Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Купавский, Явные и вероятностные конструкции дистанционных графов с маленьким кликовым и большим хроматическим числами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 65–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7962>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:27:32

УДК 519.174.7+519.176+519.175.4

А. Б. Купавский

Явные и вероятностные конструкции дистанционных графов с маленьким кликовым и большим хроматическим числами

Изучаются дистанционные графы с экспоненциально большим хроматическим числом, не содержащие k -клик, т. е. полных подграфов размера k . Явные конструкции графов строятся на основе векторов целочисленной решетки. Для большого класса графов получены точные оценки параметров, при выполнении которых эти графы не содержат k -клик. За счет этого улучшены оценки снизу максимума хроматических чисел графов описанного класса. Приведен новый вероятностный подход для построения дистанционных графов без k -клик, который дает лучшие оценки максимума хроматических чисел при больших k .

Библиография: 23 наименования.

Ключевые слова: дистанционный граф, хроматическое число, кликовое число, задача Нельсона.

DOI: 10.4213/im7962

§ 1. Введение

Предметом изучения в настоящей статье будут хроматические числа дистанционных графов (см. [1]) специального вида. Граф $G = (V, E)$ называется *дистанционным*, если V – подмножество в $\mathbb{R}^n$, а

$$E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x, y \in V, |x - y| = a \}$$

для некоторого фиксированного a .

Такие графы естественно возникают при рассмотрении задачи о хроматическом числе $\chi(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем некоторое положительное действительное число a . *Хроматическим числом* пространства $\mathbb{R}^n$ называется минимальное число цветов, которое потребуется для такой раскраски точек пространства, чтобы не было точек одного цвета на расстоянии a друг от друга. На самом деле неважно, чему равно a (применим гомотетию к множествам цветов, которые дают раскраску), поэтому мы будем считать, что оно равно единице. Приведем формальное определение хроматического числа (см. [2]):

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min \{ m \in \mathbb{N} \mid \mathbb{R}^n = H_1 \cup \dots \cup H_m : \forall i, \forall x, y \in H_i \mid x - y| \neq 1 \}.$$

Задача о нахождении этой величины для плоскости была поставлена Э. Нельсоном в 1950 г. (см. [3]). Она оказалась очень трудной, и даже значение хроматического числа плоскости до сих пор не известно. Однако вокруг этой проблемы было получено множество результатов (см. обзоры [4], [5]). Приведем

некоторые оценки величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ при небольших значениях n :

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7, \quad 6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$$

(последняя оценка получена в [6], [7]); кроме того,

$n =$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi(\mathbb{R}^n) \geq$	7 [8]	9 [8]	11 [9]	15 [4]	16 [10]	21 [11]	23 [11]	25 [12]	27 [13]

Далее мы изучим асимптотическое поведение величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ при $n \rightarrow \infty$. Известны следующие оценки:

$$(\zeta_{\text{low}} + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n, \quad \text{где } \zeta_{\text{low}} = 1.239 \dots$$

(см. [4], [10]).

В соответствии с теоремой Эрдеша–Де Брейна (см., например, [4]) хроматическое число пространства равно хроматическому числу некоторого конечного дистанционного графа в этом пространстве.

В то же время для абстрактных графов П. Эрдеш [14] доказал теорему о том, что для данных k и l можно построить граф, хроматическое число которого будет больше k , при этом он не будет содержать циклов длины меньше l (и, в частности, не будет содержать клик размера не менее 3).

Нам интересно, как могут вести себя хроматические числа дистанционных графов, если мы дополнительно потребуем, чтобы эти графы не содержали клик или циклов фиксированного размера. Вопрос: существует ли дистанционный граф на плоскости с хроматическим числом 4 и без треугольников? – был задан Эрдешем [15]. На него был дан положительный ответ. Более того, О’Доннелл (см. [16], [17]) доказал, что для любого $l \in \mathbb{N}$ существует дистанционный граф на плоскости с хроматическим числом 4 и без циклов длины не более l .

Мы ограничимся рассмотрением случая клик. Будем интересоваться поведением величины $\chi_k(\mathbb{R}^n)$, равной максимуму хроматических чисел дистанционных графов в $\mathbb{R}^n$, которые не содержат клик размера k , где $k \geq 3$. Известно (см., например, [18]), что $\chi_k(\mathbb{R}^n) \geq (c_k + o(1))^n$, где $c_k > 1$ – некоторая константа. Введем величину

$$\zeta_k = \sup \left\{ c : \exists \delta(n) = o(1), \forall n \exists G - \text{дистанционный граф в } \mathbb{R}^n, \right. \\ \left. \text{не содержащий клик размера } k \text{ и такой, что } \chi(G) \geq (c + \delta(n))^n \right\}.$$

Согласно изложенному выше следует, что $\zeta_k > 1$. В статье [18] было доказано, что $\zeta_k \geq c_k$, где c_k приближается к ζ_{low} с ростом k . Доказательство этого факта вероятностное. В той же статье были приведены и явные конструкции последовательностей графов с экспоненциально большими хроматическими числами и без клик заданного размера. Эти конструкции не дают такой оптимальной константы при больших k , однако они позволяют получить более точные оценки при малых k .

Все известные явные конструкции последовательностей дистанционных графов с экспоненциальными хроматическими числами имеют специфический вид (см., например, [19]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство (класс) графов – это графы $G = G(n, m, \{a_0, a_1, \dots, a_m\}, x) = (V, E)$ с множеством вершин

$$V = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, \dots, m\}, |\{i : x_i = j\}| = a_j n \ \forall j = 0, \dots, m, \right. \\ \left. a_i \in (0, 1), \sum_{i=0}^m a_i = 1 \right\}$$

и множеством ребер $E = \{\{y_1, y_2\} \mid y_1, y_2 \in V, (y_1, y_2) = xn\}$. Здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточно часто мы предполагаем, что n делится на то или иное число. Например, в данной конструкции мы, конечно, предполагаем, что числа $a_j n$, xn целые.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вероятностная конструкция из [18] также основана на графах подобного вида, из которых случайным образом удаляются ребра.

В настоящей работе мы получим асимптотически (по n) точную границу содержания k -клик в описанных выше графах и, как следствие, новые оценки величины ζ_k при малых значениях k . При этом конструкция будет явной и с точки зрения метода – оптимальной.

Кроме того, мы уточним вероятностный результат из статьи [18], тем самым улучшив оценки величины ζ_k при всех k .

Дальнейшая структура статьи такова: в § 2 мы сформулируем результаты данной статьи и сравним их с ранее известными. В частности, в п. 2.1 будут сформулированы результаты относительно содержания клик у $(0, 1, \dots, m)$ -векторов, в п. 2.2 – результаты относительно хроматического числа пространства. В § 3 приведены доказательства результатов из п. 2.1, в § 4 – из п. 2.2.

§ 2. Формулировки результатов и сравнение оценок с предыдущими

Итак, мы разобьем данный параграф на две части. Первая часть будет посвящена результатам, касающимся содержания клик графами описанного выше вида. Во второй части мы приведем оценки величины ζ_k , которые получаются за счет теорем из первой части, и сравним их с ранее известными. Кроме того, в пп. 2.2.2 будут сформулированы результаты о ζ_k , полученные вероятностным методом, а в пп. 2.2.3 будут приведены таблицы со сравнением оценок.

2.1. Клики и $(0, 1, \dots, m)$ -векторы. Будем обозначать через $[x]$, $\{x\}$ и $\lceil x \rceil$ соответственно целую, дробную и целую часть числа x сверху. Сначала рассмотрим случай $(0, 1)$ -графов. Выше мы давали определение 1 общего класса графов, из которого определение $(0, 1)$ -графов получается при $m = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a, x > 0$, $a, x \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим последовательность размерностей $n_1, n_2, \dots$, которая удовлетворяет условиям $an_i, xn_i \in \mathbb{N}$, где $i \in \mathbb{N}$, и дистанционные графы $G_i = G(n_i, 1, \{1 - a, a\}, x)$. Пусть k – натуральное число, $k \geq 3$. Если

$$x < \frac{(ka)^2 - \{ka\}^2 - [ka]}{k(k-1)} =: f_1, \quad (1)$$

то G_i не содержит полных подграфов (клик) на k вершинах. Более того, эта оценка в некотором смысле точна. А именно, существует такая константа $c = c(k, a)$, что в последовательности размерностей $cn_1, cn_2, \dots$ графы $\tilde{G}_i = G(cn_i, 1, \{1 - a, a\}, f_1)$, $i \in \mathbb{N}$, содержат полные подграфы на k вершинах.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве c можно выбрать $\text{НОК}(C_k^{[ka]}, C_k^{[ka]})$, и, как следствие, $c \mid (C_k^{[ka]} \lceil ka \rceil)$. В частности, константу c можно оценить сверху независимо от a , потому что, например, $c \mid k!$.

Перейдем к рассмотрению случая $(-1, 0, 1)$ -графов. Класс этих графов очень похож на класс графов $G(n, 2, \{b, 1 - a - b, a\}, x)$, однако он отличается от указанного класса, поэтому мы дадим независимое

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство (класс) графов – это графы $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, x) = (V, E)$, где

$$\begin{aligned} V &= \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = an, \\ &\quad |\{i : x_i = -1\}| = bn, a, b \in (0, 1)\}, \\ E &= \{\{y_1, y_2\} \mid y_1, y_2 \in V, (y_1, y_2) = -xn\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a, b, x > 0$, $a, b, x \in \mathbb{Q}$, $a \geq b$. Рассмотрим последовательность размерностей $n_1, n_2, \dots$, которая удовлетворяет условиям $an_i, bn_i, xn_i \in \mathbb{N}$, где $i \in \mathbb{N}$, и графы $G_i = G'(n_i, \{b, 1 - a - b, a\}, x)$. Пусть k – натуральное число, $k \geq 3$.

1) Пусть $\{ka\} + k(1 - a - b) \geq 1$. Тогда при

$$x > \frac{k(a+b) - (k(a-b))^2 - \{k(a-b)\} + \{k(a-b)\}^2}{k(k-1)} =: f_1 \quad (2)$$

графы G_i не содержат k -клик. Более того, оценка (2) точна в некоторой подпоследовательности размерностей. Точнее, существует такая константа $c \in \mathbb{N}$, что в последовательности размерностей $cn_1, cn_2, \dots$ графы $G'(cn_i) = G'(cn_i, \{b, 1 - a - b, a\}, f_1)$, $i \in \mathbb{N}$, содержат клики размера k .

2) Пусть $\{ka\} + k(1 - a - b) < 1$. Тогда при

$$x > \frac{(k-k^2)(2a+2b-1) + (4k-4)\{ka\} + 4\{ka\}^2 + 4k(a+b)[ka] - 4(ka)^2}{k(k-1)} =: g_1 \quad (3)$$

графы G_i не содержат k -клик. Кроме того, также существует такая константа $c \in \mathbb{N}$, что в последовательности размерностей $cn_1, cn_2, \dots$ графы $G'(cn_i) = G'(cn_i, \{b, 1 - a - b, a\}, g_1)$, $i \in \mathbb{N}$, содержат клики размера k .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теореме 2 ограничения (2), (3) являются оценками x снизу, потому что запрещенное скалярное произведение равно $-xn$. В обоих случаях искомая константа c делит $k!$. Кроме того, ограничение (3) сильнее (2), хотя это и не ясно из их вида.

Рассмотрим общий случай.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a_i, x > 0$, $a_i, x \in \mathbb{Q}$, где $i = 0, \dots, m$. Рассмотрим последовательность размерностей $n_1, n_2, \dots$, которая удовлетворяет условиям $a_i n_j, x n_j \in \mathbb{N}$ для всех $i = 0, \dots, m$ и $j \in \mathbb{N}$, и дистанционные графы $G_i = G(n_i, m, \{a_0, a_1, \dots, a_m\}, x)$. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Тогда при

$$x < \frac{(k \sum_{i=0}^m i a_i)^2 - \{k \sum_{i=0}^m i a_i\}^2 + \{k \sum_{i=0}^m i a_i\} - k \sum_{j=0}^m j^2 a_j}{k(k-1)} =: f_1 \quad (4)$$

графы G_i не содержат k -клик.

В тех же условиях пусть $\delta \in \mathbb{Z}$, $\delta \leq k \sum_{i=0}^m i a_i < \delta + 1$. Кроме того, пусть имеет решения в целых числах система уравнений

$$\sum_{i=0}^m i q'_i \in \{\delta, \delta + 1\}, \quad \sum_{i=0}^m q'_i = k. \quad (5)$$

Пусть $\mathbf{q}^j = (q_0^j, \dots, q_m^j)$ – всевозможные решения в целых неотрицательных числах системы уравнений (5), и пусть u – НОК знаменателей коэффициентов, фигурирующих в любом из возможных заданий $\mathbf{ka} = (ka_0, \dots, ka_m)$ как выпуклой линейной комбинации $\mathbf{q}^j$. Тогда в последовательности размерностей $k!un_1, k!un_2, \dots$ графы $G_i = G(k!un_i, m, \{a_0, a_1, \dots, a_m\}, f_1)$, $i \in \mathbb{N}$, содержат k -клики.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Система (5) фактически дает нам ограничения, налагаемые на вектор $\mathbf{a}$ (вектор $\mathbf{ka}$ должен лежать в выпуклой оболочке решений системы). Однако в некоторых случаях можно обойтись и без нее. Имеет место следующее следствие второй части теоремы 3: в тех же условиях пусть $a_i \geq \frac{1}{k}$, $i = 1, \dots, m$, тогда в последовательности размерностей $k!n_1, k!n_2, \dots$ графы $G_i = G(k!n_i, m, \{a_0, a_1, \dots, a_m\}, f_1)$, $i \in \mathbb{N}$, содержат k -клики.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если в теореме 3 положить $m = 1$, $a_1 = a$, то оценка (4) совпадает с оценкой (1) из теоремы 1. Аналогично, если подставить $m = 2$, $a_0 = b$, $a_2 = a$ в теорему 3, то оценка (4) совпадает с оценкой (2) из теоремы 2, хотя это не настолько очевидно (нужно сделать переход от $(-1, 0, 1)$ -векторов к $(0, 1, 2)$ -векторам).

Кроме того, в теореме 3 не рассмотрен случай, соответствующий случаю 2) теоремы 2, поэтому, в частности, теорема 3 асимптотически точна не при всех значениях a_i .

2.2. Хроматические числа. Здесь мы обсудим поведение константы ζ_k при различных k . Лучшие оценки, которые были известны до сих пор, были получены в [18], где предложено два подхода к получению оценок.

Один из них, оформленный в теореме 4 из [18], состоит в построении явных конструкций дистанционных графов без клик. А именно, производилась оптимизация по параметрам a , x хроматического числа $(0, 1)$ -графов вида $G(n, 1, \{1 - a, a\}, x)$, которые не содержат клик размера k .

Другой подход, реализованный в теоремах 6, 7 из [18], был вероятностным. Он также основан на семействах графов $G(n, 1, \{1 - a, a\}, x)$ и $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, x)$, однако они изначально могут содержать клики. Чтобы получить графы, не содержащие клик, из них случайным образом удаляются ребра.

Отметим принципиальную разницу между графами, которые получаются из [18, теорема 4], и графами, которые получаются из [18, теоремы 6, 7]. Различие состоит не только в том, что в первом случае конструкции графов явные.

В первом случае ребрами соединены все пары вершин, отстоящих на единичное расстояние, а во втором случае – не все. Иными словами, в определении множества ребер дистанционного графа в первом случае можно поставить знак равенства между множествами, а во втором случае будет иметь место строгое включение. Иначе говоря, при втором подходе мы получаем (не индуцированный) подграф $G(n, 1, \{1 - a, a\}, x)$ или $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, x)$.

Результаты, полученные в этом пункте, делятся на две группы. В пп. 2.2.1 представлены усиления и обобщения теоремы 4 из [18]. За счет теорем 1, 2 мы получим более сильные оценки величины ζ_k , которые к тому же (как видно из формулировок) оптимальны в рамках метода. Две теоремы из пп. 2.2.2 – это усиления теорем 6, 7 из статьи [18].

Старые и новые оценки, полученные явно и не явно, мы объединим в таблицы в конце параграфа.

Отдельный интерес представляет поведение ζ_k при $k \rightarrow \infty$. Теорема 4 из статьи [18] давала в пределе константу $\frac{3^{0.75}}{2} = 1.139\dots$. Аналогичную константу дает и усиление этой теоремы на графах вида $G(n, 1, \{1 - a, a\}, x)$, которое будет сформулировано далее, обобщение этого подхода на графы $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, x)$ дает в пределе константу $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.154\dots$. Указанные константы далеки от константы ζ_{low} , которая является основанием экспоненты в лучшей известной оценке хроматического числа пространства. Однако вероятностный подход из [18] (равно как и наш подход из п. 2.2.2) дает в пределе именно эту константу.

Остается неясным следующий довольно интересный

ВОПРОС 1. Можно ли привести *явную* конструкцию семейства графов, не содержащих клик размера k , у которых аналогичная константа при $n \rightarrow \infty$ с ростом k будет стремиться к ζ_{low} ?

Вероятно, этого можно добиться, применяя теорему 3, однако в силу трудности оптимизационной задачи соответствующие расчеты не были произведены в рамках настоящей статьи.

При анализе вероятностной конструкции возникает еще один, возможно, более простой

ВОПРОС 2. Можно ли привести (явную или не явную) конструкцию, доказывающую существование семейства графов (зависящего от n и k), которое бы давало оценки величин ζ_k , с ростом k стремящихся к ζ_{low} , и при этом были бы полными дистанционными, т.е. в определении множества ребер у них бы стоял знак равенства?

2.2.1. Явные конструкции. Сформулируем следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны числа x , a такие, что $x > 0$ и $0 < a < 1$. Пусть k – натуральное число, $k \geq 3$. Если

$$x < \frac{(ka)^2 - \{ka\}^2 - [ka]}{k(k-1)},$$

то выполнена оценка

$$\zeta_k \geq \frac{(a-x)^{a-x}(1-a+x)^{1-a+x}}{a^a(1-a)^{1-a}}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть a, b, x такие, что $a, b > 0$, $a \geq b$, $a + b < \frac{1}{2}$. Пусть k – натуральное число, $k \geq 3$, и пусть

$$x > \frac{k(a+b) - (k(a-b))^2 - \{k(a-b)\} + \{k(a-b)\}^2}{k(k-1)}.$$

Положим $p' = a + b + x$, $l = \frac{3p'+1-\sqrt{1+6p'-3(p')^2}}{6}$. Тогда

$$\zeta_k \geq \frac{l^l(p'-2l)^{p'-2l}(1-p'+l)^{1-p'+l}}{a^a b^b (1-a-b)^{1-a-b}}.$$

2.2.2. Вероятностные конструкции. Теоремы из данного подпункта доказываются с помощью метода, схожего с методом из [18], однако оценки получают-ся точнее за счет использования более мощных вероятностных средств и более детального анализа структуры графа.

Перед тем как сформулировать дальнейшие результаты, введем необходимые обозначения. Пусть дана последовательность графов $G(i)$ на N_i вершинах, $i \in \mathbb{N}$, $N_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть $\text{conn}_k^j(G(i), v_1, \dots, v_j)$, $j < k$, – число k -клик в графе $G(i)$, которые содержат вершины $v_1, \dots, v_j$. Далее,

$$\text{conn}_k^j(G(i)) = \max_{v_1, \dots, v_j \in G(i)} \text{conn}_k^j(G(i), v_1, \dots, v_j). \quad (6)$$

В частности, $\text{conn}_1^0(G_i) = N_i$, а $\text{conn}_2^1(G_i)$ – это максимальная степень вершины. Как нетрудно видеть,

$$\text{conn}_{j_0}^{j_0-j}(G_i) \geq \text{conn}_{j_1}^{j_1-j}(G_i) \quad \text{при } j \leq j_0 \leq j_1.$$

Обозначим через $s_k^j(G(i))$ следующую величину:

$$s_k^j(G(i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \log_{N_i} \text{conn}_k^j(G(i)),$$

если данный предел существует. Положим $s_k^j(a, x) = s_k^j(G(n_i, 1, \{1 - a, a\}, x))$, $s_k^j(a, b, x) = s_k^j(G'(n_i, \{b, 1 - a - b, a\}, x))$. Несложно понять, что для указанных классов графов данный предел существует.

Действительно, для любого набора из j вершин в любом из графов $G(n_i, 1, \{1 - a, a\}, x)$, $G'(n_i, \{b, 1 - a - b, a\}, x)$ число способов достроить эти вершины до k -клик равно или нулю, или сумме произведений некоторых биномиальных коэффициентов. Поэтому величина $\text{conn}_k^j(G(i))$ ведет себя как $(\text{const}(k, j) + \delta(n_i))^{n_i}$, где $\delta(n_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. При этом число вершин в любом из описанных графов равно $(\text{const} + \delta'(n_i))^{n_i}$, где $\delta'(n_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. В этих обозначениях получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \log_{N_i} \text{conn}_k^j(G(i)) = \log_{\text{const}} \text{const}(k, j),$$

т. е. предел по i существует.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $k \geq 3$ – произвольное натуральное число, $a \in (0, \frac{1}{2})$ – произвольное вещественное число. Положим

$$\tau_0 = \tau_0(a) = \left(\frac{a}{2}\right)^{-\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{a}{2}\right)^{-(1-\frac{a}{2})}, \quad \tau_1 = \tau_1(a) = a^{-a}(1-a)^{-(1-a)}.$$

Тогда $\zeta_k \geq c := \frac{\tau_1^{1 - \frac{2s_k^2(a, a/2)}{(k-2)(k+1)}}}{\tau_0}.$

Нетрудно проверить, что в условиях теоремы 6 величина τ_0 всегда меньше величины τ_1 . В итоге имеем

$$\zeta_k \geq \max_{a \in (0, 1/2)} \frac{(\tau_1(a))^{1 - \frac{2s_k^2(a, a/2)}{(k-2)(k+1)}}}{\tau_0(a)}.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $k \geq 4$ – произвольное натуральное число, b, a – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие ограничениям

$$b, a \in (0, 1), \quad b + a \leq \frac{1}{2}, \quad b \leq a.$$

Положим

$$A = \frac{2 + 9b + 3a - \sqrt{(2 + 9b + 3a)^2 - 12(3b + a)^2}}{12},$$

$$B = \frac{3b + a}{2} - 2A, \quad C = 1 + A - \frac{3b + a}{2}.$$

Пусть, далее,

$$\rho_0 = \rho_0(a, b) = A^{-A} B^{-B} C^{-C}, \quad \rho_1 = \rho_1(a, b) = b^{-b} a^{-a} (1 - b - a)^{-(1-b-a)}.$$

Тогда $\zeta_k \geq c := \frac{\rho_1^{1 - \frac{2s_k^2(a, b, (a-b)/2)}{(k-2)(k+1)}}}{\rho_0}.$

Можно проверить, что $\rho_0 < \rho_1$ в условиях теоремы 7 (доказательство этого неравенства можно найти, например, в [19]). В итоге имеем

$$\chi_k(\mathbb{R}^n) \geq \max_{a,b} \frac{(\rho_1(a,b))^{1 - \frac{2s_k^2(a,b,(a-b)/2)}{(k-2)(k+1)}}}{\rho_0(a,b)}.$$

Однако, чтобы применить теорему 6 или теорему 7, необходимо получить оценку сверху коэффициентов $s_k^2(a, \frac{a}{2})$, $s_k^2(a, b, \frac{a-b}{2})$.

ТАБЛИЦА 1

k	Оценки из [18]	Новая оценка с использованием теоремы 4	Новая оценка с использованием теоремы 5
	$\zeta_k \geq$		
3	1.0582	1.0582	—
4	1.0582	1.0663	1.0374
5	1.0582	1.0857	1.0601
6	1.0743	1.0898	1.0754
7	1.0857	1.0995	1.0865
8	1.0933	1.1019	1.0948
9	1.0992	1.1077	1.1013
10	1.1033	1.1093	1.1066
11	1.1075	1.1131	1.1109
12	1.1096	1.1142	1.1145
13	1.1124	1.1170	1.1175
14	1.1151	1.1178	1.1201
15	1.1220	1.1198	1.1224
$\lim_{k \rightarrow \infty}$	1.239	1.139	1.154

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любых $k \geq i \geq j$ и любой последовательности графов $G(l)$ с числом вершин, стремящимся к бесконечности при $l \rightarrow \infty$, имеет место

$$s_k^j(G(l)) \leq s_i^j(G(l)) + (k-i)s_{i+1}^i(G(l)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко получается из того, что функция $s_{i+c}^i(G(l))$ является убывающей по i для любой натуральной величины c , и из того, что $s_{i+c}^i(G(l)) \leq s_{i+c_0}^i(G(l)) + s_{i+c}^{i+c_0}(G(l))$ для любых $i, c_0, c \in \mathbb{N}, c_0 \leq c$.

В силу того, что для получения достаточно хороших оценок величин $s_k^2(a, \frac{a}{2})$, $s_k^2(a, b, \frac{a-b}{2})$ требуется решение сложных оптимизационных задач, в данной работе мы не будем уделять этому много внимания и применим простую оценку, основанную на утверждении 1.

ТАБЛИЦА 2

k	Теорема 6 [18]	Теорема 6 и утв. 2	Теорема 7 [18]	Теорема 7
	$\zeta_k \geq$			
3	—	1.0147	—	—
4	—	1.0321	—	1.0028
5	1.0029	1.0491	1.0028	1.0169
6	1.0183	1.0641	1.0169	1.0339
7	1.0362	1.0771	1.0339	1.0501
8	1.0524	1.0881	1.0501	1.0646
9	1.0663	1.0976	1.0646	1.0773
10	1.0781	1.1057	1.0773	1.0886
11	1.0882	1.1128	1.0886	1.0985
12	1.0970	1.1190	1.0985	1.1073
13	1.1045	1.1245	1.1073	1.1151
14	1.1112	1.1293	1.1151	1.1220
15	1.1170	1.1336	1.1220	1.1283
16	1.1222	1.1375	1.1283	1.1339
17	1.1268	1.1409	1.1339	1.1390
18	1.1309	1.1441	1.1390	1.1437
19	1.1347	1.1470	1.1437	1.1479
20	1.1381	1.1496	1.1479	1.1518
100	1.1926	1.1943	1.2195	1.2197
1000	1.2056	1.2058	1.2375	1.2375
10000	1.2069	1.2069	1.2393	1.2393
100000	1.2070	1.2070	1.2395	1.2395
1000000	1.2071	1.2071	1.2395	1.2395

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Имеют место следующие оценки:

$$s_k^2\left(a, b, \frac{a-b}{2}\right) \leq k-2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
s_k^2\left(a, \frac{a}{2}\right) &\leq (k-2)s_3^2\left(a, \frac{a}{2}\right) \\
&= (k-2) \log_{\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}}} \left(\frac{\left(1 - \frac{3a}{2}\right)^{1 - \frac{3a}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3a}{2}}}{t^{4t} \left(\frac{a}{2} - t\right)^{\frac{3a}{2} - 3t} \left(1 - \frac{3a}{2} - t\right)^{1 - \frac{3a}{2} - t}} \right), \quad (8)
\end{aligned}$$

где t – корень уравнения $t^4 = (\frac{1}{2}a - t)^3(1 - \frac{3}{2}a - t)$, точнее,

$$t = \left(\frac{1}{12} \sqrt[3]{216a^2 - 54a - 216a^3 + 6\sqrt{-264a^3 + 216a^4 + 81a^2}} - 12 \frac{\frac{1}{6}a - \frac{1}{4}a^2}{\sqrt[3]{216a^2 - 54a - 216a^3 + 6\sqrt{-264a^3 + 216a^4 + 81a^2}}} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \right) a. \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Численные оценки величины ζ_k , следующие из теоремы 6, используют оценку (8). Для получения окончательного значения проводится оптимизация по a .

К сожалению, не удастся точно оценить даже величину $s_2^1(a, b, \frac{a-b}{2})$. Причина этого состоит в том, что необходимо решать систему уравнений большой степени, а это сопряжено с большими вычислительными трудностями. Поэтому для $(-1, 0, 1)$ -случая применяется тривиальная оценка.

2.2.3. Сравнительные таблицы оценок. Наконец, мы приводим численные значения оценок снизу величины ζ_k , которые получаются оптимизацией выражений из теорем 4, 5 по параметрам a, b, x , и сравниваем их с ранее известными оценками. Еще раз отметим, что новые оценки, приведенные в табл. 1 (где жирным шрифтом выделены лучшие из трех констант), основаны на явных конструкциях.

Теперь приведем оценки (табл. 2), получающиеся с помощью теорем 6, 7, и сравним их с неявными оценками из теорем 6, 7 статьи [18].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Как видно из табл. 2 (и из формулировки теоремы 7), если использовать тривиальную оценку $s_k^2(a, b, \frac{a-b}{2}) \leq k - 2$, то оценки величины ζ_k по сравнению с оценками из статьи [18] сдвигаются на 1 (оценки, верные для $k = i + 1$, теперь верны для $k = i$).

§ 3. Доказательства. Клики и $(0, 1, \dots, m)$ -векторы

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Как известно, радиус сферы, описанной вокруг симплекса с единичными сторонами и k вершинами, равен $\sqrt{\frac{k-1}{2k}}$. Значит, если в графе в качестве подграфа содержится k -клик, то, реализуя его дистанционно так, что каждое ребро будет иметь единичную длину, мы не сможем вписать его в сферу радиуса, меньшего вышеупомянутой величины.

Это простое соображение на самом деле дает хорошие оценки в рассматриваемой задаче. Однако мы хотим получить еще более точные результаты.

3.1. Конструкция с $\{0, 1\}$ -векторами. В качестве первого класса дистанционных графов, которые мы будем анализировать, рассмотрим $G(n, 1, \{1 - a, a\}, x) = (V, E)$. Иными словами,

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = an, a \in (0, 1)\},$$

а ребрами будем соединять те и только те пары вершин x, y , для которых верно $(x, y) = xn$, где $x \in (0, a)$.

Сначала вычислим радиус сферы, на которой лежит множество V , если нормировать его так, что запрещенное расстояние будет единичным. Центр сферы, на которой лежат вершины нашего графа, находится в плоскости $\sum_{i=1}^n x_i = an$, а именно в точке $(a, \dots, a)$. Квадрат радиуса r' сферы есть

$$(r')^2 = (1 - a)^2 an + a^2(n - an) = na(1 - a). \quad (10)$$

Квадрат длины l ребра (по теореме косинусов) при этом есть $l^2 = (2a - 2x)n$. Значит, если нормировать наше множество так, чтобы диаметр был равен единице, то квадрат радиуса r нормированной сферы будет

$$r^2 = \frac{(r')^2}{l^2} = \frac{a(1 - a)}{2a - 2x}.$$

В дальнейшем мы фиксируем параметр a и в зависимости от x выясняем, содержит ли граф k -клики.

3.1.1. Ограничение для x в зависимости от k . Пусть в графе содержится k -клика. Рассмотрим k векторов, образующих ее как $(n \times k)$ -матрицу, в которой векторы записаны по строкам. Обозначим через d_i степень координаты i , равную числу векторов, на месте i -й координаты которых стоит единица (это сумма элементов i -го столбца матрицы). Несложно понять, что выполняется уравнение $\sum_{i=1}^n d_i = kan$, в левой и правой частях которого выражено двумя способами число единичных координат векторов, образующих k -клик.

Кроме того, можно записать еще одно уравнение, в котором будет по-разному подсчитано суммарное скалярное произведение всех пар векторов. С одной стороны, это $\frac{k(k-1)}{2}xn$, с другой – каждая координата степени d_i вносит в суммарное скалярное произведение вклад $\frac{d_i(d_i-1)}{2}$. Получаем систему из двух уравнений

$$\sum_{i=1}^n d_i = kan, \quad \sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1) = k(k-1)xn. \quad (11)$$

Параметр a фиксирован, следовательно, фиксировано значение $\sum_{i=1}^n d_i$. При этом нам нужно выяснить, какие значения может принимать x , т. е. какие значения принимает сумма $\sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1)$.

Покажем, что при фиксированной сумме $\sum_{i=1}^n d_i$ минимум суммы $\sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1)$ будет достигаться, если $|d_i - d_j| \leq 1$ для любых i, j .

Сначала отметим, что $\sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1) = \sum_{i=1}^n d_i^2 - kan$, значит, можно минимизировать выражение $\sum_{i=1}^n d_i^2$. Итак, пусть для некоторых i и j выполнено $d_i - d_j = 2h + b$, $h, b > 0$. Покажем, что

$$d_i^2 + d_j^2 > (d_i - h)^2 + (d_j + h)^2, \quad (12)$$

тем самым установив, что при фиксированной сумме двух степеней координат мы минимизируем указанное в левой части неравенства (12) выражение, выбирая эти степени по возможности ближе. Преобразуем неравенство (12):

$$d_i^2 + d_j^2 > (d_i - h)^2 + (d_j + h)^2 \Leftrightarrow 0 > 2h^2 - 2h(d_i - d_j) = -2h^2 - 2hb.$$

Видно, что правое неравенство выполняется всегда при $h, b > 0$. Итак, если мы хотим при фиксированном a минимизировать x , то должно выполняться $|d_i - d_j| \leq 1$ для любых i, j . Значит, степени будут иметь вид либо $d = [ka]$, либо $d' = \lceil ka \rceil = d + 1$. Несложно понять, что число координат, степень которых будет d' , равно $\{ka\}n$. Число координат степени d при этом будет равно $(1 - \{ka\})n$. Система уравнений тогда имеет вид

$$\begin{aligned} & \begin{cases} dn + \{ka\}n = kan \\ d^2(1 - \{ka\})n + (d + 1)^2\{ka\}n - kan = k(k - 1)xn \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} d = [ka] \\ d^2 + (2d + 1)\{ka\} - ka = k(k - 1)x \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} d = [ka] \\ ([ka])^2 + (2[ka] + 1)\{ka\} - ka = k(k - 1)x. \end{cases} \end{aligned}$$

Из последнего уравнения правой системы получаем, что

$$x = \frac{([ka] + \{ka\})^2 + \{ka\} - \{ka\}^2 - ka}{k(k - 1)} = \frac{(ka)^2 - \{ka\}^2 - [ka]}{k(k - 1)} = f_1.$$

Значит, если мы хотим, чтобы в графе содержалась клика размера k , то как минимум должно выполняться $x \geq f_1$. Или, наоборот, при $x < f_1$ в графе не содержатся клики размера k .

3.1.2. Более простое ограничение для x и сравнение его с ограничением из пп. 3.1.1. Отметим, что если мы хотим при фиксированном a минимизировать x , то должно выполняться $d_1 = \dots = d_n = d$. При этом система уравнений (11) трансформируется в следующую:

$$\begin{cases} d = ka \\ d(d - 1) = k(k - 1)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = ka \\ ka(ka - 1) = k(k - 1)x. \end{cases}$$

Из последнего уравнения правой системы получаем, что $x = \frac{a(ka-1)}{k-1} =: f_2$. Таким образом, если граф содержит клику размера k , то $x \geq f_2$. Подставляя $x = f_2$ в формулу (10), имеем

$$r^2 = \frac{a(1 - a)}{2a - 2\frac{a(ka-1)}{k-1}} = \frac{(k - 1)(1 - a)}{2k - 2ka} = \frac{k - 1}{2k}.$$

В правой части мы получили квадрат радиуса сферы, описанной вокруг симплекса на k вершинах. Итак, ограничение $x \leq f_2$ можно получить двумя способами, первый из которых описан выше, второй – это геометрический способ (см. замечание 9), в котором мы реализуем граф на сфере с условием, что вершины, соединенные ребром, отстоят друг от друга на расстояние единица. Тогда для того, чтобы граф содержал клики размера k , радиус r сферы, на которой он лежит, должен быть больше или равен $\sqrt{\frac{k-1}{2k}}$.

Так или иначе мы получаем, что граф не содержит клик размера k , если $x < f_2$. Сравним функции f_1 и f_2 :

$$f_1 - f_2 = \frac{(ka)^2 - \{ka\}^2 - [ka]}{k(k-1)} - \frac{a(ka-1)}{k-1} = \frac{ka - \{ka\}^2 - [ka]}{k(k-1)} = \frac{\{ka\} - \{ka\}^2}{k(k-1)}. \quad (13)$$

Видно, что оценка (1) точнее, однако при $k \rightarrow \infty$ оценки (1) и (13) дают асимптотически одинаковый результат, который можно записать следующим образом:

$$\frac{a(1-a)}{2a-2x} = r^2 < \frac{1}{2}.$$

Существенное преимущество оценки f_1 состоит в том, что она асимптотически (по n при фиксированном k) точна, что мы и покажем в следующем подпункте.

3.1.3. Конструкция. Здесь мы построим k -клик в графе с параметрами a , $x = \frac{(ka)^2 - \{ka\}^2 - [ka]}{k(k-1)} = f_1$ такую, что степень $\{ka\}n$ координат есть $d' = [ka]$, а степень остальных $(1 - \{ka\})n$ координат есть $d = [ka]$. Тем самым мы докажем, что оценка (1) асимптотически неупрощаема.

Напомним, что an предполагается целым, значит, целое и $\{ka\}n$. Это выполнено для некоторой последовательности размерностей $n_1, n_2, \dots$. Рассмотрим последовательность размерностей $cn_1, cn_2, \dots$, где $c = \text{НОК}(C_k^d, C_k^{d'})$. Несложно понять, что $c \mid (C_k^{[ka]}[ka])$. Ясно, что для такой последовательности размерностей верно, что $C_k^d \mid (1 - \{ka\})n$ и $C_k^{d'} \mid \{ka\}n$.

Теперь рассмотрим первые $(1 - \{ka\})n$ координат. Рассмотрим блок из первых C_k^d координат и предположим, что k векторов, которые должны образовывать клику, устроены на этом блоке следующим образом: в столбцах, каждый из которых отвечает координате, были по одному разу представлены все возможные способы расстановки d единиц по k местам. Несложно понять, что единиц у каждого вектора на этих позициях будет поровну (по C_{k-1}^{d-1}), скалярное произведение любых двух векторов (или число позиций, на которых оба вектора имеют единицы) всех пар будет одинаковым (равным C_{k-2}^{d-2}). Размножаем такие блоки на все $(1 - \{ka\})n$ координат. Степень каждой будет равна d .

Аналогично поступим с оставшимися $\{ka\}n$ координатами. А именно, возьмем из них первые $C_k^{d'}$ позиции и потребуем, чтобы k векторов, которые должны образовывать клику, были устроены на них следующим образом: в столбцах, каждый из которых отвечает координате, были по одному разу представлены все возможные способы расстановки d' единиц по k местам. Размножим такие блоки на все $\{ka\}n$ координат.

Суммируя результаты настоящего пункта, получаем теорему 1, сформулированную в п. 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Все результаты настоящего пункта можно сформулировать в терминах хемминговых расстояний. Более того, основная часть результатов была в этих терминах известна (см., например, [20]).

3.1.4. Случай неправильных симплексов. Задачу, которую мы рассматривали в настоящем пункте, можно обобщить следующим образом. Пусть даны система $(0, 1)$ -векторов с фиксированным числом единиц и некоторый симплекс на k вершинах с попарными скалярными произведениями между вершинами, равными x_{ij} для пары вершин i, j (понятно, что $x_{ij} = x_{ji}$). При каких условиях для x_{ij} мы можем гарантировать, что такой симплекс не содержится в нашей системе? – конечно, если скалярное произведение каких-то двух векторов при таких длинах сторон нецелое. Кроме того, можно получить оценку величин x_{ij} , аналогичную оценке $x < f_1$. Модифицируя систему уравнений (11), мы получаем

$$\sum_{i=1}^n d_i = kan, \quad \sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1) = \sum_{i,j,i \neq j} x_{ij}n.$$

Применяя те же рассуждения, что и ранее, получаем, что при

$$\sum_{i,j,i \neq j} x_{ij} < (ka)^2 - \{ka\}^2 - [ka] = f'_1$$

в системе $(0, 1)$ -векторов не может быть описанных выше симплексов.

3.2. Конструкция с $\{-1, 0, 1\}$ -векторами. Следующим классом графов, который мы здесь рассмотрим, будут $(-1, 0, 1)$ -графы $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, x) = (V, E)$. Мы уже давали определение 1, но для удобства напомним, что

$$\begin{aligned} V &= \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = an, \\ &\quad |\{i : x_i = -1\}| = bn, a, b \in (0, 1)\}, \\ E &= \{\{y_1, y_2\} \mid y_1, y_2 \in V, (y_1, y_2) = -xn\}. \end{aligned}$$

Сначала нормируем множество V , чтобы длина ребер стала равна единице. Посчитаем радиус r' сферы, на котором лежит наше множество. Центр сферы, как несложно понять, это точка $(a - b, \dots, a - b)$. Тогда

$$\begin{aligned} (r')^2 &= an(1 - a + b)^2 + bn(-1 - a + b)^2 + (1 - a - b)n(a - b)^2 \\ &= an(1 - a + b - a + b)(1 - a + b + a - b) \\ &\quad + bn(1 + a - b - a + b)(1 + a - b + a - b) + (a - b)^2n \\ &= n(a(1 - 2a + 2b) + b(1 + 2a - 2b) + a^2 - 2ab + b^2) \\ &= n(a + b - a^2 - b^2 + 2ab) = n(a + b - (a - b)^2). \end{aligned}$$

При этом длина l ребра в графе задается равенством $l^2 = 2|v|^2 - 2(u, v)$, где u, v – векторы из V , образующие ребро. Получаем, что $l^2 = 2n(a + b) + 2xn = 2n(a + b + x)$. Нормируя множество, получаем, что радиус r сферы определяется формулой

$$r^2 = \frac{a + b - (a - b)^2}{2(a + b + x)}. \quad (14)$$

3.2.1. Подбор параметров. Ограничение для x . Мы, как и в п. 3.1, будем пытаться получить ограничение для x при фиксированных значениях a, b, k . Будем без ограничения общности считать, что $a \geq b$, и действовать аналогично тому, как мы действовали в п. 3.1.1. Сначала проведем анализ того, какой вклад вносит в суммарное скалярное произведение координата с фиксированным числом плюс и минус единиц.

ЛЕММА 1. *Рассмотрим k векторов. Пусть на какой-то координате этих векторов стоит l минус единиц и $l + \delta$ единиц. Тогда вклад d в суммарное произведение этих k векторов, который вносит данная координата, равен $-l + \frac{\delta^2 - \delta}{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = l + \delta$. Несложно понять, что

$$d = C_l^2 + C_m^2 - ml = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2} - ml = \frac{1}{2}((m-l)^2 - m - l). \quad (15)$$

Подставляя $m = l + \delta$ в (15), получаем $d = -l + \frac{\delta^2 - \delta}{2}$. Лемма доказана.

Теперь составим систему, аналогичную системе (11). Пусть k векторов из графа с параметрами a, b, x образуют клику. Разность между числом единиц и минус единиц на i -й координате обозначим через δ_i . Посчитав двумя способами разность между числом плюс и минус единиц в клике, получаем уравнение $\sum_{i=1}^n \delta_i = k(a-b)n$.

Вычислим суммарное скалярное произведение. С одной стороны, конечно, оно равно $-C_k^2 xn$. С другой стороны, пользуясь леммой 1, получаем, что вклад каждой координаты есть $d_i = -l_i + \frac{\delta_i^2 - \delta_i}{2}$. При этом мы знаем, что суммарное число минус единиц равно kbn . Значит, $\sum_{i=1}^n l_i = kbn$. В итоге получаем равенства

$$\sum_{i=1}^n d_i = -kbn + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i^2 - \delta_i}{2} = -C_k^2 xn.$$

Объединим систему

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i = k(a-b)n \\ k(k-1)xn = 2kbn - \sum_{i=1}^n \delta_i(\delta_i - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i = k(a-b)n \\ k(k-1)xn = k(a+b)n - \sum_{i=1}^n \delta_i^2. \end{cases} \quad (16)$$

Мы хотим получить по возможности точные ограничения для x , при которых граф не содержит клик размера k . Это значит, что при фиксированной сумме величин δ_i нужно выбрать их такими, чтобы сумма их квадратов была минимальной, и тем самым найти максимальное x , при котором клика еще может содержаться. Тогда при больших x клик заведомо не будет. Несложно проверить (впрочем, то же самое было сделано в пп. 3.1.1), что минимум достигается в случае, когда значения $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ различаются как можно меньше. Выясним, насколько они могут различаться.

Средний вклад каждой координаты равен $k(a-b)$, поэтому в лучшем случае мы получим, по аналогии с пп. 3.1.1, $(1 - \{k(a-b)\})n$ координат степени $\delta = [k(a-b)]$ и $\{k(a-b)\}n$ координат степени $\delta' = 1 + \delta$.

Прибавим к каждой координате каждого вектора по единице, тем самым увеличим степень каждой координаты на k (перейдем от δ к $d = \delta + k$ и от $(-1, 0, 1)$ - к $(0, 1, 2)$ -векторам). Пусть теперь выполнено следующее свойство: $\{ka\}n + k(1 - a - b)n < n$. Иными словами, сумма количества единиц всех векторов, входящих в клику (в измененном множестве), и остатка от деления на n суммарного числа двоек меньше n . В таком случае несложно понять, что при самом хорошем (в плане минимизации суммы квадратов степеней) случае будет $\{ka\}n$ координат степени $d'' = d + 2$, $k(1 - a - b)n$ координат степени $d' = d + 1$ и $(1 - \{ka\}n - k(1 - a - b))n$ координат степени d .

Обоснуем изложенное выше. Сначала расставим по координатам двойки. Тогда оптимальным (для минимизации разности степеней координат после расстановки двоек) будет вариант, когда ровно $\{ka\}n$ координат имеют степень $d'_2 = d_2 + 2$, а остальные координаты имеют степень d_2 . Теперь ввиду рассуждения из пп. 3.1.1 о том, что для минимизации мы должны по возможности сближать степени координат, становится понятно, что наилучший способ расстановки единиц по координатным позициям – это довести часть координат степени d_2 до степени $d_2 + 1$. После этого остается лишь посчитать, сколько координат какой степени получилось.

Далее мы можем перейти обратно к $(-1, 0, 1)$ -векторам и выяснить, какие условия для x мы получили. Разберем сначала простой случай, когда координаты имеют только две степени. В этом случае система (16) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \delta n + \{k(a-b)\}n = k(a-b)n \\ k(k-1)xn = k(a+b)n - \{k(a-b)\}n(\delta+1)^2 - (1 - \{k(a-b)\})n\delta^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = [k(a-b)] \\ k(k-1)x = k(a+b) - \delta^2 - \{k(a-b)\}(2\delta+1) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = [k(a-b)] \\ k(k-1)x = k(a+b) - ([k(a-b)] + \{k(a-b)\})^2 - \{k(a-b)\} + \{k(a-b)\}^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = [k(a-b)] \\ x = \frac{k(a+b) - (k(a-b))^2 - \{k(a-b)\} + \{k(a-b)\}^2}{k(k-1)} =: f_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при x , большем f_1 , в графе не могут содержаться клики размера k .

Теперь рассмотрим второй, технически более трудный, случай. Итак, пусть $\{ka\}n + k(1 - a - b)n < n$. Тогда, как уже известно, $\{ka\}n$ координат будут иметь степень $\delta'' = d+2$, $k(1-a-b)n$ координат – степень $\delta' = \delta+1$ и оставшиеся

$(1 - \{ka\}n - k(1 - a - b))n$ координат – степень δ . Получим систему

$$\begin{cases} \delta n + 2\{ka\}n + k(1 - a - b)n = k(a - b)n \\ k(k - 1)xn = k(a + b)n - \{ka\}n(\delta + 2)^2 - k(1 - a - b)n(\delta + 1)^2 \\ \quad - (1 - \{ka\}n - k(1 - a - b))n\delta^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = k(2a - 1) - 2\{ka\} \quad (= 2[ka] - k) \\ k(k - 1)x = k(a + b) - \{ka\}(4\delta + 4) - k(1 - a - b)(2\delta + 1) - \delta^2 =: g. \end{cases}$$

Преобразуем правую часть второго уравнения последней системы:

$$\begin{aligned} g &= k(2a + 2b - 1) - \{ka\}(8[ka] - 4k + 4) - k(1 - a - b)(4[ka] - 2k) - (2[ka] - k)^2 \\ &= k(2a + 2b - 1) - \{ka\}(8[ka] - 4k + 4) + k(a + b)(4[ka] - 2k) - (4[ka]^2 - k^2) \\ &= k(2a + 2b - 1) + (4k - 4)\{ka\} + 4\{ka\}^2 + 4k(a + b)[ka] - k^2(2a + 2b - 1) \\ &\quad - 4([ka] + \{ka\})^2 \\ &= (k - k^2)(2a + 2b - 1) + (4k - 4)\{ka\} + 4\{ka\}^2 + 4k(a + b)[ka] - 4(ka)^2. \end{aligned}$$

Итак, можно сказать, что при указанных ограничениях и при $x > \frac{g}{k(k-1)}$ граф k -клик не содержит. Тем самым мы доказали утверждение 1) теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Случай 2), рассмотренный в теореме 2, не слишком интересен для наших приложений, однако он нужен для получения асимптотической точности оценки при всех значениях a, b, k .

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Можно аналогично пп. 3.1.4 сформулировать случай 1) теоремы 2 для произвольного симплекса.

В следующем подпункте мы получим более простую оценку, однако более слабую. Затем мы докажем точность (в том же смысле, в котором она понималась в пп. 3.1.3) оценки, приведенной в настоящем подпункте.

3.2.2. Более простое ограничение для x и сравнение его с предыдущим. Мы могли бы поступить проще, действуя так, как в пп. 3.1.2. Если мы хотим при фиксированных a, b, k минимизировать x , то должно выполняться $\delta_1 = \dots = \delta_n = \delta$. Тогда система уравнений (16) трансформировалась бы в следующую:

$$\begin{cases} \delta = k(a - b) \\ k(k - 1)x = k(a + b) - \delta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = k(a - b) \\ x = \frac{a + b}{k - 1} - \frac{k(a - b)^2}{k - 1} =: f_2. \end{cases}$$

Теперь подставим значение $x = f_2$ в формулу (14) и получим

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{a + b - (a - b)^2}{2(a + b + x)} = \frac{a + b - (a - b)^2}{2\left(a + b + \frac{a + b}{k - 1} - \frac{k(a - b)^2}{k - 1}\right)} \\ &= \frac{a + b - (a - b)^2}{\frac{2k}{k - 1}(a + b - (a - b)^2)} = \frac{k - 1}{2k}. \end{aligned}$$

В правой части мы опять получили квадрат радиуса сферы, описанной вокруг симплекса на k вершинах. Итак, к ограничению $x \geq f_2$, полученному выше, мы снова могли прийти двумя способами, первый из которых описан ранее, второй – это геометрический способ.

Так или иначе мы получаем следующее ограничение: граф $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, x)$ не содержит клики размера k , если $x > f_2$. Сравнение функций f_1 , g_1 и f_2 дает примерно тот же результат, что и в $(0, 1)$ -случае. Все оценки имеют асимптотически (по k) одинаковый вид, который можно записать следующим образом:

$$\frac{a + b - (a - b)^2}{2(a + b + x)} = r^2 < \frac{1}{2}.$$

Однако существенное преимущество оценок f_1 , g_1 состоит в том, что они асимптотически (по n при фиксированном k) точны, что мы и покажем в следующем подпункте.

3.2.3. Конструкция. Построим k -клики в графах $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, f_1)$, $G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, g_1)$. Рассмотрим случаи 1), 2) теоремы 2.

Случай $\{ka\}n + k(1 - a - b)n \geq n$. Этот случай основной, указанное условие выполняется, например, при количестве нулей, большем n/k . Итак, нам надо построить k векторов с заданным числом плюс и минус единиц, попарно равным скалярным произведением и степенями координат, отличающимися не более чем на 1. Иначе говоря, $(1 - \{k(a - b)\})n$ координат будут иметь степень $\delta = [k(a - b)]$, и $\{k(a - b)\}n$ координат – степень $\delta' = 1 + \delta$.

Напомним, что an , bn предполагаются целыми, значит, целое и $\{k(a - b)\}n$. Это выполнено для некоторой последовательности размерностей $n_1, n_2, \dots$. Рассмотрим последовательность размерностей $cn_1, cn_2, \dots$, где c – некоторая константа, величина которой станет ясна позднее.

Для начала произведем вспомогательное построение в размерностях n_i , а именно построим такую систему векторов, чтобы суммарная доля координат каждого вида была такой, как нужно, и чтобы степени координат отличались не более чем на 1. При этом мы не заботимся ни о виде самих векторов, ни о попарных скалярных произведениях. В дальнейшем мы просто в некотором смысле симметризуем это построение, перейдя от размерности n_i к cn_i , и получим желаемую конструкцию.

Для простоты будем записывать n вместо n_i . Итак, число координат вида $-1, 0, 1 - 1$ – это kbn , $k(1 - a - b)n$, kan соответственно. Первые $[ka]$ векторов будут состоять только из единиц. Следующие $[kb]$ векторов состоят только из минус единиц. Остаются $(\{ka\} + \{kb\} + k(1 - a - b))n$ координат, причем коэффициент перед n , естественно, целый. По условию имеем $(\{ka\} + \{kb\} + k(1 - a - b))n \geq n$, значит, возможен один из следующих двух случаев:

- 1) $(\{ka\} + k(1 - a - b))n = n$, $\{kb\} = 0$;
- 2) $(\{ka\} + \{kb\} + k(1 - a - b)) \geq 2$.

Рассмотрим случай 1). Остается один вектор, и на нем надо разместить сколько-то нулей и единиц. Понятно, что при любом размещении степень координат будет отличаться не более чем на 1. При этом координатные позиции

будут двух типов: на которых стоят $[ka]$ единиц, $[kb]$ минус единиц и один нуль или на которых стоят $[ka] + 1$ единиц и $[kb]$ минус единиц.

В случае 2) мы будем действовать следующим образом: сначала образуем пары из плюс и минус единиц (их количества $\min\{ka\}n, \{kb\}n < n$ соответственно), затем расставляем эти пары по двум из как минимум двух оставшихся векторов, после этого из оставшихся плюс или минус единиц составляем один из этих векторов, а все остальные его координаты заполняем нулями. При этом получатся столбцы трех типов: столбцы, в которых стоят $[ka]$ единиц, $[kb]$ минус единиц, остальные нули; столбцы, в которых стоят $[ka] + 1$ единиц, $[kb] + 1$ минус единиц, остальные нули; и наконец, столбцы, в которых стоят $[ka]$ единиц, $[kb]$ минус единиц, кроме того, еще одна плюс или минус единица и остальные нули. Степени координат также различаются не более чем на 1.

Теперь произведем симметризацию, т. е. каждую координату заменим на несколько блоков координат следующим образом. Рассмотрим всевозможные перестановки значений внутри столбца, которые отличаются друг от друга по конфигурации. Их количество равно $\prod_i C_k^{y_i}$ – произведению биномиальных коэффициентов (или некоторому полиномиальному коэффициенту), где y_i зависят от типа столбца. Получившийся набор столбцов будем называть *блоком* для столбца данного типа. Возьмем в качестве числа c (итоговое число столбцов, на который заменяется один координатный столбец) НОК по всем размерам блоков для всех имеющихся типов столбцов. Тем самым мы гарантируем, что каждый из блоков будет представлен среди координат вектора целое число раз. При этом несложно видеть, что $c|k|!$.

Понятно, что при таком построении соотношения общего числа координат сохраняются, а также то, что степени координат различаются не более чем на 1. За счет симметризации мы получаем, что количество координат того или иного типа всех векторов одно и то же. Одинаковы и скалярные произведения всех пар векторов из клики. Тем самым, заменив размерность n на размерность cn , где c – некий делитель $k|!$, мы добились желаемого.

Случай $\{ka\}n + k(1 - a - b)n < n$. Построим k векторов с заданными параметрами, попарно равными скалярными произведениями и степенями координат, отличающимися не более чем на 2. Точнее, $\{ka\}n$ координат будут иметь степень $\delta'' = d + 2$, $k(1 - a - b)n$ координат – степень $\delta' = \delta + 1$ и оставшиеся $(1 - \{ka\}n - k(1 - a - b))n$ координат – степень δ .

Далее все рассуждения аналогичны рассуждениям из предыдущего случая, за исключением того, что необходимо привести другую вспомогательную конструкцию. Конструкция следующая. Число координат вида $-1, 0, 1$ – это kbn , $k(1 - a - b)n$, kan соответственно. Первые $[ka]$ векторов будут состоять только из единиц. Следующий вектор состоит из оставшихся единиц, всех нулей (в количестве $\{ka\}n + k(1 - a - b)n < n$) и какого-то количества минус единиц. Остальные векторы состоят только из минус единиц. Все, что осталось проверить перед применением симметризации, – это то, что степени координат

получились именно такими, как требуется. Теперь применяем симметризацию и получаем желаемый результат.

3.3. Общий случай. Здесь мы докажем теорему 3.

3.3.1. *Граф.* Рассмотрим графы $G = G(n, m, \{a_0, a_1, \dots, a_m\}, x) = (V, E)$. Напомним, что множество вершин графа – это

$$V = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, \dots, m\}, |\{i : x_i = j\}| = a_j n \right. \\ \left. \forall j = 0, \dots, m, a_i \in (0, 1), \sum_{i=0}^m a_i = 1 \right\}.$$

Ребрами соединяются те и только те пары векторов, скалярное произведение которых равно xn .

Как обычно, найдем радиус сферы, на которой лежит гомотетичная копия нашего графа с ребрами единичной длины. Посчитаем радиус r' сферы, на котором лежит наше множество. Центр сферы, как несложно понять, лежит в гиперплоскости $\{\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=0}^m i a_i n\}$ в точке $(\sum_{i=0}^m i a_i, \dots, \sum_{i=0}^m i a_i)$. Тогда

$$(r')^2 = \sum_{j=0}^m a_j n \left(j - \sum_{i=0}^m i a_i \right)^2 = \sum_{j=0}^m j^2 a_j n - 2 \sum_{j=0}^m j a_j \sum_{i=0}^m i a_i n + \sum_{j=0}^m a_j n \left(\sum_{i=0}^m i a_i \right)^2 \\ = \sum_{j=0}^m j^2 a_j n - 2 \left(\sum_{j=0}^m j a_j \right)^2 n + \left(\sum_{i=0}^m i a_i \right)^2 n = \sum_{j=0}^m j^2 a_j n - \left(\sum_{j=0}^m j a_j \right)^2 n.$$

При этом длина ребра l выражается из соотношения

$$l^2 = 2 \sum_{j=0}^n j^2 a_j n - 2xn.$$

Получаем, что квадрат радиуса сферы, на котором лежит нормированное множество, имеет вид

$$r^2 = \frac{\sum_{j=0}^m j^2 a_j - (\sum_{j=0}^m j a_j)^2}{2(\sum_{j=0}^n j^2 a_j - x)}.$$

3.3.2. *Геометрическое ограничение для x .* Сначала получим ограничение для x , используя геометрические соображения (см. замечание 9). А именно, граф заведомо не содержит k -клик при

$$\frac{k-1}{2k} > \frac{\sum_{j=0}^m j^2 a_j - (\sum_{j=0}^m j a_j)^2}{2(\sum_{j=0}^n j^2 a_j - x)}.$$

Отсюда получаем следующее условие для x :

$$x < \frac{k(\sum_{j=0}^m j a_j)^2 - \sum_{j=0}^m j^2 a_j}{k-1}.$$

3.3.3. *Кодовые ограничения для x .* Будем действовать, как обычно. Составляем два уравнения, в первом из которых мы двумя способами считаем сумму всех координат в клике, а во втором – сумму попарных скалярных произведений в клике. Обозначим через δ_i *степень i -й координаты* – сумму i -х координат векторов, образующих k -клик. Первое уравнение легко выписать, а для второго неясно, как связать δ_i со вкладом d_i в суммарное скалярное произведение. Допустим, на координате i у нас q_j^i векторов принимают значение j , т. е. $\sum_{j=0}^m q_j^i = k$, при этом $\sum_{j=0}^m j q_j^i = \delta_i$. Возникает вопрос: какой вклад в суммарное произведение дает данная координата? Если мы заменяем вектор со значением j на данной координате на j векторов со значением 1 на координате, то получившийся набор дает вклад, на $\frac{j(j-1)}{2}$ больший, чем исходный набор. Получаем

$$d_i = \frac{\delta_i(\delta_i - 1)}{2} - \sum_{j=0}^m \frac{j(j-1)}{2} q_j^i.$$

При этом известно, что $\sum_{i=1}^n q_j^i = k a_j n$. Итак, мы имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i = k \sum_{i=0}^m i a_i n \\ \sum_{i=1}^n 2d_i = k(k-1)xn \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i = k \sum_{i=0}^m i a_i n \\ \sum_{i=1}^n \left(\delta_i(\delta_i - 1) - \sum_{j=0}^m j(j-1) q_j^i \right) = k(k-1)xn \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i = k \sum_{i=0}^m i a_i n \\ \sum_{i=1}^n \delta_i(\delta_i - 1) - k \sum_{j=0}^m j(j-1) a_j n = k(k-1)xn \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i = k \sum_{i=0}^m i a_i n \\ \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - k \sum_{j=0}^m j^2 a_j n = k(k-1)xn. \end{cases} \end{aligned}$$

Минимизируем сумму квадратов величин при фиксированной сумме, так как мы хотим получить наименьшее x , для которого при фиксированных a_i и нашем подходе соответствующий граф может содержать k -клики.

Первый и самый простой способ – положить $\delta_1, \dots, \delta_n = \delta = k \sum_{i=0}^m i a_i$. Тогда x имеет вид

$$x = \frac{(k \sum_{j=0}^m j a_j)^2 - k \sum_{j=0}^m j^2 a_j}{k(k-1)} = \frac{k(\sum_{j=0}^m j a_j)^2 - \sum_{j=0}^m j^2 a_j}{k-1} = f_2.$$

Таким образом, этот подход дает в точности тот же результат, что и геометрический подход.

Однако можно действовать чуть более аккуратно, по аналогии с тем, как мы поступали в пп. 3.1, 3.2. А именно, мы далеко не всегда можем добиться того,

чтобы степени всех координат были равны. В общем случае число $k \sum_{i=0}^m ia_i$ совсем не обязательно целое, и поэтому в лучшем случае степени координат будут принимать два значения: $\{k \sum_{i=0}^m ia_i\}n$ координат будут иметь степень $\delta + 1 = \lceil k \sum_{i=0}^m ia_i \rceil$, остальные $(1 - \{k \sum_{i=0}^m ia_i\})n$ координат – степень $\delta = \lfloor k \sum_{i=0}^m ia_i \rfloor$. В этом случае система примет вид

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \delta n + \left\{ k \sum_{i=0}^m ia_i \right\} n = k \sum_{i=0}^m ia_i n \\ \left(1 - \left\{ k \sum_{i=0}^m ia_i \right\} \right) n \delta^2 + \left\{ k \sum_{i=0}^m ia_i \right\} n (\delta + 1)^2 - k \sum_{j=0}^m j^2 a_j n = k(k-1)xn \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \left\lfloor k \sum_{i=0}^m ia_i \right\rfloor \\ \delta^2 + \left\{ k \sum_{i=0}^m ia_i \right\} (2\delta + 1) - k \sum_{j=0}^m j^2 a_j = k(k-1)x \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \left\lfloor k \sum_{i=0}^m ia_i \right\rfloor \\ \left(\left\lfloor k \sum_{i=0}^m ia_i \right\rfloor + \left\{ k \sum_{i=0}^m ia_i \right\} \right)^2 - \left\{ k \sum_{i=0}^m ia_i \right\}^2 + \left\{ k \sum_{i=0}^m ia_i \right\} \\ \quad - k \sum_{j=0}^m j^2 a_j = k(k-1)x. \end{cases} \end{aligned}$$

Из последней системы мы получаем

$$x = \frac{(k \sum_{i=0}^m ia_i)^2 - \{k \sum_{i=0}^m ia_i\}^2 + \{k \sum_{i=0}^m ia_i\} - k \sum_{j=0}^m j^2 a_j}{k(k-1)} = f_1.$$

Итак, при $x < f_1$ в нашем графе заведомо нет клик. Сравнение величин f_1 и f_2 дает следующее:

$$f_1 - f_2 = \frac{\{k \sum_{i=0}^m ia_i\} - \{k \sum_{i=0}^m ia_i\}^2}{k(k-1)}.$$

Тем самым, первая половина теоремы 3 доказана.

3.3.4. Построение. Здесь мы приведем конструкцию клики в графе $G = G(n, m, \{a_0, a_1, \dots, a_m\}, f_1)$ при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на параметры a_i и (как всегда) на делимость n . Ограничения для a_i существенны, и в принципе нужно уточнять оценку сверху из теоремы 3 (аналогично пп. 1), 2) в теореме 2), однако на этом пути возникают значительные трудности.

Пусть $\delta \leq k \sum_{i=0}^m ia_i < \delta + 1$. Сначала рассмотрим всевозможные решения в целых неотрицательных числах следующей системы уравнений:

$$\sum_{i=0}^m iq_i \in \{\delta, \delta + 1\}, \quad \sum_{i=0}^m q_i = k.$$

Занумеруем все возможные решения этой системы в целых неотрицательных числах индексом j (обозначим их через $\mathbf{q}^j = (q_0^j, \dots, q_m^j)$).

Пусть дан набор параметров $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_m)$. Предположим, что вектор $k\mathbf{a}$ лежит в выпуклой оболочке векторов $\mathbf{q}^j$.

Итак,

$$k\mathbf{a} = \sum_j u_j \mathbf{q}^j, \quad (17)$$

причем $\sum_j u_j = 1$, $u_j \geq 0$. Отметим, что вектор $\mathbf{a}$ по условию имеет рациональные координаты, а векторы $\mathbf{q}^j$ — целые координаты, поэтому можно считать, что все u_j , кроме того, еще и рациональны. Обозначим общий знаменатель u_j через u . Далее мы рассмотрим последовательность размерностей $n'_1 = un_1, n'_2 = un_2, \dots$.

Для краткости будем записывать n, n' вместо n_i, n'_i . Теперь, как в пп. 3.2.3, мы сначала построим вспомогательную конструкцию. А именно, мы запишем по столбцам линейную комбинацию (17) (порядок чисел в каждом столбце произволен), т.е. будет $u_j n'$ столбцов вида $\mathbf{q}^j$ для каждого j (заметим, что по определению число $u_j n'$ целое).

Мы получаем некоторый набор векторов, в котором степени координат отличаются друг от друга не более чем на 1, а суммарная доля координат типа i равна a_i . Остается лишь произвести симметризацию. В последовательности размерностей $k! n'_1, k! n'_2, \dots$ мы строим систему векторов, в которой каждый столбец описанной выше вспомогательной конструкции заменяем на блок из $k!$ всевозможных перестановок координат в столбце. Теперь к уже упомянутым свойствам (которые, очевидно, при такой процедуре сохраняются) добавляется то, что каждый вектор имеет одинаковое количество координат каждого вида и все попарные скалярные произведения одинаковые. Тем самым мы доказали точность оценки (4) для некоторой последовательности размерностей и при некоторых ограничениях для параметров.

Разъясним условие для вектора $\mathbf{a}$ (о выпуклой оболочке). Мы приведем пример явных условий для параметров, при которых этого условия для $\mathbf{a}$ можно избежать. Итак, пусть $a_i \geq \frac{1}{k}$, $i = 1, \dots, m$ (условие выполнено для ненулевых координат). Нужно построить вспомогательную конструкцию, симметризация будет такой же. Конструкция будет явной, поэтому условия делимости n в этом случае можно существенно ослабить.

Сначала мы все координаты всех векторов, входящих в клику, сортируем по значению. Построение будем вести по строкам.

Шаг 1. Располагаем по строкам все координаты со значением m . В какой-то момент они заканчиваются и остается недостроенный вектор. Мы дополняем его координатами со значением $m-1$ (это можно сделать, поскольку k векторов имеют суммарное количество координат со значением $m-1$ не меньше n по условию), и на этом шаг закончен.

В итоге у нас остаются координатные значения $0, \dots, m-1$, при этом разность между степенями координатных позиций не больше 1. Дальнейшие шаги проводим по индукции.

Мы утверждаем, что на каждом очередном шаге можно избавляться от очередного старшего координатного значения, при этом разность степеней координатных позиций будет по-прежнему не больше 1. Допустим, что мы провели i -й шаг и нужно провести $(i + 1)$ -й.

Шаг $i + 1$. Старшее значение, которое осталось, – это $m - i$. Сначала мы образуем из всех координат этого значения столько векторов, сколько возможно. Оставшиеся координаты мы ставим на те координатные позиции, степень которых меньше из двух возможных. Если остались еще координаты, то ставим их на произвольные оставшиеся позиции. Затем заполняем оставшиеся координаты вектора координатами со значением $m - i - 1$. Несложно проверить, что заявленное в начале абзаца утверждение выполняется. Тем самым в конце процесса мы получим желаемую вспомогательную конструкцию.

Заметим, что здесь не требовалась делимость размерности на u .

Тем самым, теорема 3 доказана полностью.

§ 4. Доказательства. Хроматические числа

Доказательства теорем 4, 5 стандартны (см., например, [19]), однако для полноты изложения мы приведем их в сжатом виде.

4.1. Доказательство теоремы 4. Рассмотрим последовательность графов $\mathcal{G} = \{G_n = G(n, 1, \{1 - a_n, a_n\}, x_n)\}$ с условиями $a_n \sim a$, $x_n \sim x$ и $a_n n, x_n n \in \mathbb{N}$, при этом $p_n \sim (a_n - x_n)n$, где p_n – простое число.

Отметим, что, действительно, для любого x найдется функция $x(n)$ такая, что $(a - x(n))n = p$, где p простое, и $\frac{x}{x(n)} \sim 1$. Это верно в силу довольно плотного распределения простых чисел в натуральном ряду (верно, что между n и $n + \bar{o}(n)$ найдется простое число; см. [21]).

Ключевую роль в доказательстве будет играть следующая

ЛЕММА 2. *Верно, что $\alpha(G_n) = \alpha(G(n, 1, \{1 - a_n, a_n\}, x_n)) \leq \sum_{j=0}^{p_n-1} C_n^j$. Здесь $\alpha(G)$ – размер максимального независимого множества графа G .*

Стандартная оценка хроматического числа произвольного графа G имеет вид $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Имеем $|V| = C_n^{a_n n}$, а в соответствии с леммой 2 выполнено $\alpha(G) \leq \sum_{j=0}^{p_n-1} C_n^j \leq n C_n^{p_n}$. Теперь воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\begin{aligned} \chi(G) &\geq \frac{C_n^{a_n n}}{n C_n^{p_n}} = \left(\frac{\left(\frac{p_n}{n}\right)^{p_n/n} \left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^{1-p_n/n}}{a_n^{a_n} (1 - a_n)^{1-a_n}} + \bar{o}(1) \right)^n \\ &= \left(\frac{(a - x)^{a-x} (1 - a + x)^{1-a+x}}{a^a (1 - a)^{1-a}} + \bar{o}(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 4 остается отметить, что в силу выбора параметров a , x в соответствии с теоремой 1 в графе не содержатся клики размера k при достаточно больших n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для краткости опустим везде индексы n . Рассмотрим произвольное $Q = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s\} \subset V$ такое, что для любых двух различных i, j выполнено $(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) \neq xn$. Покажем, что $s \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i$.

Каждому вектору $\mathbf{y} \in V$ поставим в соответствие полином $P_{\mathbf{y}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$. Точнее,

$$P_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) = \prod_{i=0, i \not\equiv xn \pmod{p}}^{p-1} (i - (\mathbf{y}, \mathbf{z})), \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n).$$

Здесь произведение берется по всем наименьшим неотрицательным вычтам i по модулю p , за исключением $i \equiv xn \pmod{p}$. Таким образом, степень любого $P_{\mathbf{y}}$ не превосходит $p-1$. Самое важное свойство таких многочленов следующее:

(*) для любых $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ равенство $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv xn \pmod{p}$ эквивалентно неравенству $P_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Свойство (*) очевидно, и мы будем использовать его, не доказывая. Построим по каждому $P_{\mathbf{y}}$ некоторый полином $P'_{\mathbf{y}}$. Точнее, представим многочлен $P_{\mathbf{y}}$ в виде линейной комбинации мономов. Конечно, каждый моном имеет вид

$$z_{i_1}^{\alpha_1} \dots z_{i_q}^{\alpha_q}, \quad q \leq p-1.$$

Мы просто заменяем α_ν на 1. Получившийся моном – это произведение некоторых различных переменных. Однако новые полиномы $P'_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} \in V$, по-прежнему удовлетворяют свойству (*) в силу того, что мы рассматриваем переменные, которые принимают значения 0, 1.

В соответствии с только что описанной конструкцией имеем

$$\dim(\text{linear span}\{P'_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y} \in V}) \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_n^i.$$

Если теперь мы покажем, что векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$ из множества Q соответствуют множеству $P'_{\mathbf{y}_1}, \dots, P'_{\mathbf{y}_s}$ линейно независимых полиномов (над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), то лемма будет доказана.

Предположим, что

$$c_1 P'_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{z}) + \dots + c_s P'_{\mathbf{y}_s}(\mathbf{z}) \equiv 0 \pmod{p} \quad \forall \mathbf{z} \in V. \quad (18)$$

Возьмем $\mathbf{z} = \mathbf{y}_i$ с произвольным i . С одной стороны, $(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) = an$. В соответствии с условиями теоремы 4 имеем $an - p = xn$. Таким образом, $(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) \equiv xn \pmod{p}$, т.е. по свойству (*) выполнено $P'_{\mathbf{y}_i}(\mathbf{y}_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$. С другой стороны, если $j \neq i$, то $(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) < an$ и $(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) \neq xn$. Более того, поскольку $an - 2p < 0$ (в силу $a > 2x$), то $(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) \not\equiv xn \pmod{p}$ и по свойству (*) выполнено $P'_{\mathbf{y}_j}(\mathbf{y}_i) \equiv 0 \pmod{p}$.

Согласно (18) мы получаем, что $c_i \equiv 0 \pmod{p}$ (здесь существенна простота p). Поскольку i было произвольным, отсюда следует линейная независимость полиномов, и лемма доказана.

4.2. Доказательство теоремы 5. Рассмотрим последовательность графов $G_n = G'(n, \{b_n, 1 - a_n - b_n, a_n\}, x_n)$ с условиями $a_n \sim a$, $b_n \sim b$, $x_n \sim x$ и $a_n n, b_n n, x_n n \in \mathbb{N}$, при этом $p_n \sim (a_n + b_n + x_n)n$, где p_n – простое число.

Отметим, что так же, как и в п. 4.1, для любого x найдется функция $x(n)$ такая, что $(a + b + x(n))n = p$, где p простое, и $\frac{x}{x(n)} \sim 1$, а значит, найдется и такая последовательность a_n, b_n, x_n .

Ключевую роль в доказательстве теоремы 5 будет играть следующая

ЛЕММА 3. *Имеет место неравенство*

$$\alpha(G_n) = \alpha(G'(n, \{b_n, 1 - a_n - b_n, a_n\}, x_n)) \leq \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p_n-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{p_n-1-2j} C_n^j C_{n-j}^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2 (см. [19]).

Получим из леммы 3 теорему 5. Имеем $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Далее для краткости опустим все индексы n , отождествив a_n с a , и т. д. Это можно сделать в силу $a_n \sim a$ и в силу того, что нас интересует поведение оценки в пределе по n .

Поскольку $|V| = C_n^{an} C_{(1-a)n}^{bn}$, в соответствии с леммой 3 имеем

$$\alpha(G) \leq \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{p-1-2j} C_n^j C_{n-j}^i \leq n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} C_n^j C_{n-j}^{p-1-2j} = n f.$$

Далее максимизируем по j значение f . Обозначим его $f_{\max}$. Тогда, очевидно, будет выполнена оценка $F < n f_{\max}$. Итак, нам надо найти максимум функции $f = C_n^{\alpha n} C_{n-\alpha n}^{p-2\alpha n}$. Напомним, что $p = p'n$. Применим формулу Стирлинга:

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{(1-\alpha)^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} (1+\alpha-p')^{1+\alpha-p'} (p'-2\alpha)^{p'-2\alpha}} + \bar{o}(1) \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{\alpha^\alpha (1+\alpha-p')^{1+\alpha-p'} (p'-2\alpha)^{p'-2\alpha}} + \bar{o}(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Найдем максимум по α дроби, выписанной в скобках. Логарифмируя и дифференцируя ее, получаем, что максимум дроби будет достигаться при $\alpha = l = \frac{3p'+1-\sqrt{1+6p'-3(p')^2}}{6}$. После этого остается разложить по формуле Стирлинга выражение, соответствующее числу вершин графа, и подставить в формулу $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$. Получим

$$\chi(G) \geq \frac{C_n^{an} C_{(1-a)n}^{bn}}{n^2 f_{\max}} \geq \left(\frac{l^l (p'-2l)^{p'-2l} (1-p'+l)^{1-p'+l}}{a^a b^b (1-a-b)^{1-a-b}} + \bar{o}(1) \right)^n.$$

Отметим, что в силу выбора параметров в соответствии с теоремой 2 в графе не содержатся клики размера k при достаточно больших n . Теорема 5 доказана.

4.3. Доказательство теоремы 6. Зафиксируем k , a , а стало быть, и τ_0 , τ_1 , c . В случае, когда $c \leq 1$, утверждение теоремы 6 тривиально. Рассмотрим ситуацию, когда $c > 1$.

Возьмем произвольное $c' \in (1, c)$. Здесь важно, что c' строго меньше c , хотя и сколь угодно близко к c . Если мы покажем, что $\zeta_k \geq c'$, то, взяв супремум обеих частей неравенства по c' , мы получим искомое утверждение $\zeta_k \geq c$.

Итак, нам нужно убедиться в существовании такой функции $\delta(n) = \bar{o}(1)$, что при всех n найдется граф расстояний $G = (V, E)$ в $\mathbb{R}^n$, для которого одновременно $\omega(G) < k$ и $\chi(G) \geq (c' + \delta(n))^n$.

Зафиксируем a , $0 < a < 1$. Пусть p – минимальное простое число, удовлетворяющее условию $[an] - 2p < 0$. Рассмотрим для каждого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ граф $G_n = G(n, 1, \{1 - a, a\}, p) = (V_n, E_n)$.

С помощью формулы Стирлинга легко показать, что

$$N = |V_n| = (\tau_1 + \bar{o}(1))^n.$$

В то же время с помощью линейно-алгебраического метода можно получить оценку (см. лемму 2)

$$\alpha = \alpha(G_n) \leq nC_n^p.$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем $p \sim \frac{a}{2}n$, значит, согласно формуле Стирлинга $\alpha \leq (\tau_0 + \bar{o}(1))^n$.

Конечно, если применить простую оценку $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$, то окажется, что

$$\chi(G_n) \geq \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} + \delta_1(n) \right)^n$$

с некоторой $\delta_1 = \bar{o}(1)$. Проблема состоит в том, что граф расстояний G_n может содержать клики размера k .

Как и в работе [18], мы воспользуемся вероятностным методом (см. [22]). Рассмотрим произвольное число $\gamma \in (\frac{\tau_0 c'}{\tau_1}, 1)$. Такое γ существует, поскольку $c' < c \leq \frac{\tau_1}{\tau_0}$. Положим $p = \gamma^n$, где n достаточно велико. Построим случайный подграф $G = (V_n, E)$ графа G_n , включая в E каждое ребро из E_n с вероятностью p независимо от остальных ребер (см. [23]). Образуется вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$, в котором

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \{G = (V_n, E), E \subseteq E_n\}, & \mathcal{B}_n &= 2^{\Omega_n}, \\ P_n(G) &= q^{|E|}(1 - q)^{|E_n| - |E|}, & G &= (V_n, E). \end{aligned}$$

Определим на Ω_n два семейства событий. Во-первых, для некоторого l занумеруем все l -элементные подмножества V_n и введем события

$$X_i = \{i\text{-е } l\text{-элементное подмножество не содержит ребер}\}, \quad i = 1, \dots, C_N^l.$$

Во-вторых, занумеруем все k -клики графа G_n и введем события

$$\begin{aligned} Y_j &= \{j\text{-е } k\text{-элементное подмножество является кликой в } G\}, \\ j &= 1, \dots, \text{cl}_k(G_n), \end{aligned}$$

где $\text{cl}_k(G_n)$ – число клик размера k в графе G_n .

Пусть $l = \lceil (\frac{\tau_1}{c'})^n \rceil$. Ясно, что в силу неравенства $c' > 1$ при больших n выполнено $l < N = |\mathcal{V}_n|$, а стало быть, события X_i корректно определены.

Нам нужно доказать, что

$$\mathbb{P}\left(\bigwedge_{i=1}^{C_N^l} \overline{X_i} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\text{cl}_k(G_n)} \overline{Y_j}\right) > 0. \quad (19)$$

Действительно, это будет означать, что существует подграф G' в G_n такой, что он не содержит клик размера k , и при этом $\alpha(G') \leq l$, т.е. $\chi(G) \geq (c' + o(1))^n$, и теорема 6 будет доказана.

Для того чтобы показать, что верно (19), воспользуемся локальной леммой Ловаса (см. [22]).

ТЕОРЕМА 8 (локальная лемма Ловаса). Пусть $A_1, \dots, A_m$ – события в некотором вероятностном пространстве, $J(1), \dots, J(m)$ – подмножества из $\{1, \dots, m\}$. Пусть даны действительные числа γ_i , $0 < \gamma_i < 1$, $i = 1, \dots, m$, и выполнены условия:

- 1) A_i не зависит от алгебры, порожденной событиями $\{A_j, j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{J(i) \cup \{i\}\}\}$;
- 2) $\mathbb{P}(A_i) \leq \gamma_i \prod_{j \in J(i)} (1 - \gamma_j)$.

Тогда $\mathbb{P}(\bigwedge_{i=1}^m \overline{A_i}) \geq \prod_{i=1}^m (1 - \gamma_i) > 0$.

Воспользуемся следующим вариантом локальной леммы Ловаса (см. [23]).

ЛЕММА 4. Пусть $A_1, \dots, A_m$ и $J(1), \dots, J(m)$ такие же, как и в условиях теоремы 8. Пусть даны действительные числа δ_i , $0 < \delta_i \mathbb{P}(A_i) < 0.69$, $i = 1, \dots, m$, и выполнено условие

$$\ln \delta_i \geq \sum_{j \in J(i)} 2\delta_j \mathbb{P}(A_j). \quad (20)$$

Тогда $\mathbb{P}(\bigwedge_{i=1}^m \overline{A_i}) \geq \prod_{i=1}^m (1 - \delta_i \mathbb{P}(A_i)) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получить из теоремы 8, нужно лишь проверить, что неравенство из теоремы 8, 2) следует из неравенства (20). Действительно, имеет место следующее неравенство:

$$\ln \delta_i \geq \sum_{j \in J(i)} 2\delta_j \mathbb{P}(A_j) \geq \sum_{j \in J(i)} -\ln(1 - \delta_j \mathbb{P}(A_j)),$$

поскольку

$$\ln(1 - t) \geq -t - t^2 \geq -2t \quad (21)$$

для $0 < t < 0.69$ (см. [23]). Возьмем экспоненту от обеих частей (21):

$$\delta_i \geq \prod_{j \in J(i)} (1 - \delta_j \mathbb{P}(A_j))^{-1}.$$

Наконец, подставляя $\delta_i = \gamma_i / \mathbb{P}(A_i)$, получим утверждение леммы.

Перед тем как применять лемму 4, нам нужно вычислить вероятности событий X_i, Y_i .

Начнем с X_i . Обозначим $a_i = |E(G_n|_{W_i})|$, где W_i – это i -е l -элементное подмножество в V_n . Иначе, a_i – число ребер внутри W_i в графе G_n . Тогда

$$P(X_i) = (1 - p)^{a_i} \leq e^{-pa_i} = e^{-\gamma^n a_i}.$$

Ясно, что поскольку $\frac{\tau_1}{c'} > \tau_0$, то $l > \alpha = \alpha(G_n)$ при всех достаточно больших n , а стало быть, для каждого W_i выполнено $a_i > 0$. Нетрудно установить и гораздо более точное неравенство $a_i \geq \frac{l^2}{4\alpha}$, верное при $l > 2\alpha$.

Действительно, выберем в графе $G_n|_{W_i}$ максимальное независимое множество. В нем будет не более α элементов. В силу его максимальной в каждую из оставшихся $l - \alpha$ вершин из какой-то вершины независимого множества будет выходить ребро. Далее, выберем максимальное независимое множество из оставшихся $l - \alpha$ вершин. Из вершин этого множества будет выходить не менее $l - 2\alpha$ ребер в оставшиеся $l - 2\alpha$ вершин. Остановим этот процесс на шаге s , когда $l - s\alpha < \frac{l}{2}$. Тогда суммарное число ребер, которое мы наберем в таком процессе, будет не меньше $\frac{sl}{2}$, при этом $s > \frac{l}{2\alpha}$. Итого мы наберем не менее $\frac{l^2}{4\alpha}$ ребер.

Заметим, что

$$\frac{l^2}{4\alpha} \geq \frac{\left(\left(\frac{\tau_1}{c'}\right)^2 + \bar{o}(1)\right)^n}{(\tau_0 + \bar{o}(1))^n} = \left(\frac{\tau_1^2}{\tau_0(c')^2} + \bar{o}(1)\right)^n. \quad (22)$$

Теперь найдем вероятность Y_i . Как нетрудно понять, $P(Y_i) = p^{k(k-1)/2} = \gamma^{nk(k-1)/2}$.

Оценим для каждого X_i число зависимых с ним событий Y_j . Для того чтобы эти события были зависимыми, соответствующие множества W_i и Q_j должны иметь общее ребро. Число способов достроить фиксированное ребро до k -клик не больше $\text{conn}_k^2(G_n)$ (см. (6)). Таким образом, число событий вида Y_j , от которых зависит X_i , не превосходит $z_i = a_i N^{s_k^2(a, \frac{\alpha}{2}) + \bar{o}(1)}$.

Мы будем считать, что каждое Y_i зависит не более чем от C_N^l событий вида X_j . Аналогично, для каждого X_i число событий вида X_j , от которых зависит X_i , не превосходит C_N^l .

Осталось для каждого Y_i оценить число событий Y_j , от которых Y_i зависит. Зависимость двух событий означает, что они имеют общее ребро. Несложно показать, что число таких зависимостей не больше чем $y = C_k^2 N^{s_k^2(a, \frac{\alpha}{2}) + \bar{o}(1)} = N^{s_k^2(a, \frac{\alpha}{2}) + \bar{o}(1)}$.

Для каждого X_i разобьем множество $J(X_i)$ на две части: часть $J^x(X_i)$, в которую попали события типа X_j , зависимые с событием X_i , и часть $J^y(X_i)$, в которую попадают события типа Y_j , зависимые с событием X_i . Аналогично поступим с множествами $J(Y_i)$. Для того чтобы применить лемму 4, перепишем

условия (20) для событий X_i , Y_i соответственно:

$$\begin{aligned} \ln \delta_i^x &\geq 2 \sum_{j \in J^x(X_i)} \delta_j^x e^{-\gamma^n a_j} + 2 \sum_{j \in J^y(X_i)} \delta_j^y \gamma^{nk(k-1)/2}, \\ \ln \delta_i^y &\geq 2 \sum_{j \in J^x(Y_i)} \delta_j^x e^{-\gamma^n a_j} + 2 \sum_{j \in J^y(Y_i)} \delta_j^y \gamma^{nk(k-1)/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь рассмотрим функцию $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, которую мы выберем позже, и положим $\delta_i^y = e$, $\delta_i^x = e^{(\gamma-\varepsilon)^n a_i}$. Несложно проверить, что, действительно, для достаточно больших n выполнено $0 < \delta_i^x P(X_i) < 0.69$, $0 < \delta_i^y P(Y_i) < 0.69$ (см. лемму 4). Тогда для любого j

$$\begin{aligned} \delta_j^x e^{-\gamma^n a_j} &= e^{(\gamma-\varepsilon)^n a_j - \gamma^n a_j} = e^{-(\gamma - \bar{o}(1))^n a_j} \leq \exp \left\{ -(\gamma - \bar{o}(1))^n \frac{l^2}{4\alpha} \right\} \\ &\stackrel{(22)}{\leq} \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma \tau_1^2}{(c')^2 \tau_0} + \bar{o}(1) \right)^n \right\}. \end{aligned}$$

Далее,

$$C_N^l \leq \left(\frac{eN}{l} \right)^l \leq (c' + \bar{o}(1))^{(\frac{\tau_1}{c'} + \bar{o}(1))^n} \leq \exp \left\{ \left(\frac{\tau_1}{c'} + \bar{o}(1) \right)^n \right\}.$$

Таким образом, для любого i

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J^x(X_i)} \delta_j^x e^{-\gamma^n a_j} &\leq \sum_{j \in J^x(X_i)} \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma \tau_1^2}{(c')^2 \tau_0} + \bar{o}(1) \right)^n \right\} \\ &\leq C_N^l \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma \tau_1^2}{(c')^2 \tau_0} + \bar{o}(1) \right)^n \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \left(\frac{\tau_1}{c'} + \bar{o}(1) \right)^n - \left(\frac{\gamma \tau_1^2}{(c')^2 \tau_0} + \bar{o}(1) \right)^n \right\} = \bar{o}(1), \end{aligned}$$

поскольку $\gamma > \frac{\tau_0 c'}{\tau_1}$, а значит, $\frac{\gamma \tau_1^2}{(c')^2 \tau_0} > \frac{\tau_1}{c'}$. Из аналогичных соображений получаем

$$\sum_{j \in J^x(Y_i)} \delta_j^x e^{-\gamma^n a_j} = \bar{o}(1).$$

Итак, для того чтобы убедиться в том, что неравенства (23) выполняются, достаточно проверить следующую систему неравенств:

$$\begin{aligned} (\gamma - \varepsilon)^n a_i &\geq 2e a_i N^{s_k^2(a, \frac{a}{2}) + \bar{o}(1)} \gamma^{nk(k-1)/2} \\ 1 &\geq 2e N^{s_k^2(a, \frac{a}{2}) + \bar{o}(1)} \gamma^{nk(k-1)/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Как несложно видеть, из двух неравенств в (24) достаточно проверять только первое. Получаем, что для любой функции $\delta(n) = \bar{o}(1)$ и для любых достаточно больших n должно быть выполнено неравенство

$$1 \geq N^{s_k^2(a, \frac{a}{2}) + \delta(n)} \gamma^{n \left(\frac{k(k-1)}{2} - 1 - \varepsilon_0 \right)}, \quad (25)$$

где $\varepsilon_0 = \log_\gamma(\gamma - \varepsilon) - 1$, и поэтому $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ можно выбрать таким, чтобы ε_0 было положительным и при этом сколь угодно малым. Имеем

$$N^{s_k^2(a, \frac{a}{2}) + \delta(n)} \gamma^{n\left(\frac{k(k-1)}{2} - 1 - \varepsilon_0\right)} = e^{n(\ln \tau_1)\left(s_k^2(a, \frac{a}{2}) + \delta(n)\right)} e^{n(\ln \gamma)\left(\frac{k(k-1)}{2} - 1 - \varepsilon_0\right)},$$

поэтому вместо (25) достаточно проверить неравенство

$$s_k^2\left(a, \frac{a}{2}\right) \ln \tau_1 + \left(\frac{k(k-1)}{2} - 1 - \varepsilon_0\right) \ln \gamma < 0. \quad (26)$$

Выберем γ настолько близким к $\frac{\tau_0 c'}{\tau_1}$, чтобы

$$\gamma < \frac{\tau_0 c}{\tau_1} = \tau_1^{-\frac{2s_k^2(a, \frac{a}{2})}{(k-2)(k+1)}}$$

(такой выбор возможен в силу $c > c'$), и ε_0 таким малым (для этого мы подберем $\varepsilon(\gamma)$), чтобы было верно и неравенство

$$\gamma < \tau_1^{-\frac{2s_k^2(a, \frac{a}{2})}{(k-2)(k+1) - \varepsilon_0}}.$$

Теперь, подставляя последнее неравенство в (26), получаем

$$\begin{aligned} & s_k^2\left(a, \frac{a}{2}\right) \ln \tau_1 + \left(\frac{k(k-1)}{2} - 1 - \varepsilon_0\right) \ln \gamma \\ & < s_k^2\left(a, \frac{a}{2}\right) \ln \tau_1 + \left(\frac{(k+1)(k-2)}{2} - \varepsilon_0\right) \ln \left(\tau_1^{-\frac{2s_k^2(a, \frac{a}{2})}{(k-2)(k+1) - \varepsilon_0}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым мы проверили, что выполняются все условия леммы 4, значит, имеет место неравенство (19), и теорема 6 доказана.

4.4. Доказательство теоремы 7. Доказательство теоремы 7 практически полностью повторяет доказательство теоремы 6. По существу, отличие состоит только в выборе графа G_n .

А именно, зафиксируем $a, b \in (0, 1)$, $a + b \leq \frac{1}{2}$, $a \geq b$. Пусть p – минимальное простое число, удовлетворяющее условию $[bn] + [an] - 2p < -2[bn]$. Понятно, что $p \sim \frac{3b+a}{2}$. Рассмотрим граф $G_n = G'(n, \{b, 1 - a - b, a\}, a + b - p) = (V_n, E_n)$ (см. определение 2).

По формуле Стирлинга имеем $|V_n| = (\rho_1 + \bar{o}(1))^n$. Кроме того, известно, что (см. лемму 3)

$$\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n) \leq (\rho_0 + \bar{o}(1))^n.$$

Наконец, неравенство типа $r(W) \geq \frac{l^2}{4\alpha}$, $|W| = l \geq 2\alpha$, верно и здесь. Дальнейшие рассуждения ясны, и теорема 7 доказана.

4.5. Доказательство утверждения 2. Оценка (7) и первое неравенство в (8) получаются применением утверждения 1.

Для того чтобы получить равенство в (8), нужно посчитать количество треугольников, которые можно образовать с заданным ребром в графе $G(n_i, 1)$,

$\{1 - a, a\}, \frac{a}{2}$). Два вектора u, v из $G(n_i, 1, \{1 - a, a\}, \frac{a}{2})$, образующих ребро, имеют $\frac{an}{2}$ общих единиц. Найдем для различных t количество $M(t)$ векторов, образующих с u, v треугольник и таких, что все три вектора имеют tn общих единиц. Найдем максимум величины $M(t)$ по t , и тогда количество всех векторов, образующих с заданным ребром треугольник, будет не более $\frac{an}{2} M = M(1 + \bar{o}(1))^n$.

Итак, нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} M(t) &= C_{\frac{an}{2}}^{tn} \left(C_{\frac{an}{2}}^{\frac{an}{2} - tn} \right)^2 C_{n - \frac{3an}{2}}^{tn} = \left(C_{\frac{an}{2}}^{tn} \right)^3 C_{n - \frac{3an}{2}}^{tn} \\ &= \left(\frac{\left(1 - \frac{3a}{2}\right)^{1 - \frac{3a}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3a}{2}}}{t^{4t} \left(\frac{a}{2} - t\right)^{\frac{3a}{2} - 3t} \left(1 - \frac{3a}{2} - t\right)^{1 - \frac{3a}{2} - t}} + \bar{o}(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Отсюда несложно видеть, что

$$s_3^2\left(a, \frac{a}{2}\right) = \max_t \log_{\frac{1}{a^a(1-a)^{1-a}}} \left(\frac{\left(1 - \frac{3a}{2}\right)^{1 - \frac{3a}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3a}{2}}}{t^{4t} \left(\frac{a}{2} - t\right)^{\frac{3a}{2} - 3t} \left(1 - \frac{3a}{2} - t\right)^{1 - \frac{3a}{2} - t}} \right).$$

Дифференцируя $M(t)$ по t , получаем, что максимум $M(t)$ достигается в точке, являющейся решением уравнения $t^4 = (\frac{1}{2}a - t)^3(1 - \frac{3}{2}a - t)$. Решение этого уравнения находится, и оно имеет указанный в формулировке утверждения вид.

Список литературы

1. P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.
2. M. Benda, M. Perles, “Colorings of metric spaces”, *Geombinatorics*, **9:3** (2000), 113–126.
3. А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, *Матем. просвещение*, 2004, № 8, 186–221.
4. А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146; англ. пер.: А. М. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56:1** (2001), 103–139.
5. L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics*, v. II (Budapest, Hungary, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 649–666.
6. O. Nechushtan, “On the space chromatic number”, *Discrete Math.*, **256:1–2** (2002), 499–507.
7. R. Radoičić, G. Tóth, “Note on the chromatic number of the space”, *Discrete and computational geometry*, Algorithms Combin., **25**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 696–698.
8. K. Cantwell, “Finite Euclidean Ramsey theory”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **73:2** (1996), 273–285.
9. J. Cibulka, “On the chromatic number of real and rational spaces”, *Geombinatorics*, **18:2** (2008), 53–65.
10. D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.

11. А. Б. Купавский, А. М. Райгородский, “О хроматическом числе $\mathbb{R}^9$ ”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:5 (2008), 139–154; англ. пер.: A. B. Kupavskii, A. M. Raigorodskii, “On the chromatic number of $\mathbb{R}^9$ ”, *J. Math. Sci.*, **163**:6 (2009), 720–731.
12. А. Б. Купавский, “О поднятии оценки хроматического числа $\mathbb{R}^n$ в большую размерность”, *Докл. РАН*, **429**:3 (2009), 305–308; англ. пер.: A. B. Kupavskii, “Lifting of a bound for the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ to higher dimensions”, *Dokl. Math.*, **80**:3 (2009), 833–836.
13. А. Б. Купавский, “О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$ ”, *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 83–110; англ. пер.: A. B. Kupavskii, “On the colouring of spheres embedded in $\mathbb{R}^n$ ”, *Sb. Math.*, **202**:6 (2011), 859–886.
14. P. Erdős, “Graph theory and probability”, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.
15. P. Erdős, “Unsolved problems”, *Congres Numerantium XV*, Utilitas Math., Winnipeg, 1976.
16. P. O’Donnell, “Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph embedding”, *Geombinatorics*, **9**:3 (2000), 145–150.
17. P. O’Donnell, “Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. II. Graph embedding”, *Geombinatorics*, **9**:4 (2000), 180–193.
18. Е. Е. Демёхин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, “Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера”, *Матем. сб.*, **204**:4 (2013), 49–78; англ. пер.: E. E. Demekhin, A. M. Raigorodskii, O. I. Rubanov, “Distance graphs having large chromatic numbers and containing no cliques or cycles of a given size”, *Sb. Math.*, **204**:4 (2013), 508–538.
19. А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
20. Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Связь, М., 1979; пер. с англ.: F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*, I, II, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
21. R. C. Baker, G. Harman, J. Pintz, “The difference between consecutive primes. II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **83**:3 (2001), 532–562.
22. Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином: лаборатория знаний, М., 2007; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
23. B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

Андрей Борисович Купавский
 (ANDREY B. KUPAVSKII)
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет)
 E-mail: kupavskii@yandex.ru

Поступило в редакцию
 08.02.2012
 12.07.2012