Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Пономарева, Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 5, 155–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:20:06

УДК 512.813.4+512.845

Е. В. Пономарева

Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1

Получена классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Рассмотрено приложение данной задачи к проблеме разложения тензорных произведений неприводимых представлений полупростых групп Ли.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: полупростые группы Ли, двойные многообразия флагов, сложность, линейные представления.

DOI: 10.4213/im7963

§ 1. Введение

Пусть G – полупростая комплексная алгебраическая группа, B – ее подгруппа Бореля. Пусть группа G действует на неприводимом комплексном алгебраическом многообразии X , это действие индуцирует действие подгруппы B на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Сложностью действия группы G на многообразии X называется коразмерность $c(X) = c_G(X)$ типичной орбиты $Bx \subseteq X$ для действия борелевской подгруппы.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно теореме Розенлихта имеем $c(X) = \text{tr.deg } \mathbb{C}(X)^B / \mathbb{C}$.

Параболической подгруппой называется подгруппа $P \subset G$, которая содержит борелевскую подгруппу. *Двойные многообразия флагов* – это многообразия вида $X = G/P \times G/Q$, где P и Q – параболические подгруппы. Будем рассматривать диагональное действие группы G на $G/P \times G/Q$. Работа посвящена классификации двойных многообразий флагов сложности не больше 1. П. Литтельман [1] классифицировал двойные многообразия флагов сложности 0 в случае максимальных параболических подгрупп. Дж. Стембридж [2] классифицировал все двойные многообразия флагов сложности 0. Д. И. Панюшев [3] нашел сложности двойных многообразий флагов в случае максимальных параболических подгрупп. В настоящей работе получены единым более простым и концептуальным методом уже известные результаты и завершена классификация в случае сложности 1.

Задача классификации двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 имеет приложения к разложению на неприводимые слагаемые тензорных произведений неприводимых представлений G . Любой неприводимый G -модуль реализуется как пространство сечений некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}$ над G/P

(где P – параболическая подгруппа). Тензорное произведение пространств сечений $H^0(G/P, \mathcal{L}) \otimes H^0(G/Q, \mathcal{M})$ можно рассматривать как пространство сечений линейного расслоения над прямым произведением многообразий G/P и G/Q , т. е. $H^0(G/P \times G/Q, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$, где $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M} \rightarrow G/P \times G/Q$ – линейное расслоение, слоями которого являются тензорные произведения слоев над соответствующими точками, таким образом, $(\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})_{(x,y)} = \mathcal{L}_x \otimes \mathcal{M}_y$, где $x \in G/P$, $y \in G/Q$. В случае, когда сложность многообразия $X = G/P \times G/Q$ равна 0 или 1, существует эффективный способ разложения пространства сечений $H^0(X, \mathcal{N})$ линейного расслоения $\mathcal{N} \rightarrow X$ на неприводимые подмодули.

Полупростая группа G разлагается в почти прямое произведение простых подгрупп $G = G_1 \cdots G_s$, параболические подгруппы $P, Q \subseteq G$ – в почти прямое произведение параболических подгрупп $P_i, Q_i \subseteq G_i$. Тогда

$$c_G(G/P \times G/Q) = c_{G_1}(G_1/P_1 \times G_1/Q_1) + \cdots + c_{G_s}(G_s/P_s \times G_s/Q_s).$$

Таким образом, вопрос о сложности двойных многообразий флагов для полупростых групп сводится к рассмотрению простых групп.

В случае классических групп в качестве B будем рассматривать подгруппу верхнетреугольных матриц (считая в ортогональном и симплектическом случаях, что билинейная форма, сохраняемая группой G , имеет антидиагональную матрицу). Тогда параболические подгруппы, содержащие B , имеют блочно-верхнетреугольный вид и их можно задавать размерами блоков на диагонали. Исключение составляет группа SO_n при четных n , для которой не все параболические подгруппы имеют описанный вид. Оставшиеся приобретают описанный вид при сопряжении с перестановкой двух средних базисных векторов; такие параболические группы будем пометать штрихами.

В случае особых групп параболические подгруппы $P \supseteq B$ будем задавать подмножествами простых корней $\Pi \setminus I$, где Π – система простых корней группы G , отвечающая выбору максимального тора $T \subseteq B$, а $I \subseteq \Pi$ – система простых корней стандартной подгруппы Леви в P . Нумерация корней будет соответствовать [4].

Таблица 1. Пары параболических подгрупп, соответствующих двойным многообразиям флагов сложности 0 и 1 для группы SL_n

Кол-ва блоков в P и Q	Сложность 0		Сложность 1	
	P	Q	P	Q
2, 2	(p_1, p_2)	(q_1, q_2)		
2, 3	(p_1, p_2)	$(1, q_2, q_3)$	$(3, p_2), p_2 \geq 3$	$(q_1, q_2, q_3), q_1, q_2, q_3 \geq 2$
	(p_1, p_2)	$(q_1, 1, q_3)$	$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 3$	$(2, 2, q_3), q_3 \geq 2$
	$(2, p_2)$	(q_1, q_2, q_3)	$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 3$	$(2, q_2, 2), q_2 \geq 2$
2, 4			$(2, p_2)$	(q_1, q_2, q_3, q_4)
			$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 2$	$(1, 1, 1, q_4)$
			$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 2$	$(1, 1, q_3, 1)$
2, s	$(1, p_2)$	$(q_1, q_2, \dots, q_s)$		
3, 3			$(1, 1, p_3)$	(q_1, q_2, q_3)
			$(1, p_2, 1)$	(q_1, q_2, q_3)

Таблица 2. Пары параболических подгрупп, соответствующих двойным многообразиям флагов сложности 0 и 1 для группы SO_n

Кол-ва блоков в P и Q	Сложность 0		Сложность 1	
	P	Q	P	Q
2, 2	(p, p) (p, p)	(p, p) $(p, p)'$		
2, 3	(p, p) (p, p)	$(q_1, q_2, q_1), q_1 \leq 3$ $(q, 2, q)$	$(6, 6)$	$(4, 4, 4)$
2, 4	(p, p) (p, p) $(4, 4)$	$(1, q, q, 1)$ $(1, q, q, 1)'$ $(2, 2, 2, 2)'$	$(4, 4)$ $(5, 5)$ $(5, 5)$ $(5, 5)$ $(5, 5)$	$(2, 2, 2, 2)$ $(2, 3, 3, 2)$ $(3, 2, 2, 3)$ $(2, 3, 3, 2)'$ $(3, 2, 2, 3)'$
2, 5	(p, p)	$(1, 1, q, 1, 1)$	$(4, 4)$ $(4, 4)$	$(1, 2, 2, 2, 1)$ $(2, 1, 2, 1, 2)$
2, 6			$(4, 4)$ $(4, 4)$	$(1, 1, 2, 2, 1, 1)$ $(1, 1, 2, 2, 1, 1)'$
3, 3	$(1, p, 1)$ $(p, 1, p)$	(q_1, q_2, q_1) $(p, 1, p)$	$(2, 2, 2)$ $(2, p, 2), p > 1$	$(2, 2, 2)$ $(q, 1, q)$
3, 4	$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_2, q_1)	$(2, 2, 2)$	$(1, 2, 2, 1)$
3, 5			$(1, p, 1)$ $(2, 1, 2)$	$(q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$ $(1, 1, 1, 1, 1)$
3, 6			$(1, p, 1)$	$(q_1, q_2, q_3, q_3, q_2, q_1)$
4, 4			$(1, 2, 2, 1)$ $(1, 2, 2, 1)$	$(1, 2, 2, 1)$ $(1, 2, 2, 1)'$

В работе будут доказаны следующие теоремы классификации.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – классическая группа (SL_n, SO_n, Sp_n). Тогда все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 соответствуют парам параболических подгрупп (с точностью до перестановки, а для группы SL_n – еще с точностью до одновременного транспонирования относительно побочной диагонали, для группы SO_{2n} , кроме того, с точностью до диаграммного автоморфизма G), приведенных в табл. 1–3.

Таблица 3. Пары параболических подгрупп, соответствующих двойным многообразиям флагов сложности 0 и 1 для группы Sp_n

Кол-ва блоков в P и Q	Сложность 0		Сложность 1	
	P	Q	P	Q
2, 2	(p, p)	(p, p)		
2, 3	(p, p)	$(1, q, 1)$	(p, p)	$(2, q, 2)$
2, 4			$(2, 2)$	$(1, 1, 1, 1)$
3, 3	$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_1)		
3, 4			$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_2, q_1)
3, 5			$(1, p, 1)$	$(q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$

ТЕОРЕМА 2. 1) Для групп G_2 , F_4 и E_8 двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 не существует.

2) Для группы E_6 многообразия сложности 0 отвечают следующим парам параболических подгрупп:

$$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_4\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_6\}), (\{\alpha_2\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_4\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_6\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_5\});$$

многообразия сложности 1 отвечают следующим парам параболических подгрупп:

$$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_6\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_4, \alpha_5\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_5, \alpha_6\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_6\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_4, \alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_5, \alpha_6\}).$$

3) Для группы E_7 многообразия сложности 0 отвечают следующим парам параболических подгрупп:

$$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_6\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_7\});$$

многообразия сложности 1 отвечают следующей паре параболических подгрупп:

$$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}).$$

Представим кратко структуру статьи. В §2 описан способ разложения пространства сечений $H^0(X, \mathcal{N})$ линейного расслоения $\mathcal{N} \rightarrow X$ на неприводимые подмодули в случае, когда сложность многообразия X равна 0 или 1, и рассмотрены примеры разложений тензорных произведений неприводимых представлений с использованием этого способа. В §3 приведены некоторые общие теоремы о сложности двойных многообразий флагов. В §4, 5 получена классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 в случае классических и особых групп соответственно.

§ 2. Описание разложения пространства сечений

Пусть группа G действует на нормальном многообразии X . Будем рассматривать простые B -инвариантные дивизоры на X . Каждому простому дивизору D можно сопоставить гомоморфизм $\text{ord}_D: \mathbb{C}(X)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$, $f \mapsto \text{ord}_D(f)$.

Всякое линейное расслоение над X снабжается линейным действием группы G [5], и всякий дивизор Картье δ линейно эквивалентен некоторому B -инвариантному дивизору в силу выбора B -полуинвариантного рационального сечения соответствующего линейного расслоения $\mathcal{O}(\delta)$ [6].

2.1. Случай сложности нуль. В данном случае $\mathbb{C}(X)^B = \mathbb{C}$, поэтому каждая B -полуинвариантная функция однозначно определяется по своему весу с точностью до умножения на число. Поскольку значение $\text{ord}_D(f)$ не изменяется при домножении f на константу, множество B -инвариантных простых дивизоров можно отобразить (вообще говоря, не инъективно) в группу $\text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$, где $\Lambda = \Lambda(X)$ – решетка весов B -полуинвариантных рациональных функций на X . Обозначим через v_D образ дивизора D при этом отображении. Тогда $\text{ord}_D f_\lambda = \langle v_D, \lambda \rangle$, где f_λ – функция веса λ .

Простые B -инвариантные дивизоры лежат в дополнении к открытой B -орбите, поэтому число их конечно.

Через V_λ будем обозначать неприводимый G -модуль старшего веса λ .

Пространство сечений линейного расслоения $\mathcal{O}(D)$ можно отождествить с рациональными функциями $f \in \mathbb{C}^\times(X)$, для которых дивизор $\operatorname{div} f + D$ эффективен. Сечение, соответствующее $f \equiv 1$, назовем *каноническим*.

Сформулируем основную теорему о разложении пространства сечений.

ТЕОРЕМА 3 [7, предложение 3.3]. Пусть X – многообразие сложности 0, а $\delta = \sum_i m_i D_i$ – дивизор Картье, где D_i – все различные простые B -инвариантные дивизоры на X . Тогда

$$H^0(X, \mathcal{O}(\delta)) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(\delta) \cap \Lambda} V_{\lambda + \pi(\delta)},$$

где $\mathcal{P}(\delta) = \{\lambda \in \Lambda \otimes \mathbb{Q} \mid \langle v_i, \lambda \rangle \geq -m_i \forall i\}$ – некий многогранник в пространстве $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$, v_i – векторы, соответствующие дивизорам D_i , а $\pi(\delta)$ – вес канонического сечения s_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одно из эквивалентных определений сферичности многообразия X (многообразие называется *сферическим*, если его сложность равна нулю) заключается в том, что для любого G -линейного расслоения $\mathcal{L} \rightarrow X$ группа G действует на $H^0(X, \mathcal{L})$ с простым спектром. Поэтому достаточно описать множество старших весов. Любое B -полуинвариантное сечение представляется в виде $s = f_\lambda s_\delta$, эффективность дивизора $\operatorname{div} s = \operatorname{div} f_\lambda + \delta$ равносильна условию $\lambda \in \mathcal{P}(\delta) \cap \Lambda$.

2.2. Случай сложности единица. Для многообразий сложности 1 B -инвариантные дивизоры устроены немного сложнее. Будем считать, что X – рациональное многообразие. В этом случае по теореме Люрота имеем $\mathbb{C}(X)^B \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, поэтому B -полуинвариантные функции определяются по весу с точностью до умножения на функцию из $\mathbb{C}(X)^B \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, т.е. любая B -полуинвариантная функция представляется в виде $f_\lambda q$, где f_λ – некоторая фиксированная функция веса λ , а $q \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$. Можно построить рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, типичные слои которого являются замыканиями типичных B -орбит. Поэтому простые B -инвариантные дивизоры устроены следующим образом: все они, за исключением некоторого конечного числа, образуют семейство, которое параметризуется проективной прямой, за исключением конечного числа точек.

Аналогично случаю сложности 0, простому B -инвариантному дивизору D можно сопоставить вектор v_D из $\operatorname{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z})$, ограничив ord_D на $\{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ (где f_λ выбираются таким образом, что отображение $\lambda \mapsto f_\lambda$ является гомоморфизмом групп). Если ограничить ord_D на $\mathbb{C}(X)^B \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, то получим нормирование $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ с некоторым центром $z_D \in \mathbb{P}^1$ и порядок $h_D \in \mathbb{Z}_+$ локальной координаты в z_D (при $h_D = 0$ в качестве z_D можно взять любую точку из $\mathbb{P}^1$). Тогда $\operatorname{ord}_D f = \langle v_D, \lambda \rangle + h_D \operatorname{ord}_{z_D} q$. Таким образом дивизору D сопоставляется тройка (v_D, z_D, h_D) . Удалив некоторое конечное множество точек из проективной прямой, можно считать, что для каждой из оставшихся точек z существует единственный B -инвариантный простой дивизор D такой, что $z_D = z$, причем $v_D = 0$, $h_D = 1$.

Для многообразий сложности 1 справедлива аналогичная теорема о разложении пространства сечений.

ТЕОРЕМА 4 [9]. Пусть X – рациональное многообразие сложности 1, а $\delta = \sum m_i D_i$ – дивизор Картье, где сумма пробегает по всем различным B -инвариантным простым дивизорам на X (при этом считаем, что имеется только конечное число m_i , отличных от нуля). Тогда

$$H^0(X, \mathcal{O}(\delta)) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}(\delta) \cap \Lambda} m(\delta, \lambda) V_{\lambda + \pi(\delta)},$$

где $\pi(\delta)$ – вес канонического сечения, $\mathcal{P}(\delta) = \{\lambda \in \Lambda \otimes \mathbb{Q} \mid \langle v_i, \lambda \rangle \geq -m_i \forall i, \text{ если } h_i = 0\}$; здесь (v_i, z_i, h_i) – тройка, соответствующая дивизору D_i , а кратность $m(\delta, \lambda)$ модуля $V_{\lambda + \pi(\delta)}$ в разложении задается формулой

$$m(\delta, \lambda) = \max \left(1 + \sum_{z \in \mathbb{P}^1} m_z, 0 \right),$$

где $m_z = \min_{z_i = z, h_i \neq 0} \left[\frac{\langle v_i, \lambda \rangle + m_i}{h_i} \right]$ для любого $z \in \mathbb{P}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1.

2.3. Примеры. Для иллюстрации описанных методов приведем несколько примеров. Систематическое изучение разложений с помощью этих методов является целью будущих статей.

ПРИМЕР 1. Пусть $G = \mathrm{Sp}_n$, $n = 2l$. Рассмотрим двойное многообразие флагов $X = G/P \times G/Q$, соответствующее паре параболических подгрупп $(1, 2l - 2, 1), (l, l)$. Это многообразие сложности 0. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис пространства $\mathbb{C}^n$, ε_i – веса векторов e_i относительно диагонального максимального тора T , $\omega_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ – фундаментальные веса. Через ℓ и S обозначим прямую и l -мерное подпространство, соответствующие точкам G/P и G/Q . Через x_i и $y_{i_1, \dots, i_l}$ обозначим плюккеровы координаты G/P и G/Q , а через E_k – B -инвариантное подпространство $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

Приведем список простых B -инвариантных дивизоров D_i (геометрических условий, которыми они задаются), их уравнений F_i , степеней уравнений по плюккеровым координатам и весов:

$D_1 \mid \ell \subset E_{n-1}$	x_n	$(1, 0) \mid \omega_1$
$D_2 \mid S \cap E_l \neq 0$	$y_{l+1, \dots, n}$	$(0, 1) \mid \omega_l$
$D_3 \mid (S + \ell) \cap E_{l-1} \neq 0$	$\sum_{i \geq l} (-1)^i x_i y_{i, \dots, \hat{i}, \dots, n}$	$(1, 1) \mid \omega_{l-1}$
$D_4 \mid (S + \ell) \cap \ell^\perp \cap E_l \neq 0$	$\sum_{i \leq l} (x_i y_{l+1, \dots, n} + \sum_{j > l} (-1)^{l+j} x_j y_{i, l+1, \dots, \hat{j}, \dots, n}) x_{n+1-i}$	$(2, 1) \mid \omega_l$

Точки, лежащие в дополнении к этим дивизорам, принадлежат открытой орбите. Действительно, если точка не лежит в D_2 , то матрицу, столбцы которой составляют базис подпространства S , за счет выбора базиса можно привести к следующему виду: нижняя подматрица размера $l \times l$ – единичная. Действием группы B можно добиться того, чтобы на остальных местах стояли нули. Если

точка к тому же не лежит в D_1 , то нижний элемент столбца, порождающего ℓ , отличен от нуля. Тогда действием группы можно обнулить элементы, стоящие в строках $l + 1, \dots, n - 1$. Если точка не лежит в D_3 , то элемент, стоящий в l -й строке, не равен нулю, действием группы можно обнулить элементы, стоящие в строках $2, \dots, l - 1$. Если точка не лежит в D_4 , то оставшийся элемент в 1-й строке ненулевой. Действием группы можно сделать эти три ненулевых элемента равными единице, т.е. привести точку к единственной канонической форме.

B -полуинвариантные функции устроены следующим образом: с точностью до умножения на число они являются такими отношениями произведений F_i , что степени числителя и знаменателя по каждой группе плюккерových координат совпадают. Отсюда можно найти решетку $\Lambda(X)$: она порождается весами $\varepsilon_1 - \varepsilon_l$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_l$. В качестве базисных весовых функций можно взять $f_{\varepsilon_1 - \varepsilon_l} = \frac{F_1 F_3}{F_4}$, $f_{\varepsilon_1 + \varepsilon_l} = \frac{F_1 F_2}{F_3}$. В базисе, двойственном к весам приведенных весовых функций, дивизорам будут соответствовать векторы $v_{D_1} = (1, 1)$, $v_{D_2} = (0, 1)$, $v_{D_3} = (1, -1)$, $v_{D_4} = (-1, 0)$.

Всякий дивизор эквивалентен линейной комбинации прообразов дивизоров Шуберта: $\delta = pD_1 + qD_2$. Пространство сечений линейного расслоения $\mathcal{O}(\delta)$ является тензорным произведением пространств сечений расслоений $\mathcal{O}(p\pi_1(D_1))$ и $\mathcal{O}(q\pi_2(D_2))$, где π_1, π_2 – проекции X на G/P , G/Q и $\pi_1(D_1), \pi_2(D_2)$ – дивизоры Шуберта. Поскольку пространства сечений расслоений $\mathcal{O}(p\pi_1(D_1))$ и $\mathcal{O}(q\pi_2(D_2))$ изоморфны $V_{p\omega_1}$ и $V_{q\omega_l}$ соответственно, для разложения произведения $V_{p\omega_1} \otimes V_{q\omega_l}$ достаточно вычислить $H^0(G/P \times G/Q, \mathcal{O}(pD_1 + qD_2))$. Многогранником весов является

$$P(\delta) = \{\lambda = -a\varepsilon_1 - b\varepsilon_l \mid 0 \leq b \leq a \leq p, a + b \leq 2q\},$$

тогда согласно теореме 3 разложение имеет следующий вид:

$$V_{p\omega_1} \otimes V_{q\omega_l} = \bigoplus_{\substack{0 \leq b \leq a \leq p \\ a + b \leq 2q \\ a \equiv b \pmod{2}}} V_{(p+q-a)\varepsilon_1 + q\varepsilon_2 + \dots + q\varepsilon_{l-1} + (q-b)\varepsilon_l}.$$

Данная формула легко следует из результатов, полученных П. Литтельманом [1, предложение 1.3, табл. 1], который находил такие разложения для сферических двойных многообразий флагов, соответствующих максимальным параболическим подгруппам. Разложение может быть также получено из симплектического правила Пиери (см., например, [8, предложение 1.4]).

ПРИМЕР 2. Пусть $G = \mathrm{SL}_n$. Возьмем двойное многообразие флагов, соответствующее паре параболических подгрупп $(3, p_2)$, (q_1, q_2, q_3) , причем будем считать, что $q_1, q_2, q_3 \geq 3$. Это многообразие сложности 1. Воспользуемся обозначениями, аналогичными обозначениям примера 1. Пусть $\omega_0 = \omega_n = 0$. Через λ^* обозначим старший вес двойственного к V_λ модуля. Операцию $\lambda \mapsto \lambda^*$ можно продолжить по линейности на все веса. Тогда $\varepsilon_i^* = -\varepsilon_{n+1-i}$.

Через R_i и S_j обозначим подпространства, соответствующие точкам G/P и G/Q , нижний индекс будет указывать размерность подпространства. Приведем список простых B -инвариантных дивизоров D_i (геометрических условий,

которыми они задаются), степеней их уравнений F_i по плюккеровым координатам и весов:

D_1	$R_3 \cap E_{n-3} \neq 0$	$(1, 0, 0)$	ω_3^*
D_2	$S_{q_1} \cap E_{n-q_1} \neq 0$	$(0, 1, 0)$	$\omega_{q_1}^*$
D_3	$S_{q_1+q_2} \cap E_{n-(q_1+q_2)} \neq 0$	$(0, 0, 1)$	$\omega_{q_1+q_2}^*$
$D_{4,5,6}$	$\langle R_3 \cap E_{n-3+k} + S_{q_1} \cap E_{n-3+k} \rangle$ $\cap E_{n-q_1-k} \neq 0, k = 1, 2, 3$	$(1, 1, 0)$	$\omega_{3-k}^* + \omega_{q_1+k}^*$
$D_{7,8,9}$	$\langle R_3 \cap E_{n-3+k} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-3+k} \rangle$ $\cap E_{n-(q_1+q_2)-k} \neq 0, k = 1, 2, 3$	$(1, 0, 1)$	$\omega_{3-k}^* + \omega_{(q_1+q_2)+k}^*$
D_{10}	$\langle \langle R_3 \cap E_{n-1} + S_{q_1} \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-q_1-1}$ $+ S_{q_1+q_2} \cap E_{n-q_1-1} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$	$(1, 1, 1)$	$\omega_1^* + \omega_{q_1+1}^* + \omega_{(q_1+q_2)+1}^*$
D_{11}	$\langle \langle R_3 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-2} + S_{q_1+q_2}$ $\cap E_{n-q_1-2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$	$(1, 1, 1)$	$\omega_{q_1+2}^* + \omega_{(q_1+q_2)+1}^*$
D_{12}	$\langle \langle R_3 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} + S_{q_1+q_2}$ $\cap E_{n-q_1-1} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-2} \neq 0$	$(1, 1, 1)$	$\omega_{q_1+1}^* + \omega_{(q_1+q_2)+2}^*$
D_{13}	$\langle R_3 \cap E_{n-2} + \langle R_3 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-2}$ $+ S_{q_1+q_2} \cap E_{n-q_1-2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-2} \neq 0$	$(2, 1, 1)$	$\omega_2^* + \omega_{q_1+2}^* + \omega_{(q_1+q_2)+2}^*$
$D(z)$ $z \in \mathbb{P}^1$ $z \neq 0, 1, \infty$	$F_4 F_8 F_{11} - z F_5 F_7 F_{12}$	$(3, 2, 2)$	$\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+2}^* + \omega_{q_1+q_2+1}^* + \omega_{q_1+q_2+2}^*$

Рассмотрим многочлены от F_i , $i = 1, \dots, 13$, как многочлены от плюккеровых координат. Подпространство многочленов веса $\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+2}^* + \omega_{q_1+q_2+1}^* + \omega_{q_1+q_2+2}^*$ и мультистепени $(3, 2, 2)$ по группам плюккеровых координат имеет размерность 2 и линейно порождается многочленами $F_4 F_8 F_{11}$, $F_5 F_7 F_{12}$, $F_{10} F_{13}$. При этом весовые подпространства меньшей степени по группам плюккеровых координат имеют размерность 1. Данные три многочлена линейно зависимы. Домножая F_i на константы, мы можем считать, что уравнение линейной зависимости имеет следующий вид:

$$F_4 F_8 F_{11} - F_5 F_7 F_{12} + F_{10} F_{13} = 0.$$

Многочлены весового подпространства можно рассматривать как линейные формы на $\mathbb{P}^1$, выбрав $F_4 F_8 F_{11}$ и $F_5 F_7 F_{12}$ в качестве однородных координат.

Нормирование, соответствующее дивизору $D(z)$, имеет порядок $h = 1$ и центр в точке z . Соответствующий этому дивизору вектор $v_{D(z)}$ равен нулю. Нормирования, соответствующие дивизорам D_4 , D_8 и D_{11} , имеют порядок $h = 1$ и центр в точке 0; нормирования, соответствующие дивизорам D_5 , D_7 и D_{12} , имеют порядок $h = 1$ и центр в точке ∞ ; нормирования, соответствующие дивизорам D_{10} и D_{13} , имеют порядок $h = 1$ и центр в точке 1. Для остальных дивизоров D_i соответствующие нормирования имеют порядок $h = 0$.

B -полуинвариантные функции устроены аналогичным образом, как и в примере 1, только с точностью до умножения на функцию из $\mathbb{C}(X)^B$. B -инвариантные функции являются отношениями однородных многочленов одинаковой степени от координат $F_4 F_8 F_{11}$ и $F_5 F_7 F_{12}$ проективной прямой, т. е. поле $\mathbb{C}(X)^B$ порождается функцией $\frac{F_4 F_8 F_{11}}{F_5 F_7 F_{12}}$.

Решетка $\Lambda(X)$ порождается весами $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где i и j — числа из различных троек $(1, 2, 3)$, $(q_1 + 1, q_1 + 2, q_1 + 3)$ и $(q_1 + q_2 + 1, q_1 + q_2 + 2, q_1 + q_2 + 3)$.

В качестве базисных весовых функций возьмем следующие:

$$\begin{aligned} \frac{F_4 F_{11}}{F_5 F_{10}} &= f_{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}, & \frac{F_1 F_{11}}{F_5 F_7} &= f_{\varepsilon_3^* - \varepsilon_1^*}, & \frac{F_{12}}{F_2 F_8} &= f_{\varepsilon_{q_1+1}^* - \varepsilon_1^*}, & \frac{F_{11}}{F_{10}} &= f_{\varepsilon_{q_1+2}^* - \varepsilon_1^*}, \\ \frac{F_6}{F_5} &= f_{\varepsilon_{q_1+3}^* - \varepsilon_1^*}, & \frac{F_{11}}{F_3 F_5} &= f_{\varepsilon_{q_1+q_2+1}^* - \varepsilon_1^*}, & \frac{F_{12}}{F_{10}} &= f_{\varepsilon_{q_1+q_2+2}^* - \varepsilon_1^*}, & \frac{F_9}{F_8} &= f_{\varepsilon_{q_1+q_2+3}^* - \varepsilon_1^*}. \end{aligned}$$

Пусть a_i – координаты $\lambda \in \Lambda \otimes \mathbb{Q}$ в базисе из весов указанных B -полуинвариантных функций. Пусть $\delta = m_1 D_1 + m_2 D_2 + m_3 D_3$. Тогда получим следующие условия для координат (многогранник $\mathcal{P}(\delta)$):

$$a_2 \geq -m_1, \quad a_3 \leq m_2, \quad a_6 \leq m_3, \quad a_5 \geq 0, \quad a_8 \geq 0,$$

и следующее разложение:

$$V_{m_1 \omega_3} \otimes V_{m_2 \omega_{q_1} + m_3 \omega_{q_1+q_2}} = \bigoplus m(\bar{a}) V_{\lambda(\bar{a}, \bar{m})},$$

где

$$\begin{aligned} m(\bar{a}) &= \max(0, 1 + \min(-a_1 - a_2 - a_5 - a_6, -a_2, a_3 + a_7) \\ &\quad + \min(a_1, -a_3 - a_8, a_1 + a_2 + a_4 + a_6) + \min(-a_1 - a_4 - a_7, 0)), \\ \lambda(\bar{a}, \bar{m}) &= m_1 \omega_3 + m_2 \omega_{q_1} + m_3 \omega_{q_1+q_2} - (a_1 + \dots + a_8) \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_2 + a_2 \varepsilon_3 \\ &\quad + a_3 \varepsilon_{q_1+1} + a_4 \varepsilon_{q_1+2} + a_5 \varepsilon_{q_1+3} + a_6 \varepsilon_{q_1+q_2+1} + a_7 \varepsilon_{q_1+q_2+2} + a_8 \varepsilon_{q_1+q_2+3} \end{aligned}$$

и сумма берется по всем a_i , удовлетворяющим приведенным выше условиям.

Данное разложение можно также получить из правила Литтлвуда–Ричардсона.

§ 3. Некоторые теоремы о сложности двойных многообразий флагов

Сформулируем несколько теорем. Основной теоремой, которой мы будем пользоваться при вычислении сложности, является теорема Панюшева.

ТЕОРЕМА 5 [3]. Пусть P и Q разложены в полупрямое произведение стандартной подгруппы Леви и унитарного радикала: $P = L \ltimes P_u$, $Q = M \ltimes Q_u$. Тогда сложность действия группы G на $G/P \times G/Q$ равна сложности действия $L \cap M$ на $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$, где $\mathfrak{p}_u$ и $\mathfrak{q}_u$ – касательные алгебры к P_u и Q_u .

ЛЕММА 1. Сложность не меняется при перестановке P и Q местами.

ЛЕММА 2. Пусть $P' \subseteq P$, $Q' \subseteq Q$ – параболические подгруппы. Тогда сложность двойного многообразия флагов для пары (P', Q') не меньше сложности для пары (P, Q) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует G -эквивариантный сюръективный морфизм

$$G/P' \times G/Q' \rightarrow G/P \times G/Q,$$

поэтому коразмерность типичной B -орбиты на $G/P \times G/Q$ не больше соответствующей коразмерности на $G/P' \times G/Q'$.

ЛЕММА 3. *Выполнено неравенство*

$$c \geq \frac{1}{2}(\dim G - \dim L - \dim M - \dim T),$$

где c – сложность соответствующего действия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $c \geq \dim(\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u) - \dim(L \cap M \cap B)$. При этом

$$\begin{aligned} \dim(L \cap M \cap B) &= \frac{1}{2}(\dim(L \cap M) + \dim T), \\ \dim(\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u) &= \frac{1}{2}(\dim G - \dim L - \dim M + \dim(L \cap M)). \end{aligned}$$

Подставляя последние равенства в неравенство, получим нужную оценку.

§ 4. Случай классических групп

В этом параграфе G будет обозначать SL_n , SO_n или Sp_n . Будем считать, что борелевская подгруппа $B \subseteq G$ состоит из верхнетреугольных матриц, группа SO_n сохраняет квадратичную форму с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а Sp_n сохраняет кососимметрическую билинейную форму с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & \ddots & & & \\ -1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

При вычислении сложности мы будем использовать теорему 5. Опишем, как устроены подгруппы Леви, касательные алгебры унипотентных радикалов и их пересечения.

Подгруппа Леви L (и M) состоит из блочно-диагональных матриц, причем для групп SO_n и Sp_n блоки симметричны относительно побочной диагонали и на симметричных местах стоят матрицы A и $(A^S)^{-1}$ (где S обозначает транспонирование относительно побочной диагонали), а средний блок (он есть, если количество блоков нечетно) является ортогональной или симплектической матрицей соответственно.

Касательная алгебра $\mathfrak{sl}_n$ состоит из матриц со следом 0, касательная алгебра $\mathfrak{so}_n$ в выбранном базисе состоит из матриц, кососимметричных относительно побочной диагонали, а касательная алгебра $\mathfrak{sp}_n$ в выбранном базисе состоит из следующих матриц: разобьем матрицу на 4 равные квадратные части, тогда верхняя правая и нижняя левая части должны быть симметричны

относительно побочной диагонали, а оставшиеся две части получаются друг из друга транспонированием относительно побочной диагонали и сменой знака. Матрицы из касательной алгебры к унипотентному радикалу $\mathfrak{p}_u$ имеют нули ниже диагонали и на месте диагональных блоков.

При четном n для группы SO_n есть еще один класс параболических подгрупп (будем называть его *особым*), они получаются из описанных параболических подгрупп без среднего диагонального блока сопряжением с перестановкой двух средних базисных векторов. Этот класс будем рассматривать отдельно.

Матрицы из $L \cap M$ состоят из некоторого количества диагональных квадратных блоков, обозначим их $A_1, \dots, A_r$, а через $k_1, \dots, k_r$ – их размеры, причем для групп SO_n и Sp_n размеры блоков связаны соотношением $k_i = k_{r+1-i}$. Отметим, что для группы SO_n средняя пара блоков размеров 1 и 1 – это то же самое, что один центральный блок размера 2. Далее будем считать, что параболические подгруппы не особые, а класс особых параболических подгрупп будем рассматривать отдельно. Матрицы из $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$ состоят из подматриц X_{ij} , причем каждая матрица X_{ij} имеет размер $k_i \times k_j$ и стоит на пересечении строк, соответствующих A_i , и столбцов, соответствующих A_j . При этом $X_{ij} = 0$ для $i \geq j$, а также нулю равны те матрицы X_{ij} , для которых найдется матрица из L или M с ненулевыми элементами на месте X_{ij} . Часто под словом “блоки” будем подразумевать *ненулевые* матрицы X_{ij} . Борелевской подгруппой в $L \cap M$ является $L \cap M \cap B$, т. е. пересечение $L \cap M$ с верхнетреугольными матрицами. Группа $L \cap M \cap B$ действует на $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$ сопряжениями, при этом матрицы X_{ij} переходят в $A_i X_{ij} A_j^{-1}$.

Дальнейшая идея состоит в том, что мы будем рассматривать всевозможные расположения блоков X_{ij} и для каждого такого расположения вычислять сложность для всевозможных размеров блоков. Чтобы упростить перебор и уменьшить количество возможных вариантов, нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 4. *Сложность не меняется при одновременном транспонировании P и Q относительно побочной диагонали.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Лемма 4 дает упрощение только для группы SL_n .

ЛЕММА 5. *Если вместо исходного действия рассмотреть действие, получающееся из исходного с помощью одной из следующих операций (или их комбинации):*

- а) *убрать из рассмотрения некоторые блоки X_{ij} (т. е. считать матрицы X_{ij} равными нулю),*
- б) *убрать из рассмотрения некоторые матрицы A_i и блоки X_{ij} в соответствующих строках и столбцах,*

то для такого действия сложность не может быть больше сложности исходного действия. Другими словами, мы рассматриваем только “некоторую часть действия”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операция а) соответствует ограничению действия на G -инвариантное подмногообразие. Сложность действия на G -инвариантном подмногообразии не может быть больше сложности действия на всем многообразии [10].

Операция б) соответствует переходу к факторпредставлению, сложность для которого может быть только меньше или равна исходной.

ЛЕММА 6. Пусть имеются четыре ненулевые матрицы X_{pq} , стоящие в вершинах прямоугольника, т. е. матрицы с индексами ij , il , kj и kl , причем для группы SO_n ни одна из этих четырех матриц не должна стоять на побочной диагонали. Тогда существует рациональный инвариант для действия группы $B \cap L \cap M$. Такой инвариант будем называть инвариантом типа “квадрат”.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для группы SO_n дополнительное требование о расположении блоков возникает в силу того, что матрицы из so_n имеют нули на побочной диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Пусть a_i, a_k – элементы матриц A_i, A_k соответственно, стоящие в правом нижнем углу, a_j, a_l – элементы матриц A_j, A_l , стоящие в левом верхнем углу, а $x_{ij}, x_{il}, x_{kj}, x_{kl}$ – элементы матриц $X_{ij}, X_{il}, X_{kj}, X_{kl}$, стоящие в левом нижнем углу. Тогда $x_{pq} \rightarrow a_p x_{pq} a_q^{-1}$, $p = i, k, q = j, l$. Легко видеть, что $x_{ij} x_{kj}^{-1} x_{kl} x_{il}^{-1}$ является инвариантом.

ЛЕММА 7. Пусть имеются три ненулевые матрицы X_{pq} , стоящие особым образом в вершинах прямоугольного треугольника, а именно имеющие индексы ij, ik, jk , причем для группы SO_n ни одна из этих трех матриц не должна стоять на побочной диагонали. Тогда существует рациональный инвариант для действия $B \cap L \cap M$. Такой инвариант будем называть инвариантом типа “треугольник”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{x}_{ij}$ – нижняя строка матрицы X_{ij} , x_{ik} – левый нижний элемент матрицы X_{ik} , а $\bar{x}_{jk}$ – левый столбец матрицы X_{jk} . Тогда нетрудно проверить, что $\frac{\bar{x}_{ij} \cdot \bar{x}_{jk}}{x_{ik}}$ является инвариантом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для групп SO_n и Sp_n инварианты типа “квадрат” и “треугольник” совпадают для блоков, получающихся друг из друга транспонированием относительно побочной диагонали.

ЛЕММА 8. Пусть имеются три ненулевые матрицы X_{ij} , стоящие в одной строке, высота которых не меньше 2, причем для группы SO_n ни одна из этих матриц не должна стоять на побочной диагонали. Тогда сложность будет не меньше 1. Если таких матриц 4, то сложность не меньше 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение для группы SL_n (для остальных групп мы получим это утверждение как следствие, так как мы от SL_n перейдем к подгруппе). Для типичной первой матрицы нижний левый элемент и элемент над ним можно действием группы сделать равными 1 и 0 соответственно. Чтобы эти элементы не изменялись, мы должны действовать слева только такими матрицами, нижняя правая подматрица размера 2×2 которых диагональна. Элементы, стоящие на таких же местах во второй матрице, для типичной матрицы можно сделать равными 1. Чтобы эти четыре элемента не менялись, мы должны слева действовать только такими матрицами, нижняя правая подматрица размера 2×2 которых имеет вид λE . Теперь рассмотрим два элемента в третьей матрице, стоящие на таких же местах (для типичной матрицы они ненулевые): они умножаются на одно и то же число. Один из них мы можем сделать равным 1, а другой изменить не можем, не изменив вид уже рассмотренных пяти элементов. Значит, типичные орбиты

зависят по крайней мере от одного непрерывного параметра, т. е. $c(X) \geq 1$. Для четырех матриц рассуждения аналогичны.

Теперь объясним чуть более подробно, как мы будем вычислять сложность действия $L \cap M$ на $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$. Для групп SO_n и Sp_n имеет место симметрия блочной структуры касательной алгебры, поэтому достаточно рассматривать только блоки, стоящие нестрого выше (или ниже) побочной диагонали. Будем постепенно действием $B \cap L \cap M$ приводить блоки к некоторому каноническому виду и рассматривать действие стабилизатора уже полученных блоков такого вида на остальных блоках. Количество оставшихся параметров и будет сложностью. Именно такой способ применялся в доказательстве леммы 8.

Для группы SO_n имеются особые параболические подгруппы, мы будем обозначать их штрихами. Можно считать, что ровно одна из двух параболических подгрупп особая, а вторая не содержит центрального блока (иначе применим автоморфизм G , переставляющий два средних базисных вектора). Можно получить оценку сложности через сложность другого действия, где обе параболические подгруппы неособые: если особую подгруппу сопрячь с перестановкой двух средних базисных векторов и заменить два центральных блока (можно считать, что размеры этих блоков не больше размеров соответствующих блоков для второй группы) на один центральный, то параболическая подгруппа увеличится, а значит, сложность для такой пары может только уменьшиться.

Теперь перейдем к разбору конкретных случаев. Рисунки обозначают расположение ненулевых блоков X_{ij} и матриц A_i ; блоки X_{ij} обозначаются серым цветом, а матрицы A_i – черным цветом. Сложность будем обозначать буквой c . Будем поочередно перебирать возможные расположения ненулевых блоков X_{ij} , при этом случаи, для которых леммы 5–8 дают оценку сложности $c \geq 2$, рассматривать не будем. Также не будем рассматривать случаи, симметричные уже изученным. Согласно лемме 5 мы можем сократить перебор в разбираемом случае, используя результат разобранных случаев. Приведем результаты разбора. Будем выписывать только те случаи, в которых сложность получилась не больше 1.

4.1. Группа SL_n . Приведем результаты для группы SL_n .

1. k_1, k_r произвольны, $c = 0$.
2.

$k_1 \leq 2$	k_{r-1}, k_r произвольны,	$c = 0$;
k_1 произвольно,	$k_{r-1} = 1$ или $k_r = 1$,	$c = 0$;
$k_1 \geq 3$,	$k_{r-1} = k_r = 2$,	$c = 1$;
$k_1 = 3$,	$k_{r-1}, k_r \geq 2$,	$c = 1$.

Для примера разберем случай 2 подробно. Без ограничения общности будем считать, что $k_{r-1} \geq k_r$. Приведем два типичных блока действием справа к следующему виду: на побочной диагонали, идущей из нижнего левого угла, стоят 1, а правее стоят 0. Далее, в первом блоке умножением слева можно добиться того, что и выше диагонали (побочной, идущей из левого нижнего угла) будут стоять нули. Посмотрим, каков будет стабилизатор блоков такого вида. На месте A_1 может стоять матрица, все элементы которой равны нулю, кроме диагональных и кроме элементов в левой верхней подматрице

размера $\max(k_1 - k_{r-1}, 0) \times \max(k_1 - k_{r-1}, 0)$. Матрицы на местах A_{r-1} и A_r имеют аналогичный вид, только подматрица берется нижняя правая размеров $\max(k_i - k_1, 0) \times \max(k_i - k_1, 0)$, где $i = r-1, r$ соответственно, а диагональные элементы выбираются равными диагональным элементам матрицы A_1 (чтобы единицы в блоках сохранились). Теперь во втором блоке можно сделать элементы, стоящие в первом столбце во 2-й, ..., $\min(k_1, k_{r-1})$ -й строках снизу, равными единице. Теперь в стабилизаторе все диагональные элементы, не входящие в рассмотренные нами подматрицы, должны быть равны одному и тому же числу λ .

Если $k_1 \leq 2$ или $k_r = 1$, то элементы, стоящие в первом столбце второго блока, можно сделать равными 1, после чего свободных параметров не осталось, т. е. типичные точки лежат в одной орбите с точкой описанного вида, поэтому $c = 0$.

Если $k_1 = 3$, $k_{r-1} \geq k_r \geq 2$, то элемент второго блока в первом столбце, третьей снизу строке можно сделать равным 1 (если мы его еще не сделали таким), после чего $A_1 = \lambda E$ и два верхних диагональных элемента A_r также равны λ , поэтому элемент второго блока во втором столбце, третьей снизу строке мы изменить не можем. Значит, орбита зависит от одного непрерывного параметра, т. е. $c = 1$.

Теперь пусть $k_{r-1} = k_r = 2$, $k_1 \geq 4$. Тогда рассмотрим подматрицу второго блока, стоящую выше второй строки снизу. Слева мы можем умножать ее на произвольную верхнетреугольную, а действие справа сводится к умножению всех элементов на одно число. Нижнюю подматрицу этой матрицы мы можем сделать равной $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}$, а выше нее стоят нули. Число, стоящее на месте *, мы уже изменить не можем, поэтому $c = 1$.

Осталось рассмотреть случай $k_1 \geq 4$, $k_{r-1} \geq 3$, $k_r \geq 2$. Рассмотрим элементы второго блока, стоящие во втором столбце, 3-й и 4-й строках снизу: мы их изменить не можем, поэтому $c \geq 2$.

$$\begin{array}{ll}
 3. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \square & \square \\ \hline & \blacksquare & \square & \square \\ & & \blacksquare & \square \\ & & & \blacksquare \\ & & & & \blacksquare \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \square & \square & \square \\ \hline & \blacksquare & \square & \square \\ & & \blacksquare & \square \\ & & & \blacksquare \\ & & & & \blacksquare \\ \hline \end{array} & \begin{array}{l} k_1 = 1, \quad k_{r-2}, k_{r-1}, k_r \text{ произвольны, } c = 0; \\ k_1 = 2, \quad k_{r-2}, k_{r-1}, k_r \text{ произвольны, } c = 1; \\ k_1 \geq 3, \quad k_{r-2} = k_{r-1} = k_r = 1, \quad c = 1. \end{array}
 \end{array}$$

Если мы будем добавлять блоки в первую строку, то их высота в силу леммы 8 не может быть больше одного.

$$4. \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \square & \square & \square \\ \hline & \blacksquare & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \blacksquare \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ \hline & \blacksquare & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \blacksquare \\ \hline \end{array} \quad k_1 = 1, \quad c = 0.$$

$$5a. \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \square & \square \\ \hline & \blacksquare & \square \\ & & \blacksquare \\ \hline \end{array} \quad \text{хотя бы два из чисел } k_1, k_2, k_3 \text{ равны } 1, \quad c = 1.$$

56. $k_1 = 1$ или $k_4 = 1$, k_2, k_3 произвольны, $c = 0$;
 $k_1 = k_4 = 2$, k_2, k_3 произвольны, $c = 1$;
 $k_1 = 2, k_4 \geq 3$, $k_2 = 1, k_3$ произвольно, $c = 1$;
 $k_1 \geq 3, k_4 = 2$, k_2 произвольно, $k_3 = 1$, $c = 1$.

6. $k_1 = 1, k_2 = 1$ или $k_4 = 1, c = 1$.

7.

Случай 7 реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 3$, а это или случай 5, или случай 6.

8. $k_1 = k_2 = 1$ или $k_{r-1} = k_r = 1, c = 1$.

- 9а. $c \geq 2$, так как имеются независимые инварианты типа “квадрат” и “треугольник”.

- 9б. $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3$ произвольно, k_4, k_5 произвольны, $c = 1$;
 $k_1 = 1, k_2$ произвольно, k_3 произвольно, $k_4 = k_5 = 1, c = 1$.

10.

Случай 10 реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 4$. Если $s = 3$, то это случай 9. Если $s = 4$, то $c \geq 2$, так как имеются независимые инварианты типа “квадрат” и “треугольник”.

Если во второй строке будут хотя бы три блока, то будут два независимых инварианта типа “квадрат”, т.е. $c \geq 2$.

- 11а. $c \geq 2$, так как имеются два инварианта типа “треугольник”.

- 11б. $k_1 = k_5 = 1, c = 1$.

12.

Случай 12 реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 4$. Если $s = 3$, то это случай 11. Если $s = 4$, то $c \geq 2$, так как имеются два инварианта типа “треугольник”.

13. $c \geq 2$, так как имеются инварианты типа “квадрат” и “треугольник”.

14.

Случай 14 реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 4$. Если $s = 3$, то это случай 13. Если $s = 4$, то $c \geq 2$, так как данный случай сводится к случаю 13 с помощью леммы 5.

15.

16.

Случаи 15, 16 реализуются только при $|s - m| \leq 1$ (где s, m – количество ненулевых блоков в верхней строке и количестве ненулевых блоков в правом столбце). Когда $s, m \geq 4$ (а это и есть оставшиеся случаи), сложность не меньше 2, так как имеются либо два инварианта типа “треугольник” (случай 15), либо инварианты типа “треугольник” и “квадрат” (случай 16).

Объединив рассмотренные случаи, получим классификацию, приведенную в табл. 1 (напомним, что классификация ведется с точностью до одновременного транспонирования относительно побочной диагонали и перестановки).

4.2. Группа SO_n . Рассмотрим случаи, когда P и Q неособые.

1. $c = 0$.

2а. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, $c = 0$;
 k_1 произвольно, $k_2 = 1, c = 0$;
 $k_1 = 2, k_2 = 2, c = 1$.

2б. $k_1 \leq 3, k_2$ произвольно, $c = 0$;
 k_1 произвольно, $k_2 = 1, c = 0$;
 $k_1 = 4, k_2 = 2, c = 1$.

3а. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, $c = 0$;
 $k_1 = 2, k_2 = 1, c = 1$.

3б. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, k_3 произвольно, $c = 0$;
 $k_1 = 2, k_2$ произвольно, $k_3 = 1, c = 1$.

$k_1 = 1$, k_2 произвольно, k_3 произвольно, $c = 1$.

$k_1 = 1$, k_2 произвольно, k_3 произвольно, $c = 0$.

Если в первой строке стоит не меньше 5 блоков, то в силу леммы 8 их высота должна быть не больше единицы.

Пусть ненулевые блоки стоят только в первой строке и последнем столбце (предположим, что в первой строке их количество равно m), и пусть высота блоков в первой строке есть $k_1 = 1$. Обозначим сложность для такого случая через $c_{m,a}$, если $r = m + 1$, и через $c_{m,b}$, если $r = m + 2$ (где r – количество диагональных блоков). Тогда верна следующая

ЛЕММА 9. При $m \geq 4$ справедливы формулы $c_{m,a} = c_{m-1,b} + 1$, $c_{m,b} = c_{m-1,a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Типичную пару блоков $X_{1,i}$ и $X_{1,r+1-i}$, $i \neq \frac{r+1}{2}$, можно умножением справа привести к виду $(x, 0, \dots, 0)$ и $(t, 0, \dots, 0, y)$, если длины блоков равны хотя бы двум, и к виду (x) и (y) , если длины блоков равны одному, где t, x – любые ненулевые числа, а y однозначно определяется по x , а именно произведение xy не меняется. Ненулевой типичный блок $X_{1, \frac{r+1}{2}}$ (при нечетном r) умножением справа можно привести к виду $(x, 0, \dots, 0, y)$, если длина блока равна хотя бы двум (где x и y такие, как и выше). Если его длина равна единице, то элемент этого блока изменить нельзя. Слева все эти матрицы умножаются на одно и то же число, поэтому сложность равна сумме количества таких пар блоков и количества центральных блоков (0 или 1) минус 1, откуда получается утверждение леммы.

В следующих случаях 5, 6 сложности легко вычисляются по лемме 9, а при $m \geq 7$ сложность больше 1.

$k_1 = 1$, $c = 1$.

$k_1 = 1$, $c = 1$.

$k_1 = 1$, $c = 2$.

$k_1 = 1$, $c = 1$.

7. $k_1 = 1, \quad k_2 \text{ произвольно}, \quad c = 0;$
 $k_1 \text{ произвольно}, \quad k_2 = 1, \quad c = 0;$
 $k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad c = 1;$
 $k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad c = 1;$
 $k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad c = 1.$

8. $k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad c = 0;$
 $k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad c = 1;$
 $k_1 = 2, \quad k_2 = 1, \quad c = 1.$

Если добавить блоки только в первую строку (и симметричные им относительно побочной диагонали), то такие случаи не будут реализовываться.

- 9a. $k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1, \quad c = 1.$

- 9б. $k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 \text{ произвольно}, \quad c = 0;$
 $k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 1, \quad c = 1;$
 $k_1 = 2, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1, \quad c = 1.$

- 10a. $c \geq 2$, так как имеются два инварианта типа “треугольник”.

- 10б. $k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1, \quad c = 1.$

11. $c \geq 2$, так как имеются два инварианта типа “треугольник”.

Если добавить блоки только в первую строку (и симметричные им), то такие случаи не будут реализовываться.

- 12a. $c \geq 2$, так как имеются инварианты типа “квадрат” и “треугольник”.

126. $c \geq 2$, так как имеются инварианты типа “квадрат” и “треугольник”.

Если добавить один или два блока в первую строку (и симметричные им), то $c \geq 2$ (поскольку сводится к случаю 12). Если добавить больше двух блоков в первую строку (и симметричные им), то случай не будет реализовываться. Если добавить блок во вторую строку (а соответственно, и в первую, и симметричные им), то найдутся два инварианта типа “квадрат”.

13. $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, c = 0;$
 $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2, c = 1;$
 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1, c = 1;$
 $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 1, c = 1.$

14. $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, c = 1.$

15. $c \geq 2$, так как данный случай сводится к случаю 11 с помощью леммы 5.

Если добавить блоки в первую строку (и симметричные им), то случай не будет реализовываться. Если в третьей строке три блока, во второй четыре блока, а в первой четыре или пять блоков, то $c \geq 2$ из 12а; если в первой строке не менее шести блоков, то случай не реализуется. Если во второй строке не менее пяти блоков, то будут два инварианта типа “квадрат”. Если в третьей строке не менее четырех блоков, то также будут два инварианта типа “квадрат”.

Теперь разберем случай особых подгрупп.

Нумерация случаев будет соответствовать случаям для неособых подгрупп, полученных заменой особой подгруппы на неособую путем сопряжения с перестановкой двух средних базисных векторов и замены двух средних блоков на один центральный. При этом достаточно разобрать только те случаи, для которых размер двух центральных блоков, полученных при таком преобразовании особой подгруппы, не превосходит размера двух центральных блоков для другой подгруппы.

0. $c = 0.$

26. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, $c = 0$;
 $k_1 = 2, k_2 = 1, c = 0$;
 $k_1 = 2, k_2 = 2, c = 1$;
 $k_1 = 3, k_2 = 1, c = 1$.

3а. $k_1 = 1, k_2 = 1, c = 1$.

9б. $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, c = 1$.

10б. Чтобы сложность была не более 1, необходимо, чтобы $k_3 = 1$. Поскольку один центральный блок размера 2 – это то же самое, что два средних блока размеров 1 и 1, можно считать, что случай 10б (для неособых подгрупп) – это случай, где обе подгруппы имеют по два средних блока, а значит, его можно не рассматривать.

Объединив рассмотренные случаи, получим классификацию, приведенную в табл. 2.

4.3. Группа Sp_n . Номера случаев соответствуют нумерации случаев для группы SO_n .

1. $c = 0$.

2а. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, $c = 0$.

2б. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, $c = 0$;
 $k_1 = 2, k_2$ произвольно, $c = 1$.

3а. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, $c = 1$.

3б. $k_1 = 1, k_2$ произвольно, k_3 произвольно, $c = 0$.

Если в первой строке стоит не меньше четырех блоков, то в силу леммы 8 их высота должна быть не больше единицы.

Пусть ненулевые блоки стоят только в первой строке и последнем столбце (предположим, что в первой строке их количество равно m), и пусть высота

блоков в первой строке есть $k_1 = 1$. Обозначим сложность для такого случая через $c_{m,a}$, если $r = m + 1$, и через $c_{m,b}$, если $r = m + 2$ (где r – количество диагональных блоков). Тогда верна следующая

ЛЕММА 10. При $m \geq 3$ справедливы формулы $c_{m,a} = c_{m-1,b} + 1$, $c_{m,b} = c_{m-1,a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 9.

В следующих случаях 4, 5 сложности легко вычисляются по лемме 10, а при $m \geq 6$ сложность больше 1.

$k_1 = 1, c = 1.$

$k_1 = 1, c = 1.$

$c \geq 2.$

$k_1 = 1, c = 1.$

$k_1 = 1, k_2 = 1, c = 1.$

$c \geq 2$, так как имеются инварианты типа “треугольник” и “квадрат”.

Если добавить блоки в первую строку (и симметричные им), то случай не будет реализовываться. Если во второй строке стоит не менее трех блоков, то $c \geq 2$, так как найдутся два инварианта типа “квадрат”.

Объединив рассмотренные случаи, получим классификацию, приведенную в табл. 3.

§ 5. Случай особых групп

Зафиксируем некоторую борелевскую подгруппу $B \subseteq G$ и максимальный тор $T \subseteq B$. Пусть Δ – система корней относительно T , Π – система простых корней, отвечающая выбору B , $I \subseteq \Pi$ – некоторое подмножество. Любая параболическая подгруппа, содержащая B , совпадает со стандартной параболической подгруппой P_I , которая характеризуется тем, что ее касательная алгебра разлагается в прямую сумму касательной алгебры тора T и корневых подпространств, соответствующих положительным корням и корням, являющимся

линейными комбинациями корней из подмножества I с целыми коэффициентами, т. е.

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\{\alpha > 0\} \cup \{\alpha \in \mathbb{Z}I\}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Касательную алгебру $\mathfrak{p}_I$ можно разложить в прямую сумму подалгебры Леви $\mathfrak{l}$ и касательной алгебры унипотентного радикала. Касательной алгебре $\mathfrak{l}$ будут соответствовать корни из $\mathbb{Z}I$, а унипотентному радикалу – оставшиеся, а именно корни из пересечения $\{\alpha > 0\} \cap \{\alpha \notin \mathbb{Z}I\}$.

Пусть теперь $P = P_I = L \ltimes P_u$ и $Q = P_J = M \ltimes Q_u$ – две параболические подгруппы. Тогда

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}(I \cap J)} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u = \bigoplus_{\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{Z}I \cup \mathbb{Z}J} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Опишем общий метод вычисления сложности линейного представления редуктивной группы [11, п. 1.4]. Пусть G – некоторая редуктивная группа, V – ее линейное представление. Через v_λ обозначим вектор веса λ . Напомним, что через λ^* мы обозначаем старший вес модуля V_λ^* . Рассмотрим младший вектор $v_{-\lambda^*}$ представления V . Пространство V можно разложить следующим образом: $V = \langle v_{-\lambda^*} \rangle \oplus W$, где W является B -инвариантным. В V рассмотрим B -инвариантное открытое подмножество $\dot{V} = \mathbb{C}^\times v_{-\lambda^*} \oplus W$. Пусть P – параболическая подгруппа, сохраняющая $\langle v_{-\lambda^*} \rangle \subseteq V^*$. Разложим P в полупрямое произведение подгруппы Леви и унипотентного радикала: $P = L \ltimes P_u$. Пусть V' – дополнительное L -инвариантное подпространство к $\mathfrak{p}_u v_{-\lambda^*}$ в W , т. е. $\mathfrak{p}_u v_{-\lambda^*} \oplus V' = W$. Подмножество $\dot{V}$ изоморфно как многообразие с действием группы B прямому произведению $\dot{V} = P_u \times (\mathbb{C}^\times v_{-\lambda^*} \oplus V')$, где P_u действует на первом сомножителе левыми сдвигами, а $B \cap L$ на первом сомножителе действует сопряжением, а на втором действие индуцируется с действия L . Значит, коразмерность типичной орбиты для действия $B = (B \cap L) \ltimes P_u : \dot{V}$ равна коразмерности типичной орбиты для действия $B \cap L : \langle v_{-\lambda^*} \rangle \oplus V'$. Таким образом, мы свели вопрос о сложности действия $G : V$ к рассмотрению действия меньшей группы L на меньшем пространстве $\langle v_{-\lambda^*} \rangle \oplus V'$. Так можно последовательно строить группы $L^{(i)}$ и пространства $V^{(i)}$:

$$G = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \dots \supseteq L^{(s)}, \quad V = V^{(0)} \supseteq V^{(1)} \supseteq \dots \supseteq V^{(s)},$$

до тех пор, пока все неприводимые $L^{(s)}$ -подмодули $V^{(s)}$ не станут одномерны. Тогда действие $L^{(s)}$ на $V^{(s)}$ задается весами $\mu_1, \dots, \mu_N$, а сложность действия будет равна $\dim V^{(s)} - \text{rk} \langle \mu_1, \dots, \mu_N \rangle = N - \text{rk} \langle \mu_1, \dots, \mu_N \rangle$.

Теперь поясним, как можно использовать этот метод в рассматриваемом случае. Пересечение подгрупп Леви $L \cap M$ и пересечение касательных алгебр унипотентных радикалов $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$ задаются некоторыми подмножествами корней E_1 и F_1 , соответствующими весовым подпространствам ненулевых весов касательных алгебр. Пусть μ_1 – некоторый минимальный корень F_1 , и пусть

$$E'_1 = \{\alpha \in E_1 \mid \alpha + \mu_1 \in F_1\}, \quad F'_1 = \{\alpha + \mu_1 \mid \alpha \in E'_1\}.$$

Положим

$$E_2 = E_1 \setminus E'_1, \quad F_2 = F_1 \setminus (F'_1 \cup \{\mu_1\}).$$

Аналогично по E_2, F_2 построим μ_2 и E_3, F_3 и так далее до тех пор, пока множество F_i не станет пустым. В результате получим набор весов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ и сложность действия вычисляется по формуле $N - \text{rk}\langle \mu_1, \dots, \mu_N \rangle$.

Для каждой особой группы G сначала будем искать сложность для двойных многообразий флагов, соответствующих максимальным параболическим подгруппам (т. е. соответствующих подмножествам простых корней, получающимся из множества простых корней удалением одного корня), а потом постепенно уменьшать параболическую подгруппу. Ясно, что сложность следует вычислять только для тех случаев, когда леммы 2, 3 не дают оценки ≥ 2 .

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных групп.

5.1. Группы G_2, F_4 . Группы G_2, F_4 не имеют корней, для которых оценка сложности ≤ 1 .

5.2. Группа E_8 . Для всех пар параболических подгрупп, кроме пары подгрупп, соответствующей паре корней (α_1, α_1) , оценка сложности превышает 1, для всех случаев $c \geq 2$.

5.3. Группы E_6, E_7 . Наборы корней, для которых оценка сложности для соответствующих параболических подгрупп не превышает 1, и соответствующие сложности приведены в табл. 4.

Таблица 4. Пары параболических подгрупп, для которых оценка сложности для соответствующего двойного многообразия флагов не превышает 1, и соответствующие сложности

E_6			E_7		
$\Pi \backslash I$	$\Pi \backslash J$	Сложность	$\Pi \backslash I$	$\Pi \backslash J$	Сложность
1	1	0	1	1	0
1	2	0	1	2	1
1	4	0	1	6	0
1	5	0	1	7	0
1	6	0	6	6	2
2	5	0	1	1, 2	2
4	5	0	1	1, 6	2
5	5	0			
5	6	0			
6	6	2			
1	1, 2	1			
1	1, 5	0			
1	1, 6	1			
1	4, 5	1			
1	5, 6	1			
5	1, 2	1			
5	1, 5	0			
5	1, 6	1			
5	4, 5	1			
5	5, 6	1			

Случай группы E_6 и подмножеств $\Pi \setminus I = \{\alpha_1\}$, $\Pi \setminus J = \{\alpha_5\}$ разберем подробнее. В этом случае в обозначениях из [4, табл. 1]

$$E_1 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\} \cup \{\varepsilon_6 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\},$$

$$F_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_6\} \cup \{\varepsilon_1 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\} \cup \{2\varepsilon\}.$$

В качестве μ_1 возьмем $\varepsilon_1 - \varepsilon_6$. Тогда

$$E'_1 = \{\varepsilon_6 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\},$$

$$F'_1 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\},$$

откуда $E_2 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\}$, а $F_2 = \{2\varepsilon\}$. В качестве μ_2 возьмем 2ε , тогда $F_3 = \emptyset$. Сложность вычисляется по формуле $2 - \text{rk}\langle \mu_1, \mu_2 \rangle = 0$.

Окончательный результат сформулирован в теореме 2.

Список литературы

1. P. Littelmann, "On spherical double cones", *J. Algebra*, **166**:1 (1994), 142–157.
2. J. R. Stembridge, "Multiplicity-free products and restrictions of Weyl character", *Represent. Theory*, **7** (2003), 404–439.
3. D. I. Panyushev, "Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions", *Comment. Math. Helv.*, **68**:3 (1993), 455–468.
4. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988; англ. пер.: A. L. Onishchik, É. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
5. F. Knop, H. Kraft, D. Luna, Th. Vust, "Local properties of algebraic group actions", *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Sem., **13**, Birkhäuser, Basel, 1989, 63–75.
6. W. Fulton, R. MacPherson, F. Sottile, B. Sturmfels, "Intersection theory on spherical varieties", *J. Algebraic Geom.*, **4**:1 (1995), 181–193.
7. M. Brion, "Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques", *Duke Math. J.*, **58**:2 (1989), 397–424.
8. П. И. Кацыло, Д. А. Тимашёв, "Естественные дифференциальные операции на многообразиях: алгебраический подход", *Матем. сб.*, **199**:10 (2008), 63–86; англ. пер.: P. I. Katsylo, D. A. Timashev, "Natural differential operations on manifolds: an algebraic approach", *Sb. Math.*, **199**:10 (2008), 1481–1503.
9. D. A. Timashev, "Cartier divisors and geometry of normal G -varieties", *Transform. Groups*, **5**:2 (2000), 181–204.
10. Э. Б. Винберг, "Сложность действий редуктивных групп", *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1986), 1–13; англ. пер.: É. B. Vinberg, "Complexity of action of reductive groups", *Funct. Anal. Appl.*, **20**:1 (1986), 1–11.
11. D. I. Panyushev, "Complexity and rank of actions in invariant theory", *J. Math. Sci. (New York)*, **95**:1 (1999), 1925–1985.

Е. В. Пономарева (Е. V. Ponomareva)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
10.02.2012