Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 2, 53–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:23:58

УДК 519.624.2

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием

Рассматриваются две сингулярно возмущенные нелинейные системы дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием, одна из которых является математической моделью отдельного нейрона Хопфилда, а вторая моделирует функционирование кольцевой сети из трех и более однонаправленно связанных нейронов. Исследуются вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости для этих систем релаксационных периодических движений.

Библиография: 23 наименования.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, нейронные сети Хопфилда, релаксационный цикл, устойчивость, буферность.

DOI: 10.4213/im7960

§ 1. Введение

Дж. Хопфилд в 1984 г. предложил [1] математическую модель простейшей нейронной сети, представляющую собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}_j = -\mu_j u_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i(u_i) + I_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.1)$$

Здесь $u_j(t)$ – мембранные потенциалы нейронов, $\mu_j = \text{const} \geq 0$ – коэффициенты затухания за счет токов утечки, $a_{ij} = \text{const} \in \mathbb{R}$ – синаптические веса, $I_j = \text{const} \in \mathbb{R}$ – внешние токи смещения, а гладкие функции $f_j(u)$, $u \in \mathbb{R}$, представляющие собой вольт-амперные характеристики нелинейных элементов, таковы, что

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f_j(u) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} f_j(u) = 1. \quad (1.2)$$

Достаточно подробное описание свойств этой системы, а также ее вывод можно найти в монографии [2].

Автор работы [1] исходил из допущения, что все элементы сети оказывают друг на друга мгновенное воздействие. Однако в реальности взаимодействие

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00384-а и № 12-01-00155-а).

нейронов происходит с некоторыми запаздываниями по времени, обусловленными, например, конечной скоростью переключения усилителей в электрической нейронной сети или конечной скоростью распространения сигнала в биологических сетях. Таким образом, представляется вполне осмысленным переход от системы (1.1) к соответствующей системе дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{u}_j = -\mu_j u_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i(u_i(t - s_{ij})) + I_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

где $s_{ij} = \text{const} \geq 0$. Впервые такой переход был осуществлен в статье [3], и в последующем как сама система (1.3), так и некоторые ее модификации изучались многими авторами (см., например, работы [4]–[12] и содержащуюся в них библиографию). Как правило, во всех этих статьях рассматривались вопросы об устойчивости состояния равновесия и о возникновении незатухающих автоколебаний в результате бифуркации Андронова–Хопфа.

В настоящей статье, в отличие от упомянутых выше работ, анализу подлежат не гармонические, а релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда. Точнее, данная статья продолжает цикл публикаций [13]–[18], связанных с применением к уравнениям с запаздыванием известных асимптотических методов А. А. Дородницына, Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко [19], [20]. В рамках этой программы для сетей Хопфилда изучаются следующие две конкретные задачи.

1. Рассматривается математическая модель отдельного нейрона Хопфилда, получающаяся из (1.3) при $m = 1$. После соответствующих нормировок переменных t , u и параметров она записывается в виде

$$\dot{u} = -\mu u + \lambda[1 - (a + 1)f(u(t - 1))]. \quad (1.4)$$

Здесь $\mu = \text{const} \geq 0$, $a = \text{const} > 0$, а параметр $\lambda > 0$ предполагается большим (с биофизической точки зрения это означает, что электрические процессы в нейроне происходят быстро). Для нелинейности $f(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ в соответствии с требованиями (1.2) будем считать выполненными асимптотические равенства

$$f(u) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^-}{u^k} & \text{при } u \rightarrow -\infty, \\ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^+}{u^k} & \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (1.5)$$

Предполагаем также, что представления (1.5) остаются в силе при дифференцировании по u любое число раз. Примерами такой функции являются $f(u) = (\text{arctg } u + \pi/2)/\pi$ и $f(u) = (u/\sqrt{u^2 + 1} + 1)/2$.

При сформулированных условиях нами исследуются вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости для уравнения (1.4) релаксационного периодического движения.

2. Изучается также цепочка из m , $m \geq 3$, однонаправленно связанных в кольцо нейронов Хопфилда, описываемая системой уравнений

$$\dot{u}_j = -\mu u_j + \lambda[1 - (a + 1)f(u_j(t - 1)) - bg(u_{j-1})], \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.6)$$

Здесь $u_0 = u_m$, параметры μ, a, λ и функция $f(u)$ те же, что и в (1.4), $b = \text{const} > 0$, а для функции $g(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ справедливы аналогичные равенствам (1.5) асимптотические представления

$$g(u) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^-}{u^k} & \text{при } u \rightarrow -\infty, \\ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^+}{u^k} & \text{при } u \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (1.7)$$

сохраняющие силу после дифференцирования по u любое число раз. Показывается, что при подходящем выборе параметров μ, a, b и при всех $\lambda \gg 1$ в системе (1.6) могут сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых релаксационных циклов. Иными словами, в ней реализуется известный феномен буферности (см. [21], [22]).

§ 2. Релаксационные автоколебания в математической модели отдельного нейрона

2.1. Описание результата. При исследовании вопроса о существовании и устойчивости для уравнения (1.4) релаксационных автоколебаний удобно сделать замену $u = \lambda x$. Указанная замена преобразует интересующее нас уравнение к виду

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)f\left(\frac{x(t - 1)}{\varepsilon}\right), \quad (2.1)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$. Далее, из свойств (1.5) функции $f(u)$ вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = F(x), \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Равенства (2.2), в свою очередь, позволяют перейти от (2.1) к изучению предельного релейного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)F(x(t - 1)). \quad (2.3)$$

Как и в работах [14], [16], [18], понятие решения уравнения (2.3) определим конструктивно. В связи с этим фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (оценка сверху этого параметра будет уточнена в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0), \quad (2.4)$$

где

$$\theta(t) = \frac{1 - \exp(-\mu t)}{\mu}, \quad (2.5)$$

и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (2.3) с произвольной начальной функцией (2.4).

Пусть $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$; заметим, что при указанных t выполняется неравенство $\varphi(t - 1) < 0$. Поэтому на данном промежутке времени решение $x_\varphi(t)$ совпадает с решением задачи Коши

$$\dot{x} = -\mu x + 1, \quad x|_{t=-\sigma_0} = \theta(-\sigma_0) \quad (2.6)$$

и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = \theta(t), \quad (2.7)$$

где $\theta(t)$ – функция (2.5). Ясно также, что формула (2.7) сохраняется до тех пор, пока $x_\varphi(t - 1) < 0$. Тем самым, она справедлива на полуинтервале $-\sigma_0 \leq t < 1$.

При $t = 1$ первый раз происходит переключение, и при $t > 1$ решение $x_\varphi(t)$ определяется уже из задачи Коши

$$\dot{x} = -\mu x - a, \quad x|_{t=1} = \theta(1), \quad (2.8)$$

т. е. посредством равенства

$$x_\varphi(t) = \theta(1) \exp(-\mu(t - 1)) - a\theta(t - 1). \quad (2.9)$$

В свою очередь, соотношения (2.8), (2.9) остаются в силе, пока $x_\varphi(t - 1) > 0$, т. е. до очередного момента переключения $t = t_0 + 1$, где $t_0 > 1$ – корень уравнения

$$\theta(1) \exp(-\mu(t - 1)) - a\theta(t - 1) = 0,$$

задающийся равенством

$$t_0 = 1 + \frac{1}{\mu} \ln \left[1 + \frac{1}{a} (1 - \exp(-\mu)) \right]. \quad (2.10)$$

При $t > t_0 + 1$ получаем аналогичную (2.6) задачу Коши

$$\dot{x} = -\mu x + 1, \quad x|_{t=t_0+1} = \theta(1) \exp(-\mu t_0) - a\theta(t_0), \quad (2.11)$$

а значит, справедливо аналогичное (2.7) равенство

$$x_\varphi(t) = [\theta(1) \exp(-\mu t_0) - a\theta(t_0)] \exp(-\mu(t - t_0 - 1)) + \theta(t - t_0 - 1). \quad (2.12)$$

Равенства (2.11), (2.12) сохраняют силу при априорном условии $x_\varphi(t - 1) < 0$, т. е. до следующего момента переключения $t = T_0 + 1$, где $t = T_0$ – корень уравнения

$$[\theta(1) \exp(-\mu t_0) - a\theta(t_0)] \exp(-\mu(t - t_0 - 1)) + \theta(t - t_0 - 1) = 0.$$

Несложный подсчет показывает, что для этого корня справедлива явная формула

$$T_0 = t_0 + 1 + \frac{1}{\mu} \ln[1 + a(1 - \exp(-\mu))]. \quad (2.13)$$

Отметим также, что после нахождения T_0 равенство (2.12) преобразуется к более компактному виду

$$x_\varphi(t) = \theta(t - T_0). \quad (2.14)$$

Распорядимся теперь имеющимся в запасе свободным параметром σ_0 (см. соотношение (2.4)). Из проведенных выше построений следует, что при условии

$$\sigma_0 < T_0 - t_0 - 1, \quad (2.15)$$

которое всюду ниже считаем выполненным, функция $x_\varphi(t + T_0)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, принадлежит введенному ранее множеству (2.4), а это значит, что на промежутках $kT_0 - \sigma_0 \leq t \leq (k+1)T_0 - \sigma_0$, $k = 1, 2, \dots$, весь описанный процесс нахождения $x_\varphi(t)$ повторяется снова и снова. Следовательно, при всех $t \geq -\sigma_0$ каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (2.4) совпадает с одной и той же T_0 -периодической функцией $x_0(t)$, для которой в силу (2.7)–(2.14) справедливы равенства

$$x_0(t) = \begin{cases} \theta(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \theta(1) \exp(-\mu(t-1)) - a\theta(t-1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ \theta(t - T_0) & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

График этой функции при $a = 2$, $\mu = 0.8$ показан на рис. 1.

Рис. 1

Рассмотрим теперь вопрос о связи между периодическими решениями уравнений (2.1) и (2.3). Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение (2.1) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый цикл $x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv \theta(-\sigma_0)$, периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \quad (2.17)$$

Доказательство теоремы 2.1, приводящееся далее в пп. 2.2, 2.3, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 , подчиненной условию (2.15), фиксируем постоянные $q_1 > -\theta(-\sigma_0)$, $0 < q_2 < -\theta(-\sigma_0)$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0). \quad (2.18)$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$, уравнения (2.1) с начальным условием $\varphi(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения

$$x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = \theta(-\sigma_0) \quad (2.19)$$

(если он существует). Зададим оператор $\Pi_\varepsilon: S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.20)$$

Последующий план действий таков. Сначала мы установим на различных промежутках изменения t асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$, из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0 , q_1 , q_2 оператор (2.20) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на произвольном решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с начальным условием из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и покажем, что оператор Π_ε является сжимающим.

2.2. Доказательство существования релаксационного цикла. Построение асимптотики по ε функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем, рассматривая отрезок $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Согласно (2.1) на этом отрезке $x_\varphi(t, \varepsilon)$ является решением задачи Коши

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)f\left(\frac{\varphi(t - 1)}{\varepsilon}\right), \quad x|_{t=-\sigma_0} = \theta(-\sigma_0). \quad (2.21)$$

Далее, опираясь на неравенства из (2.18) и свойства (1.5), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, 1 - \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$f\left(\frac{\varphi(t - 1)}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon). \quad (2.22)$$

Отсюда и из (2.21) очевидным образом выводим, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon), \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0, \quad (2.23)$$

где, напомним, $x_0(t)$ — функция (2.16). Добавим, кроме того, что здесь и во всех аналогичных встречающихся ниже асимптотических равенствах остатки равномерны по t , φ .

Отметим, что область применимости асимптотической формулы (2.23) можно расширить. Действительно, из первого асимптотического равенства (1.5) вытекает, что при выполнении априорного условия

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \leq -q \quad (2.24)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от t, ε, φ) постоянной $q > 0$ справедливо представление

$$f\left(\frac{x_\varphi(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon c_1^-}{x_\varphi(t-1, \varepsilon)} + O(\varepsilon^2), \quad (2.25)$$

где c_1^- – коэффициент из (1.5).

Подставляя, далее, соотношение (2.25) в правую часть уравнения (2.1), получаем требуемое асимптотическое равенство (2.23). Остается добавить, что, поскольку $x_0(t) < 0$ при $t \in [-\sigma_0, 0)$, оценка (2.24) и представление (2.23) сохраняют силу на любом отрезке вида $[1 - \sigma_0, 1 - \bar{\sigma}]$, где $\bar{\sigma}$ – произвольно фиксированная постоянная из интервала $(0, \min(1, \sigma_0))$. Однако поскольку $x_0(0) = 0$, то до значения $t = 1$ равенство (2.23) продолжить заведомо невозможно.

Для преодоления описанной выше трудности, предполагая, что

$$\sigma_0 < \frac{1}{2}, \quad (2.26)$$

дополним на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ формулу (2.23) вытекающим из соотношений (2.1), (2.25) асимптотическим равенством

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{x}_0(t) + O(\varepsilon) = \exp(-\mu t) + O(\varepsilon) > 0. \quad (2.27)$$

В результате убеждаемся в том, что на данном отрезке уравнение $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$ имеет единственный корень $t = \tau_1(\varepsilon, \varphi)$, причем равномерно по φ

$$\tau_1 = O(\varepsilon). \quad (2.28)$$

Пусть теперь $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}$. Поскольку в силу (2.26) длина этого отрезка меньше единицы, при указанных t функция $x_\varphi(t-1, \varepsilon)$ нам известна. А именно, для нее справедливо асимптотическое равенство (2.23), в котором t следует заменить на $t-1$. Объединяя равенство (2.23) с формулами (1.5), (2.28), приходим к выводу, что в данном случае вместо (2.25) выполняется асимптотическое представление

$$f\left(\frac{x_\varphi(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \frac{c_1^- \varepsilon}{t-1} + O(\varepsilon), \quad 1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.29)$$

Подставим равенство (2.29) в правую часть уравнения (2.1) и дополним это уравнение начальным условием

$$x|_{t=1-\sigma_0} = x_\varphi(1 - \sigma_0, \varepsilon) = x_0(1 - \sigma_0) + O(\varepsilon).$$

Несложный анализ получившейся задачи Коши приводит к выводу, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) - \varepsilon(a+1)c_1^- \ln(1-t) + O(\varepsilon), \quad 1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.30)$$

Построим теперь асимптотику по ε интересующего нас решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на участке переключения $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$, что, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [19], [20], представляет основную трудность. При рассматриваемых t будем искать $x_\varphi(t, \varepsilon)$ в виде

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(1) + \varepsilon v(\tau, \varepsilon), \quad \tau = \frac{t - \tau_1 - 1}{\varepsilon}. \quad (2.31)$$

Подставляя, далее, соотношения (2.31) в уравнение (2.1) и учитывая уже известную информацию об $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (2.23), (2.28), (2.30)), для определения $v(\tau, \varepsilon)$ приходим к задаче Коши

$$\frac{dv}{d\tau} + \varepsilon \mu v = \dot{x}_0(1-0) - (a+1)f\left(\frac{x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad (2.32)$$

$$v|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}} = v_\varphi(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_\varphi(1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) - x_0(1)}{\varepsilon}, \quad (2.33)$$

где τ меняется на асимптотически большом отрезке $J(\varepsilon) = [-1/\sqrt{\varepsilon}, 1/\sqrt{\varepsilon}]$.

Для выявления свойств правой части уравнения (2.32) разложим функцию $x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$ по формуле Тейлора в точке $\tau = 0$. В результате с учетом равенства $x_\varphi(\tau_1, \varepsilon) = 0$ получаем представление

$$\frac{x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)}{\varepsilon} = \dot{x}_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\bar{\tau}, \varepsilon)\tau, \quad (2.34)$$

где значение $\bar{\tau}$ таково, что $|\bar{\tau}| \leq |\tau|$. Учитывая, далее, в (2.34) асимптотические формулы (2.27), (2.28) и очевидную оценку $|\bar{\tau}| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$, убеждаемся в том, что

$$\frac{x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)}{\varepsilon} = (1 + O(\sqrt{\varepsilon}))\tau, \quad (2.35)$$

где остаток равномерен по τ , φ . И наконец, подставим соотношение (2.35) в (2.32) и положим $\varepsilon = 0$. В результате приходим к модельному уравнению

$$\frac{dv}{d\tau} = \dot{x}_0(1-0) - (a+1)f(\tau). \quad (2.36)$$

Введем в рассмотрение решение

$$v_1(\tau) = \dot{x}_0(1-0)\tau - (a+1) \int_0^\tau f(s) ds, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

уравнения (2.36) и заметим, что в силу свойств (1.5) для него при $\tau \rightarrow \pm\infty$ справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} v_1(\tau) &= \dot{x}_0(1-0)\tau - (a+1)c_1^- \ln|\tau| + O(1), \\ \frac{dv_1}{d\tau} &= \dot{x}_0(1-0) + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} v_1(\tau) &= \dot{x}_0(1+0)\tau - (a+1)c_1^+ \ln\tau + O(1), \\ \frac{dv_1}{d\tau} &= \dot{x}_0(1+0) + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где c_1^- , c_1^+ – константы из разложений (1.5).

Как оказывается, функция (2.37) играет существенную роль при асимптотическом анализе задачи Коши (2.32), (2.33). А именно, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. *Для решения $v = v_\varphi(\tau, \varepsilon)$ задачи Коши (2.32), (2.33) имеет место равномерное по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$, $\tau \in J(\varepsilon)$ асимптотическое представление*

$$v_\varphi(\tau, \varepsilon) = v_0 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + v_1(\tau) + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.40)$$

где $v_0 = (a+1)c_1^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $v = v_0 \ln(1/\varepsilon) + v_1(\tau) + \tilde{v}$ в (2.32), (2.33), для нахождения $\tilde{v}$ приходим к задаче Коши

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} + \varepsilon\mu\tilde{v} = \psi_{1,\varphi}(\tau, \varepsilon), \quad \tilde{v}|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}} = \psi_{2,\varphi}(\varepsilon), \quad (2.41)$$

где

$$\psi_{1,\varphi} = -\varepsilon\mu\left(v_0 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + v_1(\tau)\right) - (a+1)\left[f\left(\frac{x_\varphi(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) - f(\tau)\right], \quad (2.42)$$

$$\psi_{2,\varphi} = v_\varphi(\varepsilon) - v_0 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - v_1(\tau)|_{\tau=-1/\sqrt{\varepsilon}}. \quad (2.43)$$

Установим некоторые свойства неоднородностей (2.42), (2.43), необходимые для анализа задачи (2.41).

Для выявления асимптотических свойств правой части из (2.42) воспользуемся вытекающей из условий (1.5) оценкой

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq \frac{M_1}{1 + \min(u_1^2, u_2^2)} |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.44)$$

где $M_1 = \sup_{u \in \mathbb{R}} (1 + u^2) |f'(u)| < \infty$. Объединяя неравенство (2.44) с формулами (2.35), (2.38), (2.39), приходим к выводу, что

$$\max_{\tau \in J(\varepsilon)} |\psi_{1,\varphi}| \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.45)$$

где $M_2 > 0$ – некоторая универсальная (не зависящая от ε , φ) постоянная.

Для оценки начального условия $\psi_{2,\varphi}$ подставим в соотношение (2.43) явное выражение для $v_\varphi(\varepsilon)$ (см. (2.33)) и воспользуемся свойствами (2.30), (2.38) функций $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $v_1(\tau)$. В результате после несложных преобразований убеждаемся в том, что

$$|\psi_{2,\varphi}| \leq M_3, \quad (2.46)$$

где, как и в (2.45), $M_3 > 0$ – некоторая универсальная постоянная.

Для завершения обоснования леммы обратимся к явному выражению

$$\tilde{v} = \psi_{2,\varphi} \exp\left(-\varepsilon\mu\left(\tau + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) + \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{\tau} \exp(-\varepsilon\mu(\tau - s))\psi_{1,\varphi}(s, \varepsilon) ds \quad (2.47)$$

для решения задачи Коши (2.41). Применяя к (2.47) уже установленные оценки (2.45), (2.46), получаем неравенство

$$\max_{\tau \in J(\varepsilon)} |\tilde{v}| \leq M_4$$

с универсальной постоянной $M_4 > 0$, а это, собственно, и означает, что справедливо асимптотическое представление (2.40). Лемма доказана.

Возвращаясь к исходному решению $x_\varphi(t, \varepsilon)$, заметим, что для него на отрезке времени $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ из (2.31), (2.40) вытекает асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(1) + v_0\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_1-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (2.48)$$

Приведем еще равенства

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}} = \dot{x}_0(1-0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} = \dot{x}_0(1+0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.49)$$

являющиеся следствием формул (2.48), (2.38), (2.39). Соотношения (2.49) свидетельствуют о том, что отрезок $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ действительно представляет собой участок переключения.

Следующий этап доказательства теоремы 2.1 связан с рассмотрением отрезка $1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \sigma_0$, длина которого согласно (2.26) меньше единицы. Таким образом, здесь функция $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ является известной: для нее справедливо асимптотическое представление (2.23), в котором t заменено на $t - 1$. Отсюда и из свойств (1.5), в свою очередь, заключаем, что в данном случае имеет место аналогичная (2.29) асимптотическая формула

$$f\left(\frac{x_\varphi(t - 1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{c_1^+ \varepsilon}{t - 1} + O(\varepsilon), \quad 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \sigma_0. \quad (2.50)$$

Дальнейшие рассуждения повторяют почти дословно соответствующие рассуждения, предшествующие равенству (2.30). А именно, подставим соотношение (2.50) в правую часть уравнения (2.1) и дополним получившееся уравнение начальным условием (см. (2.48))

$$x|_{t=1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} = x_0(1) + \sqrt{\varepsilon}\dot{x}_0(1+0) + \left(v_0 - \frac{(a+1)c_1^+}{2}\right)\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon).$$

В результате после несложных преобразований приходим к очередному асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) - \varepsilon(a+1)c_1^+ \ln(t-1) + (a+1)(c_1^- - c_1^+) \times \exp(-\mu(t-1))\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \sigma_0. \quad (2.51)$$

Рассмотрим теперь отрезок времени $1 + \sigma_0 \leq t \leq 2 + \sigma_0$, предполагая, что

$$\sigma_0 < \frac{t_0 - 1}{2}. \quad (2.52)$$

Условие (2.52) и уже установленные асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на отрезке $\sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$ (см. (2.23), (2.30), (2.48), (2.51)) свидетельствуют о том, что выполняется неравенство

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \geq q \quad (2.53)$$

с некоторой универсальной константой $q > 0$. Согласно (1.5) оценка (2.53) влечет за собой аналогичное (2.50) асимптотическое представление

$$f\left(\frac{x_\varphi(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) = 1 + O(\varepsilon). \quad (2.54)$$

Таким образом, в силу (2.51), (2.54) на данном отрезке изучению подлежит задача Коши вида

$$\dot{x} = -\mu x - a + O(\varepsilon),$$

$$x|_{t=1+\sigma_0} = x_0(1 + \sigma_0) + (a+1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu\sigma_0)\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon),$$

несложный анализ которой приводит к равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + (a+1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t-1))\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \quad (2.55)$$

Добавим еще, что на самом деле формула (2.55) сохраняется и на отрезке времени $2 + \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 - \sigma_0$ (длина которого в силу неравенства (2.52) положительна). Обосновать этот факт позволяет так называемый метод шагов, суть которого состоит в следующем. Разобьем указанный отрезок на части длиной не более единицы и на очередном промежутке, опираясь на равенство (2.55) (уже установленное на предыдущем участке изменения t), сначала получаем оценку вида (2.53), а затем распространяем соотношение (2.55) на шаг вперед. Ясно, что описанный процесс продолжается до тех пор, пока $x_0(t-1) > 0$. Тем самым, рассуждая подобным образом, мы заведомо добираемся к точке $t = t_0 + 1 - \sigma_0$. Однако в силу равенства $x_0(t_0) = 0$ формула (2.55) не может быть пригодной вплоть до значения $t = t_0 + 1$.

Итак, окрестность точки $t = t_0 + 1$ требует отдельного рассмотрения. Для этого нам понадобится момент времени $t = \tau_2(\varepsilon, \varphi)$, являющийся корнем уравнения $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$ из отрезка $t_0 - \sigma_0 \leq t \leq t_0 + \sigma_0$. Заметим, далее, что

поскольку этот отрезок содержится в промежутке $[1 + \sigma_0, t_0 + 1 - \sigma_0]$, то для отыскания корня $t = \tau_2$ мы вправе воспользоваться асимптотическим представлением (2.55) и вытекающим из (2.54), (2.55) соотношением

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = \dot{x}_0(t) - \mu(a+1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t-1))\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) < 0,$$

$$1 + \sigma_0 \leq t \leq t_0 + 1 - \sigma_0.$$

В результате получаем равномерное по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотическое равенство

$$\tau_2 = t_0 + \frac{a+1}{a}(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t_0-1))\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \quad (2.56)$$

Последующие четыре шага асимптотического анализа решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ аналогичны уже рассмотренным случаям. Поэтому здесь приведем лишь сводку итоговых результатов.

На отрезке $t_0 + 1 - \sigma_0 \leq t \leq \tau_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}$ имеет место аналогичное формуле (2.30) асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + (a+1)(c_1^- - c_1^+) \exp(-\mu(t-1))\varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \frac{a+1}{a} c_1^+ \ln(t_0 + 1 - t) + O(\varepsilon). \quad (2.57)$$

На участке переключения $\tau_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \tau_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon}$ справедлива аналогичная (2.48) асимптотическая формула

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t_0 + 1) + w_0 \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_2-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (2.58)$$

Здесь $w_0 = -(a+1)c_1^+/a$, а функция $w_1(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, задается равенством

$$w_1(\tau) = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0)\tau - (a+1) \int_0^\tau f(-as) ds \quad (2.59)$$

и обладает следующими свойствами:

$$w_1(\tau) = \dot{x}_0(t_0 + 1 - 0)\tau + (a+1) \frac{c_1^+}{a} \ln|\tau| + O(1),$$

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \dot{x}_0(t_0 + 1 - 0) + O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow -\infty, \quad (2.60)$$

$$w_1(\tau) = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0)\tau + (a+1) \frac{c_1^-}{a} \ln \tau + O(1),$$

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0) + \left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.61)$$

Отметим вытекающие из (2.58)–(2.61) аналогичные (2.49) соотношения

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}} = \dot{x}_0(t_0 + 1 - 0) + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)|_{t=1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} = \dot{x}_0(t_0 + 1 + 0) + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

На отрезке $\tau_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq t_0 + 1 + \sigma_0$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает аналогичную (2.51) асимптотику

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + \chi \exp(-\mu(t - t_0 - 1)) \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \frac{a+1}{a} c_1^- \ln(t - t_0 - 1) + O(\varepsilon), \quad (2.62)$$

где

$$\chi = \frac{a+1}{a} (c_1^- - c_1^+) \frac{(1-a^2)(1-\exp(-\mu))}{a+1-\exp(-\mu)}. \quad (2.63)$$

На отрезке $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$ выполняется аналогичное (2.55) асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + \chi \exp(-\mu(t - t_0 - 1)) \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \quad (2.64)$$

Подведем некоторый итог. Из полученных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (2.23), (2.30), (2.48), (2.51), (2.55)–(2.64)) заключаем, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (2.65)$$

где $x_0(t)$ – функция (2.16), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Далее, опираясь на (2.65) и учитывая оценку (2.15), налагаемую на параметр σ_0 , приходим к выводу, что интересующий нас второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения (2.19) принадлежит отрезку $t_0 + 1 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$. Отсюда и из равенства (2.64) (сохраняющего силу при дифференцировании по t) очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$T_\varphi = T_0 - \frac{\chi}{1 + a(1 - \exp(-\mu))} \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \quad (2.66)$$

Формулы (2.65), (2.66) свидетельствуют о том, что оператор (2.20) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_0(t)| = O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (2.67)$$

Включение $\Pi_\varepsilon(S(\sigma_0, q_1, q_2)) \subset S(\sigma_0, q_1, q_2)$ в силу (2.67) будет заведомо выполняться при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии

$$x_0(t) \in \widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (2.68)$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ – множество функций, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (2.18) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что свойства $x_0(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0)$, $x_0(t) < 0$ при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ гарантируются выбором σ_0 (см. (2.15)). Поэтому для проверки включения (2.68) достаточно убедиться в том, что

$$-q_1 < x_0(t) < -q_2 \quad \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0].$$

Справедливости этих неравенств добиваемся за счет выбора свободных параметров q_1, q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t). \quad (2.69)$$

Итак, оператор Π_ε , являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (2.15), (2.26), (2.52), (2.69) для параметров σ_0, q_1, q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. Отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (2.1) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (2.65)–(2.67) обладает требуемыми свойствами (2.17).

2.3. Анализ свойств устойчивости. Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 2.1, т.е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (2.16). Из явной формулы (2.20) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)h_0 = h(t + T_\varphi, \varepsilon) - \frac{h(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (2.70)$$

Здесь функция $h_0(t)$ представляет собой произвольный элемент пространства

$$C_0 = \{h_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0] : h_0(-\sigma_0) = 0\} \quad (2.71)$$

с нормой $\|h_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |h_0(t)|$, а через $h(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, обозначено решение линейного уравнения

$$\dot{h} = -\mu h + A_\varphi(t, \varepsilon)h(t-1), \quad A_\varphi(t, \varepsilon) = -\frac{a+1}{\varepsilon} f' \left(\frac{x_\varphi(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon} \right), \quad (2.72)$$

с начальной функцией $h_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Из явной формулы (2.70) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) : C_0 \rightarrow C_0$ сводится к анализу введенного выше решения $h(t, \varepsilon)$ уравнения (2.72). В связи с этим нам потребуются некоторые свойства коэффициента $A_\varphi(t, \varepsilon)$ из (2.72).

ЛЕММА 2.2. *Найдутся такие не зависящие от ε, φ постоянные $M_1, M_2 > 0$, что*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon, \quad \int_\Sigma |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt \leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.73)$$

где $\Sigma = [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^2 (1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$. Кроме того, справедливы равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt &= \frac{\dot{x}_0(1+0) - \dot{x}_0(1-0)}{\dot{x}_0(0)} + O(\sqrt{\varepsilon}) = -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= (a+1) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}); \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned}
\int_{1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} A_{\varphi}(t, \varepsilon) dt &= \frac{\dot{x}_0(1+t_0+0) - \dot{x}_0(1+t_0-0)}{\dot{x}_0(t_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}) \\
&= -1 - \frac{1}{a} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.75) \\
\int_{1+\tau_2-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_2+\sqrt{\varepsilon}} |A_{\varphi}(t, \varepsilon)| dt &= \left(1 + \frac{1}{a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств (1.5) функции $f(u)$ последовательно выводим следующее:

$$\begin{aligned}
|f'(u)| &\leq \frac{M}{1+u^2}, \quad |f''(u)| \leq \frac{M}{1+|u|^3} \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\
|f'(u_1) - f'(u_2)| &\leq \frac{M}{1 + \min(|u_1|^3, |u_2|^3)} |u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}; \quad (2.76)
\end{aligned}$$

здесь и ниже одной и той же буквой M обозначены различные универсальные положительные постоянные, точные значения которых несущественны. Далее, объединяя оценку для $f'(u)$ из (2.76) с установленными ранее асимптотически представлениями для $x_{\varphi}(t, \varepsilon)$, заключаем, что при $t \in \Sigma$

$$|A_{\varphi}(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \left(\frac{1}{1 + (t-1)^2/\varepsilon^2} + \frac{1}{1 + (t-t_0-1)^2/\varepsilon^2} \right).$$

Отсюда требуемые неравенства (2.73) вытекают очевидным образом.

Обратимся теперь к асимптотическим соотношениям (2.74), (2.75) и докажем, к примеру, (2.74) (поскольку (2.75) обосновываются аналогично). С этой целью перейдем на отрезке $1 + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq 1 + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ к переменной τ по формуле $\tau = (t - \tau_1 - 1)/\varepsilon$ (см. (2.31)). В этом случае $x_{\varphi}(t-1, \varepsilon)/\varepsilon$ записывается в виде $x_{\varphi}(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$, а значит, в силу (2.35), (2.76) имеем

$$\left| f' \left(\frac{x_{\varphi}(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon} \right) - f'(\tau) \right| \leq \frac{M|\tau|\sqrt{\varepsilon}}{1 + |\tau|^3}, \quad -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \tau \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (2.77)$$

Применим теперь оценку (2.77) непосредственно к вычислению интегралов из (2.74). В результате убеждаемся в том, что равномерно по φ

$$\begin{aligned}
\int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} A_{\varphi}(t, \varepsilon) dt &= -(a+1) \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} f'(\tau) d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) = -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \\
\int_{1+\tau_1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_1+\sqrt{\varepsilon}} |A_{\varphi}(t, \varepsilon)| dt &= (a+1) \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) \\
&= (a+1) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Вернемся к интересующему нас вопросу об асимптотическом поведении фигурирующего в (2.70) решения $h(t, \varepsilon)$ уравнения (2.72). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_{\varphi} - \sigma_0} |h(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon \|h_0\| \quad (2.78)$$

с некоторой не зависящей от ε , φ , h_0 постоянной $M > 0$, где, напомним, $\|\cdot\|$ – норма в пространстве (2.71).

Рассмотрим сначала отрезок $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$, на котором для коэффициента $A_\varphi(t, \varepsilon)$ справедлива первая оценка (2.73). Учитывая эту оценку в явной формуле

$$h(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t \exp(-\mu(t-s)) A_\varphi(s, \varepsilon) h_0(s-1) ds, \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0,$$

приходим к выводу, что

$$\max_t |h(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon \|h_0\|. \quad (2.79)$$

Для распространения оценки (2.79) на оставшийся отрезок $[1 - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем данный промежуток на отрезки $[1 - \sigma_0 + k, 2 - \sigma_0 + k]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$, и $[2 - \sigma_0 + k_0, T_\varphi - \sigma_0]$, где $k_0 = \lfloor T_\varphi - 2 \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть. Опираясь, далее, на свойство интегральной ограниченности

$$\int_{-\sigma_0}^{T_\varphi - \sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt \leq M,$$

имеющее место в силу (2.73)–(2.75), замечаем, что из неравенства

$$\begin{aligned} |h(t, \varepsilon)| &\leq |h(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon)| \exp(-\mu(t - 1 + \sigma_0 - k)) \\ &+ \int_{1 - \sigma_0 + k}^t \exp(-\mu(t-s)) |A_\varphi(s, \varepsilon)| |h(s-1, \varepsilon)| ds, \quad t \geq 1 - \sigma_0 + k, \end{aligned}$$

и из уже полученной оценки вида (2.79) на $(k-1)$ -м отрезке вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t .

На завершающем этапе применим неравенство (2.78) вместе с очевидной оценкой $\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon)| \leq M$, $M = \text{const} > 0$, к оператору (2.70). В итоге получаем неравенство

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M\varepsilon. \quad (2.80)$$

Остается добавить, что оценка (2.80) обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$ в метрике фазового пространства $C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$. Теорема 2.1 доказана.

Завершая анализ математической модели отдельного нейрона, отметим, что исходное уравнение (1.4) при всех достаточно больших λ имеет устойчивый цикл

$$u_*(t, \lambda) = \lambda x_*(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=1/\lambda},$$

обладающий выраженными релаксационными свойствами: амплитуда этого цикла асимптотически велика, а его период $T_*(\lambda)$ согласно (2.66) стремится при $\lambda \rightarrow \infty$ к конечному пределу T_0 .

§ 3. Релаксационные автоколебания в кольцевой нейронной сети

3.1. Общая схема исследования. Обратимся теперь к кольцевой модели (1.6). Как и выше, при асимптотическом анализе этой системы удобно сделать в ней замены $u_j = \lambda x_j$, $j = 1, \dots, m$. В результате указанных замен рассматриваемая система преобразуется к виду

$$\dot{x}_j = -\mu x_j + 1 - (a + 1)f\left(\frac{x_j(t-1)}{\varepsilon}\right) - bg\left(\frac{x_{j-1}}{\varepsilon}\right), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.1)$$

где $x_0 = x_m$, $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, $a, b, \mu = \text{const} > 0$.

В дальнейшем будем интересоваться вопросом о существовании и устойчивости для системы (3.1) так называемых самосимметричных периодических движений, не меняющихся при циклических перестановках координат x_j , $j = 1, \dots, m$. Точнее, речь пойдет о периодических решениях, допускающих представление вида

$$x_j = x(t + (j-1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

где $\Delta > 0$, а функция $x(t, \varepsilon)$ – периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a + 1)f\left(\frac{x(t-1)}{\varepsilon}\right) - bg\left(\frac{x(t-\Delta)}{\varepsilon}\right) \quad (3.3)$$

периода $T = m\Delta$.

Предположим, что уравнение (3.3) допускает требуемое $(m\Delta)$ -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$. Тогда вопрос об устойчивости соответствующего цикла (3.2) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов линейной системы

$$\dot{h}_j = -\mu h_j + A(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)h_j(t-1) + B(t + (j-1)\Delta, \varepsilon)h_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

где $h_0 = h_m$, а коэффициенты $A(t, \varepsilon)$, $B(t, \varepsilon)$ задаются равенствами

$$A(t, \varepsilon) = -\frac{a+1}{\varepsilon}f'\left(\frac{x(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad B(t, \varepsilon) = -\frac{b}{\varepsilon}g'\left(\frac{x(t-\Delta, \varepsilon)}{\varepsilon}\right). \quad (3.5)$$

Во избежание недоразумений поясним смысл термина “мультипликатор” применительно к системе (3.4). В связи с этим рассмотрим пространство $E = C([-1, 0]; \mathbb{R}^m)$ непрерывных при $-1 \leq t \leq 0$ вектор-функций $h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$ с нормой

$$\|h\|_E = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{-1 \leq t \leq 0} |h_j(t)|.$$

Далее, оператором монодромии системы (3.4) назовем ограниченный линейный оператор $V(\varepsilon): E \rightarrow E$, действующий на произвольную функцию $h(t) \in E$ по правилу

$$V(\varepsilon)h = h(t + m\Delta, \varepsilon), \quad -1 \leq t \leq 0, \quad (3.6)$$

где $h(t, \varepsilon) = (h_1(t, \varepsilon), \dots, h_m(t, \varepsilon))$ – решение системы (3.4) на отрезке $0 \leq t \leq m\Delta$ с начальной функцией $h(t)$, $-1 \leq t \leq 0$. Отметим, что спектр этого оператора заведомо дискретен, так как некоторая его степень компактна (в случае $m\Delta > 1$ компактен и оператор $V(\varepsilon)$). *Мультипликаторами системы (3.4)* по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (3.6).

Наряду с (3.4) введем в рассмотрение вспомогательное скалярное линейное уравнение

$$\dot{h} = -\mu h + A(t, \varepsilon)h(t-1) + \varkappa B(t, \varepsilon)h(t-\Delta) \quad (3.7)$$

с комплексным параметром $\varkappa$ и обозначим через $\nu_k(\varkappa, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots$, его мультипликаторы, занумерованные в порядке убывания модулей (в случае скалярного уравнения определение мультипликаторов аналогично данному выше). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Каждый мультипликатор ν , $\nu \neq 0$, системы (3.4) допускает представление*

$$\nu = \varkappa^m, \quad (3.8)$$

где $\varkappa$ – корень одного из уравнений

$$\nu_k(\varkappa, \varepsilon) = \varkappa^m, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем любой мультипликатор $\nu \neq 0$ системы (3.4) и предположим, что он является простым. Обозначим, далее, через

$$\begin{aligned} h(t, \varepsilon) &= \exp(\alpha t) h_0(t, \varepsilon), & h_0(t, \varepsilon) &= \text{colon}(h_{0,1}(t, \varepsilon), \dots, h_{0,m}(t, \varepsilon)), \\ h_0(t + m\Delta, \varepsilon) &\equiv h_0(t, \varepsilon), & \alpha &= \frac{1}{m\Delta} \ln \nu, \end{aligned} \quad (3.10)$$

отвечающее ему решение вида Ляпунова–Флоке. Отметим, что, поскольку система (3.4) инвариантна относительно замен

$$t - \Delta \rightarrow t, \quad h_{j-1} \rightarrow h_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.11)$$

а мультипликатор ν простой, решение (3.10) под действием этих замен перейдет в решение $s \exp(\alpha(t + \Delta)) h_0(t, \varepsilon)$, где s – некоторая комплексная постоянная. Таким образом, имеет место равенство

$$\Lambda h_0(t + \Delta, \varepsilon) = c h_0(t, \varepsilon), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

из которого, в свою очередь, выводим следующее:

$$h_{0,m-j}(t, \varepsilon) = c^{j+1} h_{0,1}(t - (j+1)\Delta, \varepsilon), \quad j = 0, 1, \dots, m-2, \quad c^m = 1. \quad (3.13)$$

Компонента $h_{0,1}(t, \varepsilon)$ в силу (3.13) является $(m\Delta)$ -периодическим решением уравнения

$$\dot{h} = -(\mu + \alpha)h + \exp(-\alpha)A(t, \varepsilon)h(t-1) + cB(t, \varepsilon)h(t-\Delta). \quad (3.14)$$

Проведенные построения показывают, что уравнение (3.14) заведомо имеет единичный мультипликатор. Сделаем, далее, в этом уравнении замену $\exp(\alpha t)h \rightarrow h$. В результате единичный мультипликатор перейдет в $\exp(m\alpha\Delta)$, а само уравнение (3.14) – в уравнение (3.7) при $\varkappa = c\exp(\alpha\Delta)$. Таким образом, с необходимостью найдется номер k , для которого будут выполняться равенства

$$\nu_k(\varkappa, \varepsilon)|_{\varkappa=c\exp(\alpha\Delta)} = \exp(m\alpha\Delta) = \varkappa^m,$$

а это и означает, что справедливы соотношения (3.8), (3.9).

В случае, когда мультипликатор ν кратный, рассуждения аналогичны. Действительно, пусть данному мультипликатору отвечает ровно s линейно независимых решений вида Ляпунова–Флоке. Тогда эти решения можно записать в матричной форме $\exp(\alpha t)H(t, \varepsilon)$, где столбцами матрицы $H(t, \varepsilon)$ размера $m \times s$ являются линейно независимые $(m\Delta)$ -периодические вектор-функции. Далее, в силу инвариантности системы (3.4) под действием замен (3.11) вместо равенства (3.12) будет выполняться равенство

$$\Lambda H(t + \Delta, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)C \quad (3.15)$$

с некоторой постоянной матрицей C размера $s \times s$.

Свойство (3.15) позволяет свести проблему обоснования формул (3.8), (3.9) к предыдущему случаю. Для того чтобы сделать это, фиксируем некоторое собственное значение c матрицы C , а через e обозначим отвечающий ему собственный вектор. Тогда, как нетрудно увидеть, для вектор-функции $h_0(t, \varepsilon) = H(t, \varepsilon)e$ справедливо соотношение (3.12). Последующие рассуждения совпадают с изложенными выше. Лемма доказана.

Итак, проблема существования самосимметричных циклов (3.2) системы (3.1) сводится к поиску $(m\Delta)$ -периодических решений вспомогательного скалярного уравнения (3.3). Вопрос об устойчивости этих циклов решается отдельно и в силу леммы 3.1 состоит в асимптотическом вычислении корней уравнений (3.9). Ниже оба эти вопроса исследуются как в общем случае, так и при дополнительном предположении малости параметра μ .

3.2. Анализ вспомогательного нелинейного уравнения. В данном пункте сформулируем аналогичное теореме 2.1 утверждение о существовании для вспомогательного уравнения (3.3) релаксационного периодического движения. В связи с этим, в первую очередь опираясь на свойства (1.5), (1.7) функций $f(u)$, $g(u)$, перейдем от (3.3) к соответствующему релейному уравнению

$$\dot{x} = -\mu x + 1 - (a+1)F(x(t-1)) - bF(x(t-\Delta)), \quad (3.16)$$

где $F(x)$ – функция из (2.2).

Как и в п. 2.1, понятие решения уравнения (3.16) будем определять конструктивно. С этой целью фиксируем произвольное целое неотрицательное n и предположим, что параметры a, b, μ, Δ из (3.16) удовлетворяют условиям

$$1 + t_0 + nT_0 < \Delta < (n + 1)T_0, \quad b > (a + 1) \exp \mu, \quad (3.17)$$

где, напомним, моменты времени t_0 и T_0 определены равенствами (2.10) и (2.13). Далее, фиксируем некоторое достаточно малое $\sigma_0 > 0$ (как и в п. 2.1, оценку сверху этого параметра уточним в последующем), рассмотрим множество функций

$$\varphi(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(-\sigma_0) = \theta(-\sigma_0), \quad (3.18)$$

где $\theta(t)$ – функция (2.5), и обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (3.16) с произвольным начальным условием из класса (3.18).

При интегрировании уравнения (3.16) следует иметь в виду, что фигурирующие в его правой части функции $F(x(t-1))$, $F(x(t-\Delta))$ кусочно постоянны и меняются лишь тогда, когда $x(t-1)$ или $x(t-\Delta)$ меняет знак. В частности, при $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ имеем одновременно $\varphi(t-1) < 0$ и $\varphi(t-\Delta) < 0$. Поэтому на указанном отрезке функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши (2.6), а значит, задается равенством (2.7). Добавим еще, что это равенство можно продолжить по t до тех пор, пока выполняются условия $x_\varphi(t-1) < 0$ и $x_\varphi(t-\Delta) < 0$. Следовательно, оно заведомо справедливо на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 0$.

При $0 \leq t < \Delta$ из уже проведенных построений вытекает, что $x_\varphi(t-\Delta) < 0$ и $F(x_\varphi(t-\Delta)) = 0$. Таким образом, на данном промежутке времени интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ удовлетворяет изученному в п. 2.1 уравнению (2.3) и в силу этого определяется посредством равенства

$$x_\varphi(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t \leq \Delta, \quad (3.19)$$

где $x_0(t)$ – функция (2.16).

Для последующего анализа нам потребуется специальная функция $y_0(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \mu x - bF(x_0(t)), \quad x|_{t=0} = 0. \quad (3.20)$$

Привлекая формулы (2.16), нетрудно увидеть, что при $t \geq 0$ она задается соотношениями

$$y_0(t) = \begin{cases} -(b-1)\theta(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ -(b-1)\theta(t_0)\exp(-\mu(t-t_0)) + \theta(t-t_0) & \text{при } t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$y_0(t) = -\delta_{k-1} \exp(-\mu(t - (k-1)T_0)) + y_0(t - (k-1)T_0) \quad (3.22)$$

при $(k-1)T_0 \leq t \leq kT_0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, где

$$\delta_k = \delta \frac{1 - \exp(-k\mu T_0)}{1 - \exp(-\mu T_0)}, \quad \delta = \frac{\theta(1)(1 + 1/a)(b \exp(-\mu) - a - 1)}{(1 + a(1 - \exp(-\mu)))(1 + (1 - \exp(-\mu))/a)}. \quad (3.23)$$

Оценка из (3.17) параметра b гарантирует выполнение при всех $t > 0$ необходимого в дальнейшем неравенства $y_0(t) < 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению отрезка $\Delta \leq t \leq \Delta + 1$ и заметим, что условия для Δ из (3.17) обеспечивают включение $t = \Delta \in (1 + t_0 + nT_0, (n + 1)T_0)$. Тем самым, в силу (2.16), (3.19) имеем $x_\varphi(t - 1) < 0$ при $t \in [\Delta, \Delta + 1]$, и, следовательно, на указанном отрезке функция $x_\varphi(t)$ является решением аналогичной (3.20) задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \mu x - bF(x_0(t - \Delta)), \quad x|_{t=\Delta} = x_0(\Delta).$$

Отсюда заключаем, что при $\Delta \leq t \leq \Delta + 1$ справедлива формула

$$x_\varphi(t) = x_0(\Delta) \exp(-\mu(t - \Delta)) + y_0(t - \Delta). \quad (3.24)$$

Отметим, что на следующем этапе при априорном условии

$$x_\varphi(t - 1) < 0 \quad (3.25)$$

равенство (3.24) сохраняется на отрезке $\Delta \leq t \leq 2\Delta$, но это условие действительно выполняется, поскольку согласно (2.16), (3.17), (3.21)–(3.23)

$$x_0(\Delta) = x_0(\Delta - nT_0) = \theta(\Delta - (n + 1)T_0) < 0, \quad y_0(t - \Delta) < 0 \quad \forall t > \Delta. \quad (3.26)$$

Таким образом, при $\Delta \leq t \leq 2\Delta$ соотношение (3.24) справедливо.

При рассмотрении значений $t \geq 2\Delta$ будем предполагать, что наряду с условием (3.25) имеет место априорная оценка

$$x_\varphi(t - \Delta) < 0. \quad (3.27)$$

В этом случае интересующее нас решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \mu x, \quad x|_{t=2\Delta} = x_0(\Delta) \exp(-\mu\Delta) + y_0(\Delta),$$

а значит, задается вытекающей из (3.21)–(3.23), (3.26) формулой

$$x_\varphi(t) = \theta(t - T_n^0), \quad (3.28)$$

где

$$T_n^0 = 2\Delta + \frac{1}{\mu} \ln[1 - \mu(x_0(\Delta) \exp(-\mu\Delta) + y_0(\Delta))] > 2\Delta. \quad (3.29)$$

Остается добавить, что согласно формулам (3.24), (3.28) априорные требования (3.25), (3.27) заведомо выполняются на промежутке $2\Delta \leq t \leq T_n^0$.

Как и в п. 2.1, распорядимся теперь выбором свободного параметра σ_0 из соотношения (3.18). В дальнейшем будем считать выполненным условие

$$\sigma_0 < \min(-x_0(\Delta), T_n^0 - \Delta - t_0 - nT_0), \quad (3.30)$$

обеспечивающее принадлежность функции $x_\varphi(t + T_n^0)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$,

множеству (3.18). Кроме того, из (3.30) следует, что уравнение $x_\varphi(t - \sigma_0) = \theta(-\sigma_0)$ имеет на промежутке $(0, T_n^0]$ ровно $2n+2$ корня (данный факт необходим для обоснования приведенной ниже теоремы 3.1).

Итак, при условии (3.30) процесс построения решения $x_\varphi(t)$ на отрезках времени $kT_n^0 - \sigma_0 \leq t \leq (k+1)T_n^0 - \sigma_0$, $k = 1, 2, \dots$, циклически повторяется. Тем самым, при $t \geq -\sigma_0$ любое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (3.18) совпадает с T_n^0 -периодической функцией

$$x_n^0(t) = \begin{cases} x_0(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ x_0(\Delta) \exp(-\mu(t - \Delta)) + y_0(t - \Delta) & \text{при } \Delta \leq t \leq 2\Delta, \\ \theta(t - T_n^0) & \text{при } 2\Delta \leq t \leq T_n^0. \end{cases} \quad (3.31)$$

График функции (3.31) при $a = 2$, $b = 8$, $\Delta = 23$, $\mu = 0.2$ представлен на рис. 2 (при выбранных значениях параметров условия, налагаемые на Δ в формуле (3.17), выполняются для $n = 5$).

Рис. 2

Проведенный анализ показывает, что релейное уравнение (3.16) обладает теми же общими свойствами, что и рассмотренное ранее уравнение (2.3), а это значит, что справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть при некотором целом $n \geq 0$ выполнены условия (3.17). Тогда найдется такое достаточно малое положительное ε_0 , что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение (3.3) допускает единственный цикл $x_n^*(t, \varepsilon)$, $x_n^*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv \theta(-\sigma_0)$, периода $T_n^*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon)} |x_n^*(t, \varepsilon) - x_n^0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_n^*(\varepsilon) = T_n^0. \quad (3.32)$$

3.3. Доказательство теоремы 3.1. Так как обоснование теоремы 3.1 во многом аналогично изложенному в п. 2.2, 2.3 доказательству теоремы 2.1, опустим здесь ряд технических деталей.

Как и ранее, фиксируем $q_1 \in (-\theta(-\sigma_0), +\infty)$, $q_2 \in (0, -\theta(-\sigma_0))$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям (2.18). Для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ введем в рассмотрение решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$, уравнения (3.3) с начальным условием $\varphi(t)$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, через $t = T_\varphi$ обозначим положительный корень уравнения (2.19) с номером $2n + 2$ (в предположении, что это уравнение имеет на полуоси $t > 0$ не менее $2n + 2$ корней, занумерованных в порядке возрастания) и определим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon: S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ посредством аналогичного (2.20) равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (3.33)$$

Ниже будет показано, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (3.33) действует из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и является в этом множестве сжимающим.

Для реализации описанной программы действий необходимо знать равномерную по φ асимптотику решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на промежутке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2$. Соответствующий асимптотический анализ начнем, рассматривая отрезок $-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0$ и предполагая, что в дополнение к (3.30) выполнено неравенство

$$\sigma_0 < \Delta - t_0 - 1 - nT_0. \quad (3.34)$$

Далее, опираясь на оценки из (2.18) и свойства функции $g(u)$ (см. (1.7)), замечаем, что равномерно по $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$g\left(\frac{\varphi(t - \Delta)}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon). \quad (3.35)$$

Формула (3.35), в свою очередь, позволяет отбросить соответствующее слагаемое в правой части из (3.3) и перейти к исследованию уравнения (2.1), свойства которого уже изучены. Поэтому здесь ограничимся лишь сводкой итоговых результатов.

Соотношение (3.35) свидетельствует о том, что при $-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0$ решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ с точностью до величин порядка ε совпадает с циклом уравнения (2.1), доставляемым теоремой 2.1. Отметим, что в силу условий (3.17), (3.34) точка $t = \Delta - \sigma_0$ принадлежит интервалу $(t_0 + 1 + nT_0, (n + 1)T_0)$. Отсюда и из проведенного в п. 2.2 анализа вытекает, что на рассматриваемом промежутке уравнение $x_\varphi(t, \varepsilon) = 0$ имеет $2n + 2$ простых корня $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{2n+2}$, где $\tau_j = \tau_j(\varepsilon, \varphi)$, $j = 1, \dots, 2n + 2$, допускают равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} \tau_1 &= O(\varepsilon), & \tau_{2k} &= t_0 + (k - 1)T_0 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), & k &= 1, \dots, n + 1, \\ \tau_{2k-1} &= (k - 1)T_0 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), & k &= 2, \dots, n + 1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Объединяя затем равенства (3.36) с полученными в п. 2.2 асимптотическими формулами, приходим к следующим фактам.

На множестве $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$ справедливо асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.37)$$

где $x_0(t)$ – функция (2.16), а остаток здесь и во всех остальных встречающихся ниже случаях равномерно по t, φ .

На промежутках $(1 + \tau_{2k-1} - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_{2k-1} + \sqrt{\varepsilon})$, $k = 1, \dots, n+1$, решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ допускает представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(1) + \varepsilon v_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_{2k-1}-1)/\varepsilon} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.38)$$

где $v_1(\tau)$ – функция (2.37).

На отрезках времени $(1 + \tau_{2k} - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_{2k} + \sqrt{\varepsilon})$, $k = 1, \dots, n+1$, имеют место формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_0(t_0 + 1) + \varepsilon w_1(\tau)|_{\tau=(t-\tau_{2k}-1)/\varepsilon} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.39)$$

где $w_1(\tau)$ – функция (2.59).

Следующий этап построения асимптотики $x_\varphi(t, \varepsilon)$ связан с рассмотрением отрезка $\Delta - \sigma_0 \leq t \leq 2\Delta - \sigma_0$. Будем считать, что при указанных t выполняется априорная оценка вида (2.24) с не зависящей от t, φ, ε постоянной $q > 0$. В этом случае в силу свойств (1.5) равномерно по t, φ

$$f\left(\frac{x_\varphi(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) = O(\varepsilon). \quad (3.40)$$

Для функции $x_\varphi(t - \Delta, \varepsilon)$ при $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0]$ справедлива серия асимптотических равенств (3.37)–(3.39), в которых необходимо заменить t на $t - \Delta$.

Итак, на интересующем нас промежутке времени согласно (3.3), (3.40) исследованию подлежит дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + \mu x = 1 - bg\left(\frac{x_\varphi(t - \Delta, \varepsilon)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad (3.41)$$

правая часть которого фактически уже известна. Точнее, добавка $O(\varepsilon)$ в уравнении (3.41), естественно, обновляется по прошествии каждого отрезка времени длины 1. Однако, поскольку при интегрировании уравнения (3.3) методом шагов мы последовательно рассматриваем именно такие промежутки, при каждом $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0]$ левая часть формулы (3.40) уже известна из предыдущего шага. Впрочем, ее явный вид несуществен. Важно лишь то, что она имеет порядок ε .

Технические подробности, связанные с интегрированием уравнения (3.41), мы не приводим. Как и выше, приведем лишь сводку итоговых результатов.

При $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (\Delta + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_j + \sqrt{\varepsilon})$ выполняется аналогичное (3.37) асимптотическое равенство

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_n^0(t) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.42)$$

где $x_n^0(t)$ – функция (3.31).

На отрезках $t \in [\Delta + \tau_{2k-1} - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_{2k-1} + \sqrt{\varepsilon}]$, $k = 1, \dots, n+1$, справедливы асимптотические формулы

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_n^0(\Delta + (k-1)T_0) + \varepsilon v_{*,k}(\tau)|_{\tau=(t-\Delta-\tau_{2k-1})/\varepsilon} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.43)$$

где

$$\begin{aligned} v_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + (k-1)T_0 - 0)\tau - b \int_0^\tau g(s) ds, \\ v_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + (k-1)T_0 - 0)\tau - bd_1^- \ln |\tau| + O(1), \quad \tau \rightarrow -\infty, \\ v_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + (k-1)T_0 + 0)\tau - bd_1^+ \ln \tau + O(1), \quad \tau \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.44)$$

а $d_1^\pm$ – постоянные из (1.7).

При $\Delta + \tau_{2k} - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \Delta + \tau_{2k} + \sqrt{\varepsilon}$, $k = 1, \dots, n+1$, имеют место асимптотические представления

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = x_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0) + \varepsilon w_{*,k}(\tau)|_{\tau=(t-\Delta-\tau_{2k})/\varepsilon} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} w_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0 + 0)\tau - b \int_0^\tau g(-as) ds, \\ w_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0 - 0)\tau + \frac{b}{a} d_1^+ \ln |\tau| + O(1), \quad \tau \rightarrow -\infty, \\ w_{*,k}(\tau) &= \dot{x}_n^0(\Delta + t_0 + (k-1)T_0 + 0)\tau + \frac{b}{a} d_1^- \ln \tau + O(1), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Следует, однако, напомнить, что наши построения, касающиеся отрезка времени $t \in [\Delta - \sigma_0, 2\Delta - \sigma_0]$, носят пока условный характер, поскольку они были выполнены при априорном предположении (2.24). Однако полученные на этом пути асимптотические формулы (3.42)–(3.46) и уже известные формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $t \in [\Delta - 1 - \sigma_0, \Delta - \sigma_0] \subset (t_0 + nT_0, \Delta]$ свидетельствуют о том, что при подходящем выборе постоянной $q > 0$ требуемое неравенство (2.24) действительно выполняется. Таким образом, все условные конструкции (3.42)–(3.46) справедливы.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ рассмотрим отрезок времени $2\Delta - \sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2$ и предположим, что на нем имеют место априорные оценки

$$x_\varphi(t-1, \varepsilon) \leq -q, \quad x_\varphi(t-\Delta, \varepsilon) \leq -q, \quad q = \text{const} > 0. \quad (3.47)$$

В этом случае в силу свойств (1.5), (1.7) уравнение (3.3) примет вид

$$\dot{x} = -\mu x + 1 + O(\varepsilon). \quad (3.48)$$

Дополним его начальным условием $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $\Delta - \sigma_0 \leq t \leq 2\Delta - \sigma_0$, известным из предыдущих построений. Интегрируя затем получившуюся задачу Коши методом шагов, приходим к асимптотическому представлению

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \theta(t - T_n^0) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad 2\Delta - \sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.49)$$

Для придания изложенным построениям необходимой строгости заметим, что из самого равенства (3.49) и установленных ранее асимптотических формул для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $\Delta - \sigma_0 \leq t \leq 2\Delta - \sigma_0$ вытекает справедливость априорных предположений (3.47) при соответствующем выборе константы $q > 0$.

Подведем промежуточный итог. Из всей совокупности асимптотических представлений для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (3.36)–(3.39), (3.42)–(3.46)) следует, что равномерно по начальным функциям $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_n^0(t)| = O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.50)$$

Далее, из равенства (3.50) и условия (3.30), налагаемого на σ_0 , заключаем, что требуемый $(2n + 2)$ -й по счету положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения (2.19) принадлежит промежутку $2\Delta - \sigma_0 \leq t \leq T_n^0 - \sigma_0/2$. Отсюда и из формул (3.48), (3.49) вытекает, что T_φ определяется однозначно и допускает равномерную по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотику

$$T_\varphi = T_n^0 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.51)$$

Остается лишь отметить, что в силу равенств (3.50), (3.51) оператор (3.33) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, а при аналогичных (2.69) дополнительных условиях

$$q_1 > -\min_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_n^0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_n^0(t) \quad (3.52)$$

для параметров q_1, q_2 преобразует это множество в себя.

Для исследования вопроса о сжимаемости оператора (3.33) введем в рассмотрение уравнение в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$, имеющее вид

$$\dot{h} = -\mu h + A_\varphi(t, \varepsilon)h(t - 1) + B_\varphi(t, \varepsilon)h(t - \Delta), \quad (3.53)$$

где коэффициенты A_φ, B_φ задаются аналогичными (3.5) равенствами

$$A_\varphi(t, \varepsilon) = -\frac{a+1}{\varepsilon} f'\left(\frac{x_\varphi(t-1, \varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad B_\varphi(t, \varepsilon) = -\frac{b}{\varepsilon} g'\left(\frac{x_\varphi(t-\Delta, \varepsilon)}{\varepsilon}\right). \quad (3.54)$$

Установим необходимые в дальнейшем свойства коэффициентов (3.54). Справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом леммы 2.2.

ЛЕММА 3.2. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются оценки вида

$$\begin{aligned} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1-\sigma_0} |A_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq M_1 \varepsilon, & \max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta-\sigma_0} |B_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq M_2 \varepsilon, \\ \int_{\Sigma_1} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt &\leq M_3 \sqrt{\varepsilon}, & \int_{\Sigma_2} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt &\leq M_4 \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (1 + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, 1 + \tau_j + \sqrt{\varepsilon}), \\ \Sigma_2 &= [-\sigma_0, T_\varphi - \sigma_0] \setminus \bigcup_{j=1}^{2n+2} (\Delta + \tau_j - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_j + \sqrt{\varepsilon}), \end{aligned}$$

а постоянные $M_k > 0$, $k = 1, \dots, 4$, не зависят от ε , φ . Кроме этого, имеют место равномерные по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt &= -a - 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{1+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} A_\varphi(t, \varepsilon) dt &= -1 - \frac{1}{a} + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} B_\varphi(t, \varepsilon) dt &= -b + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} B_\varphi(t, \varepsilon) dt &= -\frac{b}{a} + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.56)$$

где $k = 1, \dots, n+1$.

Для обоснования (3.55) достаточно заметить, что в силу свойств (2.76) функции $f(u)$, аналогичных свойств $g(u)$ и полученных выше асимптотических представлений для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |A_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq \frac{M}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 + (t - 1 - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2} \\ &\quad + \frac{1}{1 + (t - 1 - t_0 - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2}, \quad t \in \Sigma_1, \\ |B_\varphi(t, \varepsilon)| &\leq \frac{M}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1 + (t - \Delta - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2} \\ &\quad + \frac{1}{1 + (t - \Delta - t_0 - (k-1)T_0)^2/\varepsilon^2}, \quad t \in \Sigma_2, \end{aligned}$$

где $M = \text{const} > 0$. Асимптотические формулы (3.56) устанавливаются по той же схеме, что и аналогичные им соотношения (2.74), (2.75).

Вернемся к уравнению (3.53) и обозначим через $h(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, его решение с произвольным начальным условием $h_0(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$,

$h_0(-\sigma_0) = 0$. Объединяя свойства (3.55), (3.56) коэффициентов (3.54) с асимптотическими представлениями

$$\begin{aligned} \int_{1+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= (a+1) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{1+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} |A_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= \left(1 + \frac{1}{a}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta+\tau_{2k-1}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k-1}+\sqrt{\varepsilon}} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= b \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \int_{\Delta+\tau_{2k}-\sqrt{\varepsilon}}^{\Delta+\tau_{2k}+\sqrt{\varepsilon}} |B_\varphi(t, \varepsilon)| dt &= \frac{b}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(\tau)| d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

и интегрируя уравнение (3.53) методом шагов, получаем аналогичное (2.78) неравенство

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |h(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon \max_{-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |h_0(t)| \quad (3.57)$$

с не зависящей от ε , φ , h_0 постоянной $M > 0$. И наконец, учитывая оценку (3.57) в аналогичной (2.70) явной формуле для $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, приходим к выводу о сжимаемости оператора (3.33).

Из проведенных построений и принципа сжимающих отображений следует, что при условиях (3.30), (3.34), (3.52), налагаемых на параметры σ_0 , q_1 , q_2 , оператор Π_ε имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ единственную неподвижную точку $\varphi = \varphi_n^*(t, \varepsilon)$. Полагая, далее, что $x_n^*(t, \varepsilon) = x_\varphi(t, \varepsilon)|_{\varphi=\varphi_n^*}$, $T_n^*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_n^*}$, получаем требуемое периодическое решение уравнения (3.3), обладающее свойствами (3.32). Теорема 3.1 доказана.

3.4. Анализ вспомогательного линейного уравнения. В данном пункте исследуем вопрос об асимптотическом поведении мультипликаторов аналогичного (3.7) линейного уравнения

$$\dot{h} = -\mu h + A_n^*(t, \varepsilon)h(t-1) + \varkappa B_n^*(t, \varepsilon)h(t-\Delta), \quad (3.58)$$

где $A_n^*(t, \varepsilon)$, $B_n^*(t, \varepsilon)$ – коэффициенты (3.5), вычисленные на найденном выше периодическом решении $x_n^*(t, \varepsilon)$ уравнения (3.3), а $\varkappa$ – произвольный комплексный параметр.

Рассмотрим решение $h(t, \varepsilon)$ уравнения (3.58) с произвольной начальной функцией $h_0(t)$ из пространства $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$. Далее, обозначим через $W(\varepsilon)$ оператор монодромии уравнения (3.58), действующий в пространстве $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ по правилу

$$W(\varepsilon)h_0 = h(t + T_n^*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (3.59)$$

где, напомним, $T_n^*(\varepsilon)$ – период цикла $x_n^*(t, \varepsilon)$.

Введем в рассмотрение собственные значения $\nu_k(\varkappa, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots$, оператора (3.59), занумерованные в порядке убывания модулей. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.3. Для любого $r > 0$ найдутся такие $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r) > 0$, $M = M(r) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\varkappa \in B(r)$, где $B(r) = \{\varkappa \in \mathbb{C}: |\varkappa| \leq r\}$, выполняется неравенство

$$\sup_{k \geq 2} |\nu_k(\varkappa, \varepsilon)| \leq M\varepsilon. \quad (3.60)$$

Мультипликатор $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ является простым и допускает равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое представление

$$\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = 1 + \beta(\varkappa - 1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.61)$$

где

$$\beta = \frac{\beta_0}{\exp(-\mu(\Delta - T_0)) + \beta_0}, \quad \beta_0 = b \left(1 + \frac{1}{a}\right) (\exp \mu - 1) \frac{1 - \exp(-\mu(n+1)T_0)}{1 - \exp(-\mu T_0)}. \quad (3.62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно положительное r и будем считать, что параметр $\varkappa$ в (3.58) принадлежит множеству $B(r)$. Далее, введем в рассмотрение конечномерный оператор

$$\widetilde{W}(\varepsilon)h_0 = h_0(-\sigma_0)\widetilde{h}(t + T_n^*(\varepsilon), \varepsilon), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (3.63)$$

где $\widetilde{h}(t, \varepsilon)$ – решение уравнения (3.58) на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0$ с начальной функцией $\widetilde{h} \equiv 1$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Исследуем вопрос о связи между операторами (3.59) и (3.63). С этой целью рассмотрим функцию

$$h(t, \varepsilon) - h_0(-\sigma_0)\widetilde{h}(t, \varepsilon) \quad (3.64)$$

и заметим, что при $t \in [-\sigma_0, T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0]$ она также является решением уравнения (3.58), а при $t = -\sigma_0$ обращается в нуль. Тем самым, мы вправе применить к (3.64) оценку вида (3.57), которая для уравнения (3.58), естественно, сохраняется. Из упомянутой оценки следует, что

$$\|W(\varepsilon) - \widetilde{W}(\varepsilon)\|_{C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]} \leq M\varepsilon, \quad (3.65)$$

где универсальная константа $M > 0$ зависит лишь от выбора r .

На следующем этапе доказательства изучим спектральные свойства оператора (3.63). Нетрудно увидеть, что его спектр состоит из двух точек: простого собственного значения $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, где $\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = \widetilde{h}(T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0, \varepsilon)$, и собственного значения $\nu = 0$ бесконечной кратности. Для собственного значения $\nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, как будет показано ниже, имеет место равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое равенство

$$\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = 1 + \beta(\varkappa - 1) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.66)$$

где постоянная β определена формулами (3.62).

Для обоснования соотношения (3.66) необходимо знать асимптотическое поведение решения $\widetilde{h}(t, \varepsilon)$. В связи с этим дополним уравнение (3.58) начальным

условием $h \equiv 1$, $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, и проинтегрируем его на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0$ методом шагов, учитывая δ -образное поведение коэффициентов $A_n^*(t, \varepsilon)$, $B_n^*(t, \varepsilon)$ (см. (3.55), (3.56)). В результате убеждаемся в том, что, во-первых,

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_n^*(\varepsilon) - \sigma_0} |\tilde{h}(t, \varepsilon)| \leq M, \quad M = \text{const} > 0, \quad (3.67)$$

во-вторых, равномерно по $t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\varkappa \in B(r)$

$$\tilde{h}(t, \varepsilon) = h(t) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.68)$$

где Σ_1 , Σ_2 – множества из (3.55), а через $h(t)$, $t \geq -\sigma_0$, обозначено решение импульсной задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\mu h, & h|_{t=-\sigma_0} &= 1, & (3.69) \\ h(1 + kT_0 + 0) &= h(1 + kT_0 - 0) - (1 + a)h(kT_0), \\ h(1 + t_0 + kT_0 + 0) &= h(1 + t_0 + kT_0 - 0) - \left(1 + \frac{1}{a}\right)h(t_0 + kT_0), \\ h(\Delta + kT_0 + 0) &= h(\Delta + kT_0 - 0) - \varkappa b h(kT_0), & (3.70) \\ h(\Delta + t_0 + kT_0 + 0) &= h(\Delta + t_0 + kT_0 - 0) - \varkappa \frac{b}{a} h(t_0 + kT_0), \\ & k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Свойство (3.66), очевидно, следует из (3.68) и равенства $h(T_n^0 - \sigma_0) = 1 + \beta(\varkappa - 1)$, проверяемого посредством интегрирования системы (3.69), (3.70) (соответствующие вполне понятные выкладки не приводим).

Вернемся к рассмотрению оператора $W(\varepsilon)$. Объединяя оценку (3.65) с асимптотическими формулами (3.67), (3.68), приходим к выводу, что $W(\varepsilon)$ имеет простое собственное значение $\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = \nu_*(\varkappa, \varepsilon) + O(\varepsilon)$, для которого в силу (3.66) справедливо асимптотическое представление (3.61). Остальные собственные значения $\nu_k(\varkappa, \varepsilon)$, $k \geq 2$, оператора $W(\varepsilon)$ допускают оценку (3.60) с некоторой универсальной (зависящей только от r) постоянной $M > 0$. Лемма доказана.

В связи с равенством (3.61) и предстоящим в дальнейшем анализом уравнений (3.9) оказывается полезной следующая

ЛЕММА 3.4. *При любом $\beta \in (0, 1)$ все корни $\varkappa \in \mathbb{C}$ уравнения*

$$1 + \beta(\varkappa - 1) = \varkappa^m, \quad (3.71)$$

за исключением простого единичного, лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| < 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $0 < \beta \ll 1$. Тогда интересующие нас корни $\varkappa = \varkappa_k(\beta)$, $k = 1, \dots, m-1$, уравнения (3.71) при $\beta = 0$ приобретают вид $\exp(2\pi k i / m)$ и, как нетрудно убедиться, удовлетворяют неравенствам

$$\left. \frac{d}{d\beta} |\varkappa_k(\beta)|^2 \right|_{\beta=0} = -\frac{2}{m} \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{m} \right) < 0, \quad k = 1, \dots, m-1.$$

Таким образом, при малых $\beta > 0$ утверждение леммы верно.

Предположим теперь, что уравнение (3.71) при некотором $\beta \in (0, 1)$ имеет корень $\varkappa_0 = \exp(i\omega_0)$, $\omega_0 > 0$. Тогда с необходимостью имеем

$$\begin{aligned}\beta^2 |\varkappa_0|^2 &= \beta^2 = |\varkappa_0^m - 1 + \beta|^2 = (\cos(m\omega_0) - 1 + \beta)^2 + \sin^2(m\omega_0) \\ &= \beta^2 + 2(1 - \beta)(1 - \cos(m\omega_0)),\end{aligned}$$

а значит, $\cos(m\omega_0) = 1$ и $\varkappa_0^m = 1$. Отсюда и из (3.71), в свою очередь, заключаем, что $\varkappa_0 = 1$. Лемма доказана.

3.5. Итоговые результаты. В данном пункте применим разработанные в пп. 3.2–3.4 вспомогательные конструкции непосредственно к исходной системе (3.1). Напомним, что проблема существования ее самосимметричных циклов (3.2) сводится к отысканию периодических решений вспомогательного уравнения (3.3), имеющих период $m\Delta$. В связи с этим в дальнейшем периодическое решение уравнения (3.3), доставляемое теоремой 3.1, и его период будем обозначать через $x_n^*(t, \varepsilon, \Delta)$ и $T_n^*(\varepsilon, \Delta)$ соответственно, подчеркивая явно зависимость этих функций от Δ . Аналогичным образом, через $T_n^0(\Delta)$ обозначим функцию от Δ , задающуюся правой частью равенства (3.29). Отметим, что все полученные в пп. 3.3, 3.4 асимптотические формулы справедливы равномерно по $\Delta \in K$, где K – произвольный компакт из интервала $(1 + t_0 + nT_0, (n + 1)T_0)$.

Изучим сначала вопрос о существовании $(m\Delta)$ -периодического решения ре-лейного уравнения (3.16) при условиях (3.17). С этой целью обратимся к уравнению

$$T_n^0(\Delta) = m\Delta \quad (3.72)$$

для отыскания $\Delta \in (1 + t_0 + nT_0, (n + 1)T_0)$. Учитывая, далее, в (3.72) явные формулы (2.7), (2.10), (2.16), (3.21)–(3.23), (3.29), после некоторых преобразований приходим к выводу, что это уравнение эквивалентно уравнению для $z = \exp(-\mu\Delta)$, имеющему вид

$$P(z) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{n,1} z^m + \alpha_{n,2} z^{m-1} = 1, \quad (3.73)$$

где

$$\alpha_{n,1} = \exp(\mu(n + 1)T_0), \quad \alpha_{n,2} = b \left(1 + \frac{1}{a} \right) (\exp \mu - 1) \frac{\exp(\mu(n + 1)T_0) - 1}{\exp(\mu T_0) - 1}. \quad (3.74)$$

Анализ уравнения (3.73) не вызывает затруднений. Действительно, из очевидных свойств $P(0) = 0$, $P(1) > 1$, $P'(z) > 0$ для любого $z \in [0, 1]$ следует, что оно имеет единственное решение $z = \hat{z}_n \in (0, 1)$. Однако для того, чтобы это решение принадлежало требуемому интервалу

$$(z_1, z_2), \quad z_1 = \exp(-\mu(n + 1)T_0), \quad z_2 = \exp(-\mu(nT_0 + 1 + t_0)),$$

необходимо и достаточно выполнение неравенств $P(z_1) < 1$, $P(z_2) > 1$, которые, в свою очередь, эквивалентны условиям вида $b_{n,1} < b < b_{n,2}$ для параметра b .

Граничные значения $b_{n,1}$, $b_{n,2}$ этого параметра однозначно определяются из соответствующих равенств $P(z_2) = 1$, $P(z_1) = 1$ и задаются формулами

$$b_{n,1} = \frac{[\exp(\mu(m-1)(nT_0 + 1 + t_0)) - \exp(\mu(T_0 - 1 - t_0))](\exp(\mu T_0) - 1)}{(1 + 1/a)(\exp \mu - 1)(\exp(\mu(n+1)T_0) - 1)}, \quad (3.75)$$

$$b_{n,2} = \frac{(\exp(\mu(m-1)(n+1)T_0) - 1)(\exp(\mu T_0) - 1)}{(1 + 1/a)(\exp \mu - 1)(\exp(\mu(n+1)T_0) - 1)}. \quad (3.76)$$

Итак, мы видим, что при

$$b \in \mathcal{U}_n, \quad \mathcal{U}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in \mathbb{R}: \max((1+a)\exp \mu, b_{n,1}) < b < b_{n,2}\}, \quad (3.77)$$

и при $\Delta = \hat{\Delta}_n$, где $\hat{\Delta}_n = (1/\mu) \ln(1/\hat{z}_n)$, периодическое решение (3.31) уравнения (3.16) имеет нужный период $m\hat{\Delta}_n$. Обратимся теперь к периодическому решению $x_n^*(t, \varepsilon, \Delta)$ уравнения (3.3) и рассмотрим соответствующее ему уравнение

$$T_n^*(\varepsilon, \Delta) = m\Delta. \quad (3.78)$$

Напомним, далее, что в силу (3.51) для $T_n^*(\varepsilon, \Delta)$ имеет место асимптотическое представление

$$T_n^*(\varepsilon, \Delta) = T_n^0(\Delta) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

которое, как уже известно, выполняется равномерно по Δ из любого компакта $K \subset (1 + t_0 + nT_0, (n+1)T_0)$. Отсюда и из простоты корня $\Delta = \hat{\Delta}_n$ уравнения (3.72) очевидным образом следует, что уравнение (3.78) допускает хотя бы один корень $\Delta = \hat{\Delta}_n(\varepsilon)$ такой, что

$$\hat{\Delta}_n(\varepsilon) = \hat{\Delta}_n + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.79)$$

В итоге приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть параметры $a, b > 0$, $\mu > 0$ в системе (3.1) фиксированы и при некотором целом $n \geq 0$ удовлетворяют условию (3.77). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ эта система имеет самосимметричный цикл

$$\hat{C}_n: \quad x_j = \hat{x}_n(t + (j-1)\hat{\Delta}_n(\varepsilon), \varepsilon), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.80)$$

где $\hat{x}_n(t, \varepsilon) = x_n^*(t, \varepsilon, \Delta)|_{\Delta = \hat{\Delta}_n(\varepsilon)}$, а $\hat{\Delta}_n(\varepsilon)$ – корень (3.79) уравнения (3.78).

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости цикла (3.80). Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.3. В условиях теоремы 3.2 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ цикл (3.80) экспоненциально орбитально устойчив.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что все мультипликаторы ν цикла (3.80) задаются равенствами (3.8), (3.9), где $\nu_k(\kappa, \varepsilon)$, $k \geq 1$, – мультипликаторы вспомогательного линейного уравнения (3.58) при $\Delta = \widehat{\Delta}_n(\varepsilon)$. В связи с этим обратим внимание на то, что для оператора монодромии (3.6) системы (3.4), отвечающей циклу (3.80), имеет место оценка

$$\|V(\varepsilon)\|_{C([-1,0];\mathbb{R}^m) \rightarrow C([-1,0];\mathbb{R}^m)} \leq M, \quad M = \text{const} > 0, \quad (3.81)$$

справедливость которой вытекает из свойств (3.55), (3.56) коэффициентов (3.5). Таким образом, при рассмотрении уравнений (3.9) в силу очевидного неравенства $|\nu| \leq \|V(\varepsilon)\|$ и соотношения (3.8) мы вправе ограничиться следующими значениями параметра $\kappa \in \mathbb{C}$: $|\kappa| \leq r$, где $r = (M+1)^{1/m}$, M – константа из (3.81).

Итак, при условии $\kappa \in B(r)$ подставим $\Delta = \widehat{\Delta}_n(\varepsilon)$ в уравнение (3.58) и воспользуемся леммой 3.3. В результате убеждаемся в том, что согласно неравенству (3.60) все возможные решения $\kappa \in \mathbb{C}$ уравнений (3.9) при $k \geq 2$ лежат в круге радиуса порядка $\varepsilon^{1/m}$, а отвечающие им мультипликаторы $\nu = \kappa^m$ цикла (3.80) допускают оценку вида

$$|\nu| \leq M\varepsilon \quad (3.82)$$

с некоторой универсальной постоянной $M > 0$. Таким образом, решение проблемы устойчивости цикла (3.80) сводится к анализу расположения корней уравнения (3.9) при $k = 1$.

Объединяя асимптотические представления (3.61), (3.79), приходим к выводу, что интересующее нас уравнение записывается в виде

$$1 + \widehat{\beta}_n(\kappa - 1) = \kappa^m + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.83)$$

где $\widehat{\beta}_n$ – коэффициент из (3.61) при $\Delta = \widehat{\Delta}_n$. Перейдем, далее, от (3.83) к соответствующему предельному уравнению

$$1 + \widehat{\beta}_n(\kappa - 1) = \kappa^m. \quad (3.84)$$

Заметим, что оно имеет простой корень $\kappa = 1$, а остальные его корни (обозначим их через κ_j , $j = 1, \dots, m-1$) в силу вытекающего из (3.62) неравенства $\widehat{\beta}_n < 1$ и леммы 3.4 лежат в круге $\{\kappa \in \mathbb{C}: |\kappa| < 1\}$.

Возвращаясь к уравнению (3.83), отметим, что оно также допускает решение $\kappa = 1$, поскольку при $\kappa = 1$, $\Delta = \widehat{\Delta}_n(\varepsilon)$ уравнение (3.58) представляет собой линеаризацию на цикле $x = \widehat{x}_n(t, \varepsilon)$. Добавим еще, что в силу аналитичности функции $\nu_1(\kappa, \varepsilon)$ по κ и аналогичного (3.61) равенства

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial \kappa}(\kappa, \varepsilon) = \beta + O(\sqrt{\varepsilon})$$

количество корней уравнения (3.83) в круге $\kappa \in B(r)$ равно m , причем корень $\kappa = 1$ является простым. Остальные $m-1$ корней этого уравнения стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к корням κ_j : $|\kappa_j| < 1$, $j = 1, \dots, m-1$, уравнения (3.84).

Подведем итог. Из проведенного анализа следует, что, за исключением простого единичного, все мультипликаторы $\nu \in \mathbb{C}$ цикла (3.80) по модулю меньше единицы. Действительно, имеются $m-1$ так называемых критических мультипликаторов $\nu_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, m-1$, стремящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к величинам $\nu = \varkappa_j^m$, где $\varkappa_j$, $j = 1, \dots, m-1$, — упоминавшиеся выше корни уравнения (3.84). Остальные мультипликаторы ν рассматриваемого цикла лежат в круге (3.82). Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теорем 3.2, 3.3 параметр μ считался фиксированным и строго положительным. Рассмотрим теперь случай, когда μ — малый параметр, не зависящий от ε . Привлекая формулы (2.10), (2.13), (3.29), приходим к выводу, что

$$t_0|_{\mu=0} = 1 + \frac{1}{a}, \quad T_0|_{\mu=0} = 2 + a + \frac{1}{a}, \quad T_n^0|_{\mu=0} = (n+1) \left(1 + \frac{1}{a}\right) (a+b+1). \quad (3.85)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что для корня $\Delta = \widehat{\Delta}_n$ уравнения (3.72) имеет место равенство

$$\widehat{\Delta}_n|_{\mu=0} = \frac{n+1}{m} \left(1 + \frac{1}{a}\right) (a+b+1). \quad (3.86)$$

Объединяя теперь соотношения (3.75), (3.76), (3.85), (3.86), нетрудно увидеть, что при $\mu = 0$ условие (3.77) переходит в неравенства

$$\max \left(a+1, (m-1)(a+1) - \frac{ma^2}{(n+1)(a+1)} \right) < b < (m-1)(a+1). \quad (3.87)$$

Следует также добавить, что все асимптотические формулы из пп. 3.3, 3.4 являются равномерно пригодными по μ .

Перечисленные факты свидетельствуют о том, что при условиях (3.87) и при $0 \leq \mu \ll 1$ уравнение (3.78) по-прежнему разрешимо, а равенство (3.79) выполняется равномерно по μ . Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть параметры $a, b > 0$ фиксированы и при некотором натуральном $n = n_0$ удовлетворяют условиям (3.87). Тогда найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$ система (3.1) допускает самосимметричные периодические движения (3.80) с номерами $n = 0, 1, \dots, n_0$.

Вопрос об устойчивости любого цикла (3.80) при независимых малых параметрах ε, μ остается открытым. Связано это с тем, что при $\mu = 0$ выполняется равенство $\widehat{\beta}_n = 0$ (см. (3.62)), а значит, корни $\varkappa_j \neq 1$, $j = 1, \dots, m-1$, уравнения (3.84) таковы, что $\varkappa_j^m = 1$, $j = 1, \dots, m-1$. Следовательно, критические мультипликаторы $\nu_j = \nu_j(\varepsilon, \mu)$, $j = 1, \dots, m-1$, которые появляются в доказательстве теоремы 3.3, при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ стремятся к единице. Остальные же мультипликаторы цикла (3.80) (за исключением простого единичного) лежат в круге вида (3.82), где постоянная $M > 0$ не зависит от ε, μ .

Тем не менее, результат об устойчивости при малых μ все же удастся сформулировать при условии, что параметр μ в определенном смысле отделен от

нуля. А именно, опираясь на построения, изложенные при обосновании теоремы 3.3, нетрудно увидеть, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.5. *По любым достаточно малым $\mu_2 > \mu_1 > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_1, \mu_2) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ циклы $\hat{C}_n$, $n = 0, 1, \dots, n_0$, о которых идет речь в теореме 3.4, экспоненциально орбитально устойчивы.*

В дополнение к установленным теоремам отметим, что множества $\mathcal{U}_n$ из формулы (3.77) заведомо не пусты при всех $n \geq 0$. Действительно, несложная проверка показывает, что $(1+a) \exp \mu < b_{n,2}$ при любых $n \geq 0$, $m \geq 2$, а значит, длина каждого интервала

$$\max((a+1) \exp \mu, b_{n,1}) < b < b_{n,2}, \quad n \geq 0, \quad (3.88)$$

строго положительна. Следует также добавить, что при $\mu \rightarrow 0$ в случае $m \geq 3$ интервалы (3.88) переходят в интервалы (3.87), а в случае $m = 2$ длины этих интервалов стремятся к нулю. Таким образом, при $m = 2$ теоремы 3.2, 3.3 сохраняются, а теоремы 3.4, 3.5 не имеют места. Именно по этой причине мы с самого начала ограничились рассмотрением кольцевых сетей Хопфилда (3.1) из трех и более уравнений.

§ 4. Заключение

Предложенные нами подходы к асимптотическому анализу релаксационных циклов обыгрывают факт симметрии системы (3.1) и вследствие этого не переносятся на произвольные сети Хопфилда. Однако существует альтернативный подход к отысканию аттракторов системы (1.3), который можно назвать методом предельных отображений. Суть этого метода заключается в следующем.

Предположим, что коэффициенты a_{ij} , I_j из (1.3) пропорциональны некоторому параметру $\lambda \gg 1$, а функции $f_i(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$ обладают при $u \rightarrow \pm\infty$ свойствами (1.5). Тогда после замен $u_j = \lambda x_j$, $j = 1, \dots, m$, интересующая нас система (1.3) примет вид

$$\dot{x}_j = -\mu_j x_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i \left(\frac{x_i(t - s_{ij})}{\varepsilon} \right) + I_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, $\mu_j = \text{const} > 0$, a_{ij} , $I_j = \text{const} \in \mathbb{R}$, $s_{ij} = \text{const} \geq 0$. Исследование этой системы будем проводить при дополнительных условиях регулярности $s_{jj} > 0$, $j = 1, \dots, m$, которые в случае (3.1) заведомо выполняются.

Наряду с (4.1) введем в рассмотрение соответствующую релейную систему

$$\dot{x}_j = -\mu_j x_j + \sum_{i=1}^m a_{ij} F(x_i(t - s_{ij})) + I_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.2)$$

где $F(x)$ – функция из (2.2). Предположим, что среди величин I_j имеется хотя бы одна положительная (без ограничения общности будем считать, что $I_1 > 0$).

В этом случае множество начальных функций для системы (4.2) определим следующим образом. Фиксируем некоторое компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$, выберем достаточно малую постоянную $\sigma_0 > 0$ и положим $s_j = \max_{1 \leq k \leq m} s_{jk}$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим затем всевозможные функции $\varphi_j(t) \in C[-s_j - \sigma_0, -\sigma_0]$, $j = 1, \dots, m$, такие, что

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &< 0 \quad \forall t \in [-s_j - \sigma_0, -\sigma_0], \quad j = 1, \dots, m, \\ \omega &= (\varphi_2(-\sigma_0), \dots, \varphi_m(-\sigma_0)) \in \Omega, \\ \varphi_1(-\sigma_0) &= I_1 \theta(-\sigma_0), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\theta(t)$ – функция (2.5).

Обозначим через

$$x(t, \omega) = (x_1(t, \omega), \dots, x_m(t, \omega))$$

решение системы (4.2) с произвольными начальными условиями из класса (4.3). Обратим внимание, что в силу неравенств $\varphi_j(t) < 0$ на самом деле это решение не зависит от конкретных значений $\varphi_j(t)$ при $-s_j - \sigma_0 \leq t < -\sigma_0$, а определяется только заданием вектора ω из (4.3).

Сформулируем ряд дополнительных предположений относительно системы (4.2). В связи с этим фиксируем некоторое целое $n_0 \geq 0$ и будем считать, что при любом $\omega \in \Omega$ уравнение

$$x_1(t - \sigma_0, \omega) = I_1 \theta(-\sigma_0) \quad (4.4)$$

имеет на полуоси $t > 0$ не менее $2n_0 + 2$ простых корней, занумерованных в порядке возрастания, а через $T_0 = T_0(\omega)$ обозначим корень данного уравнения с номером $2n_0 + 2$. Кроме того, считаем выполненными неравенства

$$x_j(t + T_0(\omega), \omega) < 0 \quad \forall t \in [-s_j - \sigma_0, -\sigma_0], \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

и включение

$$\Phi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (x_2(t + T_0(\omega), \omega), \dots, x_m(t + T_0(\omega), \omega))|_{t=-\sigma_0} \in \text{int } \Omega, \quad (4.6)$$

где $\text{int } \Omega$ – совокупность внутренних точек множества Ω (предполагаем, естественно, что $\text{int } \Omega \neq \emptyset$).

Следующее ограничение связано с точками переключений релейной системы (4.2). Предположим, что найдется такое независящее от $\omega \in \Omega$ натуральное k_0 , что решение $x(t, \omega)$ на интервале $t \in (-\sigma_0, T_0(\omega) - \sigma_0)$ допускает ровно k_0 точек переключения $t_1 < t_2 < \dots < t_{k_0}$, которые являются простыми и нормальными. Для пояснения этих терминов заметим, что в любой точке переключения $t = t_k$ должно выполняться хотя бы одно равенство $x_i(t - s_{ij}, \omega) = 0$. Далее, *простой* назовем точку $t = t_k$, в которой справедливо ровно одно из упомянутых соотношений, а именно $x_{i_k}(t_k - s_{i_k j_k}, \omega) = 0$. Отметим, что свойство нормальности переключения означает, что $\dot{x}_{i_k}(t_k - s_{i_k j_k}, \omega) \neq 0$.

Описанные условия позволяют корректно определить оператор последования Пуанкаре

$$\begin{aligned} \Pi_0(\varphi) = (\bar{\varphi}_1(t), \dots, \bar{\varphi}_m(t)): \quad & \bar{\varphi}_j(t) = x_j(t + T_0(\omega), \omega), \quad -s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \\ & j = 1, \dots, m, \quad \omega = (\varphi_2(-\sigma_0), \dots, \varphi_m(-\sigma_0)), \end{aligned} \quad (4.7)$$

по траекториям релейной системы (4.2). Действительно, выполнение соотношений (4.5), (4.6) свидетельствуют о том, что оператор (4.7) переводит класс начальных условий (4.3) в себя, а из ограничений, наложенных на точки переключения решения $x(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, вытекает непрерывная дифференцируемость этого оператора по Фреше.

Далее конкретизируем область определения оператора (4.7). С этой целью введем в рассмотрение банахово пространство

$$E = C[-s_1 - \sigma_0, -\sigma_0] \times \dots \times C[-s_m - \sigma_0, -\sigma_0]$$

вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ с нормой

$$\|\varphi\|_E = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{-s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\varphi_j(t)|.$$

Фиксируем затем постоянные $q_{1,j}$, $q_{2,j} > 0$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие неравенствам

$$q_{1,j} > - \min_{\substack{-s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 \\ \omega \in \Omega}} x_j(t + T_0(\omega), \omega), \quad q_{2,j} < - \max_{\substack{-s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 \\ \omega \in \Omega}} x_j(t + T_0(\omega), \omega), \quad (4.8)$$

и обозначим через $S \subset E$ подмножество начальных функций (4.3) таких, что

$$-q_{1,j} \leq \varphi_j(t) \leq -q_{2,j}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.9)$$

Из соотношений (4.7)–(4.9), очевидно, следует, что справедливо включение $\Pi_0(S) \subset S$.

Для формулировки основного утверждения о связи между решениями систем (4.1) и (4.2) нам понадобится оператор последования $\Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\varphi \in S$, по траекториям системы (4.1). Упомянутый оператор определяется посредством аналогичных (4.7) равенств

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon(\varphi) = (\bar{\varphi}_1(t, \varepsilon), \dots, \bar{\varphi}_m(t, \varepsilon)): \\ \bar{\varphi}_j(t, \varepsilon) = x_{j,\varphi}(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -s_j - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \\ j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = (x_{1,\varphi}(t, \varepsilon), \dots, x_{m,\varphi}(t, \varepsilon)), \quad t \geq -\sigma_0,$$

– решение системы (4.1) с произвольным начальным условием $\varphi \in S$, а через T_φ обозначен $(2n_0 + 2)$ -й по счету положительный корень аналогичного (4.4) уравнения, в котором компонента $x_1(t - \sigma_0, \omega)$ заменена на $x_{1,\varphi}(t - \sigma_0, \varepsilon)$. Из общих результатов работы [14] о C^1 -близости решений релейных и релаксационных систем с запаздыванием вытекает следующая

ТЕОРЕМА 4.1 (о C^1 -сходимости). *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор (4.10) определен на множестве S , преобразует его в себя и удовлетворяет предельным соотношениям*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)\|_E = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi)\|_{E_0 \rightarrow E_0} = 0. \quad (4.11)$$

Здесь $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ – соответствующие производные Фреше, а E_0 – подпространство пространства E , выделяемое равенством $\varphi_1(-\sigma_0) = 0$.

Отдельно остановимся на одном важном следствии из C^1 -сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (4.1). В связи с этим обратим внимание, что оператор (4.7) является надстройкой над соответствующим $(m-1)$ -мерным отображением

$$\omega \rightarrow \Phi(\omega), \quad (4.12)$$

где $\Phi(\omega)$ – вектор-функция (4.6). Действительно, любой неподвижной точке $\omega = \omega_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка

$$\varphi_*(t) = (\varphi_{*,1}(t), \dots, \varphi_{*,m}(t)), \quad \varphi_{*,j}(t) = x_j(t + T_0(\omega_*), \omega_*), \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.13)$$

оператора Π_0 , а в системе (4.2) – цикл

$$\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_m(t)), \quad \hat{x}(t + \hat{T}) \equiv \hat{x}(t), \quad (4.14)$$

где $\hat{T} = T_0(\omega_*)$, $\hat{x}_j(t) = x_j(t, \omega_*)$, $j = 1, \dots, m$, $0 \leq t \leq \hat{T}$.

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = (\varphi_{1,*}(t), \dots, \varphi_{m,*}(t)) \in S$ – неподвижная точка оператора Π_0 , то с необходимостью вектор $\omega_* = (\varphi_{2,*}(-\sigma_0), \dots, \varphi_{m,*}(-\sigma_0))$ таков, что $\Phi(\omega_*) = \omega_*$. Кроме того, как нетрудно увидеть, спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из собственных значений матрицы $\Phi'(\omega_*)$ и нулевого собственного значения бесконечной кратности.

Итак, предположим, что отображение (4.12) имеет неподвижную точку $\omega = \omega_*$, причем спектральный радиус соответствующей матрицы Якоби $\Phi'(\omega_*)$ строго меньше единицы. Тогда из соотношений (4.11) и описанных выше спектральных свойств оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$, вычисленного на неподвижной точке (4.13), вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.2. *При сформулированных ограничениях неподвижной точке $\omega = \omega_*$ отображения (4.12) отвечает единственный экспоненциально орбитально устойчивый цикл $\hat{x}(t, \varepsilon) = (\hat{x}_1(t, \varepsilon), \dots, \hat{x}_m(t, \varepsilon))$, $\hat{x}_1(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv I_1 \theta(-\sigma_0)$, системы (4.1) периода $\hat{T}(\varepsilon)$. Этот цикл существует при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и удовлетворяет предельным равенствам*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{1 \leq j \leq m} \max_{0 \leq t \leq \hat{T}(\varepsilon)} |\hat{x}_j(t, \varepsilon) - \hat{x}_j(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{T}(\varepsilon) = \hat{T}, \quad (4.15)$$

где $\hat{x}_j(t)$, $\hat{T}$ – соответственно компоненты и период цикла (4.14).

Теоремы 4.1, 4.2 сводят интересующую нас проблему отыскания устойчивых периодических решений системы (4.1) к поиску устойчивых неподвижных точек предельного $(m-1)$ -мерного отображения (4.12). В принципе, интегрируя релейную систему (4.2) методом шагов, в ряде случаев мы можем выписать это отображение в явном виде и проанализировать. Однако в общей ситуации, когда m сколь угодно велико, а коэффициенты системы (4.2) не обладают никакой спецификой, сделать это весьма затруднительно.

В случае кольцевой симметричной системы (3.1) описанные выше трудности преодолеваются косвенным образом. А именно, не выписывая явно отображение (4.12), нам удалось с помощью специальных приемов найти его неподвижные точки и проанализировать их устойчивость. В результате при каждом целом $n \geq 0$ и при условиях (3.77) для параметров $a, b, \mu > 0$ был найден экспоненциально орбитально устойчивый цикл релейной системы

$$\dot{x}_j = -\mu x_j + 1 - (a+1)F(x_j(t-1)) - bF(x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, m, \quad x_0 = x_m, \quad (4.16)$$

задающийся равенствами

$$x_j = \hat{x}_n(t + (j-1)\hat{\Delta}_n), \quad j = 1, \dots, m, \quad \hat{x}_n(t + \hat{T}_n) \equiv \hat{x}_n(t). \quad (4.17)$$

Здесь $\hat{\Delta}_n$ – корень уравнения (3.72) из интервала $(1 + t_0 + nT_0, (n+1)T_0)$, а функция $\hat{x}_n(t)$ и период $\hat{T}_n$ получаются из (3.31) и (3.29) при $\Delta = \hat{\Delta}_n$. Заметим также, что, поскольку все точки переключения цикла (4.17) простые и нормальные, он подпадает под действие теоремы 4.2. Следовательно, отвечающий ему цикл релаксационной системы (3.1), для которого имеют место свойства (4.15), является единственным. Тем самым, теперь мы можем утверждать, что при каждом $n \geq 0$ корень (3.79) уравнения (3.78) определяется однозначно (ранее, напомним, был установлен только факт его существования).

Отметим еще одно обстоятельство. При отыскании циклов (4.17) мы рассматривали только случай, когда фазовый сдвиг $\hat{\Delta}_n$ принадлежит интервалу

$$1 + t_0 + nT_0 < \hat{\Delta}_n < (n+1)T_0, \quad (4.18)$$

однако развитая в §3 методика позволяет установить аналогичные теоремам 3.2–3.5 утверждения и для случая

$$t_0 + nT_0 < \hat{\Delta}_n < 1 + t_0 + nT_0. \quad (4.19)$$

Действительно, при $\Delta \in (t_0 + nT_0, 1 + t_0 + nT_0)$ и при $b > (1+a)\exp \mu$ вспомогательное релейное уравнение (3.16) допускает аналогичный (3.31) цикл $x_n^0(t)$ периода T_n^0 , где

$$\begin{aligned} x_n^0(t) &= x_0(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \Delta, \\ x_n^0(t) &= x_0(\Delta) \exp(-\mu(t-\Delta)) + y_0(t-\Delta) \\ &\quad - (a+1)\theta(t-\Delta) \quad \text{при} \quad \Delta \leq t \leq 1 + t_0 + nT_0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
x_n^0(t) &= y_0(t - \Delta) + [x_n^0(1 + t_0 + nT_0) - y_0(1 + t_0 + nT_0 - \Delta)] \\
&\quad \times \exp(-\mu(t - 1 - t_0 - nT_0)) \quad \text{при} \quad 1 + t_0 + nT_0 \leq t \leq 2\Delta, \\
x_n^0(t) &= \theta(t - T_n^0) \quad \text{при} \quad 2\Delta \leq t \leq T_n^0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

а T_n^0 задается равенством

$$T_n^0 = 2\Delta + \frac{1}{\mu} \ln(1 - \mu x_n^0(2\Delta)) \tag{4.22}$$

(график функции $x_n^0(t)$ при $a = 2$, $b = 8$, $\Delta = 21.6$, $\mu = 0.2$ показан на рис. 3). Кроме того, здесь справедливы аналоги теоремы 3.1 и леммы 3.3, причем, что не менее важно, формулы (3.61), (3.62) остаются без изменений. Сохраняются в данном случае и формулы (3.73), (3.74), (3.85), (3.86), поскольку функции $T_n^0(\Delta)$, определяющиеся правыми частями соотношений (3.29) и (4.22), на самом деле совпадают и имеют вид

$$T_n^0(\Delta) = 2\Delta + \frac{1}{\mu} \ln(\alpha_{n,1} \exp(-2\mu\Delta) + \alpha_{n,2} \exp(-\mu\Delta)),$$

где $\alpha_{n,1}$, $\alpha_{n,2}$ — коэффициенты (3.74).

Рис. 3

Перечисленные базовые факты по существу сводят случай (4.19) к уже разобранной ситуации (4.18). В частности, аналогом теорем 3.2, 3.3 здесь является следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть параметры $a, b, \mu > 0$ фиксированы и при некотором целом $n \geq 0$ удовлетворяют условию

$$b \in \mathcal{V}_n, \quad \mathcal{V}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in \mathbb{R}: \max((1+a) \exp \mu, b_{n,0}) < b < b_{n,1}\}, \tag{4.23}$$

где граничное значение $b_{n,1}$ задается формулой (3.75), а $b_{n,0}$ имеет вид

$$b_{n,0} = \frac{[\exp(\mu(m-1)(t_0 + nT_0)) - \exp(\mu(T_0 - t_0))](\exp(\mu T_0) - 1)}{(1 + 1/a)(\exp \mu - 1)(\exp(\mu(n+1)T_0) - 1)}. \tag{4.24}$$

Тогда, во-первых, релейная система (4.16) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение вида (4.17), (4.19), во-вторых, в исходной релаксационной системе (3.1) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ этому циклу отвечает экспоненциально орбитально устойчивое периодическое движение вида (3.80), удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq m\hat{\Delta}_n(\varepsilon)} |\hat{x}_n(t, \varepsilon) - \hat{x}_n(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\Delta}_n(\varepsilon) = \hat{\Delta}_n. \quad (4.25)$$

Необходимо добавить, что в теореме 4.3 и двух следующих теоремах речь идет о цикле (4.17), в котором, как и ранее, $\hat{\Delta}_n = (1/\mu) \ln(1/\hat{z}_n)$, где $\hat{z}_n$ – единственный корень уравнения (3.73) из интервала $(0, 1)$. Кроме того, функция $\hat{x}_n(t)$ определяется посредством равенств (4.20), (4.21) при $\Delta = \hat{\Delta}_n$.

Отдельно рассмотрим случай малых μ . Объединяя формулы (3.75), (3.85), (4.24), убеждаемся в том, что при $\mu = 0$ условие (4.23) переходит в неравенства

$$\max \left(a + 1, (m - 1)(a + 1) - \frac{ma}{n + 1} \right) < b < (m - 1)(a + 1) - \frac{ma^2}{(n + 1)(a + 1)}. \quad (4.26)$$

Тем самым, справедливы следующие факты.

ТЕОРЕМА 4.4. *Предположим, что параметры $a, b > 0$ при некотором целом $n \geq 0$ удовлетворяют неравенствам (4.26). Тогда найдется такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ релейная система (4.16) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл вида (4.17) с фазовым сдвигом $\hat{\Delta}_n$ из интервала (4.19).*

ТЕОРЕМА 4.5. *В условиях теоремы 4.4 по любым достаточно малым $0 < \mu_1 < \mu_2$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_1, \mu_2) > 0$, что при всех $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной релаксационной системе (3.1) циклу (4.17), (4.19) соответствует экспоненциально орбитально устойчивый цикл вида (3.80), для которого выполняются предельные равенства (4.25).*

Отметим, что фигурирующие в (3.77), (4.23) множества $\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n$ не пересекаются, а это значит, что при заданном n в системе (4.16) не могут одновременно существовать циклы вида (4.17) с фазовыми сдвигами (4.18) и (4.19). Действительно, эти циклы существуют в различных диапазонах изменения параметра b и переходят друг в друга при прохождении b через критическое значение $b = b_{n,1}$. Вопрос о существовании и устойчивости циклов (4.17) с фазовыми сдвигами

$$\hat{\Delta}_n \in (1 + nT_0, t_0 + nT_0) \cup (nT_0, 1 + nT_0)$$

подлежит отдельному исследованию, выходящему за рамки настоящей работы. Добавим только, что в отличие от случаев (4.18), (4.19) циклы с такими значениями $\hat{\Delta}_n$ обнаружить при численном анализе системы (4.16) не удалось.

В заключение рассмотрим приложение полученных нами результатов к проблеме объяснения механизма функционирования ассоциативной памяти. В связи с этим напомним, что согласно монографии [23] в простейшем случае ассоциативная память работает по схеме, представленной на рис. 4. А именно, имеется некоторая запоминающая среда, реализованная в виде нейронной системы

и хранящая в себе блоки информации R_n , $n = 0, 1, \dots, n_0$. Далее, для извлечения из системы конкретного результата R_n необходимо на ее вход подать соответствующий символичный ключ K_n и некоторую дополнительную информацию C_n , называемую контекстом.

Рис. 4

Предположим теперь, что запоминающая среда, о которой говорилось выше, описывается системой (4.16). Далее, будем считать, что при некотором натуральном n_0 параметры a , b в (4.16) удовлетворяют условиям (3.87). Тогда при всех достаточно малых $\mu > 0$ эта система допускает устойчивые циклы (4.17) с номерами $n = 0, 1, \dots, n_0$. И наконец, предположим, что с каждым из этих циклов связан соответствующий блок информации R_n .

Работа описанной математической модели ассоциативной памяти вполне понятна: для того чтобы получить требуемую информацию R_n , необходимо заставить систему (4.16) функционировать в периодическом режиме (4.17) с соответствующим номером n . Добиться желаемого результата удастся за счет введения ключа $K_n = n$ и дополнительного контекста C_n . В качестве C_n в данном случае уместно взять начальные условия цикла (4.17) при $\mu = 0$, которые, отметим, известны нам в явном виде.

Список литературы

1. J. J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **81**:10 (1984), 3088–3092.
2. С. Хайкин, *Нейронные сети: полный курс*, Издательский дом "Вильямс", М., 2006; пер. с англ.: S. Haykin, *Neural networks. A comprehensive foundation*, Macmillan College Publ., New York, 1999.
3. C. M. Marcus, R. M. Westervelt, "Stability of analog neural networks with delay", *Phys. Rev. A* (3), **39**:1 (1989), 347–359.
4. J. Bélair, "Stability in a model of a delayed neural network", *J. Dynam. Differential Equations*, **5**:4 (1993), 607–623.
5. J. Bélair, S. A. Campbell, P. van den Driessche, "Frustration, stability, and delay-induced oscillations in a neural network model", *SIAM J. Appl. Math.*, **56**:1 (1996), 245–255.
6. K. Gopalsamy, I. Leung, "Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition", *Phys. D*, **89**:3–4 (1996), 395–426.

7. X. Liao, Y. Liao, “Stability of Hopfield-type neural networks. II”, *Sci. China Ser. A*, **40**:8 (1997), 813–816.
8. H. Ye, A. N. Michel, K. Wang, “Qualitative analysis of Cohen–Grossberg neural networks with multiple delays”, *Phys. Rev. E* (3), **51**:3 (1995), 2611–2618.
9. S. A. Campbell, S. Ruan, J. Wei, “Qualitative analysis of a neural network model with multiple time delays”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **9**:8 (1999), 1585–1595.
10. P. van den Driessche, J. Wu, X. Zou, “Stabilization role of inhibitory self-connections in a delayed neural network”, *Phys. D*, **150**:1–2 (2001), 84–90.
11. Y. Li, “Hopf bifurcation analysis in a tabu learning neuron model with two delays”, *ISRN Appl. Math.*, 2011, ID 636732.
12. Y. Li, “Stability and bifurcation analysis of a three-dimensional recurrent neural network with time delay”, *J. Appl. Math.*, 2012, ID 357382.
13. А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, “Релаксационные колебания в математических моделях экологии”, Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993, 3–124; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, Yu. S. Kolesov, “Relaxation oscillations in mathematical models of ecology”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **199** (1995), 1–126.
14. А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 126–153; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “A relay with delay and its C^1 -approximation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **216** (1997), 119–146.
15. А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Дискретные автоволны в системах с запаздыванием из экологии”, *Докл. РАН*, **434**:6 (2010), 735–738; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Discrete autowaves in delay systems in ecology”, *Dokl. Math.*, **82**:2 (2010), 794–797.
16. А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Об одной модификации уравнения Хатчинсона”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:12 (2010), 2099–2112; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “A modification of Hutchinson’s equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:12 (2010), 1990–2002.
17. А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 51–82; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “The theory of relaxation oscillations for Hutchinson’s equation”, *Sb. Math.*, **202**:6 (2011), 829–858.
18. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференц. уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems. I”, *Differ. Equ.*, **47**:7 (2011), 927–941.
19. Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975; англ. пер.: E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **13**, Plenum Press, New York, 1980.
20. Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995; англ. пер.: E. F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, *Asymptotic methods in singularly perturbed systems*, Monogr. Contemp. Math., Consultants Bureau, New York, 1994.
21. А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.

22. Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, М., 2005.
23. Т. Кохонен, *Ассоциативная память*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: Т. Kohonen, *Associative memory*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.

С. Д. Глызин (S. D. GLYZIN)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию

06.02.2012

20.04.2012

А. Ю. Колесов (A. YU. KOLESOV)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Н. Х. Розов (N. KH. ROZOV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: rozov@rozov.mccme.ru