Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Асимптотическое разложение решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 2, 97–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:30:04

УДК 517.956.8+517.953

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв

Асимптотическое разложение решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева

Изучено поведение при больших значениях времени решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева. В случае немалых начальных возмущений получены оценки убывания по времени, а в случае малых начальных данных доказана асимптотическая формула решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: уравнения типа Соболева, периодическая задача, асимптотика.

DOI: 10.4213/im7957

§ 1. Введение

В настоящей работе мы изучим асимптотическое поведение при больших значениях времени решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева

$$\begin{aligned} \partial_t(v - \Delta v) - \alpha \Delta v &= \lambda v + \beta \operatorname{div}(|\nabla v| \nabla v), & x \in T^n, \quad t > 0, \\ v(0, x) &= \tilde{v}(x), & x \in T^n, \end{aligned} \quad (1)$$

где T^n является n -мерным тором (т.е. кубом $\Omega = ([-\pi, \pi])^n$ с естественными отождествлениями соответствующих граней), $\alpha, \sigma > 0$, $\lambda > -\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Будем рассматривать 2π -периодические по пространству решения $v(t, x)$ уравнения (1) с 2π -периодическими начальными данными $\tilde{v}(x)$.

Отметим, что эволюция среднего значения решения $\int_{\Omega} v(t, x) dx$ легко может быть вычислена по формуле

$$\int_{\Omega} v(t, x) dx = M e^{\lambda t},$$

где $M \equiv \int_{\Omega} \tilde{v}(x) dx$ – среднее значение начального возмущения $\tilde{v}(x)$. Сделав замену переменных

$$v(t, x) = e^{\lambda t} M + e^{\lambda t} u(t, x),$$

получим периодическую задачу

$$\begin{aligned} \partial_t(u - \Delta u) - \gamma \Delta u &= \beta e^{\sigma \lambda t} \operatorname{div}(|\nabla u|^{\sigma} \nabla u), & x \in T^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in T^n, \end{aligned} \quad (2)$$

© Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв, 2013

с начальными данными $\varphi(x) = \tilde{v}(x) - M$, имеющими нулевое среднее значение, где $\gamma = \alpha + \lambda$. В силу предположения $\lambda > -\alpha$ имеем $\gamma > 0$. Таким образом, далее мы будем изучать периодическую задачу (2) при $\gamma > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и условии

$$\int_{\Omega} \varphi(x) dx = 0. \quad (3)$$

Уравнения типа Соболева [1] описывают различные физические процессы, и их исследованию посвящено большое количество работ. В монографии [2] дано всестороннее освещение современного состояния теории линейных и нелинейных уравнений соболевского типа, дан вывод модельных линейных уравнений соболевского типа высокого порядка, применимых в теории плазмы и для описания квазистационарных процессов в сплошных электромагнитных средах. Асимптотика при больших значениях времени решений задачи Коши для нелинейных уравнений типа Соболева с различными типами нелинейностей изучалась в книге [3] и в обзоре [4].

Большое количество публикаций посвящено изучению периодических по пространственной переменной задач. Так, асимптотическая устойчивость стационарных периодических решений уравнения Фишера доказана в работе [5], периодическая задача для уравнения Хопфа рассмотрена в работе [6], асимптотика при больших значениях времени решений периодической задачи для уравнения Бюргерса получена в работе [7]. Некоторые оценки убывания решений уравнения Кортевега-де Фриза-Бюргерса с периодическими начальными данными, имеющими нулевое среднее значение, найдены в работе [8], где было показано также, что асимптотическое поведение определяется гармониками более высокого порядка. В работах [9], [10] доказано существование единственного глобального по времени решения периодической задачи для уравнения Ландау-Гинзбурга, а также получены оценки убывания по времени в различных нормах. Явные периодические решения уравнения Ландау-Гинзбурга найдены в [11]. Глобальное существование и оценки убывания по времени решений периодической задачи для уравнения Курамото-Сивашинского получены в работе [12]. В случае уравнения Бенжамена-Боны-Махони-Перегрина-Бюргерса существование глобальных решений и оценки убывания энергии по времени получены в работе [13]. Периодическая задача для уравнений Буссинеска изучена в работе [14]. Поведение при больших значениях времени решений периодической задачи для системы законов сохранения изучено в [15], [16]. В работе [17] рассмотрены вопросы существования и разрушения решений периодической задачи для уравнения Камассы-Хольма. Асимптотические формулы решений периодических задач для ряда нелинейных уравнений получены в работе [18].

Насколько нам известно, поведение при больших значениях времени решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева (1) не было рассмотрено до сих пор. Нашей целью является доказательство асимптотических формул решений периодической задачи для нелинейного уравнения типа Соболева (1).

Приведем некоторые обозначения. Через

$$\widehat{\varphi}_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} e^{-i(k \cdot x)} \varphi(x) dx$$

будем обозначать коэффициенты Фурье 2π -периодической функции $\varphi(x)$. Пространство Соболева, как обычно, обозначаем через $\mathbf{W}_p^2(\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathbf{W}_p^2(\Omega)} \equiv \|(1 - \Delta)\varphi\|_{L^p(\Omega)},$$

где $1 \leq p \leq \infty$, и также $\mathbf{H}^2(\Omega) \equiv \mathbf{W}_2^2(\Omega)$. Обозначим через $\mathbf{C}(\mathbf{I}; \mathbf{B})$ пространство непрерывных функций, отображающих временной интервал $\mathbf{I}$ в банахово пространство $\mathbf{B}$. Различные постоянные будем обозначать одной и той же буквой C .

С помощью принципа Дюамеля перепишем периодическую задачу (2) в виде интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\varphi + \beta \int_0^t e^{\sigma\lambda\tau} \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1} \operatorname{div}(|\nabla u|^\sigma \nabla u(\tau)) d\tau, \quad (4)$$

где, пользуясь рядами Фурье, мы можем формально представить оператор Грина $\mathcal{G}(t)$ в виде

$$\mathcal{G}(t)\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\psi}_k e^{i(x \cdot k) - L_k t} \quad (5)$$

с символом $L_k = \frac{\gamma|k|^2}{1+|k|^2}$. Под глобальным во времени решением периодической задачи (2) мы будем понимать решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\Omega))$ соответствующего интегрального уравнения (4).

Теперь сформулируем основные утверждения настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma > 0$, $\lambda < \frac{\gamma}{2}$. Предположим, что $\varphi \in \mathbf{W}_p^2(\Omega)$, $p > n$ при $n \geq 1$, причем норма $\|\varphi\|_{\mathbf{W}_p^2}$ достаточно мала. Тогда существует единственное глобальное по времени решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\Omega))$ периодической задачи (2), для которого имеет место оценка

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad \forall t > 0.$$

Для уравнения (2) в случае $\beta > 0$ мы можем ослабить требование малости начальных данных. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $n = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\sigma > 0$, $\beta > 0$, $n = 1$. Предположим, что $\varphi \in \mathbf{H}^2(\Omega)$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2(\Omega))$ периодической задачи (2). Более того, имеет место оценка убывания решения

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad \forall t > 0.$$

В следующей теореме мы получим асимптотическое разложение для решения. Обозначим $L_k \equiv L_{|k|} = \frac{\gamma|k|^2}{1+|k|^2}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\sigma > 1$, $\lambda \leq \frac{\gamma}{2}(1 - \frac{1}{\sigma})$. Предположим, что $\varphi \in \mathbf{W}_p^2(\Omega)$, $p > n$ при $n \geq 1$, причем норма $\|\varphi\|_{\mathbf{W}_p^2}$ достаточно мала. Тогда существуют числа $\widehat{a}_k$ (являющиеся коэффициентами Фурье функции a , определенной формулой (16) ниже) такие, что имеет место асимптотика

$$u(t) = \sum_{|k| \leq N} e^{i(x \cdot k) - L_k t} \widehat{a}_k + O(e^{-tL_{N+1}})$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Omega$, где $N \geq 0$.

В следующем параграфе мы получим предварительные оценки оператора Грина периодической задачи для линейного уравнения типа Соболева и докажем глобальное существование решений периодической задачи для нелинейного уравнения (1). Затем в последующих трех параграфах мы докажем теоремы 1–3 соответственно.

§ 2. Предварительные оценки

Рассмотрим периодическую задачу для линейного уравнения типа Соболева

$$\begin{aligned} \partial_t(u - \Delta u) - \gamma \Delta u &= f, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x \in \Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где правая часть $f(t, x)$ и начальное возмущение $\varphi(x)$ являются 2π -периодическими функциями по пространственной переменной x . Пользуясь рядами Фурье, мы можем формально представить оператор Грина $\mathcal{G}(t)$ в виде (5). Поэтому решение периодической задачи для линейного уравнения типа Соболева (6) можно записать формулой Дюамеля

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau)(1 - \Delta)^{-1}f(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Сначала мы установим ряд оценок для решения линейной периодической задачи (6) в лебеговских нормах пространства $\mathbf{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Введем два проектора

$$\mathcal{P}_N u = \sum_{|k| \leq N} \hat{u}_k(t) e^{i(k \cdot x)}, \quad \mathcal{R}_N u = \sum_{|k| \geq N} \hat{u}_k(t) e^{i(k \cdot x)}$$

для $N \geq 0$. Имеем $\mathcal{P}_N u + \mathcal{R}_{N+1} u = u$ при любом $N \geq 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi \in \mathbf{L}^p$ и $f(t) \in \mathbf{L}^p$ при $1 \leq p \leq \infty$. Тогда при $N \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ справедливы оценки

$$\|\mathcal{R}_N \mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C e^{-tL_N} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \quad (8)$$

для всех $t > 0$,

$$\left\| \int_0^t \mathcal{R}_N \mathcal{G}(t - t_1) f(t_1) dt_1 \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C e^{-tL_N} \int_0^t e^{t_1(L_N - \Lambda)} dt_1 \cdot \sup_{\tau > 0} e^{\Lambda \tau} \|\mathcal{R}_N f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \quad (9)$$

для всех $t > 0$, если $\Lambda \in \mathbb{R}$, и

$$\left\| \int_t^\infty \mathcal{P}_N \mathcal{G}(t - t_1) f(t_1) dt_1 \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C e^{-\Lambda t} \sup_{\tau > 0} e^{\Lambda \tau} \|\mathcal{P}_N f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \quad (10)$$

для всех $t > 0$, если $\Lambda > L_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем представление

$$\begin{aligned} e^{-tL_k} &= e^{-\gamma t} \left(e^{\gamma t \langle k \rangle^{-2}} - \sum_{j=0}^n \frac{\gamma^j t^j}{j!} \langle k \rangle^{-2j} \right) + e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^n \frac{\gamma^j t^j}{j!} \langle k \rangle^{-2j} \\ &= e^{-\gamma t} \frac{1}{n!} \int_0^{\gamma t \langle k \rangle^{-2}} e^z (\gamma t \langle k \rangle^{-2} - z)^n dz + e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^n \frac{\gamma^j t^j}{j!} \langle k \rangle^{-2j} \end{aligned} \quad (11)$$

при $|k| \geq 0$, где $\langle k \rangle = \sqrt{1 + |k|^2}$. Отметим, что остаток

$$Q_k(t) = e^{-\gamma t} \frac{1}{n!} \int_0^{\gamma t \langle k \rangle^{-2}} e^z (\gamma t \langle k \rangle^{-2} - z)^n dz$$

удовлетворяет оценке

$$|Q_k(t)| \leq C t^{n+1} e^{-tL_k} \langle k \rangle^{-2n-2}$$

при $|k| \geq 0$. Определим $\mathcal{B}^0 = \mathbf{1}$, операторы

$$\mathcal{B}^j \varphi = \int_{\Omega} B_j(x - y) \varphi(y) dy$$

с ядрами

$$B_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i(x \cdot k)} \langle k \rangle^{-2j}$$

для $j \geq 1$ и остаточный оператор $\mathcal{Q}_N$,

$$\mathcal{Q}_N \varphi = \int_{\Omega} \tilde{Q}_N(t, x - y) \varphi(y) dy,$$

с ядром

$$\tilde{Q}_N(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k| \geq N} e^{i(x \cdot k)} Q_k(t)$$

такие, что в силу (11) имеет место представление

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_N \mathcal{G}(t) \varphi &= \sum_{|k| \geq N} \hat{\varphi}_k e^{i(x \cdot k) - L_k t} \\ &= \sum_{|k| \geq N} e^{i(x \cdot k)} Q_k(t) \hat{\varphi}_k + e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^n \frac{\gamma^j t^j}{j!} \sum_{|k| \geq N} e^{i(x \cdot k)} \langle k \rangle^{-2j} \hat{\varphi}_k \\ &= \mathcal{Q}_N \mathcal{R}_N \varphi + e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^n \frac{\gamma^j t^j}{j!} \mathcal{B}^j \mathcal{R}_N \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Имеем $B_j(x) \in \mathbf{C}(\Omega \setminus \{0\})$, и справедливы оценки

$$|B_j(x)| \leq C + C|x|^{2j-n}$$

для всех $j \geq 1$, $x \in \Omega \setminus \{0\}$ (см. [19, теорема 2.17]). Также имеем оценку

$$|\tilde{Q}_N(t, x)| \leq \sum_{|k| \geq N} |Q_k(t)| \leq C t^{n+1} e^{-L_N t}.$$

Поэтому

$$\|\mathcal{B}^j \varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \quad \forall j \geq 0, \quad (13)$$

$$\|\mathcal{Q}_N(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C t^{n+1} e^{-L_N t} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (14)$$

Таким образом, ввиду (13) и (14) получаем из (12) соотношение

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_N \mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C t^{n+1} e^{-L_N t} \|\mathcal{R}_N \varphi\|_{\mathbf{L}^p} + C t^n e^{-\gamma t} \|\mathcal{R}_N \varphi\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C t^{n+1} e^{-L_N t} \|\mathcal{R}_N \varphi\|_{\mathbf{L}^p}. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $L_{N+1} = \gamma - \frac{\gamma}{1+(N+1)^2} > L_N = \gamma - \frac{\gamma}{1+N^2}$ и

$$\mathcal{R}_N \mathcal{G}(t)\varphi = \sum_{|k|=N} \widehat{\varphi}_k e^{i(x \cdot k) - L_k t} + \mathcal{R}_{N+1} \mathcal{G}(t)\varphi,$$

следует оценка (8) леммы

$$\|\mathcal{R}_N \mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq e^{-L_N t} \|\mathcal{R}_N \varphi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{R}_{N+1} \mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C e^{-L_N t} \|\mathcal{R}_N \varphi\|_{\mathbf{L}^p} \quad (15)$$

для всех $t > 0$. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_N \mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{L}^p} &= \left\| \sum_{|k| \leq N} \widehat{\varphi}_k(t) e^{i(x \cdot k) - L_k t} \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C e^{-L_N t} \sum_{|k| \leq N} |\widehat{\varphi}_k(t)| \leq C_N e^{-L_N t} \|\mathcal{P}_N \varphi\|_{\mathbf{L}^p} \end{aligned} \quad (16)$$

для всех $t < 0$. Используя оценки (15), (16), находим

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathcal{R}_N \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \int_0^t \|\mathcal{R}_N \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \\ &\leq C \int_0^t e^{-(t-\tau)L_N} \|\mathcal{R}_N f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \\ &\leq C e^{-tL_N} \int_0^t e^{\tau(L_N - \Lambda)} d\tau \cdot \sup_{\tau > 0} e^{\Lambda \tau} \|\mathcal{R}_N f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, если $\Lambda \in \mathbb{R}$. Подобным образом получаем

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^\infty \mathcal{P}_N \mathcal{G}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C_N \int_t^\infty e^{(\tau-t)L_N} \|\mathcal{P}_N f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} d\tau \\ &\leq C_N e^{-tL_N} \int_t^\infty e^{-\tau(\Lambda - L_N)} d\tau \cdot \sup_{\tau > 0} e^{\Lambda \tau} \|\mathcal{P}_N f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C_N e^{-\Lambda t} \sup_{\tau > 0} e^{\Lambda \tau} \|\mathcal{P}_N f(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, если $\Lambda > L_N$. Лемма доказана.

В следующей лемме мы установим локальное по времени существование решений периодической задачи (2).

ЛЕММА 2. Пусть $\sigma > 0$, $\lambda \leq \frac{\gamma}{2}$. Предположим, что $\varphi \in \mathbf{W}_p^2(\Omega)$, $p > n$ при $n \geq 1$. Тогда для некоторого времени $T > 0$ существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{W}_p^2(\Omega))$ периодической задачи (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\mathcal{N}(u(\tau)) = \beta e^{\sigma\lambda\tau} \operatorname{div}(|\nabla u(\tau)|^\sigma \nabla u(\tau))$$

и рассмотрим интегральное уравнение (4)

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau.$$

Ввиду условия (3) имеем $\varphi = \mathcal{R}_1\varphi$, а также $u = \mathcal{R}_1u$. Рассмотрим шар

$$\mathbf{X}_T = \left\{ u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{W}_p^2(\Omega)) : \sup_{t \in [0, T]} e^{\frac{\gamma}{2}t} \|u(t)\|_{\mathbf{W}_p^2} \leq \rho \right\}.$$

Для всех $v \in \mathbf{X}_T$ определим отображение

$$\mathcal{M}(v) = \mathcal{G}(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(v(\tau)) d\tau.$$

Докажем, что $\mathcal{M}(v) \in \mathbf{X}_T$. Из теоремы вложения Соболева (см. [20]) имеем $\|v\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\|v\|_{\mathbf{W}_p^1}$, если $p > n$ при $n \geq 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \|(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(v(\tau))\|_{\mathbf{W}_p^2} &\leq C\|\mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq Ce^{\sigma\lambda\tau} \| |\nabla v|^\sigma \Delta v(\tau) \|_{\mathbf{L}^p} \leq Ce^{\sigma\lambda\tau} \|\Delta v(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \|\nabla v(\tau)\|_{\mathbf{W}_p^1}^\sigma \\ &\leq Ce^{\sigma\lambda\tau - \frac{\gamma}{2}(1+\sigma)\tau} \left(\sup_{t \in [0, T]} e^{\frac{\gamma}{2}t} \|v(t)\|_{\mathbf{W}_p^2} \right)^{1+\sigma} \leq C\rho^{1+\sigma} e^{\sigma\lambda\tau - \frac{\gamma}{2}(1+\sigma)\tau}. \end{aligned}$$

Ввиду оценки (8) леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_1\mathcal{G}\varphi\|_{\mathbf{W}_p^2} &\leq \|\mathcal{R}_1\mathcal{G}\varphi\|_{\mathbf{L}^p} + \|\mathcal{R}_1\mathcal{G}\Delta\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq Ce^{-\frac{\gamma}{2}t} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} + Ce^{-\frac{\gamma}{2}t} \|\Delta\varphi\|_{\mathbf{L}^p} \leq Ce^{-\frac{\gamma}{2}t} \|\varphi\|_{\mathbf{W}_p^2} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Из оценки (9) леммы 1 при $\Lambda = -\sigma\lambda + \frac{\gamma}{2}(1+\sigma)$ найдем

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \mathcal{R}_1\mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{W}_p^2} \\ &\leq Ce^{-\frac{\gamma}{2}t} \int_0^t e^{\tau(\frac{\gamma}{2}-\Lambda)} d\tau \cdot \sup_{\tau \in [0, T]} e^{\Lambda\tau} \|(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(v(\tau))\|_{\mathbf{W}_p^2} \\ &\leq C\rho^{1+\sigma} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \int_0^t e^{-\sigma\tau(\frac{\gamma}{2}-\lambda)} d\tau \leq CTe^{-\frac{\gamma}{2}t} \rho^{1+\sigma} \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, T]$, поскольку $\lambda \leq \frac{\gamma}{2}$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}(v) \in \mathbf{X}_T$ при подходящем выборе ρ и T .

Покажем теперь, что $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением. Как и выше, получим оценку

$$\begin{aligned} \|(1 - \Delta)^{-1}(\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w))\|_{\mathbf{W}_p^2} &\leq C e^{\sigma\lambda\tau} \|\Delta(v - w)\|_{\mathbf{L}^p} (\|\nabla v\|_{\mathbf{W}_p^1}^\sigma + \|\nabla w\|_{\mathbf{W}_p^1}^\sigma) \\ &\leq C \rho^\sigma e^{\sigma\lambda\tau - \frac{\gamma}{2}(1+\sigma)\tau} \sup_{t \in [0, T]} e^{\frac{\gamma}{2}t} \|v(t) - w(t)\|_{\mathbf{W}_p^2}, \end{aligned}$$

откуда благодаря оценке (9) леммы 1 следуют неравенства

$$\begin{aligned} e^{\frac{\gamma}{2}t} \left\| \int_0^t \mathcal{R}_1 \mathcal{G}(t - \tau) (1 - \Delta)^{-1}(\mathcal{N}(v(\tau)) - \mathcal{N}(w(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{W}_p^2} \\ \leq C \int_0^t e^{\tau(\frac{\gamma}{2} - \Lambda)} d\tau \cdot \sup_{\tau \in [0, T]} e^{\Lambda\tau} \|(1 - \Delta)^{-1}(\mathcal{N}(v(\tau)) - \mathcal{N}(w(\tau)))\|_{\mathbf{L}^p} \\ \leq CT \rho^\sigma \sup_{t \in [0, T]} e^{\frac{\gamma}{2}t} \|v(t) - w(t)\|_{\mathbf{W}_p^2} \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T]} e^{\frac{\gamma}{2}t} \|v(t) - w(t)\|_{\mathbf{W}_p^2} \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, T]$, если выбрать $T > 0$ достаточно малым. Таким образом, $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением в пространстве $\mathbf{X}_T$, поэтому существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{W}_p^2(\Omega))$ периодической задачи (2). Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим шар

$$\mathbf{X}_\infty = \left\{ u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\Omega)) : \sup_{t > 0} e^{\frac{\gamma}{2}t} \|u(t)\|_{\mathbf{W}_p^2} \leq \rho \right\}$$

малого радиуса $\rho > 0$. Как и при доказательстве леммы 2, получим, что $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением в пространстве $\mathbf{X}_\infty$, поэтому существует единственное глобальное по времени решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\Omega))$ периодической задачи (2). Это решение удовлетворяет оценке

$$\|u(t)\|_{\mathbf{W}_p^2} \leq \rho e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

для всех $t > 0$. По теореме вложения Соболева отсюда следует оценка теоремы. Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Умножим уравнение (2) в одномерном случае

$$\partial_t(u - \partial_x^2 u) - \gamma \partial_x^2 u = \beta e^{\sigma\lambda t} \partial_x(|u_x|^\sigma u_x)$$

на $2u$ и проинтегрируем результат по $x \in \Omega$; получим

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2) = -2\gamma \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - 2\beta e^{\sigma\lambda t} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+2}.$$

Аналогично, умножая уравнение (2) на $2u_{xx}$ и интегрируя результат по $x \in \Omega$, найдем

$$\frac{d}{dt} (\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2) = -2\gamma \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - 2\beta(\sigma + 1)e^{\sigma\lambda t} \| |u_x|^\sigma u_{xx}^2 \|_{\mathbf{L}^1}. \quad (17)$$

В частности, видно, что норма $\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2}$ ограничена для всех $t > 0$. Из оценки (11) с помощью стандартного продолжения решения получаем существование глобального по времени решения $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2(\Omega))$ периодической задачи (2).

Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{|k| \geq 1} |\widehat{u}_k(t)|^2 \leq \sum_{|k| \geq 1} \langle k \rangle^2 |\widehat{u}_k(t)|^2 = \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Точно так же имеем $\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}$, поэтому из (17) следует, что

$$\frac{d}{dt} J \leq -2\gamma \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq -\gamma J, \quad (18)$$

где $J = \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2$. Интегрируя по времени неравенство (18), получим оценку

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2} \leq C J^{\frac{1}{2}}(t) \leq C e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

для всех $t \geq 0$. Результат теоремы 2 теперь вытекает из теоремы вложения Соболева.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Обозначим

$$u_N(t) = \mathcal{P}_N u = \sum_{|k| \leq N} \widehat{u}_k(t) e^{i(k \cdot x)}, \quad r_N(t) = \mathcal{R}_{N+1} u = \sum_{|k| \geq N+1} \widehat{u}_k(t) e^{i(k \cdot x)}$$

при $N \geq 0$. Таким образом, получаем представление $u = u_N + r_N$. Из интегрального уравнения (4) получаем

$$r_N(t) = \mathcal{R}_{N+1} \mathcal{G}(t) \varphi + \int_0^t \mathcal{R}_{N+1} \mathcal{G}(t - \tau) (1 - \Delta)^{-1} \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau, \quad (19)$$

где $\mathcal{N}(u(\tau)) = \beta e^{\sigma\lambda\tau} \operatorname{div}(|\nabla u(\tau)|^\sigma \nabla u(\tau))$. Определим пространство

$$\mathbf{Y}_N = \{\psi \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\Omega)) : \|\psi\|_{\mathbf{Y}_N} < \infty\}$$

с нормой

$$\|\psi\|_{\mathbf{Y}_N} = \sup_{t > 0} e^{L_{N+1}t} \|\psi(t)\|_{\mathbf{W}_p^2}.$$

Докажем по индукции, что

$$\|r_N\|_{\mathbf{Y}_N} \leq C_N \quad (20)$$

для всех $N \geq 0$. Поскольку $u_0(t) = 0$, $r_0(t) = u(t)$, оценка (20) при $N = 0$ получается так же, как и в доказательстве леммы 1. Предположим по индукции, что неравенство (20) при $0 \leq N < N_1$ выполнено, и рассмотрим $N = N_1 \geq 1$.

С помощью оценки (8) леммы 1 получаем

$$\|\mathcal{R}_{N+1}\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{Y}_N} = \sup_{t>0} e^{L_{N+1}t} \|\mathcal{R}_{N+1}\mathcal{G}(t)\varphi\|_{\mathbf{W}_p^2} \leq C \|\varphi\|_{\mathbf{W}_p^2}.$$

Используя оценку (9) леммы 1, находим

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{R}_{N+1}\mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{Y}_N} \\ &= \sup_{t>0} e^{L_{N+1}t} \left\| \int_0^t \mathcal{R}_{N+1}\mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{W}_p^2} \\ &\leq C \sup_{t>0} \int_0^t e^{\tau(L_{N+1}-\gamma)} d\tau \cdot \sup_{\tau>0} e^{\gamma\tau} \|(1-\Delta)^{-1}\mathcal{R}_{N+1}\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{W}_p^2}. \end{aligned}$$

Из теоремы вложения Соболева (см. [20]) имеем $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\|u\|_{\mathbf{W}_p^1}$ при $p > n \geq 1$, поэтому

$$\begin{aligned} e^{\gamma\tau} \|(1-\Delta)^{-1}\mathcal{R}_{N+1}\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{W}_p^2} &\leq C e^{\gamma\tau} \|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C e^{\sigma\lambda\tau+\gamma\tau} \|\nabla u(\tau)\|^\sigma \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C e^{\sigma\lambda\tau+\gamma\tau} \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{W}_p^1}^\sigma \\ &\leq C e^{\sigma\lambda\tau+\gamma\tau-\frac{\gamma}{2}(1+\sigma)\tau} \left(\sup_{t>0} e^{\frac{\gamma}{2}t} \|u(t)\|_{\mathbf{W}_p^2} \right)^{1+\sigma} \leq C_N, \end{aligned} \quad (21)$$

поскольку $\lambda \leq \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2\sigma}$. Отсюда следует, что

$$\left\| \int_0^t \mathcal{R}_{N+1}\mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{Y}_N} \leq C_N.$$

Таким образом, оценка (20) справедлива для всех $N \geq 0$.

Теперь мы найдем асимптотику решения. Обозначим

$$a = \varphi + \int_0^\infty \mathcal{G}(-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \quad (22)$$

и запишем представление

$$u_{N+1}(t) = \mathcal{P}_{N+1}\mathcal{G}(t)a - \int_t^\infty \mathcal{P}_{N+1}\mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \quad (23)$$

при $N \geq 0$. С помощью оценки (10) леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_t^\infty \mathcal{P}_{N+1}\mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{Y}_N} \\ &= \sup_{t>0} e^{L_{N+1}t} \left\| \int_t^\infty \mathcal{P}_{N+1}\mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{W}_p^2} \\ &\leq C \sup_{t>0} e^{(L_{N+1}-\gamma)t} \sup_{\tau>0} e^{\gamma\tau} \|\mathcal{P}_{N+1}(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{W}_p^2}. \end{aligned}$$

Как в (21), имеем оценку

$$e^{\gamma\tau} \|\mathcal{P}_{N+1}(1-\Delta)^{-1}\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{W}_p^2} \leq e^{\gamma\tau} \|\mathcal{N}(u(\tau))\|_{\mathbf{L}^p} \leq C_N.$$

Поэтому получаем

$$\left\| \int_t^\infty \mathcal{P}_{N+1} \mathcal{G}(t-\tau)(1-\Delta)^{-1} \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{Y}_N} \leq C_N. \quad (24)$$

Далее, поскольку

$$\mathcal{P}_{N+1} \mathcal{G}(t)a = \sum_{|k| \leq N+1} e^{i(x \cdot k) - L_k t} \hat{a}_k,$$

ввиду соотношений (20), (23), (24) получаем асимптотику

$$\begin{aligned} u = u_{N+1} + r_{N+1} &= \sum_{|k| \leq N+1} e^{i(x \cdot k) - L_k t} \hat{a}_k + O(e^{-tL_{N+1}}) \\ &= \sum_{|k| \leq N} e^{i(x \cdot k) - L_k t} \hat{a}_k + O(e^{-tL_{N+1}}) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Omega$. Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. С. Л. Соболев, “Об одной новой задаче математической физики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18**:1 (1954), 3–50.
2. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
3. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
4. Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв, “Асимптотика решений при больших временах для нелинейных уравнений типа Соболева”, *УМН*, **64**:3 (2009), 3–72; англ. пер.: E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, “Large-time asymptotic behaviour of solutions of non-linear Sobolev-type equations”, *Russian Math. Surveys*, **64**:3 (2009), 399–468.
5. P. C. Fife, “Asymptotic states for equations of reaction and diffusion”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**:1 (1978), 693–726.
6. B. T. Hayes, “Stability of solutions to a destabilized Hopf equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **48**:2 (1995), 157–166.
7. W. Kirsch, A. Kutzelnigg, “Time asymptotics for solutions of the Burgers equation with a periodic force”, *Math. Z.*, **232**:4 (1999), 691–705.
8. P. Biler, “Large-time behaviour of periodic solutions to dissipative equations of Korteweg-de Vries–Burgers type”, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **32**:1–2 (1984), 401–405.
9. C. Bu, R. Shull, K. Zhao, “A periodic boundary value problem for a generalized 2D Ginzburg–Landau equation”, *Hokkaido Math. J.*, **27**:1 (1998), 197–211.
10. Y. Yang, “Global spatially periodic solutions to the Ginzburg–Landau equation”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **110**:3–4 (1988), 263–273.
11. D. Lu, L. Tian, Z. Liu, “Wavelet basis analysis in perturbed periodic KdV equation”, *Appl. Math. Mech. (English Ed.)*, **19**:11 (1998), 1053–1058.
12. B. Guo, X. M. Xiang, “The large time convergence of spectral method for generalized Kuramoto–Sivashinsky equations”, *J. Comput. Math.*, **15**:1 (1997), 1–13.
13. J. Xing, “Global strong solution for a class of Burgers–BBM type equation”, *Gaoxiao Yingyong Shuxue Xuebao*, **6**:1 (1991), 31–37.

14. V. V. Varlamov, “On spatially periodic solutions of the damped Boussinesq equation”, *Differential Integral Equations*, **10**:6 (1997), 1197–1211.
15. C. M. Dafermos, “Large time behavior of periodic solutions of hyperbolic systems of conservation laws”, *J. Differential Equations*, **121**:1 (1995), 183–202.
16. C. Sinestrari, “Large time behaviour of solutions of balance laws with periodic initial data”, *NoDEA. Nonlinear Differential Equations Appl.*, **2**:1 (1995), 111–131.
17. A. Constantin, J. Escher, “Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **51**:5 (1998), 475–504.
18. E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, “Periodic problem for a model nonlinear evolution equation”, *Adv. Differential Equations*, **7**:5 (2002), 581–616.
19. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: Е. М. Stein, Г. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
20. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: О. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, v. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.

Е. И. Кайкина (E. I. KAİKINA)
 National Autonomous University of Mexico, Institute
 of Mathematics, Mexico
E-mail: ekaikina@matmor.unam.mx

Поступило в редакцию
 17.01.2012

П. И. Наумкин (P. I. NAUMKIN)
 National Autonomous University of Mexico, Institute
 of Mathematics, Mexico
E-mail: pavelni@matmor.unam.mx

И. А. Шишмарёв (I. A. SHISHMAREV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова