)}(t)$ – многочлены Якоби; $C_l^\gamma(t)$ – многочлены Гегенбауэра; $O(n)$ – ортогональная группа в $\mathbb{R}^n$; dx – мера Лебега в евклидовом пространстве.

Для целой функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ положим

$$\mathcal{Z}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C}: f(\lambda) = 0\}.$$

Если $f \not\equiv 0$ и $\mathcal{Z}(f) \neq \emptyset$, обозначим через $n_\lambda(f)$ кратность нуля $\lambda \in \mathcal{Z}(f)$.

Пусть T – распределение с компактным носителем в $\mathbb{R}^1$. Его преобразование Фурье определяется равенством

$$\widehat{T}(\lambda) = \langle T(x), e^{-ix\lambda} \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Через $r(T)$ обозначается радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}^1$, содержащего носитель T .

Пусть $a \in [0, 1]$, $\psi \in [0, \pi]$. Для $\alpha > \beta > -1/2$, $p \geq q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, положим

$$\xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a, \psi) = P_q^{(\alpha-\beta-1, \beta+p-q)}(2a^2 - 1) a^{p-q} C_{p-q}^\beta(\psi), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} C_{p-q}^\beta(\psi) &= (\beta + p - q) \Gamma(\beta) C_{p-q}^\beta(\cos \psi), \quad \text{если } \beta \neq 0, \\ C_{p-q}^0(\psi) &= \begin{cases} 2 \cos((p - q)\psi), & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases} \end{aligned}$$

При определенных значениях α , β функции $\xi_{p,q}^{\alpha,\beta}$ можно интерпретировать как сферические функции для пары Гельфанда, ассоциированной с полярным представлением симметрического пространства ранга один (см. [28, п. 8.1]).

Соотношения ортогональности для многочленов Якоби [29, п. 10.8, (4)] влекут равенство

$$\int_0^\pi \int_0^1 \xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a, \psi) \xi_{p',q'}^{\alpha,\beta}(a, \psi) dm_{\alpha,\beta}(a, \psi) = \eta_{p,q}^{\alpha,\beta} \delta_{(p,q),(p',q')}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{p,q}^{\alpha,\beta} &= \frac{\pi(\beta + p - q) \Gamma(2\beta + p - q) \Gamma(\beta + p + 1) \Gamma(\alpha - \beta + q)}{2^{2\beta} (\alpha + p + q) q! (p - q)! \Gamma(\alpha + p)}, \\ dm_{\alpha,\beta}(a, \psi) &= a^{2\beta+1} (1 - a^2)^{\alpha-\beta-1} (\sin \psi)^{2\beta} da d\psi. \end{aligned}$$

Следующее утверждение (см. [28, п. 8.1]) содержит некоторую информацию о сходимости рядов по системе $\xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a, \psi)$.

ЛЕММА 1. Пусть h – бесконечно дифференцируемая функция на полуокружности $U_+ = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и

$$h_{p,q} = \int_0^\pi \int_0^1 h(ae^{i\psi}) \xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a, \psi) dm_{\alpha,\beta}(a, \psi), \quad p \geq q, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда:

(i) для любого $\varkappa > 0$ при $p \rightarrow \infty$ имеет место равномерная по q оценка

$$h_{p,q} = O(p^{-\varkappa});$$

(ii) справедливо разложение

$$h(ae^{i\psi}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{h_{p,q}}{\eta_{p,q}^{\alpha,\beta}} \xi_{p,q}^{\alpha,\beta}(a, \psi), \quad (5)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на U_+ ;

(iii) если h зависит от дополнительного параметра s , меняющегося на множестве $\mathcal{S}$, и все частные производные h относительно $a \cos \psi$, $a \sin \psi$ равномерно ограничены по $(ae^{i\psi}, s)$, то сходимость ряда в (5) будет также равномерной и на $\mathcal{S}$.

Если $\alpha = \beta$ или $\beta = -1/2$, то вместо (3) ниже используется система $C_p^\alpha(\psi)$. Соотношения ортогональности в данном случае имеют вид

$$\int_0^\pi C_p^\alpha(\psi) C_{p'}^\alpha(\psi) dm_\alpha(\psi) = \frac{\pi(\alpha + p)\Gamma(2\alpha + p)}{2^{2\alpha-1}p!} \delta_{p,p'}, \quad (6)$$

где $dm_\alpha(\psi) = (\sin \psi)^{2\alpha} d\psi$. (Аналог леммы 1 для $C_p^\alpha(\psi)$ см. [30, гл. 7, теорема 7.6].)

Для единства записи разложений по указанным системам далее полагается

$$\begin{aligned} \xi_{p,q}^{\alpha,\alpha}(1, \psi) &= \delta_{q,0} C_p^\alpha(\psi), \\ \xi_{p,q}^{\alpha,-1/2}(a, 0) &= \frac{\sqrt{\pi}(-1)_{p-q}}{(p-q)!} (1-2p+2q) P_q^{(\alpha-1/2, p-q-1/2)}(2a^2-1) a^{p-q}, \end{aligned}$$

где $a \in [-1, 1]$. При этом удобно использовать следующее множество индексов суммирования:

$$\mathcal{I}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \{(p, q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : p \geq q\}, & \text{если } \alpha > \beta > -\frac{1}{2}, \\ \{(p, q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : q = 0\}, & \text{если } \alpha = \beta > -\frac{1}{2}, \\ \{(p, q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : p = q \text{ или } p = q + 1\}, & \text{если } \alpha > \beta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть X – риманово двухточечно-однородное пространство, $d(\cdot, \cdot)$ – функция расстояния на X , o – фиксированная точка (начало) в X . Ниже будут часто встречаться следующие множества в X :

$$\begin{aligned} B_R(x) &= \{y \in X : d(x, y) < R\}, \quad B_R = B_R(o), \quad \overline{B_R} = \{y \in X : d(o, y) \leq R\}, \\ B_{a,b} &= \{y \in X : a < d(o, y) < b\}, \\ S_R(x) &= \{y \in X : d(x, y) = R\}, \quad S_R = S_R(o). \end{aligned}$$

Через $\mathcal{O}$ будет обозначаться открытое множество в X .

Далее потребуются следующие классы функций и распределений: $C^s(\mathcal{O})$, $s \in \mathbb{Z}_+$ или $s = \infty$, – пространство s раз непрерывно дифференцируемых на $\mathcal{O}$ функций;

$$C^s(\{o\}) = \{f : f \in C^s(B_\varepsilon) \text{ при некотором } \varepsilon > 0\};$$

$\mathcal{E}(\mathcal{O}) = C^\infty(\mathcal{O})$; $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций; $\text{RA}(\mathcal{O})$ – класс вещественно-аналитических функций; $L^p(\mathcal{O})$ и $L^{p,\text{loc}}(\mathcal{O})$, $p \in [1, +\infty)$, – класс соответственно p -интегрируемых и p -локально интегрируемых на $\mathcal{O}$ функций по римановой мере $d\mu$; если E – произвольное множество функций на $\mathcal{O}$, то $\text{Lin } E$ – совокупность всех конечных линейных комбинаций функций из E ; $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ – соответственно пространства распределений и распределений с компактным носителем на $\mathcal{O}$. Как обычно, пространство $L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ посредством сопоставления функции $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ распределения

$$\psi \rightarrow \int_{\mathcal{O}} f \psi d\mu, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Носитель распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ будет обозначаться $\text{supp } f$. Для $f \in \mathcal{E}'(X)$ положим

$$r_0(f) = \inf\{r > 0: \text{supp } f \subset B_r\}. \quad (7)$$

Символ $\times$ используется для свертки распределений на областях в X тогда, когда она существует [31, гл. 2, § 5]. Для свертки распределений на $\mathbb{R}^n$ сохраняется обычный знак $*$. Обозначим также через L оператор Лапласа–Бельтрами на X (геометрические и теоретико-групповые свойства пространств X см. в [31, гл. 1, § 4, п. 2, 3]).

Дальнейшие построения опираются на классификацию двухточечно-одно-родных пространств и их реализации. Как известно (см. [31, гл. 1, § 4, п. 2, 3]), всякое X изометрично одному из следующих пространств:

- 1) вещественному евклидову пространству $\mathbb{R}^n$;
- 2) гиперболическому пространству $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ (через $\mathbb{K}$ обозначаются поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{Q}$);
- 3) гиперболической плоскости Кэли $\mathbb{H}_{\mathbb{C}a}^2$;
- 4) евклидовой сфере $\mathbb{S}^n$;
- 5) проективному пространству $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$;
- 6) проективной плоскости Кэли $\mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ – класс некомпактных пространств X , отличных от $\mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{X}_2$ – класс компактных X . Если $X \in \mathfrak{X}_1$, условимся, что максимум секционной кривизны X равен -1 , а в случае $X \in \mathfrak{X}_2$ предположим, что минимум секционной кривизны X равен 1 . Кроме того, будем считать, что вещественная размерность a_X пространства X не меньше 2 . Определим $\mathcal{X} = \{X \in X: d(o, x) < \text{diam } X\}$, где

$$\text{diam } X = \sup_{x, y \in X} d(x, y).$$

Тогда $\mathcal{X}$ можно рассматривать как риманово многообразие $(\mathcal{D}, ds^2)$, где область $\mathcal{D}$ и риманова метрика ds^2 задаются следующим образом (см. [10], [24, ч. 1, гл. 2, 3]):

- 1) $X = \mathbb{R}^n$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, $ds^2 = |dx|^2$;
- 2) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < 1\}$, $ds^2 = (1 - |x|^2)^{-2} |dx|^2$;

3) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $ds^2 = (1 - |z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1 - |z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_1(z, dz)$, где

$$\mathfrak{F}_1(z, dz) = \sum_{i,j=1}^n \bar{z}_i z_j dz_i d\bar{z}_j;$$

4) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{Q}}^n$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^{2n} : |z| < 1\}$, $ds^2 = (1 - |z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1 - |z|^2)^{-2} \times \mathfrak{F}_2(z, dz)$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_2(z, dz) = & \sum_{i,j=1}^n ((\bar{z}_i z_j + z_{n+i} \bar{z}_{n+j}) dz_i d\bar{z}_j + (\bar{z}_i z_{n+j} - z_{n+i} \bar{z}_j) dz_i d\bar{z}_{n+j} \\ & + (\bar{z}_{n+i} z_j - z_i \bar{z}_{n+j}) dz_{n+i} d\bar{z}_j + (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_{n+i} z_{n+j}) dz_{n+i} d\bar{z}_{n+j}); \end{aligned}$$

5) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}a}^2$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^{16} : |x| < 1\}$, $ds^2 = (1 - |x|^2)^{-1}|dx|^2 + 2^{-1}(1 - |x|^2)^{-2} \times \mathfrak{F}_3(x, dx)$, где

$$\mathfrak{F}_3(x, dx) = \sum_{i,j=1}^{16} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (\Phi(x, y)) dx_i dx_j,$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & 2(p_1(x)p_1(y) + \dots + p_8(x)p_8(y)) + p_9(x)p_9(y) + p_{10}(x)p_{10}(y), \\ p_1(x) = & x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6 - x_7x_8 - x_9x_{10} - x_{11}x_{12} - x_{13}x_{14} - x_{15}x_{16}, \\ p_2(x) = & x_1x_4 - x_9x_{12} - x_5x_8 - x_{13}x_{16} + x_3x_2 + x_{11}x_{10} + x_7x_6 + x_{15}x_{14}, \\ p_3(x) = & x_1x_6 - x_9x_{14} + x_5x_2 + x_{13}x_{10} + x_3x_8 + x_{11}x_{16} - x_7x_4 - x_{15}x_{12}, \\ p_4(x) = & x_1x_8 + x_9x_{16} + x_5x_4 - x_{13}x_{12} - x_3x_6 + x_{11}x_{14} + x_7x_2 - x_{15}x_{10}, \\ p_5(x) = & x_1x_{10} + x_9x_2 + x_5x_{14} - x_{13}x_6 + x_3x_{12} - x_{11}x_4 - x_7x_{16} + x_{15}x_8, \\ p_6(x) = & x_1x_{12} + x_9x_4 - x_5x_{16} + x_{13}x_8 - x_3x_{10} + x_{11}x_2 - x_7x_{14} + x_{15}x_6, \\ p_7(x) = & x_1x_{14} + x_9x_6 - x_5x_{10} + x_{13}x_2 + x_3x_{16} - x_{11}x_8 + x_7x_{12} - x_{15}x_4, \\ p_8(x) = & x_1x_{16} - x_9x_8 + x_5x_{12} + x_{13}x_4 - x_3x_{14} - x_{11}x_6 + x_7x_{10} + x_{15}x_2, \\ p_9(x) = & x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{15}^2, \quad p_{10}(x) = x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{16}^2 \end{aligned}$$

(отметим, что многочлены $p_1, \dots, p_8$ и форма $\Phi(x, y)$ наглядно интерпретируются в терминах чисел Кэли (см. [10, § 3], [24, ч. 1, гл. 1, п. 1.1]);

6) $X = \mathbb{S}^n$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$, $ds^2 = (1 + |x|^2)^{-2}|dx|^2$;

7) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$,

$$ds^2 = (1 + |x|^2)^{-1}|dx|^2 - (1 + |x|^2)^{-2} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j dx_i dx_j;$$

8) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$: $\mathcal{D} = \mathbb{C}^n$, $ds^2 = (1 + |z|^2)^{-1}|dz|^2 - (1 + |z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_1(z, dz)$;

9) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$: $\mathcal{D} = \mathbb{C}^{2n}$, $ds^2 = (1 + |z|^2)^{-1}|dz|^2 - (1 + |z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_2(z, dz)$;

10) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{16}$, $ds^2 = (1 + |x|^2)^{-1}|dx|^2 - 2^{-1}(1 + |x|^2)^{-2}\mathfrak{F}_3(x, dx)$.

Пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ имеют постоянную кривизну. Этот класс двухточечно-однородных пространств обозначим $\mathfrak{X}_3$.

Расстояние на X в указанных выше моделях определяется равенством

$$d(0, x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } X = \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{arctg} |x|, & \text{если } X \in \mathfrak{X}_1, \\ \operatorname{arctg} |x|, & \text{если } X \in \mathfrak{X}_2, \end{cases} \quad (8)$$

и условием инвариантности d относительно группы изометрий G пространства X . Соотношение (8) показывает, что геодезический шар $B_R = \{x \in X : d(0, x) < R\}$ совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и соответствующим радиусом. Здесь и всюду далее мы считаем, что $0 < R \leq \operatorname{diam} X$. Будем также обозначать через Ω функцию, обратную к функции

$$\Omega^{-1}(r) = d(0, r\mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{a_X}, \quad (9)$$

относительно суперпозиции отображений.

Положим $\alpha_X = -1 + a_X/2$, а $\beta_X = n/2 - 1, -1/2, 0, 1, 3$ соответственно в каждом из следующих пяти случаев:

- 1) $X = \mathbb{R}^n, X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n, X = \mathbb{S}^n$;
- 2) $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$;
- 3) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n, X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$;
- 4) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{Q}}^n, X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$;
- 5) $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}a}^2, X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$.

Параметры α_X, β_X и $\rho_X = \alpha_X + \beta_X + 1$ просто выражаются через кратности корневых подпространств алгебры Ли группы G (см. [31, гл. 1, § 4, п. 2], [32, гл. 1, § 11]). Риманова мера на $\mathcal{X}$ имеет вид

$$d\mu(x) = (1 + \varepsilon_X |x|^2)^{-\rho_X - 1} dx, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_X = \begin{cases} 0 & \text{при } X = \mathbb{R}^n, \\ -1 & \text{при } X \in \mathfrak{X}_1, \\ 1 & \text{при } X \in \mathfrak{X}_2. \end{cases}$$

Наличие множителя ε_X в (10) и формулах, приведенных ниже, является проявлением известной двойственности между пространствами компактного и некомпактного типа (см. [33, гл. 5, § 2]).

Площадь сферы радиуса r в X связана с площадью b_X единичной сферы в $\mathbb{R}^{a_X}$ равенством

$$A_X(r) = b_X \frac{(\Omega(r))^{2\alpha_X + 1}}{(1 + \varepsilon_X \Omega^2(r))^{\rho_X}}.$$

Пусть $\mathcal{H}_{a_X}^k, k \in \mathbb{Z}_+, -$ пространство однородных гармонических многочленов степени k в $\mathbb{R}^{a_X}$. Обозначим

$$M_X(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \in \mathfrak{X}_3, \\ [k/2] & \text{при } X \notin \mathfrak{X}_3. \end{cases}$$

Для $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, $X \notin \mathfrak{X}_3$ определим

$$\mathcal{H}_X^{k,m} = \{f \in \mathcal{H}_{a_X}^k : (Lf)(x) = 4\varepsilon_X(m - \beta_X)(k - m)(1 + \varepsilon_X|x|^2)f(x)\}.$$

В случае, когда $X \in \mathfrak{X}_3$, положим $\mathcal{H}_X^{k,m} = \mathcal{H}_{a_X}^k$. После отождествления $\mathcal{H}_X^{k,m}$ с пространством сужений его элементов на сферу

$$\mathbb{S}^{a_X-1} = \{x \in \mathbb{R}^{a_X} : |x| = 1\}$$

$\mathcal{H}_X^{k,m}$ становится инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}$ группы $K = G \cap O(a_X)$ на $L^2(\mathbb{S}^{a_X-1})$. Сужения $\mathfrak{T}^{k,m}$ представления $\mathfrak{T}$ на $\mathcal{H}_X^{k,m}$ являются попарно неэквивалентными неприводимыми унитарными представлениями, причем имеет место следующее разложение в ортогональную прямую сумму:

$$\mathfrak{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \mathfrak{T}^{k,m}$$

(см. [10, § 2], [24, ч. 1, гл. 4]).

Произвольная точка $x \in \mathbb{R}^{a_X} \setminus \{0\}$ представима в виде

$$x = \varrho\sigma, \quad \text{где } \varrho = |x|, \quad \sigma = \frac{x}{|x|}.$$

Всякой функции $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} f_{k,m,j}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma), \quad (11)$$

где $d_X^{k,m}$ – размерность $\mathcal{H}_X^{k,m}$, $\{Y_j^{k,m}\}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_X^{k,m}$ относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^{a_X-1}$ и

$$f_{k,m,j}(\varrho) = \int_{\mathbb{S}^{a_X-1}} f(\varrho\sigma) \overline{Y_j^{k,m}(\sigma)} d\omega(\sigma). \quad (12)$$

Далее будем считать, что

$$Y_1^{0,0} = \frac{1}{\sqrt{b_X}}.$$

Если $f \in \mathcal{E}(B_R)$, то ряд (11) сходится к f в пространстве $\mathcal{E}(B_R)$ (см. [25, § 2]).

Пусть $\{t_{i,j}^{k,m}(\tau)\}$, $i, j \in \{1, \dots, d_X^{k,m}\}$, – матрица представления $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ в базисе $\{Y_j^{k,m}\}$, $d\tau$ – мера Хаара на K общей массы 1. Разложение (11) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ следующим образом:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} f^{k,m,j}, \quad (13)$$

где ряд сходится к f в $\mathcal{D}'(B_R)$ и распределение $f^{k,m,j}$ действует на пространстве основных функций $\mathcal{D}(B_R)$ по правилу

$$\langle f^{k,m,j}, \psi \rangle = \left\langle f, d_X^{k,m} \int_K \psi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^{k,m}(\tau) d\tau \right\rangle = \left\langle f, \overline{(\psi)_{k,m,j}(\varrho)} \overline{Y_j^{k,m}(\sigma)} \right\rangle, \quad (14)$$

$$\psi \in \mathcal{D}(B_R).$$

Для всякого множества $\mathfrak{W}(B_R) \subset \mathcal{D}'(B_R)$ положим

$$\mathfrak{W}_{k,m,j}(B_R) = \{f \in \mathfrak{W}(B_R) : f = f^{k,m,j}\},$$

$$\mathfrak{W}_{\natural}(B_R) = \mathfrak{W}_{0,0,1}(B_R). \quad (15)$$

Отметим, что аналогом класса (15) в одномерном случае является совокупность $\mathfrak{W}_{\natural}(-R, R)$ всех четных распределений из заданного множества $\mathfrak{W}(-R, R)$ в $\mathcal{D}'(-R, R)$. Нетрудно видеть, что носитель распределения $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ является K -инвариантным. Если $f \in \mathcal{E}'_{k,m,j}(B_R)$, то будем писать $r(f)$ вместо $r_0(f)$ (см. (7)).

Далее, введем функции на $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, получающиеся при разделении переменных в полярных координатах в уравнении на собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами. Обозначим

$$\mathcal{N}_X(k) = \begin{cases} \frac{k+1}{2}, & X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \\ k, & X \neq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \end{cases} \quad \nu_X(\lambda) = \begin{cases} \frac{\rho_X + i\lambda}{2}, & X \in \mathfrak{X}_1, \\ \frac{\rho_X + \lambda}{2}, & X \in \mathfrak{X}_2, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\alpha(k) = \alpha_X + k, \quad \beta(k, m) = \beta_X + 2\mathcal{N}_X(k+1) - k - 2m - 2.$$

При отождествлении представлений $\mathfrak{T}^{k,m}$ с парами (k, m) числа $\alpha(k)$ и $\beta(k, m)$ совпадают с параметрами обобщенных сферических функций типа (k, m) на симметрических пространствах ранга один (см. [32, гл. 3, с. 372]). Положим теперь

$$\Phi_{\lambda}^{k,m,j}(x) = \sqrt{b_X} \Phi_{\lambda}^{k,m}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma), \quad x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}, \quad (16)$$

где

$$\Phi_{\lambda}^{k,m}(\varrho) = \varrho^k (1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{m+1-\mathcal{N}_X(k+1)} R_{m+1-\mathcal{N}_X(k+1)-\nu_X(-\lambda)}^{(\alpha(k), \beta(k,m))} \left(\frac{1 - \varepsilon_X \varrho^2}{1 + \varepsilon_X \varrho^2} \right), \quad (17)$$

если $X \neq \mathbb{R}^n$, и

$$\Phi_{\lambda}^{k,m}(\varrho) = 2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \varrho^k \frac{J_{n/2+k-1}(\lambda \varrho)}{(\lambda \varrho)^{n/2+k-1}}, \quad (18)$$

если $X = \mathbb{R}^n$. Нетрудно видеть, что $\Phi_{\lambda}^{k,m,j}$ допускают непрерывное продолжение в точку $x = 0$. Доопределенные по непрерывности в нуле, функции $\Phi_{\lambda}^{k,m,j}$ становятся вещественно-аналитическими на $\mathcal{X}$ и

$$(L + \lambda^2 - \varepsilon_X \rho_X^2) \Phi_{\lambda}^{k,m,j} = 0 \quad (19)$$

(см. [10, доказательство формулы (41)]). Если $N \in \mathbb{Z}_+$ и $r \in (0, \text{diam } X)$, то

$$\|\Phi_\lambda^{k,m,j}\|_{C^N(\overline{B_r})} \leq c(1 + |\lambda|)^{N-k} e^{r|\text{Im } \lambda|}, \quad (20)$$

где константа $c > 0$ не зависит от λ (см. [31, введение, лемма 3.6] и [10, доказательство оценки (45)]).

Для $f \in \mathcal{E}'_{k,m,j}(\mathcal{X})$ положим

$$\mathcal{F}_j^{k,m}(f)(\lambda) = \left\langle f, \overline{\Phi_\lambda^{k,m,j}} \right\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (21)$$

Функция $\mathcal{F}_j^{k,m}(f)$ является четной целой функцией переменной λ . Если $f \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathcal{X})$, то будем записывать $\tilde{f}(\lambda)$ вместо $\mathcal{F}_1^{0,0}(f)(\lambda)$, т. е.

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f, \Phi_\lambda^{0,0,1} \rangle. \quad (22)$$

Для евклидовых и гиперболических пространств $\tilde{f}$ совпадает со сферическим преобразованием распределения f [31, гл. 4]. Если X компактно, то $\tilde{f}$ является аналитическим продолжением дискретного преобразования Фурье–Якоби (см. [26, § 5]). Теоремы Винера–Пэли для преобразований (2) и (21) (см. [34, теорема 7.3.1], а также лемму 8 ниже) показывают, что $\tilde{f}(\lambda)$ является преобразованием Фурье распределения из $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^1)$. Обозначим это распределение через $\Lambda(f)$. Нам потребуется также функция

$$c_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{2^{\alpha+\beta+1-i\lambda} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(i\lambda)}{\Gamma((i\lambda + \alpha + \beta + 1)/2) \Gamma((i\lambda + \alpha - \beta + 1)/2)}.$$

При $\alpha = \alpha_X$, $\beta = \beta_X$ она совпадает с известной функцией Хариш–Чандры для симметрических пространств некомпактного типа ранга один и играет важную роль в теории преобразования Фурье (см. [31, гл. 4, § 6]).

Пусть $\varkappa_l = \alpha(k) + \beta(k, m) + 1 + 2l$, $l \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathfrak{S}_X(k, m) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } X = \mathbb{R}^n \text{ или } X \in \mathfrak{X}_1, \\ \{\varkappa_l\}_{l=0}^\infty, & \text{если } X \in \mathfrak{X}_2, \end{cases} \quad \mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_X(0, 0).$$

При $\lambda = \varkappa_l$ функции $\Phi_\lambda^{k,m}$ на компактных пространствах X выражаются через многочлены Якоби степени l . Более того, если $X \in \mathfrak{X}_2$, то система функций $\{\Phi_{\varkappa_l}^{k,m,j}\}_{l=0}^\infty$ образует ортогональный базис в пространстве $L^2_{k,m,j}(\mathcal{X})$ (см. [26, предложение 4.3]).

Из теоремы Хана–Банаха и инъективности преобразования $\mathcal{F}_j^{k,m}$ следует (см. (21), (14) и [26, предложение 5.6 и замечание 5.2]), что $\text{Lin}\{\Phi_\lambda^{k,m,j}, \lambda \in \mathfrak{S}_X(k, m)\}$ является плотным множеством в пространстве $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ с топологией, индуцируемой $\mathcal{E}(B_R)$. Определим оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ на функциях $\Phi_\lambda^{k,m,j}$ равенством

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(\Phi_\lambda^{k,m,j})(t) = \cos(\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ продолжается до гомеоморфизма $\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ на $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, который будет обозначаться той же буквой. В следующем утверждении содержатся основные свойства отображения $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ (см. [26, п. 5.2], [25, § 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (i) *Отображение $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ является гомеоморфизмом между $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ и $\mathcal{E}_{\natural}(-R, R)$.*

(ii) *Пусть $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_r)$, $r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,m,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$.*

(iii) *Для любого $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(B_R)$ на интервале $(r(T) - R, R - r(T))$ имеет место обобщенное трансмутационное свойство*

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(f \times T) = \mathfrak{A}_{k,m,j}(f) * \Lambda(T), \quad f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_r).$$

(iv) *Пусть $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$, $\psi \in \mathcal{D}(-R, R)$ и η – произвольная функция из $\mathcal{D}_{\natural}(B_R)$, равная единице в некоторой окрестности шара $\overline{B_{r_0(\psi)}}$. Тогда:*

1) *если $X = \mathbb{R}^n$, то*

$$\langle \mathfrak{A}_{k,m,j}(f), \psi \rangle = \frac{1}{2^{n-1} \Gamma(n/2) \pi^{n/2}} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^{k,m}(f\eta)(\lambda) \langle \psi(t), \cos(\lambda t) \rangle d\lambda; \quad (23)$$

2) *если $X \in \mathfrak{X}_1$, то*

$$\langle \mathfrak{A}_{k,m,j}(f), \psi \rangle = \frac{2^{2(\rho_X+2k-2m)-1}}{\pi b_X} \int_0^\infty \frac{\mathcal{F}_j^{k,m}(f\eta)(\lambda) \langle \psi(t), \cos(\lambda t) \rangle}{|c_{\alpha(k), \beta(k,m)}(\lambda)|^2} d\lambda; \quad (24)$$

3) *если $X \in \mathfrak{X}_2$, то*

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{A}_{k,m,j}(f), \psi \rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2\mathfrak{A}_l}{b_X l!} \frac{\Gamma(\alpha(k) + l + 1) \Gamma(\mathfrak{A}_l - l)}{\Gamma(\beta(k, m) + l + 1) \Gamma^2(\alpha(k) + 1)} \\ &\quad \times \mathcal{F}_j^{k,m}(f\eta)(\mathfrak{A}_l) \langle \psi(t), \cos(\mathfrak{A}_l t) \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

(v) *Пусть $f \in \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, $\psi \in \mathcal{D}(B_R)$ и η – произвольная функция из $\mathcal{D}_{\natural}(-R, R)$, равная единице в некоторой окрестности отрезка $[-r_0(\psi), r_0(\psi)]$. Тогда*

$$\langle \mathfrak{A}_{k,m,j}^{-1}(f), \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \widehat{f\eta}(\lambda) \langle \psi, \Phi_{\lambda}^{k,m,j} \rangle d\lambda. \quad (26)$$

Полагая

$$\mathcal{A}_j^{k,m} = \mathfrak{A}_{0,0,1}^{-1} \mathfrak{A}_{k,m,j}, \quad (27)$$

получаем отображение из $\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_r)$ в $\mathcal{D}'_{\natural}(B_R)$ со свойствами:

1) *имеет место равенство*

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(\Phi_{\lambda}^{k,m,j}) = \Phi_{\lambda}^{0,0,1}; \quad (28)$$

2) *если $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(B_R)$, $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_r)$, то*

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(f \times T) = \mathcal{A}_j^{k,m}(f) \times T \quad \text{в} \quad B_{R-r(T)}. \quad (29)$$

Отметим, что лемма 13 в § 4 дает явное представление для $\mathcal{A}_j^{k,m}$ в виде суперпозиции дифференциальных операторов. Обратное отображение $(\mathcal{A}_j^{k,m})^{-1}$ будет обозначаться через $\mathcal{B}_j^{k,m}$. Операторы $\mathcal{A}_j^{k,m}$ играют важную роль при изучении проблем (i)–(iii) из § 1 и их обобщений.

§ 3. Формулировки основных результатов

Пусть $R \in (0, \text{diam } X]$, $r \in (0, R)$ – фиксированные числа,

$$W_r(B_R) = \{f \in L^{1,\text{loc}}(B_R) : f \times \chi_r = f \times \sigma_r = 0 \text{ в } B_{R-r}\}, \quad (30)$$

где, как и выше, χ_r – индикатор шара B_r , σ_r – поверхностная дельта-функция сферы S_r . Для описания класса $W_r(B_R)$ введем две совокупности функций. Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$ положим

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{L}in\{u_p(\varrho), 2 \leq p \leq k - m; v_p(\varrho), 1 \leq p \leq m\}, \\ E_2 &= \left\{u \in E_1 : \int_0^\varepsilon |u(\varrho)| \varrho^{2\alpha_X+1} d\varrho < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$u_p(\varrho) = \begin{cases} (1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\mathcal{N}_X(p) + \alpha_X + \beta_X} \varrho^{-k-2\alpha_X}, & X \neq \mathbb{R}^n, \\ \varrho^{2p-n-k-2}, & X = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

и если $\beta_X + 2 \leq m$, то

$$v_p(\varrho) = \begin{cases} (1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\alpha_X + p} \varrho^{-k-2\alpha_X}, & 1 \leq p \leq \beta_X + 1, \\ (1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\alpha_X + p} \varrho^{-k-2\alpha_X} \ln(1 + \varepsilon_X \varrho^2), & \beta_X + 2 \leq p \leq m, \end{cases}$$

а если $\beta_X + 2 > m$, то

$$v_p(\varrho) = (1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\alpha_X + p} \varrho^{-k-2\alpha_X}.$$

В случае, когда неравенства $2 \leq p \leq k - m$ или $1 \leq p \leq m$ не имеют решений $p \in \mathbb{N}$, соответствующий набор функций в (31) заменяется на нулевую функцию. Ясно, что $E_1 = \{0\}$ при $k = 0$ или $k = 1$. При $k \geq 2$ функции из E_1 можно охарактеризовать как ядро некоторого дифференциального оператора, связанного с $\mathcal{A}_j^{k,m}$ (см. доказательство теоремы 1 в § 5).

Следующий результат дает полное описание класса $W_r(B_R)$ и показывает, в частности, роль множеств E_1 и E_2 в структуре ядра преобразования $\mathcal{P}_{\{\chi_r, \sigma_r\}, B_R}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$. Тогда:

- (i) если $R > 2r$ и $f \in W_r(B_R)$, то $f = 0$ в B_R ;
- (ii) если $R < 2r$, то для того, чтобы $f \in W_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{B_{2r-R}} f(x) d\mu(x) = 0 \quad (32)$$

и для любых k, m, j сужение $f_{k,m,j}$ на интервал $(\Omega(2r - R), \Omega(R))$ принадлежало E_1 ;

- (iii) если $R = 2r$, то $f \in W_r(B_R)$ в том и только в том случае, когда для любых k, m, j функция $f_{k,m,j}$ принадлежит E_2 .

Отметим, что аналог теоремы 1 для $X = \mathbb{R}^n$ был получен ранее в работе [35, § 5], однако метод доказательства в [35] существенно использует специфику евклидова пространства и не подходит в общей ситуации.

Ниже мы увидим (см. теорему 3), что класс $W_r(B_R) \cap C^\infty(\{0\})$ при $R = 2r$ содержит только нулевую функцию. В частности, преобразование $\mathcal{P}_{\{\chi_r, \sigma_r\}, B_R}$ инъективно лишь при условии $R \geq 2r$. Наша дальнейшая цель – построить конструкцию обращения $\mathcal{P}_{\{\chi_r, \sigma_r\}, B_R}$.

Положим $\epsilon_X = \varepsilon_X$, если $X \in \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$, и $\epsilon_X = -1$, если $X = \mathbb{R}^n$. Для $t_1, t_2 > 0$ таких, что $t_1 + t_2 < \text{diam } X$, введем функцию Ξ_{t_1, t_2} по формуле

$$\Xi_{t_1, t_2}(a, \psi) = \Omega(d(\Omega(t_1)\eta, \Omega(t_2)\mathbf{e})), \quad (a, \psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2}), \quad (33)$$

где множество $\mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2})$ и точка $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{a_X}) \in \mathbb{S}^{a_X-1}$ определяются для каждого X следующим образом:

1) если $X \notin \mathfrak{X}_3$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2}) = \{(a, \psi) : a \in [0, 1], \psi \in [0, \pi]\}$,

$$\eta_1 = \varepsilon_X a \cos \psi, \quad \eta_2 = \sqrt{1 - a^2}, \quad \eta_{a_X/2+1} = \varepsilon_X a \sin \psi;$$

2) если $X \in \mathfrak{X}_3$ и $X \neq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2}) = \{(1, \psi) : \psi \in [0, \pi]\}$, $\eta_1 = \epsilon_X \cos \psi$, $\eta_2 = \sin \psi$;

3) если $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, то $\mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2}) = \{(a, 0) : a \in [-1, 1]\}$, $\eta_1 = a$, $\eta_2 = \sqrt{1 - a^2}$.

Отметим, что невыписанные координаты точки η в 1)–3) равны нулю. В лемме 3 далее приводятся явные выражения для Ξ_{t_1, t_2} . Эти формулы показывают, что множеством значений Ξ_{t_1, t_2} является отрезок $[\Omega(|t_1 - t_2|), \Omega(t_1 + t_2)]$. Функции Ξ_{t_1, t_2} играют важную роль в теореме сложения для функции $\Phi_\lambda^{0,0}$ (см. лемму 5 в § 4).

Определим операторы $D(\alpha, \beta)$ и $\mathfrak{D}(\alpha, \beta)$ равенствами

$$(D(\alpha, \beta)\varphi)(\varrho) = \frac{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\beta+1}}{\varrho^\alpha} \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{\varrho^\alpha}{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^\beta} \varphi(\varrho) \right), \quad (34)$$

$$(\mathfrak{D}(\alpha, \beta)\varphi)(\varrho) = \frac{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^\beta}{\varrho^\alpha} \int_0^\varrho \frac{\xi^\alpha}{(1 + \varepsilon_X \xi^2)^{\beta+1}} \varphi(\xi) d\xi. \quad (35)$$

Тогда $D(\alpha, \beta)\mathfrak{D}(\alpha, \beta)$ является тождественным отображением. При некоторых значениях параметров α, β операторы $D(\alpha, \beta)$ тесно связаны с генераторами, порожденными инволютивными изометриями пространства X (см. [10]). Действие этих операторов на функции $\Phi_\lambda^{k,m}$ приводит к понижению или повышению верхних индексов (см. далее лемму 4).

Для краткости обозначим

$$\zeta_{p,q} = \frac{\Gamma(\beta_X + p + 1)}{(\alpha_X + p + q)\Gamma(\alpha_X + p)},$$

$$\mathbf{D}_{p,q,1} = \frac{\zeta_{p-1,q}}{\zeta_{p+1,q}} \mathfrak{D}(2\alpha_X + p + q + 1, \rho_X + p) D(1 - p - q, 1 - p),$$

$$\mathbf{D}_{p,q,2} = \frac{2\zeta_{p,q}}{\zeta_{p+1,q}} \frac{p + q + \alpha_X - \varepsilon_X \Omega^2(r)(\beta_X + p - q)}{\Omega(r)} \mathfrak{D}(2\alpha_X + p + q + 1, \rho_X + p),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{p,q,3} &= \frac{(\alpha_X + p - 1)(\alpha_X + p + q + 1)}{(\alpha_X + p + q - 1)(\beta_X + p)} \\
&\quad \times \mathfrak{D}(2\alpha_X + p + q + 1, \alpha_X + q + 1)D(1 - p - q, 1 - p), \\
\mathbf{D}_{p,q,4} &= \frac{2(\alpha_X + p + q + 1)}{\Omega(r)} \mathfrak{D}(2\alpha_X + p + q + 1, \alpha_X + p + 1), \\
\mathbf{D}_{p,1} &= \mathfrak{D}\left(n + p - 1, \frac{n + p - 1}{2}\right) D\left(1 - p, \frac{1 - p}{2}\right), \\
\mathbf{D}_{p,2} &= \frac{n + 2p - 2}{\Omega(r)} \mathfrak{D}\left(n + p - 1, \frac{n + p - 1}{2}\right), \\
\mathbf{D}_{p,3} &= \mathfrak{D}(n + p - 1, 0)D(1 - p, 0), \quad \mathbf{D}_{p,4} = \frac{n + 2p - 2}{r} \mathfrak{D}(n + p - 1, 0).
\end{aligned}$$

Пусть, как и выше, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, $j \in \{1, \dots, d_X^{k,m}\}$. Для любой функции $f \in \mathcal{E}(B_R)$ и $r \in (0, R)$, $t \in (0, R - r)$ определим коэффициенты $d_{p,q}(f, t, r)$ при $(p, q) \in \mathcal{I}_{\alpha_X, \beta_X}$ следующими рекуррентными соотношениями:

1) выполнены равенства

$$d_{0,0}(f, t, r) = \frac{\mathcal{A}_j^{k,m}((f \times \sigma_r)^{k,m,j})(\Omega(t)\mathbf{e})}{A_X(r)\Gamma(\beta_X + 1)},$$

$$d_{1,0}(f, t, r) = -\epsilon_X \frac{(\alpha_X + 1)}{A_X(r)\Gamma(\beta_X + 2)} D(0, 0)(\mathcal{A}_j^{k,m}((f \times \chi_r)^{k,m,j})(\varrho\mathbf{e}))(\Omega(t));$$

2) если $X \notin \mathfrak{X}_3$, то при $p - 1 \geq q \geq 0$

$$\begin{aligned}
d_{p+1,q}(f, \Omega^{-1}(t), r) &= \mathbf{D}_{p,q,1}(d_{p-1,q}(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t) \\
&\quad + \varepsilon_X \mathbf{D}_{p,q,2}(d_{p,q}(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t), \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{p,q+1}(f, \Omega^{-1}(t), r) &= \mathbf{D}_{p,q,3}(d_{p-1,q}(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t) \\
&\quad + \varepsilon_X \mathbf{D}_{p,q,4}(d_{p,q}(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t); \quad (37)
\end{aligned}$$

3) если $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ или $X = \mathbb{S}^n$, то

$$\begin{aligned}
d_{p+1,0}(f, \Omega^{-1}(t), r) &= \mathbf{D}_{p,0,1}(d_{p-1,0}(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t) \\
&\quad + \varepsilon_X \mathbf{D}_{p,0,2}(d_{p,0}(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t); \quad (38)
\end{aligned}$$

4) если $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, то

$$\begin{aligned}
d_{p+1}(f, \Omega^{-1}(t), r) &= \mathbf{D}_{p,1}(d_{p-1}(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t) \\
&\quad + \mathbf{D}_{p,2}(d_p(f, \Omega^{-1}(\varrho), r))(t), \quad p \geq 1, \quad (39)
\end{aligned}$$

где

$$d_p(f, t, r) = \frac{\Gamma(1/2 + [(p+1)/2])}{(\alpha_X + p)\Gamma(\alpha_X + [(p+1)/2])} d_{[(p+1)/2], [p/2]}(f, t, r), \quad p \in \mathbb{Z}_+; \quad (40)$$

5) если $X = \mathbb{R}^n$, то

$$d_{p+1,0}(f, t, r) = \mathbf{D}_{p,3}(d_{p-1,0}(f, \varrho, r))(t) - \mathbf{D}_{p,4}(d_{p,0}(f, \varrho, r))(t), \quad p \geq 1. \quad (41)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in \mathcal{E}(B_R)$, $R \geq 2r$. Тогда

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} \mathcal{B}_j^{k,m} h_j^{k,m}, \quad (42)$$

где ряд сходится к f в пространстве $\mathcal{E}(B_R)$ и радиальные функции $h_j^{k,m}$ определяются по известным сверткам $f \times \chi_r$ и $f \times \sigma_r$ с помощью разложения

$$h_j^{k,m}(\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{I}_{\alpha_X, \beta_X}} d_{p,q}(f, t, r) \xi_{p,q}^{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi), \quad (43)$$

$$t \in (0, R - r), \quad (a, \psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{r,t}),$$

в котором ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathcal{M}(\Xi_{r,t})$.

Явный вид операторов $\mathcal{B}_j^{k,m} = \mathfrak{A}_{k,m,j}^{-1} \mathfrak{A}_{0,0,1}$ содержится в (23)–(26). Далее, ввиду замечаний после определения (33) точка $\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}$ в (43) пробегает весь шар B_R . Тем самым равенства (42) и (43) восстанавливают f по известным сверткам $f \times \chi_r$ и $f \times \sigma_r$.

Из теорем 1, 2 получается следующая теорема единственности для класса $W_r(B_R)$.

ТЕОРЕМА 3. При $R = 2r$ имеют место следующие утверждения:

(i) если $f \in W_r(B_R)$ и выполнено одно из условий:

- a) $f \in C^\infty(\{0\})$,
- b) $f \in C(\{0\})$ и $f(x) = o((d(0, x))^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ и любом фиксированном $\alpha > 0$,
- c) $f \in C(B_R)$ и $f(x) = 0$ при $d(0, x) \in E$ для некоторого бесконечного множества $E \subset (0, R)$,

то $f = 0$ в B_R ;

(ii) для любых $s \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$ и конечного множества $E \subset (0, R)$ существует ненулевая функция $f \in W_r^s(B_R)$ такая, что $f(x) = o((d(0, x))^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$ и $f(x) = 0$ при $d(0, x) \in E$.

Из доказательства теоремы 3 видно (см. § 5), что утверждение (i) останется верным, если условие c) заменить следующим условием: $f(x) = 0$ при $d(0, x) \in E$, где E – множество положительной меры на $(0, R)$.

В заключение рассмотрим приложение теоремы 1 к изучению вопроса о существовании четной целой функции экспоненциального типа не выше ς , принимающей заданные значения в точках данной последовательности плотности $\tau > \varsigma$. Такие интерполяционные задачи естественно называть переопределенными.

Обозначим через Z_ς множество всех четных целых функций $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих оценке

$$|w(\lambda)| \leq \gamma(1 + |\lambda|)^m e^{\varsigma |\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (44)$$

для некоторых констант $\gamma > 0$, $m \in \mathbb{Z}$.

В качестве узлов интерполяции будут выбираться нули λ функции $\Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))$. Для фиксированного $0 < \tau < \text{diam } X$ справедливы следующие утверждения (см. [29, п. 7.9], [8, ч. 1, формула (4.58)], [10, предложение 2], [11, § 6]).

ЛЕММА 2. (i) Функция $\Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))$ имеет бесконечно много нулей. Все нули $\Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$. Кроме того, $\Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau)) > 0$ при $i\lambda \in \mathbb{R}^1$.

(ii) Пусть $\{\lambda_l\}_{l=1}^{\infty}$ – последовательность всех положительных нулей функции $\Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))$, занумерованная в порядке возрастания, и предположим, что $0 < \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 < \text{diam } X$. Тогда

$$\tau \lambda_l = \pi \left(\frac{2\alpha_X + 3}{4} + l + q_1(\tau) \right) + \frac{q_2(\tau)}{\lambda_l} + O\left(\frac{1}{\lambda_l^3}\right), \quad (45)$$

где $q_1(\tau) \in \mathbb{Z}$ и $q_2(\tau) \in \mathbb{R}^1$ не зависят от l , а постоянная в знаке O зависит только от τ_1, τ_2, X .

Утверждение (ii) теоремы 1 позволяет получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < \varsigma < \tau \leq (\text{diam } X)/2$, $\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) существует функция $w \in Z_{\varsigma}$ такая, что $w(\lambda_l) = \mu_l$ для всех l ;
- (ii) ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \mu_l \left(\frac{d}{d\lambda} \Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))|_{\lambda=\lambda_l} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(\Omega(\tau)) \right)^{-1} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(|x|)$$

сходится к нулю на $B_{\varsigma, 2\tau-\varsigma}$ в пространстве $\mathcal{D}'(B_{\varsigma, 2\tau-\varsigma})$.

Стандартные рассуждения, связанные с применением принципа Фрагмена–Линделёфа (см., например, [10, доказательство леммы 4]), показывают, что функция w в теореме 4 определяется однозначно. Отметим также, что из сходимости ряда в (ii) следует оценка $\mu_l = O(l^{\gamma})$ для некоторого $\gamma > 0$ (см. [8, ч. 3, доказательство леммы 2.7]).

§ 4. Вспомогательные утверждения

Пусть $t_1, t_2 > 0$ и $t_1 + t_2 < \text{diam } X$. Для $(a, \psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2})$ положим

$$\Theta(t_1, t_2, a, \psi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|\text{ch } t_1 \text{ch } t_2 + ae^{i\psi} \text{sh } t_1 \text{sh } t_2|^2 - 1}}{|\text{ch } t_1 \text{ch } t_2 + ae^{i\psi} \text{sh } t_1 \text{sh } t_2|}, & \text{если } X \in \mathfrak{X}_1, \\ \frac{\sqrt{1 - |\cos t_1 \cos t_2 + ae^{i\psi} \sin t_1 \sin t_2|^2}}{|\cos t_1 \cos t_2 + ae^{i\psi} \sin t_1 \sin t_2|}, & \text{если } X \in \mathfrak{X}_2, \\ \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos \psi}, & \text{если } X = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

В следующем утверждении содержатся явные выражения для функции Ξ_{t_1, t_2} .

ЛЕММА 3. *Имеет место равенство*

$$\Xi_{t_1, t_2}(a, \psi) = \Theta(t_1, t_2, a, \psi), \quad (a, \psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2}). \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X = \mathbb{R}^n$, соотношение (46) является тривиальным. Для доказательства (46) в общем случае нам потребуется явный вид некоторых изометрий пространства X .

Пусть $X = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) или $X = \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{Q}$). Положим

$$\sigma_w(z) = (1 + \varepsilon_X \langle z, w \rangle_{\mathbb{K}})^{-1} \left(-\sqrt{1 + \varepsilon_X |w|^2} z + \left(1 + \frac{\varepsilon_X \langle z, w \rangle_{\mathbb{K}}}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon_X |w|^2}} \right) w \right), \quad (47)$$

где $\langle z, w \rangle_{\mathbb{K}}$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{K}^n$. Если $X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ или $X = \mathbb{S}^n$, определим

$$\sigma_w(z) = \frac{(1 + 2\varepsilon_X \langle z, w \rangle_{\mathbb{R}} - \varepsilon_X |z|^2)w - (1 + \varepsilon_X |w|^2)z}{1 + |w|^2 |z|^2 + 2\varepsilon_X \langle z, w \rangle_{\mathbb{R}}}. \quad (48)$$

Наконец, в случае $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}a}^2$ или $X = \mathbb{H}_{\mathbb{C}a}^2$ обозначим

$$\sigma_{(|w|, 0)}(z_1, z_2) = \varepsilon_X \left((|w| - z_1)(|w|z_1 + \varepsilon_X)^{-1}, -\sqrt{1 + \varepsilon_X |w|^2}(|w|\bar{z}_1 + \varepsilon_X)^{-1}z_2 \right). \quad (49)$$

Отображения (47)–(49) являются инволютивными изометриями соответствующего пространства X , и $\sigma_v(v) = 0$ (см. [10], [24, ч. 1, гл. 2, 3]). Поэтому для $x = \Omega(t_1)\eta$, $y = \Omega(t_2)\mathbf{e}$ имеем (см. (33), (8), (9))

$$\Xi_{t_1, t_2}(a, \psi) = \Omega(d(x, y)) = \Omega(d(\sigma_y(x), 0)) = |\sigma_y(x)|. \quad (50)$$

Из (47)–(50) получаем (46).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Простые вычисления показывают, что равенство (46) можно переписать соответственно в виде

$$\Xi_{t_1, t_2}(1, \psi) = \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{ch} 2t_1 \operatorname{ch} 2t_2 + \operatorname{sh} 2t_1 \operatorname{sh} 2t_2 \cos \psi - 1}{\operatorname{ch} 2t_1 \operatorname{ch} 2t_2 + \operatorname{sh} 2t_1 \operatorname{sh} 2t_2 \cos \psi + 1} \right)^{1/2}, & X = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n, \\ \left(\frac{1 - \cos 2t_1 \cos 2t_2 - \sin 2t_1 \sin 2t_2 \cos \psi}{1 + \cos 2t_1 \cos 2t_2 + \sin 2t_1 \sin 2t_2 \cos \psi} \right)^{1/2}, & X = \mathbb{S}^n. \end{cases}$$

Далее нам потребуются формулы дифференцирования функций $\Phi_{\lambda}^{k, m}$. Положим

$$c_1(k, m, \lambda) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon_X(\nu_X(\lambda) + \mathcal{N}_X(k+1) - m - 1)(\nu_X(-\lambda) + \mathcal{N}_X(k+1) - m - 1)}{k + \alpha_X + 1}, & \text{если } X \neq \mathbb{R}^n, \\ -\lambda^2, & \text{если } X = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

$$c_2(k, m, \lambda) = \frac{2\varepsilon_X(\nu_X(\lambda) + m - \beta_X)(\nu_X(-\lambda) + m - \beta_X)}{k + \alpha_X + 1},$$

$$c_3(k, m) = \begin{cases} 2(k + \alpha_X), & X \neq \mathbb{R}^n, \\ 1, & X = \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad c_4(k, m) = 2(k + \alpha_X).$$

ЛЕММА 4. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$. Тогда:

(i) имеет место равенство

$$D(-k, m+1 - \mathcal{N}_X(k+1))\Phi_\lambda^{k,m} = c_1(k, m, \lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m}; \quad (51)$$

(ii) если $m \leq M_X(k+1) - 1$, то

$$D(-k, \beta_X - m)\Phi_\lambda^{k,m} = c_2(k, m, \lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m+1}; \quad (52)$$

(iii) если $k \geq 1$ и $m \leq M_X(k-1)$, то

$$D(k+2\alpha_X, \mathcal{N}_X(k) + \rho_X - 1 - m)\Phi_\lambda^{k,m} = c_3(k, m)\Phi_\lambda^{k-1,m}; \quad (53)$$

(iv) если $m \geq 1$, то

$$D(k+2\alpha_X, \alpha_X + m)\Phi_\lambda^{k,m} = c_4(k, m)\Phi_\lambda^{k-1,m-1}. \quad (54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулы дифференцирования гипергеометрической функции [29, п. 2.8, формулы (20), (22), (24), (27)] и учитывая, что

$$F(\alpha, \beta; \gamma; t) = (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; t),$$

получаем (51)–(54) прямым вычислением.

СЛЕДСТВИЕ 1. (i) Если $k \geq 1$ и $m \leq M_X(k-1)$, то

$$\begin{aligned} c_1(k, m, \lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m}(\varrho) - c_3(k, m)\Phi_\lambda^{k-1,m}(\varrho) \\ = \frac{2\Phi_\lambda^{k,m}(\varrho)}{\varrho}(-k - \alpha_X + \varepsilon_X \varrho^2(\beta_X + \mathcal{N}_X(k) + \mathcal{N}_X(k+1) - k - 2m - 1)). \end{aligned} \quad (55)$$

(ii) Если $m \leq M_X(k+1) - 1$, то

$$\begin{aligned} c_2(k, m, \lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m+1}(\varrho) - c_3(k, m)\Phi_\lambda^{k-1,m}(\varrho) \\ = \frac{2\Phi_\lambda^{k,m}(\varrho)}{\varrho}(-k - \alpha_X + \varepsilon_X \varrho^2(\mathcal{N}_X(k) - k)). \end{aligned} \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определение (34) влечет равенство

$$(D(\alpha, \beta) - D(\gamma, \delta))\varphi(\varrho) = \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}(\alpha - \gamma + \varepsilon_X \varrho^2(\alpha - 2\beta - \gamma + 2\delta)). \quad (57)$$

Из (57), (51) и (53) получаем (55). Соотношение (56) доказывается аналогично (см. (52) и (53)).

СЛЕДСТВИЕ 2. Имеют место равенства

$$\widetilde{\chi}_r(\lambda) = \begin{cases} \frac{A_X(r)}{2(\alpha_X + 1)}\Phi_\lambda^{1,0}(\Omega(r)), & X \neq \mathbb{R}^n, \\ A_X(r)\Phi_\lambda^{1,0}(r), & X = \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad \widetilde{\sigma}_r(\lambda) = A_X(r)\Phi_\lambda^{0,0}(\Omega(r)). \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула для $\widetilde{\sigma}_r$ непосредственно вытекает из (22). Далее (см. (53)),

$$D(1 + 2\alpha_X, \rho_X)\Phi_\lambda^{1,0} = c_3(1, 0)\Phi_\lambda^{0,0}. \quad (59)$$

Используя (59), (22) и (10), получаем требуемое соотношение для $\widetilde{\chi}_r$. Следствие доказано.

Обозначим

$$A_{p,q}(\lambda) = \frac{(\rho_X - \nu_X(-\lambda))_p(\beta_X - q + 1 - \nu_X(-\lambda))_q}{(\alpha_X + p)_q(\alpha_X + 1)_{p+q}\Gamma(\beta_X + p + 1)} \times \frac{(1 - p - \nu_X(-\lambda))_p(\alpha_X + 1 - \nu_X(-\lambda))_q}{(\alpha_X + p)_q(\alpha_X + 1)_{p+q}\Gamma(\beta_X + p + 1)}, \quad (60)$$

$$B_{p,q}(\lambda) = \eta_{p,q}^{\alpha_X, \beta_X} A_{p,q}(\lambda),$$

$$B_p(\lambda) = \begin{cases} \frac{\pi(\alpha_X + p)\Gamma(2\alpha_X + p)}{2^{2\alpha_X - 1}p!} A_{p,0}(\lambda), & X = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n, \\ \frac{\pi\Gamma(2\alpha_X + p)\Gamma(1/2 + [(p+1)/2])}{2^{2\alpha_X - 1}p!\Gamma(\alpha_X + [(p+1)/2])} A_{[(p+1)/2], [p/2]}(\lambda), & X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \\ \frac{(-1)^p\pi(\alpha_X + p)\Gamma(2\alpha_X + p)}{2^{2\alpha_X - 1}p!\Gamma(\alpha_X + 1)} \lambda^{2p}, & X = \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (61)$$

$$N(p, q) = \mathcal{N}_X(p + q + 1) - 1 - p, \quad \Phi_\lambda^{p,q}(t_1, t_2) = \Phi_\lambda^{p,q}(\Omega(t_1))\Phi_\lambda^{p,q}(\Omega(t_2)),$$

$$\Upsilon_{t_1, t_2}(\psi) = \begin{cases} \Xi_{t_1, t_2}(1, \psi), & X = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{R}^n, \\ \Xi_{t_1, t_2}(\cos \psi, 0), & X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n. \end{cases}$$

ЛЕММА 5. Пусть $\lambda \in \mathfrak{S}_X$, $(a, \psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t_1, t_2})$. Тогда

$$\Phi_\lambda^{0,0}(\Xi_{t_1, t_2}(a, \psi)) = \begin{cases} \sum_{(p,q) \in \mathcal{I}_{\alpha_X, \beta_X}} A_{p,q}(\lambda) \Phi_\lambda^{p+q, N(p,q)}(t_1, t_2) \xi_{p,q}^{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi), & X \neq \mathbb{R}^n, \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda^{2p}}{\Gamma(n/2)} \Phi_\lambda^{p,0}(t_1, t_2) \mathcal{C}_p^{(n-2)/2}(\psi), & X = \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (17), замечание 1 и теоремы сложения для функций Якоби и Лежандра (см., например, [36, гл. 3, § 1, формулы (13), (14), (19), (20)]), получаем первое равенство в (62). Второе равенство следует из соотношения (18) и теоремы сложения для функций Бесселя [36, гл. 3, § 1, формула (15')]. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\lambda \in \mathfrak{S}_X$. Тогда

$$\int_0^\pi \int_0^1 \Phi_\lambda^{0,0}(\Xi_{t_1, t_2}(a, \psi)) \xi_{p,q}^{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi) dm_{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi) = B_{p,q}(\lambda) \Phi_\lambda^{p+q, q}(t_1, t_2),$$

если $X \notin \mathfrak{X}_3$,

$$\int_0^\pi \Phi_\lambda^{0,0}(\Upsilon_{t_1,t_2}(\psi)) \mathcal{C}_p^\alpha(\psi) dm_{\alpha_X}(\psi) = B_p(\lambda) \Phi_\lambda^{p,0}(t_1, t_2), \quad \text{если } X \in \mathfrak{X}_3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить лемму 5 и соотношения ортогональности (4), (6). При этом, когда $X = \mathbb{P}_\mathbb{R}^n$, нужно учесть равенство

$$\Phi_\lambda^{p,([p/2]-[(p+1)/2])/2}(\varrho) = \Phi_\lambda^{p,0}(\varrho),$$

которое следует из [29, п. 2.9, формула (2)]. Следствие доказано.

ЛЕММА 6. Пусть $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \text{diam } X$, $\varrho \in [\Omega(\varrho_1), \Omega(\varrho_2)]$ и

$$C = \begin{cases} \frac{2^{k+\alpha_X+1/2}\Gamma(k+\alpha_X+1)}{\sqrt{\pi}}, & X \neq \mathbb{R}^n, \\ \frac{2^{(n-1)/2}\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}}, & X = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \pi)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$ выполнены равномерные по ϱ асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda^{k,m}(\varrho) &= C \frac{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\rho_X/2}}{\varrho^{\alpha_X+1/2}} \\ &\quad \times \frac{\cos(\lambda \Omega^{-1}(\varrho) - \pi(2k + 2\alpha_X + 1)/4)}{\lambda^{k+\alpha_X+1/2}} + O\left(\frac{e^{\Omega^{-1}(\varrho)|\text{Im } \lambda|}}{|\lambda|^{k+\alpha_X+3/2}}\right), \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Phi_\lambda^{k,m}(\varrho) &= -C \frac{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\rho_X/2}}{\varrho^{\alpha_X+1/2}} \Omega^{-1}(\varrho) \\ &\quad \times \frac{\sin(\lambda \Omega^{-1}(\varrho) - \pi(2k + 2\alpha_X + 1)/4)}{\lambda^{k+\alpha_X+1/2}} + O\left(\frac{e^{\Omega^{-1}(\varrho)|\text{Im } \lambda|}}{|\lambda|^{k+\alpha_X+3/2}}\right). \end{aligned} \quad (64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $X = \mathbb{R}^n$ равенства (63) и (64) следуют из асимптотических формул для функций Бесселя [29, п. 7.13.1, формула (3)]. Если $X \neq \mathbb{R}^n$, требуемое утверждение является незначительной модификацией следствия 2 из [10] и леммы 8 из [11].

Следующий результат является далеко идущим обобщением классической теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца.

ЛЕММА 7. Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(\mathcal{X})$, $R \in (r(T), \text{diam } X]$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и

$$Lf = (\varepsilon_X \rho_X^2 - \lambda^2)f \quad (65)$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$f \times T = \tilde{T}(\lambda)f \quad (66)$$

в шаре $B_{R-r(T)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку L — эллиптический оператор, то $f \in \text{RA}(B_R)$ (см. [34, гл. 8, п. 8.6]). Зафиксируем $g \in G$ такое, что $\overline{gB_{r(T)}} \subset B_R$. Для $x \in B_{r(T)+\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0: \overline{gB_{r(T)}} \subset B_{R-\varepsilon}\}$, положим

$$f_g(x) = \int_K f(g\tau x) d\tau.$$

Определение f_g показывает, что

$$f_g \in \text{RA}_{\natural}(B_{r(T)+\varepsilon_0}), \quad f_g(0) = f(g0). \quad (67)$$

Кроме того, в силу (65)

$$(Lf_g)(x) = (\varepsilon_X \rho_X^2 - \lambda^2) f_g(x), \quad x \in B_{r(T)+\varepsilon_0}. \quad (68)$$

Действие оператора L на радиальную функцию $u(x) = u_0(\varrho)$ задается формулой

$$(Lu)(x) = (1 + \varepsilon_X \varrho^2)^2 u_0''(\varrho) + \frac{1 + \varepsilon_X \varrho^2}{\varrho} (2\alpha_X + 1 + \varepsilon_X (1 - 2\beta_X) \varrho^2) u_0'(\varrho) \quad (69)$$

(см., например, [31, гл. 2, § 5, предложение 5.26]). Из (67)–(69), (16) и дифференциального уравнения для гипергеометрической функции [29, гл. 2, п. 2.1, (1)] находим $f_g(x) = f(g0) \Phi_{\lambda}^{0,0,1}(x)$. Теперь имеем

$$\tilde{T}(\lambda) f(g0) = \langle T, f_g \rangle = \left\langle T, \int_K f(g\tau x) d\tau \right\rangle = \langle T, f(gx) \rangle = (f \times T)(g0),$$

что доказывает (66). Лемма доказана.

Получим теперь аналог теоремы Пэли–Винера–Шварца [34, теорема 7.3.1] для преобразования $\mathcal{F}_j^{k,m}$.

ЛЕММА 8. (i) Пусть $f \in \mathcal{E}'_{k,m,j}(\mathcal{X})$ и $\text{supp } f \subset \overline{B_r}$. Тогда

$$|\mathcal{F}_j^{k,m}(f)(\lambda)| \leq c_1 (1 + |\lambda|)^{c_2} e^{r|\text{Im } \lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (70)$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ . Обратно, для любой четной целой функции $w(\lambda)$, удовлетворяющей оценке вида (70) при некотором $r \in [0, \text{diam } X)$, существует распределение $f \in \mathcal{E}'_{k,m,j}(\mathcal{X})$ такое, что

$$\text{supp } f \subset \overline{B_r} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_j^{k,m}(f) = w. \quad (71)$$

(ii) Если $f \in \mathcal{D}_{k,m,j}(\mathcal{X})$ и $\text{supp } f \subset \overline{B_r}$, то для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существует константа $c_N > 0$ такая, что

$$|\mathcal{F}_j^{k,m}(f)(\lambda)| \leq c_N (1 + |\lambda|)^{-N} e^{r|\text{Im } \lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (72)$$

Обратно, для каждой четной целой функции $w(\lambda)$, удовлетворяющей оценке вида (72) при некотором $r \in [0, \text{diam } X)$ и всех $N \in \mathbb{Z}_+$, существует функция $f \in \mathcal{D}_{k,m,j}(\mathcal{X})$, для которой выполнены условия (71).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для компактных двухточечно-однородных пространств утверждения (i) и (ii) доказаны в [26]. В некомпактном случае можно воспользоваться аналогичными рассуждениями или общей теорией преобразования Фурье–Хелгасона (см. [31, гл. 4], [32, гл. 3]).

ЛЕММА 9. Пусть f – радиальная функция из $\mathcal{E}(B_R)$, $r \in (0, R)$, $t \in (0, R-r)$. Тогда:

(i) если $X \notin \mathfrak{X}_3$, то

$$(f \times \sigma_r)(\Omega(t)\mathbf{e}) = \frac{2\Gamma(\alpha_X + 1)A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_X - \beta_X)\Gamma(1/2 + \beta_X)} \int_0^\pi \int_0^1 f(\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}) dm_{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi),$$

$$D(0, 0)(f \times \chi_r)(\varrho\mathbf{e})(\Omega(t)) = -\varepsilon_X \frac{2\Gamma(\alpha_X + 1)A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_X - \beta_X)\Gamma(1/2 + \beta_X)} \times \int_0^\pi \int_0^1 f(\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}) a \cos \psi dm_{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi);$$

(ii) если $X \in \mathfrak{X}_3$, то

$$(f \times \sigma_r)(\Omega(t)\mathbf{e}) = \frac{\Gamma(\alpha_X + 1)A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 + \alpha_X)} \int_0^\pi f(\Upsilon_{t,r}(\psi)\mathbf{e}) dm_{\alpha_X}(\psi),$$

$$D(0, 0)(f \times \chi_r)(\varrho\mathbf{e})(\Omega(t)) = -\epsilon_X \frac{\Gamma(\alpha_X + 1)A_X(r)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 + \alpha_X)} \int_0^\pi f(\Upsilon_{t,r}(\psi)\mathbf{e}) \cos \psi dm_{\alpha_X}(\psi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f = \Phi_\lambda^{0,0}$, $\lambda \in \mathfrak{S}_X$, утверждения (i), (ii) вытекают из (66), (58), (51) и следствия 3. В силу произвольности $\lambda \in \mathfrak{S}_X$ отсюда получаем требуемые равенства в общем случае. Лемма доказана.

Далее, напомним, что коэффициенты $d_{p,q}(f, t, r)$, определенные в § 3, зависят также и от k, m, j . В следующей лемме они будут использоваться для радиальных функций при $k = m = 0$, $j = 1$.

ЛЕММА 10. Пусть $h \in \mathcal{E}_b(B_R)$, $r \in (0, R)$, $t \in (0, R-r)$. Тогда при $k = m = 0$, $j = 1$ имеет место равенство

$$h(\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{I}_{\alpha_X, \beta_X}} d_{p,q}(h, t, r) \xi_{p,q}^{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi), \quad (a, \psi) \in \mathcal{M}(\Xi_{t,r}), \quad (73)$$

в котором ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathcal{M}(\Xi_{t,r})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 1 показывает (см. также [30, гл. 7, теорема 7.6]), что

$$h(\Xi_{t,r}(a, \psi)\mathbf{e}) = \sum_{(p,q) \in \mathcal{I}_{\alpha_X, \beta_X}} \mathbf{d}_{p,q}(h, t, r) \xi_{p,q}^{\alpha_X, \beta_X}(a, \psi),$$

где коэффициенты $\mathbf{d}_{p,q}(h, t, r)$ находятся с помощью соотношений ортогональности (4), (6). Докажем, что $\mathbf{d}_{p,q}(h, t, r) = d_{p,q}(h, t, r)$. Из леммы 9 следует, что последнее равенство справедливо при $(p, q) = (0, 0)$ и $(p, q) = (1, 0)$. Поэтому

для коэффициентов $\mathbf{d}_{p,q}(h, t, r)$ достаточно установить рекуррентные соотношения (36)–(41). Пусть сначала $h = \varphi_\lambda$, где $\varphi_\lambda(x) = \Phi_\lambda^{0,0}(|x|)$, $\lambda \in \mathfrak{S}_X$. По лемме 5 имеем

$$\mathbf{d}_{p,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r) = A_{p,q}(\lambda) \Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho) \Phi_\lambda^{p+q,q}(\Omega(r)). \quad (74)$$

Применяя к (74) дифференциальные операторы из (51), (53) и (54), получаем

$$\begin{aligned} D(1-p-q, 1-p) \mathbf{d}_{p-1,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r) \\ = c_1(p+q-1, q, \lambda) A_{p-1,q}(\lambda) \Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho) \Phi_\lambda^{p+q-1,q}(\Omega(r)), \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} D(2\alpha_X + p + q + 1, \rho_X + p) \mathbf{d}_{p+1,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r) \\ = c_3(p+q+1, q) A_{p+1,q}(\lambda) \Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho) \Phi_\lambda^{p+q+1,q}(\Omega(r)), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} D(2\alpha_X + p + q + 1, \alpha_X + q + 1) \mathbf{d}_{p,q+1}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r) \\ = c_4(p+q+1, q+1) A_{p,q+1}(\lambda) \Phi_\lambda^{p+q,q}(\varrho) \Phi_\lambda^{p+q+1,q+1}(\Omega(r)). \end{aligned} \quad (77)$$

Далее, формулы (55) и (56) при $k = p + q$, $m = q$ дают

$$\begin{aligned} c_1(p+q, q, \lambda) \Phi_\lambda^{p+q+1,q}(\Omega(r)) - c_3(p+q, q) \Phi_\lambda^{p+q-1,q}(\Omega(r)) \\ = -\frac{2\Phi_\lambda^{p+q,q}(\Omega(r))}{\Omega(r)} (p+q+\alpha_X - \varepsilon_X \Omega^2(r)(\beta_X + p - q)), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} c_2(p+q, q, \lambda) \Phi_\lambda^{p+q+1,q+1}(\Omega(r)) - c_3(p+q, q) \Phi_\lambda^{p+q-1,q}(\Omega(r)) \\ = -\frac{2\Phi_\lambda^{p+q,q}(\Omega(r))}{\Omega(r)} (p+q+\alpha_X). \end{aligned} \quad (79)$$

Из соотношений (78), (75), (76), (74) и (60) находим

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_X \zeta_{p,q} \mathbf{d}_{p,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r) \frac{(-p-q-\alpha_X + \varepsilon_X \Omega^2(r)(\beta_X + p - q))}{\Omega(r)} \\ = \zeta_{p-1,q} D(1-p-q, 1-p) \mathbf{d}_{p-1,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r) \\ - \zeta_{p+1,q} D(2\alpha_X + p + q + 1, \rho_X + p) \mathbf{d}_{p+1,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r). \end{aligned} \quad (80)$$

Аналогично, из (79), (75), (77), (74) и (60) делаем вывод, что

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon_X (\alpha_X + p + q + 1) \mathbf{d}_{p,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r)}{\Omega(r)} \\ = D(2\alpha_X + p + q + 1, \alpha_X + q + 1) \mathbf{d}_{p,q+1}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r) \\ - \frac{(\alpha_X + p - 1)(\alpha_X + p + q + 1)}{(\alpha_X + p + q - 1)(\beta_X + p)} D(1-p-q, 1-p) \mathbf{d}_{p-1,q}(\varphi_\lambda, \Omega^{-1}(\varrho), r). \end{aligned} \quad (81)$$

Ввиду произвольности $\lambda \in \mathfrak{S}_X$ равенства (80), (81) сохраняют силу для любой функции $h \in \mathcal{E}_\mathfrak{h}(B_R)$. Отсюда, учитывая (34) и (35), получаем соотношения (36) и (37) для коэффициентов $\mathbf{d}_{p,q}(h, t, r)$. Рекуррентные соотношения (38)–(41) для $\mathbf{d}_{p,q}(h, t, r)$ доказываются тем же способом с использованием лемм 4, 5 и следствия 1. Таким образом, $\mathbf{d}_{p,q}(h, t, r) = d_{p,q}(h, t, r)$, и имеет место разложение (73). Лемма доказана.

Для $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ положим $W_r^s(B_R) = W_r(B_R) \cap C^s(B_R)$.

ЛЕММА 11. Функция f из $C^s(B_R)$ принадлежит $W_r^s(B_R)$ в том и только в том случае, когда $f^{k,m,j} \in W_r^s(B_R)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, $j \in \{1, \dots, d_X^{k,m}\}$. Аналогичное утверждение также справедливо для функции f из $L^{1,\text{loc}}(B_R)$ и класса $W_r(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (14) имеем

$$f^{k,m,j}(x) = d_X^{k,m} \int_K f(\tau^{-1}x) \overline{t_{j,j}^{k,m}(\tau)} d\tau. \quad (82)$$

Используя (82) и определение свертки на X [31, гл. 2, § 5], нетрудно доказать равенство

$$(f \times T)^{k,m,j} = f^{k,m,j} \times T \quad \text{в} \quad B_{R-r(T)}, \quad (83)$$

где T – произвольное распределение из $\mathcal{E}'_b(B_R)$. Из (82), (83) и (30) получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 12. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$. Предположим, что $\varphi(\varrho)Y(\sigma) \in W_r^s(B_R)$ для некоторых $Y \in \mathcal{H}_X^{k,m} \setminus \{0\}$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- (i) функция $(D(-k, m+1 - \mathcal{N}_X(k+1))\varphi)(\varrho)Y_j^{k+1,m}(\sigma)$ принадлежит $W_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, d_X^{k+1,m}\}$;
- (ii) если $m \leq M_X(k+1) - 1$, то $(D(-k, \beta_X - m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k+1,m+1}(\sigma) \in W_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, d_X^{k+1,m+1}\}$;
- (iii) если $k \geq 1$ и $m \leq M_X(k-1)$, то $(D(k+2\alpha_X, \mathcal{N}_X(k) + \rho_X - 1 - m)\varphi)(\varrho) \times Y_j^{k-1,m}(\sigma) \in W_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, d_X^{k-1,m}\}$;
- (iv) если $m \geq 1$, то $(D(k+2\alpha_X, \alpha_X + m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k-1,m-1}(\sigma) \in W_r^{s-1}(B_R)$ для всех $j \in \{1, \dots, d_X^{k-1,m-1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из (30) и [26, предложения 4.1, 4.2].

Получим теперь выражения для оператора $\mathcal{A}_j^{k,m}$ в виде произведения дифференциальных операторов (34).

ЛЕММА 13. Пусть

$$c_k = \begin{cases} \left(\sqrt{b_X} 2^k \prod_{l=0}^{k-1} (k-l + \alpha_X) \right)^{-1}, & X \neq \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\sqrt{b_X}}, & X = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Тогда для $f \in \mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$, $R \in (0, \text{diam } X]$, имеем $\mathcal{A}_j^{k,m}(f) = f$, если $k = 0$,

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(f) = c_k D(1 + 2\alpha_X, \rho_X) \cdots D(k + 2\alpha_X, \mathcal{N}_X(k) + \rho_X - 1)(f_{k,m,j}), \quad (84)$$

если $k \geq 1$, $m = 0$, и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j^{k,m}(f) = c_k D(1 + 2\alpha_X, \rho_X) \cdots D(k - m + 2\alpha_X, \mathcal{N}_X(k - m) + \rho_X - 1) \\ \times D(k - m + 1 + 2\alpha_X, \alpha_X + 1) \cdots D(k + 2\alpha_X, \alpha_X + m)(f_{k,m,j}), \end{aligned} \quad (85)$$

если $m \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $f = \Phi_\lambda^{k,m,j}$, $\lambda \in \mathfrak{S}_X$. В этом случае утверждение леммы следует из (28) и леммы 4, (iii), (iv).

Пусть $f_\nu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2$, – ненулевые целые функции. Будем записывать $\mathcal{Z}(f_1) \not\approx \mathcal{Z}(f_2)$, если нули f_1 и f_2 “плохо сближаются” в следующем смысле: существует $\alpha > 0$ такое, что

$$|f_2(\lambda)| \geq \frac{1}{(2 + |\lambda|)^\alpha} \quad \forall \lambda \in \mathcal{Z}(f_1).$$

Обозначим через $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^1)$ множество всех ненулевых распределений $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ с условиями

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{\ln(2 + |\lambda|)} < +\infty, \quad \sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} n_\lambda(\widehat{T}) < +\infty, \\ |\widehat{T}^{(n_\lambda)}(\lambda)| > \frac{1}{(2 + |\lambda|)^c}, \quad \lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}), \end{aligned}$$

где константа $c > 0$ не зависит от λ и $n_\lambda = n_\lambda(\widehat{T})$. Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^1)$ является достаточно широким. Принадлежность классу $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^1)$ часто легко проверить с помощью асимптотических разложений $\widehat{T}$, которые известны при весьма общих условиях для T (см. [37, гл. 2, теорема 10.2]).

Пусть $T_1 \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^1)$, $T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1) \setminus \{0\}$, $n_\lambda(\widehat{T}_1) = 1$ и $\mathcal{Z}(\widehat{T}_1) \not\approx \mathcal{Z}(\widehat{T}_2)$. Определим распределение $\Omega_{T_1, T_2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ по формуле

$$\Omega_{T_1, T_2}(t) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}_1)} \frac{e^{i\lambda t}}{\widehat{T}_2(\lambda) \widehat{T}_1'(\lambda)}. \quad (86)$$

Сходимость ряда в (86) понимается как сходимость в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ последовательности частных сумм

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}_1) \\ |\lambda| \leq N}} \frac{e^{i\lambda t}}{\widehat{T}_2(\lambda) \widehat{T}_1'(\lambda)}$$

при $N \rightarrow +\infty$. Далее, считая, что $\operatorname{supp} T_\nu \subset [-r(T_\nu), r(T_\nu)]$, $\nu = 1, 2$, для $R > \max\{r(T_1), r(T_2)\}$ положим

$$\mathcal{D}'_{T_1, T_2}(-R, R) = \{f \in \mathcal{D}'(-R, R): (f * T_\nu)(t) = 0, |t| < R - r(T_\nu), \nu = 1, 2\}.$$

ЛЕММА 14. Пусть $R \leq r(T_1) + r(T_2)$ и $f \in \mathcal{D}'(-R, R)$. Тогда f принадлежит $\mathcal{D}'_{T_1, T_2}(-R, R)$ в том и только в том случае, когда существует распределение $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ такое, что

$$\operatorname{supp} u \subset [R - r(T_1) - r(T_2), r(T_1) + r(T_2) - R] \quad (87)$$

и на $(-R, R)$ справедливо представление $f = \Omega_{T_1, T_2} * u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы является частным случаем теоремы 18.8, (ii) из [24], в которой отсутствует условие простоты нулей функции $\widehat{T}_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 14 следует (см. [24, следствие 18.2]), что при дополнительном предположении $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'_q(\mathbb{R}^1)$ класс $\mathcal{D}'_{T_1, T_2}(-R, R) \cap \mathcal{D}'_q(-R, R)$ описывается равенством

$$f = \Omega'_{T_1, T_2} * u, \quad (88)$$

где u – четное распределение с условием (87). При этом справедливо соотношение

$$\Omega'_{T_1, T_2}(t) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}_{T_1}} \frac{2i\lambda \cos(\lambda t)}{\widehat{T}_2(\lambda) \widehat{T}'_1(\lambda)}, \quad (89)$$

где $\mathcal{Z}_{T_1} = \{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T}_1) : \operatorname{Re} \lambda \geq 0, i\lambda \notin [0, +\infty)\}$.

§ 5. Доказательство теорем 1–4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2. Сглаживание функции $f \in L^{1, \text{loc}}(B_R)$ свертками вида $f \times \phi_\varepsilon$, где ϕ_ε – радиальная C^∞ -функция с носителем в малом шаре B_ε , показывает, что утверждение (i) теоремы 1 является непосредственным следствием теоремы 2. В свою очередь, теорема 2 вытекает из (13), (29) и леммы 10. Докажем утверждение (ii) теоремы 1.

Необходимость. Как и выше, можно считать, что $f \in \mathcal{E}(B_R)$. Сначала установим, что

$$f_{k, m, j}|_{(\Omega(2r-R), \Omega(R))} \in E_1. \quad (90)$$

Из лемм 11, 10 получаем (90) при $k = 0$. Далее, по леммам 11, 12, (iii) имеем

$$\frac{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\rho_X + 1}}{\varrho^{2\alpha_X + 1}} \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{\varrho^{2\alpha_X + 1}}{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\rho_X}} f_{1, 0, j}(\varrho) \right) \in W_r(B_R). \quad (91)$$

Поэтому только что разобранный случай позволяет заключить, что

$$f_{1, 0, j}(\varrho) = f_{1, 0, j}(\Omega(r)) \frac{(\Omega(r))^{2\alpha_X + 1}}{(1 + \varepsilon_X \Omega^2(r))^{\rho_X}} \frac{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\rho_X}}{\varrho^{2\alpha_X + 1}}, \quad \varrho \in (\Omega(2r - R), \Omega(R)).$$

Интегрируя функцию в (91) по шару B_r (см. (10)), находим $f_{1, 0, j}(\Omega(r)) = 0$, т. е. $f_{1, 0, j} = 0$ на $(\Omega(2r - R), \Omega(R))$. Используя теперь лемму 12, (iii), (iv), индукцией по k приходим к (90) при $k \geq 2$.

Докажем (32). Заметим, что $\int_{B_r} f d\mu = 0$. Следовательно,

$$\int_{B_{2r-R}} f d\mu = - \int_{B_{2r-R, r}} f d\mu. \quad (92)$$

Поскольку $f^{0, 0, 1} = 0$ в $B_{2r-R, R}$, равенство (92) влечет (32).

Достаточность. Нужно доказать, что $f^{k, m, j} \in W_r(B_R)$ для всех k, m, j (см. лемму 11). По условию имеем $f^{0, 0, 1} = f^{1, 0, j} = 0$ в $B_{2r-R, R}$. Учитывая, что $B_{2r-R} \subset B_r(\eta)$ и $S_r(\eta) \subset B_{2r-R, R}$ при $\eta \in B_{R-r}$, получаем равенства

$$(f^{0, 0, 1} \times \sigma_r)(\eta) = (f^{1, 0, j} \times \sigma_r)(\eta) = 0, \quad (f^{1, 0, j} \times \chi_r)(\eta) = \int_{B_{2r-R}} f^{1, 0, j} d\mu = 0.$$

Кроме того, в силу (32) имеем

$$(f^{0,0,1} \times \chi_r)(\eta) = \int_{B_{2r-R}} f^{0,0,1} d\mu = 0.$$

Рассмотрим случай $k \geq 2$. Пусть $\varphi(x) = \varphi_0(|x|)$ – гладкая радиальная функция, равная нулю в B_ε и единице в $B_{2r-R-\varepsilon,R}$, где $\varepsilon \in (0, r - R/2)$. Тогда

$$\begin{aligned} (f^{k,m,j} \times \chi_r)(\eta) &= \int_{B_r(\eta) \setminus B_{2r-R}} f^{k,m,j} d\mu = \int_{B_r(\eta) \setminus B_{2r-R}} H(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma) \varphi(x) d\mu(x) \\ &= ((H(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma) \varphi(x)) \times \chi_r)(\eta), \end{aligned} \quad (93)$$

где H – функция из E_1 , совпадающая с $f_{k,m,j}$ на интервале $(\Omega(2r - R), \Omega(R))$. Обозначим через $A^{k,m}$ дифференциальный оператор, полученный из дифференциальных операторов в (84), (85) удалением множителя $D(1 + 2\alpha_X, \rho_X)$. Положим

$$\psi = A^{k,m}(\varphi_0 H). \quad (94)$$

Непосредственно проверяется, что $A^{k,m}(H) = 0$ и, значит,

$$\psi = 0 \quad \text{на} \quad (\Omega(2r - R - \varepsilon), \Omega(R)). \quad (95)$$

Из (95), (34), (10) имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_r(\eta)} (D(1 + 2\alpha_X, \rho_X) \psi)(|x|) d\mu(x) &= \int_{B_{2r-R}} (D(1 + 2\alpha_X, \rho_X) \psi)(|x|) d\mu(x) \\ &= b_X \frac{\varrho^{2\alpha_X+1}}{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\rho_X}} \psi(\varrho) \Big|_0^{\Omega(2r-R)} = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

С помощью соотношений (96), (93), (94), (29) и леммы 13 делаем вывод, что $\mathcal{A}_j^{k,m}(f^{k,m,j} \times \chi_r) = 0$ в B_{R-r} . Это означает (см. (27)), что $f^{k,m,j} \times \chi_r = 0$ в B_{R-r} . Аналогично, $f^{k,m,j} \times \sigma_r = 0$ в B_{R-r} . Таким образом, утверждение (ii) теоремы 1 доказано.

Наконец, утверждение (iii) теоремы 1 следует из утверждения (ii) и условия $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. (i) Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$ и $j \in \{1, \dots, d_X^{k,m}\}$. Из теоремы 1, (iii) следует, что для некоторых констант $c_p, d_p \in \mathbb{C}$

$$f_{k,m,j}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma) = \left(\sum_{2 \leq p \leq k-m} c_p u_p(\varrho) + \sum_{1 \leq p \leq m} d_p v_p(\varrho) \right) Y_j^{k,m}(\sigma) \quad (97)$$

почти всюду в B_R . Из (82) и леммы 11 следует, что вместе с функцией f условиям а)–с) в теореме удовлетворяет также функция $f_{k,m,j}(\varrho) Y_j^{k,m}(\sigma)$. Применяя теоремы 1, 2, получаем $f_{k,m,j}(\varrho) = 0$ в B_R , откуда $f = 0$.

(ii) Пусть множество $E \subset (0, R)$ состоит из M чисел, и пусть $k > M + 2$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\mathcal{N}_X(2) + \alpha_X + \beta_X}}{\varrho^{k+2\alpha_X}} \sum_{p=k-M-2}^{k-2} c_p ((1 + \varepsilon_X \varrho^2)^{\mathcal{N}_X(3) - \mathcal{N}_X(2)} - 1)^p Y_1^{k,0}(\sigma), & \text{если } X \neq \mathbb{R}^n, \\ \sum_{p=k-M-2}^{k-2} c_p \varrho^{2p-n-k+2} Y_1^{k,0}(\sigma), & \text{если } X = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты c_p выбраны так, что f – ненулевая функция и $f(x) = 0$ при $d(0, x) \in E$. Нетрудно видеть, что при достаточно больших k функция f принадлежит $C^s(B_R)$ и $f(x) = o((d(0, x))^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$. Кроме того, $f \in W_r(B_R)$ по теореме 1, (ii). Таким образом, f обладает требуемыми свойствами. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. (i) $\Rightarrow$ (ii). Положим

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \mu_l \left(\frac{d}{d\lambda} \Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))|_{\lambda=\lambda_l} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(\Omega(\tau)) \right)^{-1} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(|x|) \quad (98)$$

(см. (20), (44), (45) и лемму 6). По лемме 8 для преобразования (22) существует распределение $u \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathcal{X})$ такое, что

$$w(\lambda) = \tilde{u}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (99)$$

$$\text{supp } u \subset \overline{B_{\zeta}}. \quad (100)$$

Из (98), (99) и условия теоремы имеем

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \tilde{u}(\lambda_l) \left(\frac{d}{d\lambda} \Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))|_{\lambda=\lambda_l} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(\Omega(\tau)) \right)^{-1} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(|x|). \quad (101)$$

Учитывая (19), (66) и (100), из соотношения (101), замечания 2 и свойств 2), 3) оператора $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ заключаем, что

$$f * \chi_{\tau} = f * \sigma_{\tau} = 0 \quad \text{в} \quad B_{\tau-\zeta}. \quad (102)$$

Теперь из теоремы 1, (ii) стандартным приемом сглаживания (см. начало доказательства теорем 1, 2) получаем требуемое.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть f определено равенством (98). Из условия теоремы и леммы 7 видим, что выполнены соотношения в (102). Как и выше, имеем равенство (101) в шаре $B_{2\tau-\zeta}$ для некоторого $u \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathcal{X})$ с носителем в B_{ζ} . Тогда

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l (\mu_l - \tilde{u}(\lambda_l)) \left(\frac{d}{d\lambda} \Phi_{\lambda}^{1,0}(\Omega(\tau))|_{\lambda=\lambda_l} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(\Omega(\tau)) \right)^{-1} \Phi_{\lambda_l}^{0,0}(|x|) = 0$$

в $B_{2\tau-\zeta}$. Поскольку $2\tau - \zeta > \tau$, последнее соотношение дает $\mu_l = \tilde{u}(\lambda_l)$ для всех l (см. [24, предложение 9.3 и формула (14.24)]). Полагая $w = \tilde{u}$, мы завершаем доказательство.

Список литературы

1. С. Хелгасон, *Преобразование Радона*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: S. Helgason, *The Radon transform*, Progr. Math., **5**, Birkhäuser, Boston, MA, 1980.
2. Ф. Йон, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: F. John, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience Publ., New York–London, 1955.
3. К. Беренштейн, Д. Струппа, “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Комплексный анализ. Многие переменные* – 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **54**, ВИНТИ, М., 1989, 5–111; англ. пер.: C. A. Berenstein, D. C. Struppa, “Complex analysis and convolution equations”, *Several complex variables. V. Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, Encyclopaedia Math. Sci., **54**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 1–108.
4. L. Zalcman, “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Approximation by solutions of partial differential equations* (Hanstholm, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **365**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, 185–194.
5. L. Zalcman, “Supplementary bibliography to: “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Radon transforms and tomography* (South Hadley, MA, 2000), Contemp. Math., **278**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 69–74.
6. I. Netuka, J. Veselý, “Mean value property and harmonic functions”, *Classical and modern potential theory and applications* (Chateau de Bonas, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **430**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994, 359–398.
7. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, “Экстремальные задачи интегральной геометрии”, *Математика сегодня*, **12** (2001), 51–79.
8. V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
9. L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor, “Spectral synthesis and the Pompeiu problem”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **23**:3 (1973), 125–154.
10. Вит. В. Волчков, “О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 21–46; англ. пер.: Vit. V. Volchkov, “Functions with ball mean values equal to zero on compact two-point homogeneous spaces”, *Sb. Math.*, **198**:4 (2007), 465–490.
11. В. В. Волчков, “Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 21–46; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Local two-radii theorem in symmetric spaces”, *Sb. Math.*, **198**:11 (2007), 1553–1577.
12. P. Ungar, “Freak theorem about functions on a sphere”, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 100–103.
13. R. Schneider, “Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres”, *J. Math. Anal. Appl.*, **26** (1969), 381–384.
14. L. Zalcman, “Analyticity and the Pompeiu problem”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **47**:3 (1972), 237–254.
15. J. D. Smith, “Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72**:3 (1972), 403–416.
16. C. A. Berenstein, L. Zalcman, “Pompeiu’s problem on spaces of constant curvature”, *J. Analyse Math.*, **30**:1 (1976), 113–130.
17. C. A. Berenstein, L. Zalcman, “Pompeiu’s problem on symmetric spaces”, *Comment. Math. Helv.*, **55**:1 (1980), 593–621.
18. C. A. Berenstein, R. Gay, “A local version of the two-circles theorem”, *Israel J. Math.*, **55**:3 (1986), 267–288.

19. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, “New results in integral geometry” (Nahariya, Israel, 2003), *Contemp. Math.*, **382** (2005), 417–432.
20. C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger, “Inversion of the local Pompeiu transform”, *J. Analyse Math.*, **54**:1 (1990), 259–287.
21. M. El Harchaoui, “Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe: cas des deux boules”, *J. Anal. Math.*, **67**:1 (1995), 1–37.
22. M. Berkani, M. El Harchaoui, R. Gay, “Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l’espace hyperbolique quaternionique – cas des deux boules”, *Complex Variables Theory Appl.*, **43**:1 (2000), 29–57.
23. Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова, “Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве”, *Докл. РАН*, **379**:5 (2001), 587–590; англ. пер.: Vit. V. Volchkov, N. P. Volchkova, “Inversion of the local Pompeiu transformation on a quaternionic hyperbolic space”, *Dokl. Math.*, **64**:1 (2001), 90–93.
24. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, London, 2009.
25. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, “Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга”, *Матем. сб.*, **199**:8 (2008), 29–60; англ. пер.: V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, “Convolution equations in many-dimensional domains and on the Heisenberg reduced group”, *Sb. Math.*, **199**:8 (2008), 1139–1168.
26. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, “Экстремальные задачи, связанные с теоремой единственности Ф. Йона”, *Алгебра и анализ*, **21**:5 (2009), 37–69; англ. пер.: V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, “Optimization problems related to the John uniqueness theorem”, *St. Petersburg Math. J.*, **21**:5 (2010), 705–729.
27. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, “Об одной проблеме Беренштейна–Гэя и ее обобщениях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 33–62; англ. пер.: V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, “On a problem of Berenstein–Gay and its generalizations”, *Izv. Math.*, **74**:4 (2010), 691–721.
28. T. H. Koornwinder, “Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups”, *Special functions: Group theoretical aspects and applications*, Math. Appl., Reidel, Dordrecht, 1984, 1–85.
29. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, 2, Наука, М., 1973–1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vols. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
30. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1976.
31. С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
32. S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Math. Surveys Monogr., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
33. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.
34. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
35. В. В. Волчков, “Решение проблемы носителя для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Solution of the support problem for several function classes”, *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1279–1294.

36. Н. Я. Виленкин, А. У. Климык, “Представления групп Ли и специальные функции”, *Некоммутативный гармонический анализ* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **59**, ВИНТИ, М., 1990, 145–264; англ. пер.: A. U. Klimyk, N. Ya. Vilenkin, “Representations of Lie groups and special functions”, *Representation theory and noncommutative harmonic analysis. II*, Encyclopaedia Math. Sci., **59**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 137–259.
37. Э. Я. Риекстыньш, *Асимптотические разложения интегралов*, т. I, Зинатне, Рига, 1974.

В. В. Волчков (V. V. Volchkov)
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Поступило в редакцию
13.01.2012

Вит. В. Волчков (Vit. V. Volchkov)
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: v.volchkov@mail.donnu.edu.ua