Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Молчанов, Е. Б. Яровая, Предельные теоремы для функции Грина решетчатого лапласиана при больших уклонениях случайного блуждания, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 6, 123–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 07:58:31

УДК 519.21

С. А. Молчанов, Е. Б. Яровая

Предельные теоремы для функции Грина решетчатого лапласиана при больших уклонениях случайного блуждания

Проведен резольвентный анализ решетчатого лапласиана – генератора простого случайного блуждания на d -мерной целочисленной решетке – при больших уклонениях случайного блуждания. Такого рода анализ представляет интерес в связи с тем, что позволяет получить асимптотические представления для переходной вероятности простого случайного блуждания и соответствующей ей функции Грина. Получены явные формулы, описывающие асимптотическое поведение переходных вероятностей при совместном росте как пространственной, так и временной переменных. В этом смысле полученное разложение крамеровского типа для переходных вероятностей является “универсальным”. В частности, оно позволяет ввести шкалу изменения переходной вероятности при изменении времени t и пространственной переменной, принимающей значения порядка t^α при различных значениях $\alpha \geq 0$. Доказаны предельные теоремы об асимптотическом поведении функции Грина переходных вероятностей при больших уклонениях случайного блуждания.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, разностный лапласиан, большие уклонения, пространственно-временная шкала, асимптотика функций Грина, предельные теоремы.

§ 1. Введение

В ряде работ по теории перемежаемости [1]–[3] важную роль играет структура спектра решетчатого лапласиана Δ на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, с одноточечным потенциалом. Положим

$$L_\beta = \kappa \Delta + \beta \delta(x), \quad \kappa > 0, \quad (\Delta \varphi)(z) := \sum_{|z' - z| = 1} (\varphi(z') - \varphi(z)).$$

Спектр $\sigma(\Delta)$ оператора $\Delta: l^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^d)$ совпадает с множеством значений функции

$$\hat{\Delta}(\theta) = -2 \sum_{j=1}^d (1 - \cos \theta_j), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_d), \quad \theta \in [-\pi, \pi]^d, \quad (1.1)$$

т. е. $\sigma(\Delta) = [\min_{\theta \in [-\pi, \pi]^d} \hat{\Delta}(\theta), \max_{\theta \in [-\pi, \pi]^d} \hat{\Delta}(\theta)] = [-4d, 0]$.

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 10-01-00266).

Введем обозначение

$$\beta_c = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d\theta}{(-\kappa \hat{\Delta}(\theta))} \right)^{-1} \quad (1.2)$$

и заметим, что при $d \geq 3$ интеграл, стоящий в правой части (1.2), конечен, т. е. $\beta_c > 0$, а при $d = 1, 2$ интеграл равен бесконечности, и поэтому $\beta_c = 0$.

В [4] установлено, что при $\beta > \beta_c$ оператор L_β имеет изолированное положительное собственное значение $\lambda_0(\beta) > 0$, а при $\beta < \beta_c$ спектр оператора L_β не имеет неотрицательных собственных значений и совпадает со спектром оператора $\sigma(\Delta)$. При $\beta = \beta_c$ ситуация зависит от размерности пространства d . При $d \leq 4$ правый край спектра оператора $\sigma(\Delta)$ не является собственным значением, начиная с размерности $d = 5$ правый край спектра $\sigma(\Delta)$ становится собственным значением оператора L_β . В [4] проведен анализ спектра оператора L_β для широкого класса симметричных операторов, включающих в себя и оператор Δ .

Спектральная бифуркация оператора L_β ответственна за фазовые переходы в моделях ветвящихся случайных блужданий [4], [5] и гомополимеров [6]. Отметим, что случай с единственным центром генерации частиц $V(x) = \delta_0(x)$, а также с конечным числом центров при фиксированных значениях x и y изучен в работах [4], [5], [7] для симметричных и симметризуемых операторов.

При больших отклонениях ветвящихся случайных блужданий техника, предложенная в указанных выше работах, или неприменима, или по меньшей мере очень сложна. В недавней работе [8], посвященной непрерывной модели гомополимера, где рассматривалось $\mathbb{R}^d$ вместо $\mathbb{Z}^d$ и броуновское движение вместо случайного блуждания, был предложен новый подход к решению таких задач, основанный на резольвентном анализе эволюционного оператора. Однако эта работа не охватывает ветвящиеся случайные блуждания на целочисленных решетках $\mathbb{Z}^d$ с эволюционным оператором средних численностей частиц L_β при больших отклонениях. Для исследования спектра L_β требуется информация о переходных вероятностях и резольвенте оператора $\kappa\Delta$.

Таким образом, цель настоящей работы состоит в проведении анализа резольвенты оператора $\kappa\Delta$ при больших отклонениях случайного блуждания, что позволит существенно расширить результаты из [4], [5]. Более того, этот случай представляет особый интерес, так как для переходной вероятности $p(t, x, y)$ и соответствующей ей функции Грина $G_\lambda(x, y)$ асимптотические представления выписываются в явном виде. Полученное в работе разложение для $p(t, x, y)$ является в определенном смысле “универсальным”. В частности, оно позволяет получить шкалу изменения переходной вероятности $p_d(t, x, y)$ при совместном росте как времени t , так и пространственной переменной $y - x$, принимающей значения порядка t^α при различных значениях $\alpha \geq 0$.

Наиболее важная часть статьи состоит в исследовании резольвентного ядра или функции Грина решетчатого лапласиана, тесно связанного со спектральными свойствами оператора L_β . Одним из основных результатов является теорема 3.2, показывающая, что для каждого фиксированного $\lambda > 0$ функция

Грина $G_\lambda(x, y)$ при $|y - x| \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое представление вида

$$G_\lambda(x, y) = \frac{\exp\left\{-|y - x| r_\lambda\left(\frac{y - x}{|y - x|}\right)\right\}}{|y - x|^{\frac{d-1}{2}}} R_\lambda\left(\frac{y - x}{|y - x|}\right) (1 + o(1)),$$

где функции r_λ и R_λ явным образом определяются по характеристикам рассматриваемого процесса. В случае $\lambda = 0$ теорему 3.2 дополняет представление

$$G_0(x, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{4\pi^{\frac{d}{2}}|y - x|^{d-2}} (1 + o(1)), \quad (1.3)$$

доказанное в теореме 3.4. Для случая $d = 3$ доказательство (1.3) содержится в [9]. В недавней работе [10] представление (1.3) доказано для функции Грина дифференциального эллиптического оператора на $\mathbb{R}^d$.

В дальнейших публикациях полученные результаты планируется обобщить на произвольные симметричные и, возможно, симметризуемые случайные блуждания.

Структура работы следующая: в § 2 проводится исследование оператора $\kappa\Delta$, генератора простого случайного блуждания, а в § 3 – его резольвентного ядра в случае больших уклонений.

§ 2. Переходные вероятности для больших уклонений случайного блуждания

Рассмотрим простое симметричное случайное блуждание на $\mathbb{Z}^d$ без размножения частиц в узлах решетки (т. е. без ветвления). В этом случае (см., например, [4]) переходные вероятности $p(t, x, y)$ непрерывно дифференцируемы по переменной t , равномерно по $x, y \in \mathbb{Z}^d$ и удовлетворяют обратному уравнению Колмогорова

$$\partial_t p = \kappa\Delta p, \quad p(0, x, y) = \delta(x - y). \quad (2.1)$$

Поскольку ряд $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, y)$ сходится при каждом t и y , к дифференциальному уравнению (2.1) применимо дискретное преобразование Фурье

$$\hat{p}(t, \theta, y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(t, x, y) e^{i(x, \theta)}.$$

После преобразования уравнение (2.1) примет в силу (1.1) вид

$$\partial_t \hat{p}(t, \theta, y) = \kappa \hat{\Delta}(\theta) \hat{p}(t, \theta, y), \quad \hat{p}(0, \theta, y) = e^{i(\theta, y)}.$$

Отсюда $\hat{p}(t, \theta, y) = e^{\kappa t \hat{\Delta}(\theta)} e^{i(\theta, y)}$. Применяя обратное преобразование Фурье к последнему равенству, получаем при $t \geq 0$

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{\kappa \hat{\Delta}(\theta) t + i(\theta, y - x)} d\theta, \quad x, y \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.2)$$

В дальнейшем важнейшую роль играет функция Грина

$$G_\lambda(x, y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt, \quad (2.3)$$

которую можно определить как преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$.

В то же время из интегрального представления (2.2) для переходной вероятности $p(t, x, y)$ вытекает, что функция Грина, являющаяся резольвентой оператора $\varkappa\Delta$, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda - \varkappa\hat{\Delta}(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda + 2\varkappa \sum_{j=1}^d (1 - \cos \theta_j)} d\theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введем индекс d в обозначении переходной вероятности $p_d(t, x, y)$, указывающий на размерность решетки, по которой происходит блуждание. Тогда с учетом явного вида (1.1) функции $\hat{\Delta}(\theta)$ переходная вероятность (2.2) может быть представлена в виде

$$p_d(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{2\varkappa d \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d (\cos \theta_j - 1)t + i(\theta, y-x)} d\theta,$$

или в виде произведения одномерных интегралов

$$p_d(t, x, y) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\varkappa(\cos \theta_j - 1)t + i\theta_j(y_j - x_j)} d\theta_j, \quad (2.5)$$

каждый из которых является переходной вероятностью случайного блуждания $p_1(t, x, y)$ по $\mathbb{Z}$ при $x = x_j$ и $y = y_j$. Таким образом, (2.5) принимает вид

$$p_d(t, x, y) = \prod_{j=1}^d p_1(t, x_j, y_j), \quad (2.6)$$

где x_j и $y_j - j$ -е координаты d -мерных векторов x и y соответственно. Сначала докажем для $p_1(t, x, y)$ следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\varkappa > 0$ – некоторая константа. Тогда для переходной вероятности случайного блуждания

$$p_1(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\varkappa t(\cos \theta - 1) + i\theta(y-x)} d\theta$$

справедливо представление

$$p_1(t, x, y) = e^{H_1(2\varkappa t, y-x)} h_1(2\varkappa t, y-x),$$

где

$$H_1(t, z) = \sqrt{t^2 + z^2} - t - z \operatorname{arcsch} \frac{z}{t}, \quad h_1(t, z) \leq \min \left\{ 1, \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2 + z^2)^{1/4}} \right\}.$$

Функция $h_1(t, z)$ имеет вид

$$h_1(t, z) = h_1^*(t, z)(1 + \nu_1(t, z)),$$

где

$$h_1^*(t, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{t^2 + z^2}}},$$

а $\nu_1(t, z) \rightarrow 0$ при $t^2 + z^2 \rightarrow \infty$, и при этом $0 < 1 + \nu_1(t, z) \leq \pi/2$, $z \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Используя одно из известных интегральных представлений модифицированной функции Бесселя $I_\nu(z)$ [11], можно выразить переходные вероятности $p(t, x, y) = p(t, 0, y - x)$ в терминах функции $I_\nu(z)$, а затем применить асимптотические формулы для $I_\nu(z)$ при $\nu \rightarrow \infty$ и $|z| \rightarrow \infty$, чтобы доказать теорему 2.1. Исследование асимптотического поведения функции $I_\nu(z)$ проведено в классическом учебнике по специальным функциям [11].

Отметим, что предложенный нами прямой метод доказательства теоремы 2.1 с помощью контурного интегрирования можно использовать и в тех случаях, когда бывает весьма трудно или невозможно воспользоваться специальными функциями, например бесселевыми функциями.

Сформулируем лемму, из которой в дальнейшем получим утверждение теоремы 2.1. Далее существен тот факт, что в условиях теоремы 2.1 разность $y - x$ является целым числом.

ЛЕММА 2.1. Пусть n – целое число, $t \geq 0$. Тогда для интеграла

$$I(t, n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t(\cos \theta - 1) + i\theta n} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

имеют место следующие утверждения:

а) справедливо представление

$$I(t, n) = e^{\sqrt{t^2 + n^2} - t - n \operatorname{arcsch} \frac{n}{t}} I^*(t, n), \quad (2.8)$$

где

$$I^*(t, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{t^2 + n^2}(\cos \theta - 1)} \cos(n(\theta - \sin \theta)) d\theta; \quad (2.9)$$

б) при всех $n \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ справедлива оценка

$$I^*(t, n) \leq \min \left\{ 1, \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2 + n^2)^{1/4}} \right\}; \quad (2.10)$$

в) для функции $I^*(t, n)$ справедливо представление

$$I^*(t, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{t^2 + n^2}}} (1 + \nu(t, n)), \quad (2.11)$$

где

$$\nu(t, n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t^2 + n^2 \rightarrow \infty, \quad (2.12)$$

причем

$$-1 < \nu(t, n) \leq \frac{\pi}{2} - 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \geq 0. \quad (2.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Выражение $n \operatorname{arcsch} \frac{n}{t}$ в (2.8) не определено при $t, n = 0$. При $t = 0, n \neq 0$ его следует понимать как предел при $t \rightarrow 0, t > 0, n \neq 0$ выражения $n \operatorname{arcsch} \frac{n}{t}$, т.е. как $+\infty$. При $t = 0$ и $n = 0$ следует считать, что $n \operatorname{arcsch} \frac{n}{t} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В силу неравенств (2.13) при каждом n величина $\nu_*(n) = \sup_{t \geq 0} |\nu(t, n)|$ конечна и для нее в силу (2.12) выполняется $\nu_*(n) \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, в частности, что $\nu(t, n) \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$ равномерно по $t \geq 0$. Аналогичное замечание можно сделать относительно величины $\nu^*(t) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\nu(t, n)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. а) Временно зафиксируем $t \geq 0$ и целое число n и установим вспомогательные соотношения. Для вычисления функции $I(t, n)$, определяемой равенством (2.7), обозначим $\alpha = n/t$ при данных n и t и положим $\zeta = i \operatorname{arcsch} \alpha$. Тогда $\zeta = iA(\alpha)$, где

$$A(\alpha) = \operatorname{arcsch} \alpha. \quad (2.14)$$

Рассмотрим П-образный контур $\Gamma \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma = \Gamma_l \cup \Gamma_u \cup \Gamma_r,$$

где

$$\Gamma_l = [-\pi, -\pi + iA(\alpha)], \quad \Gamma_u = [-\pi + iA(\alpha), \pi + iA(\alpha)], \quad \Gamma_r = [\pi + iA(\alpha), \pi],$$

изображенный на рис. 1.

Мы опускаем здесь обоснование, почему в качестве высоты “перекладины” контура П естественно выбрать величину $A(\alpha)$. Такой выбор вытекает из

Рис. 1. П-образный контур интегрирования

метода перевала (см., например, [12]) и позволяет вычислить асимптотику интеграла (2.7). Выбор контура интегрирования в виде П-образной кривой позволяет существенно упростить окончательные формулы и получить удобный для дальнейшего анализа явный вид интеграла (2.7).

В силу аналитичности подынтегрального выражения в (2.7) имеем

$$I(t, n) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{t(\cos \theta - 1 + i\theta \alpha)} d\theta,$$

где $\alpha = n/t$, и при этом

$$I(t, n) = I_l(t, n) + I_u(t, n) + I_r(t, n); \quad (2.15)$$

здесь

$$I_w(t, n) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_w} e^{t(\cos \theta - 1 + i\theta\alpha)} d\theta \quad \text{при } w = l, u, r.$$

Вычислим

$$I_l(t, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\pi + iA(\alpha)} e^{t(\cos \theta - 1 + i\theta\alpha)} d\theta.$$

После замены переменных $\theta = -\pi + is$ получаем

$$I_l(t, n) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{t(\cos(-\pi + is) - 1 + i(-\pi + is)\alpha)} ds.$$

Последний интеграл может быть переписан в виде

$$I_l(t, n) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{t(-\cos(is) - 1 - s\alpha) - i\pi t\alpha} ds.$$

В силу соотношения $t\alpha = n$ имеем

$$I_l(t, n) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{-t(\cos(is) + 1 + s\alpha)} e^{-i\pi n} ds,$$

или, что равносильно,

$$I_l(t, n) = (-1)^n \frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{-t(\cos(is) + 1 + s\alpha)} ds.$$

Теперь перейдем к вычислению

$$I_r(t, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi + iA(\alpha)}^{\pi} e^{t(\cos \theta - 1 + i\theta\alpha)} d\theta.$$

После замены переменных $\theta = \pi + is$ имеем

$$I_r(t, n) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{t(\cos(\pi + is) - 1 + i(\pi + is)\alpha)} ds,$$

откуда получаем

$$I_r(t, n) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{t(-\cos(is) - 1 - s\alpha) + i\pi t\alpha} ds.$$

Следовательно,

$$I_r(t, n) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{-t(\cos(is) + 1 + s\alpha)} e^{i\pi t\alpha} ds.$$

Поскольку $t\alpha = n$, то

$$I_r(t, n) = -(-1)^n \frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{-t(\cos(is) + 1 + s\alpha)} e^{i\pi t\alpha} ds,$$

и поэтому верна цепочка равенств

$$I_r(t, n) = -(-1)^n \frac{i}{2\pi} \int_0^{A(\alpha)} e^{-t(\cos(is)+1+s\alpha)} e^{i\pi n} ds = -I_l(t, n).$$

Итак, $I_l(t, n) + I_r(t, n) = 0$, и из (2.15) следует, что $I(t, n) = I_u(t, n)$.

Таким образом, остается вычислить

$$I_u(t, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+iA(\alpha)}^{\pi+iA(\alpha)} e^{t(\cos \theta - 1 + i\theta\alpha)} d\theta.$$

Произведя замену переменных $\theta = s + iA(\alpha)$, получим

$$I_u(t, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t(\cos(s+iA(\alpha)) - 1 + i(s+iA(\alpha))\alpha)} ds,$$

или, что равносильно,

$$I_u(t, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t(\cos s \cos(iA(\alpha)) - \sin s \sin(iA(\alpha)) - 1 + is\alpha - \alpha A(\alpha))} ds.$$

Здесь в силу (2.14)

$$\begin{aligned} \cos(iA(\alpha)) &= \operatorname{ch} A(\alpha) = \operatorname{ch}(\operatorname{arcsch} \alpha) = \sqrt{1 + \alpha^2}, \\ \sin(iA(\alpha)) &= i \operatorname{sh} A(\alpha) = i \operatorname{sh}(\operatorname{arcsch} \alpha) = i\alpha, \end{aligned}$$

и поэтому

$$I_u(t, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t(\sqrt{1+\alpha^2} \cos s - i\alpha \sin s - 1 + is\alpha - \alpha A(\alpha))} ds.$$

Показатель при экспоненте может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} &t(\sqrt{1 + \alpha^2} \cos s - i\alpha \sin s - 1 + is\alpha - \alpha A(\alpha)) \\ &= t(\sqrt{1 + \alpha^2} \cos s - i\alpha \sin s - 1 + is\alpha - \alpha \operatorname{arcsch} \alpha) \\ &= t(\sqrt{1 + \alpha^2} - 1 - \alpha \operatorname{arcsch} \alpha) + t\sqrt{1 + \alpha^2}(\cos s - 1) + it\alpha(s - \sin s). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_u(t, n) = e^{t(\sqrt{1+\alpha^2}-1-\alpha \operatorname{arcsch} \alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t\sqrt{1+\alpha^2}(\cos s - 1)} \cos(t\alpha(s - \sin s)) ds.$$

Поскольку $n = t\alpha$, получаем

$$I_u(t, n) = e^{\sqrt{t^2+n^2}-t-n \operatorname{arcsch} \frac{n}{t}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{t^2+n^2}(\cos s - 1)} \cos(n(s - \sin s)) ds.$$

В силу равенства $I(t, n) = I_u(t, n)$, заменив s на θ , окончательно получаем представление (2.8).

б) При всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ справедлива оценка

$$\cos \theta - 1 \leq -\frac{2}{\pi^2} \theta^2,$$

откуда следует, что

$$\left| e^{\sqrt{t^2+n^2}(\cos \theta - 1)} \cos(n(\theta - \sin \theta)) \right| \leq e^{-\frac{2\sqrt{t^2+n^2}}{\pi^2} \theta^2} \leq 1. \quad (2.16)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I^*(t, n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sqrt{t^2+n^2}(\cos \theta - 1)} \cos(n(\theta - \sin \theta)) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{2\sqrt{t^2+n^2}}{\pi^2} \theta^2} d\theta \leq \min \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\theta, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\sqrt{t^2+n^2}}{\pi^2} \theta^2} d\theta \right\}, \end{aligned}$$

откуда, произведя замену переменных $\theta = \frac{\pi}{2(t^2+n^2)^{1/4}} s$, получаем

$$I^*(t, n) \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{4(t^2+n^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \right\} = \min \left\{ 1, \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2+n^2)^{1/4}} \right\}.$$

в) Интеграл (2.9) сходен с интегралом Лапласа (см., например, [12]). Поэтому для вычисления его асимптотики возникает искушение воспользоваться соответствующими теоремами из [12]. К сожалению, на этом пути возникает одно препятствие: классические теоремы об асимптотике интеграла Лапласа требуют, чтобы функциональный множитель перед экспонентой, в данном случае функция $\cos(n(\theta - \sin \theta))$, зависел бы только от переменной интегрирования θ или от переменной интегрирования и “параметра”, в данном случае $\sqrt{t^2+n^2}$. В нашем же случае функция $\cos(n(\theta - \sin \theta))$ зависит от θ и n . Поэтому далее мы докажем соотношение (2.11) непосредственно, не прибегая к методам исследования асимптотик интегралов Лапласа.

Обозначив для простоты $\lambda = \sqrt{t^2+n^2}$ и произведя в (2.9) замену переменных $\theta = \sqrt{\lambda} s$, получим

$$I^*(t, n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_{-\pi\sqrt{\lambda}}^{\pi\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(\cos \frac{s}{\sqrt{\lambda}} - 1)} \cos \left(n \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} - \sin \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) ds. \quad (2.17)$$

Здесь в силу (2.16) подынтегральное выражение равномерно по всем $\lambda > 0$ ограничено по модулю функцией $e^{-2\pi^{-2}s^2}$, которая не зависит от параметра λ и суммируема на интервале $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, в интеграле (2.17) возможен предельный переход при $\lambda \rightarrow \infty$, если, конечно, подынтегральные функции будут иметь пределы на каждом конечном интервале изменения s . Покажем, что подынтегральные функции имеют соответствующие пределы.

Рассмотрим сначала функцию $\lambda(\cos(s/\sqrt{\lambda}) - 1)$. Здесь, как нетрудно видеть (разлагаем косинус в ряд в окрестности нуля),

$$\lambda \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1 \right) \rightarrow -\frac{1}{2}s^2 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

равномерно на каждом конечном интервале изменения s .

Для оценки функции $\cos(n(s/\sqrt{\lambda} - \sin(s/\sqrt{\lambda})))$ заметим сначала, что

$$\frac{s}{\sqrt{\lambda}} - \sin \frac{s}{\sqrt{\lambda}} = \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 O\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

равномерно на каждом конечном интервале изменения s . Однако

$$\left| \frac{n}{\lambda} \right| = \left| \frac{n}{\sqrt{t^2 + n^2}} \right| \leq 1.$$

Поэтому

$$n \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} - \sin \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right) = s^2 O\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

и, следовательно,

$$\cos \left(n \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} - \sin \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

равномерно на каждом конечном интервале изменения s .

Из соотношений (2.18) и (2.19) следует, что предельный переход при $\lambda \rightarrow \infty$ в интеграле (2.17) возможен, и получаем в пределе интеграл Лапласа

$$\int_{-\pi\sqrt{\lambda}}^{\pi\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(\cos(\frac{s}{\sqrt{\lambda}})-1)} \cos \left(n \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda}} - \sin \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) ds \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \sqrt{2\pi}.$$

Из полученного соотношения и (2.17) вытекают соотношения (2.11), (2.12).

Наконец, сравнивая (2.10) и (2.17) и учитывая, что функция $I^*(t, n)$ положительна, получаем (2.13). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Заметим, что $p_1(t, x, y) \equiv I(2\kappa t, y - x)$, откуда в силу леммы 2.1 и вытекает утверждение теоремы.

Теперь сформулируем основную теорему.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для переходной вероятности случайного блуждания справедливо представление*

$$p_d(t, x, y) = e^{H_d(2\kappa t, y-x)} h_d(2\kappa t, y - x), \quad (2.20)$$

где

$$H_d(t, z) = \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{t^2 + z_j^2} - t - z_j \operatorname{arcsch} \frac{z_j}{t} \right), \quad (2.21)$$

$$h_d(t, z) \leq \min \left\{ 1, \prod_{j=1}^d \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2 + z_j^2)^{1/4}} \right\}. \quad (2.22)$$

Функция $h_d(t, z)$ имеет вид

$$h_d(t, z) = h_d^*(t, z)(1 + \nu_d(t, z)); \quad (2.23)$$

здесь

$$h_d^*(t, z) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} (\prod_{j=1}^d (t^2 + z_j^2))^{1/4}} \quad (2.24)$$

и $\nu_d(t, z) \rightarrow 0$ при выполнении для каждой из координат z_j вектора $z = (z_1, \dots, z_d)$ соотношения $t^2 + z_j^2 \rightarrow \infty$. При этом

$$0 < 1 + \nu_d(t, z) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^d, \quad z \in \mathbb{Z}, \quad t \geq 0,$$

и поэтому

$$p_d(t, x, y) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^d e^{H_d(2\kappa t, y-x)} h_d^*(2\kappa t, y-x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.1 вероятность $p_d(t, x, y)$ принимает вид (2.20), где

$$h_d(t, z) = \prod_{j=1}^d h_1(t, z_j), \quad H_d(t, z) = \prod_{j=1}^d H_1(t, z_j),$$

а множитель $1 + \nu_d(t, z)$ является произведением функций $1 + \nu_1(t, z_j)$ при $j = 1, 2, \dots, d$, в каждой из которых по теореме 2.1 имеем

$$\nu_1(t, z_j) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t^2 + z_j^2 \rightarrow \infty,$$

и поэтому $\nu_d(t, z) \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Выпишем установленное в теореме 2.2 представление для переходной вероятности при $t > 0$ в явном виде

$$\begin{aligned} p_d(t, x, y) &= \frac{\exp\left\{-\sum_{j=1}^d (y_j - x_j) \operatorname{arcsch}\left(\frac{y_j - x_j}{2\kappa t}\right) + 2\kappa t \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{1 + \frac{(y_j - x_j)^2}{4\kappa^2 t^2}} - 1\right)\right\}}{(4\pi\kappa t)^{\frac{d}{2}} \sqrt[4]{\prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{(y_j - x_j)^2}{4\kappa^2 t^2}\right)}} \\ &\quad \times (1 + \nu_d(2\kappa t, y - x)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

из которого, используя разложение в ряд Тейлора функций, стоящих в показателе экспоненты, находим

$$\begin{aligned} p_d(t, x, y) &= \frac{\exp\left\{\sum_{j=1}^d \left(-\frac{(y_j - x_j)^2}{4\kappa t} + \frac{(y_j - x_j)^4}{192\kappa^3 t^3} - \frac{(y_j - x_j)^6}{2560\kappa^5 t^5} + O\left(\frac{(y_j - x_j)^8}{t^7}\right)\right)\right\}}{(4\pi\kappa t)^{\frac{d}{2}} \sqrt[4]{\prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{(y_j - x_j)^2}{4\kappa^2 t^2}\right)}} \\ &\quad \times (1 + \nu_d(2\kappa t, y - x)). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Полученное разложение является в определенном смысле “универсальным”. В частности, оно позволяет получить шкалу изменения вероятности $p_d(t, x, y)$ при совместном росте как времени t , так и пространственной переменной $y - x$, принимающей значения порядка t^α при различных значениях $\alpha \geq 0$. В зависимости от того, имеет ли место соотношение $y = O(t^{1/2})$, либо $y = O(t^{3/4})$ (но при

этом не верно первое соотношение), либо y растет быстрее, чем $O(t^{3/4})$, в показателе экспоненты в выражении (2.26) определяющим является либо первый, либо второй, либо последующие члены. Так, из разложения (2.26) при фиксированных x и y для переходной вероятности $p_d(t, x, y)$ простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ вытекает известная асимптотическая формула

$$p_d(t, x, y) \sim (4\pi\kappa t)^{-\frac{d}{2}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Непосредственное доказательство этой формулы приведено, например, в [13] для случая с дискретным временем и в [4, теорема 2.1.1] для случая с непрерывным временем.

Как видно из (2.26), асимптотическое представление (2.27) справедливо не только для фиксированных x и y , но и при всех x и y , удовлетворяющих соотношению $|y - x|t^{-1/2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. в том случае, когда $|y - x|$ имеет при $t \rightarrow \infty$ меньший порядок роста по сравнению с $t^{1/2}$. В частности, представление (2.27) справедливо при всех x и y , удовлетворяющих соотношению $|y - x| \leq ct^\alpha$ при $t \rightarrow \infty$, где $0 \leq \alpha < 1/2$.

Следующая теорема описывает случай, когда величина $|y - x|$ имеет тот же порядок роста при $t \rightarrow \infty$, как и $t^{1/2}$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Асимптотическое поведение переходной вероятности $p_d(t, x, y)$ простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ при x и y , удовлетворяющих при некоторых $c_1, c_2 > 0$ и $t \rightarrow \infty$ условию $c_1 t^{1/2} \leq |y - x| \leq c_2 t^{1/2}$, имеет вид*

$$p_d(t, x, y) \sim \exp\left\{-\frac{|y - x|^2}{4\kappa t}\right\} (4\pi\kappa t)^{-\frac{d}{2}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Как видно из соотношения (2.26), асимптотическое представление (2.28) справедливо не только при x и y , удовлетворяющих при некоторых $c_1, c_2 > 0$ и $t \rightarrow \infty$ условию $c_1 t^{1/2} \leq |y - x| \leq c_2 t^{1/2}$, но и при всех x и y , удовлетворяющих соотношениям $c_1 t^{1/2} \leq |y - x|$ и $\sum_{j=1}^d (y_j - x_j)^4 t^{-3} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, из которых второе равносильно условию $|y - x| t^{-3/4} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, представление (2.28) справедливо при всех x и y , удовлетворяющих соотношениям $c_1 t^{1/2} \leq |y - x|$ и $|y - x| \leq ct^\alpha$ при $t \rightarrow \infty$, где $1/2 \leq \alpha < 3/4$. Таким образом, теорема 2.3 уже включает в себя случай “не очень больших” отклонений случайного блуждания.

В том случае, когда величина $|y - x|$ имеет тот же порядок роста при $t \rightarrow \infty$, как $t^{3/4}$, из представления (2.26) вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.4. *Асимптотическое поведение переходной вероятности $p_d(t, x, y)$ простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ для x и y , удовлетворяющих при некоторых $c_1, c_2 > 0$ и $t \rightarrow \infty$ условию $c_1 t^{3/4} \leq |y - x| \leq c_2 t^{3/4}$, имеет вид*

$$p_d(t, x, y) \sim \exp\left\{-\frac{|y - x|^2}{4\kappa t} + \sum_{j=1}^d \frac{(y_j - x_j)^4}{192\kappa^3 t^3}\right\} (4\pi\kappa t)^{-\frac{d}{2}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Отметим, что в условиях последней теоремы найдется такая константа B , для которой $|y - x| \leq Bt^{3/4}$ при $t \rightarrow \infty$, и в этом случае

$$p_d(t, x, y) \geq C_d e^{-B_d \sqrt{t} t^{-\frac{d}{2}}}, \quad C_d > 0, \quad B_d > 0. \quad (2.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. В силу (2.26) асимптотическое представление (2.29) справедливо не только при x и y , удовлетворяющих при некоторых $c_1, c_2 > 0$ и $t \rightarrow \infty$ условию $c_1 t^{3/4} \leq |y - x| \leq c_2 t^{3/4}$, но и при всех x и y , удовлетворяющих соотношениям $c_1 t^{3/4} \leq |y - x|$ и $\sum_{j=1}^d (y_j - x_j)^6 t^{-5} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, из которых второе равносильно условию $|y - x| t^{-5/6} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В частности, представление (2.29) справедливо при всех x и y , удовлетворяющих соотношениям $c_1 t^{3/4} \leq |y - x|$ и $|y - x| \leq ct^\alpha$ при $t \rightarrow \infty$, где $3/4 \leq \alpha < 5/6$.

Отметим также, что в случае, когда $c_1 t^\alpha \leq |y - x| \leq c_2 t^\alpha$ и $3/4 < \alpha < 5/6$, соотношение (2.30) перестает быть верным.

Наконец, для анализа ситуации, когда величина $|y - x|$ имеет такой же порядок роста при $t \rightarrow \infty$, как t , воспользуемся не представлением (2.26), а более точной формулой (2.25).

ТЕОРЕМА 2.5. Асимптотическое поведение переходной вероятности $p_d(t, x, y)$ простого случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ для x и y , удовлетворяющих при некоторых $c_1, c_2 > 0$ и $t \rightarrow \infty$ условию $c_1 t \leq |y - x| \leq c_2 t$, имеет вид

$$p_d(t, x, y) \sim \frac{\exp\left\{-\sum_{j=1}^d y_j \operatorname{arcsch} \frac{y_j - x_j}{2\kappa t} + 2\kappa t \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{1 + \frac{(y_j - x_j)^2}{4\kappa^2 t^2}} - 1\right)\right\}}{(4\pi\kappa t)^{d/2} \sqrt[4]{\prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{(y_j - x_j)^2}{4\kappa^2 t^2}\right)}}$$

при $t \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. В условиях последней теоремы $p_d(t, x, y) \geq F_d e^{-K_d t t^{-\frac{d}{2}}}$, где $F_d, K_d > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Как видно из (2.26), условия теоремы 2.5 выполняются при $\alpha = 1$.

§ 3. Функция Грина разностного лапласиана

В этом параграфе проводится анализ функции Грина $G_\lambda(x, y)$ решетчатого лапласиана. В отличие от изучения переходных вероятностей (см. замечание 2.1), анализ функции $G_\lambda(x, y)$ не может быть сведен к исследованию бесселевых функций. В дальнейшем важную роль играет асимптотическое поведение резольвенты $G_\lambda(x, y)$ в различных ситуациях. Начнем с исследования $G_\lambda(x, y)$ при малых λ . Обозначим $z = y - x$; тогда

$$G_\lambda(z) = G_\lambda(0, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, 0, z) dt, \quad G_0(z) = \int_0^\infty p(t, 0, z) dt. \quad (3.1)$$

В силу (2.27) получаем

$$p(t, 0, z) \sim (4\pi\kappa t)^{-\frac{d}{2}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Из асимптотического поведения переходных вероятностей (3.2) с помощью тауберовых теорем (см. [14]) в работе [4] при $\lambda \rightarrow 0$ для случая $x = y = 0$ получены представления

$$G_\lambda(0) = \begin{cases} \gamma_1 \sqrt{\pi} (\sqrt{\lambda})^{-1} (1 + o(1)) & \text{при } d = 1, \\ -\gamma_2 (\ln \lambda) (1 + o(1)) & \text{при } d = 2, \\ G_0(0) - 2\sqrt{\pi} \gamma_3 \sqrt{\lambda} (1 + o(1)) & \text{при } d = 3, \\ G_0(0) + \gamma_4 \lambda (\ln \lambda) (1 + o(1)) & \text{при } d = 4, \end{cases}$$

где $\gamma_d = (4\pi\kappa)^{-\frac{d}{2}}$. Рассматриваемая ситуация сложнее, так как требуется исследовать асимптотическое поведение функции Грина $G_\lambda(z)$ при ограниченных $z \neq 0$. В этом случае справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $\lambda \rightarrow 0$ и $|z| \leq A$, где A – некоторая положительная константа, то равномерно по z имеют место представления*

$$G_\lambda(z) = \begin{cases} \gamma_1 \sqrt{\pi} (\sqrt{\lambda})^{-1} (1 + o(1)) & \text{при } d = 1, \\ -\gamma_2 (\ln \lambda) (1 + o(1)) & \text{при } d = 2, \\ G_0(z) - 2\sqrt{\pi} \gamma_3 \sqrt{\lambda} (1 + o(1)) & \text{при } d = 3, \\ G_0(z) + \gamma_4 \lambda (\ln \lambda) (1 + o(1)) & \text{при } d = 4, \\ G_0(z) - c_5(z) \lambda (1 + o(1)) & \text{при } d \geq 5, \end{cases}$$

где $\gamma_d = (4\pi\kappa)^{-\frac{d}{2}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем сначала идею исследования поведения функции $G_\lambda(x, y)$ при $\lambda \rightarrow 0$. В силу (2.4) функция $G_\lambda(x, y)$ может быть представлена в виде

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, y-x)}}{\lambda + 4\kappa \sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\theta_j}{2}} d\theta. \quad (3.3)$$

Здесь при $\lambda \rightarrow 0$ в случаях $d = 1, 2$ знаменатель подынтегрального выражения имеет особенность на множестве интегрирования $[-\pi, \pi]^d$ только в точке $\theta = 0$. Для вычисления этой особенности удобно сначала произвести замену переменных $\theta = \sqrt{\lambda} \varphi$, что позволит “уравнять” влияние слагаемых λ и $4\kappa \sum_{j=1}^d \sin^2(\theta_j/2)$ в знаменателе интегрального представления (3.3), а затем в случае $d = 2$ перейти к полярным координатам.

В случаях $d \geq 3$ интеграл (3.3) сходится при $\lambda = 0$. Поэтому в этих случаях оценка поведения функции $G_\lambda(x, y)$ при малых λ естественным образом сводится к анализу поведения функции

$$G_\lambda(z) - G_0(z) = -\frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\theta, z)}}{(4\kappa \sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\theta_j}{2}) (\lambda + 4\kappa \sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\theta_j}{2})} d\theta. \quad (3.4)$$

Здесь также при $\lambda \rightarrow 0$ знаменатель подынтегрального выражения имеет особенность на множестве интегрирования $[-\pi, \pi]^d$ только в точке $\theta = 0$. Для

вычисления этой особенности, как и в случаях $d = 1, 2$, также удобно сначала произвести замену переменных $\theta = \sqrt{\lambda}\varphi$, что позволит “уравнять” влияние слагаемых λ и $4\kappa \sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\theta_j}{2}$ в знаменателе интегрального представления (3.4), а затем перейти к полярным координатам.

Применение данной общей схемы исследования позволяет свести анализ асимптотик возникающих многомерных интегралов к анализу асимптотик некоторых одномерных интегралов. Отметим, что в случаях $d = 1, 2, 3, 4$ константы “при λ ”, определяющие соответствующие асимптотики, не зависят от z . В случае $d = 5$ соответствующая “константа” $c_5(z)$ оказывается некоторой функцией от z .

Не останавливаясь детально на вычислениях во всех случаях $d = 1, 2, \dots$, продемонстрируем технику соответствующих оценок в наиболее “типичном” случае $d = 3$.

Заметим, что для любых $\theta \in [-\pi, \pi]^d$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\theta_j}{2} \geq C_d |\theta|^2, \quad (3.5)$$

где C_d – некоторая константа. Более того, существует функция $g(\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]^d$, такая, что

$$4 \sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\theta_j}{2} = |\theta|^2 + g(\theta), \quad (3.6)$$

и при этом $|g(\theta)| \leq C_d^* |\theta|^3$, где C_d^* – некоторая константа.

Введем замену переменных $\theta = \sqrt{\lambda}\varphi$. Тогда функция (3.4) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} G_\lambda(z) - G_0(z) &= \\ &= -\frac{\lambda}{(2\pi)^d} \int_{\lambda^{-1/2}[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\sqrt{\lambda}\varphi, z)}}{(\kappa\lambda|\varphi|^2 + \kappa g(\sqrt{\lambda}\varphi))(\lambda + \kappa\lambda|\varphi|^2 + \kappa g(\sqrt{\lambda}\varphi))} d(\sqrt{\lambda}\varphi) \\ &= -\frac{\lambda^{\frac{d}{2}-1}}{(2\pi)^d \kappa} \int_{\lambda^{-1/2}[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{i(\varphi, \sqrt{\lambda}z)}}{(|\varphi|^2 + \lambda^{-1}g(\sqrt{\lambda}\varphi))(1 + \kappa|\varphi|^2 + \kappa\lambda^{-1}g(\sqrt{\lambda}\varphi))} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим теперь, что в силу (3.5) и (3.6)

$$|\varphi|^2 + \lambda^{-1}g(\sqrt{\lambda}\varphi) = \frac{1}{\lambda} \left(4 \sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}\varphi_j}{2} \right) \geq \frac{1}{\lambda} C_d |\sqrt{\lambda}\varphi|^2 = C_d |\varphi|^2.$$

Поэтому подынтегральное выражение в последнем интеграле в силу (3.5) равномерно по всем $\lambda > 0$ и $|z| \leq A$ оценивается сверху функцией

$$\frac{1}{C_d |\varphi|^2 (1 + \kappa C_d |\varphi|^2)},$$

суммируемой на всем пространстве $\mathbb{R}^d$ (при $d = 3$). В этом случае в (3.7) возможен предельный переход при $\lambda \rightarrow 0$. Тогда, учитывая, что при $\lambda \rightarrow 0$ имеет место соотношение $e^{i(\varphi, \sqrt{\lambda}z)} \rightarrow 1$, а также $\lambda^{-1}g(\sqrt{\lambda}\varphi) \rightarrow 0$ в силу определения функции $g(\cdot)$, получаем

$$G_\lambda(z) - G_0(z) = -\frac{\lambda^{\frac{d}{2}-1}}{(2\pi)^d \kappa} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|\varphi|^2(1 + \kappa|\varphi|^2)} d\varphi \cdot (1 + o(1))$$

при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно по всем $\lambda > 0$ и $|z| \leq A$. Теорема доказана.

Для исследования распространения фронта частиц в простом симметричном ветвящемся случайном блуждании в дальнейшем потребуются асимптотическое поведение функции $G_\lambda(x, y)$ при фиксированном λ и больших отклонениях случайного блуждания, т. е. при $|y - x| \rightarrow \infty$.

В изучении распространения фронта популяции частиц на $\mathbb{Z}^d$, как будет видно из дальнейшего изложения, особенно важен случай, когда $|y - x| = O(t)$.

Теперь определим асимптотику резольвенты $G_\lambda(x, y)$ при больших $|y - x|$. В этом случае справедлива

ТЕОРЕМА 3.2. *Для резольвенты оператора $\kappa\Delta$ при $|y - x| \rightarrow \infty$ справедливо представление*

$$G_\lambda(x, y) = \frac{e^{-|y-x|r_{\lambda,\kappa}\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)}}{|y-x|^{\frac{d-1}{2}}} R_{\lambda,\kappa}\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) (1 + o(1)), \quad (3.8)$$

где $o(1)$ – величина, стремящаяся к нулю при $|y - x| \rightarrow \infty$ равномерно по $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$, и $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$, $0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 < \infty$, а функции $r_{\lambda,\kappa}(\cdot)$ и $R_{\lambda,\kappa}(\cdot)$ определяются равенствами

$$r_{\lambda,\kappa}(v) = \sum_{j=1}^d v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{s_0}, \quad v \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (3.9)$$

$$R_{\lambda,\kappa}(v) = \frac{(2\pi)^{\frac{1-d}{2}}}{2\kappa} \left(\prod_{j=1}^d (s_0^2 + v_j^2) \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=1}^d \frac{v_j^2}{s_0^2 \sqrt{s_0^2 + v_j^2}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad v \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (3.10)$$

и s_0 является решением уравнения

$$\sum_{j=1}^d \sqrt{1 + \left(\frac{v_j}{s_0}\right)^2} = \frac{\lambda}{2\kappa} + d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения (2.3), а также симметричности и пространственной однородности переходной вероятности $p(t, x, y) = p(t, y, x) = p(t, 0, y - x)$ для функции Грина справедливы равенства

$$G_\lambda(x, y) = G_\lambda(y, x) = G_\lambda(0, y - x).$$

Поэтому, вводя обозначение $G_\lambda(y - x) = G_\lambda(0, y - x)$, исследование асимптотики функции $G_\lambda(x, y)$ при $|y - x| \rightarrow \infty$ можно свести к исследованию функции $G_\lambda(y)$

при $|y| \rightarrow \infty$. Из теоремы 2.2 вытекает представление (2.25) для переходной вероятности $p_d(t, 0, y)$, из которого в силу (2.3) получаем

$$G_\lambda(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t + H_d(2\kappa t, y)} h_d(2\kappa t, y) dt, \quad (3.11)$$

где функции H_d и h_d имеют вид (2.21) и (2.23). Обозначим $\mu = |y|$ и введем переменную $v = \mu^{-1}y = y/|y|$. Тогда $|v| = 1$ и при каждом $j = 1, 2, \dots, d$ имеют место равенства $v_j = \mu^{-1}y_j = y_j/|y|$.

В дальнейшем $\{\lambda, \kappa, v\}$ будут играть роль параметров, принадлежащих по условию теоремы компакт $U := [\lambda_1, \lambda_2] \times [\kappa_1, \kappa_2] \times \mathbb{S}^{d-1}$, а μ будем трактовать как переменную, зависимость от которой функции $G_\lambda(y)$ следует изучить, что отражено в следующем обозначении:

$$I_{\lambda, \kappa, v}(\mu) := G_\lambda(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t + H_d(2\kappa t, \mu v)} h_d(2\kappa t, \mu v) dt.$$

Произведем в последнем интеграле замену переменных $2\kappa t = \mu s$. В этом случае $I_{\lambda, \kappa, v}(\mu)$ примет вид

$$I_{\lambda, \kappa, v}(\mu) = \frac{\mu}{2\kappa} \int_0^\infty e^{-\lambda \frac{\mu s}{2\kappa} + H_d(\mu s, \mu v)} h_d(\mu s, \mu v) ds.$$

Вводя вспомогательную функцию

$$S_{\lambda, \kappa, v}(s) := -\frac{\lambda s}{2\kappa} + \mu^{-1} H_d(\mu s, \mu v) = -\frac{\lambda s}{2\kappa} + \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{s^2 + v_j^2} - s - v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{s} \right), \quad (3.12)$$

получаем

$$I_{\lambda, \kappa, v}(\mu) = \frac{\mu}{2\kappa} \int_0^\infty e^{\mu S_{\lambda, \kappa, v}(s)} h_d(\mu s, \mu v) ds. \quad (3.13)$$

Асимптотическое поведение $I_{\lambda, \kappa, v}(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$ исследуем с помощью метода Лапласа (см., например, [12, гл. II]). Для применения этого метода покажем, что функция $S_{\lambda, \kappa, v}(s)$ имеет на интервале $[0, \infty)$ единственную невырожденную точку максимума $s_0(\lambda, \kappa, v)$, причем эта точка при всех значениях параметров $\{\lambda, \kappa, v\} \in U$ отделена от концов интервала, т. е. существуют такие числа a и b , что $0 < a \leq s_0(\lambda, \kappa, v) \leq b < \infty$.

Для нахождения точки максимума функции $S_{\lambda, \kappa, v}(s)$ при $0 \leq s < \infty$ найдем решение $s_0 = s_0(\lambda, \kappa, v)$ уравнения

$$S'_{\lambda, \kappa, v}(s_0) = 0, \quad (3.14)$$

которое принимает вид

$$\frac{\lambda}{2\kappa} - \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v_j}{s_0} \right)^2} - 1 \right) = 0. \quad (3.15)$$

Нетрудно видеть, что при рассматриваемых $\lambda, \varkappa > 0$ уравнение (3.14) имеет ровно одно положительное решение. Подставляя выражение (3.15) в соотношение (3.12), находим, что

$$S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) = - \sum_{j=1}^d v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{s_0}. \quad (3.16)$$

Оценим s_0 . Приведем равенство (3.15) к виду

$$\sum_{j=1}^d \sqrt{1 + \left(\frac{v_j}{s_0} \right)^2} = \frac{\lambda}{2\varkappa} + d. \quad (3.17)$$

Из соотношения $|v| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_d^2} = 1$ следует, что для всех координат вектора v выполняется неравенство $|v_j| \leq 1$, поэтому для левой части равенства (3.17) справедлива оценка снизу

$$\sum_{j=1}^d \sqrt{1 + \left(\frac{v_j}{s_0} \right)^2} \geq \frac{1}{s_0} \sum_{j=1}^d |v_j| \geq \frac{1}{s_0} \sum_{j=1}^d v_j^2 \geq \frac{1}{s_0}. \quad (3.18)$$

Оценка сверху для левой части (3.17) вытекает из соотношений

$$\sum_{j=1}^d \sqrt{1 + \left(\frac{v_j}{s_0} \right)^2} \leq \sum_{j=1}^d \left(1 + \left(\frac{v_j}{s_0} \right)^2 \right) = d + \frac{1}{s_0^2} \sum_{j=1}^d v_j^2 = d + \frac{1}{s_0^2}. \quad (3.19)$$

Из равенства (3.17) и оценок (3.18), (3.19) получаем

$$\frac{1}{s_0} \leq \frac{\lambda}{2\varkappa} + d \leq d + \frac{1}{s_0^2}.$$

Отсюда имеем

$$0 < \frac{2\varkappa}{\lambda + 2\varkappa d} \leq s_0 \leq \sqrt{\frac{2\varkappa}{\lambda}}, \quad (3.20)$$

следовательно, множество точек максимума $s_0 = s_0(\lambda, \varkappa, v)$ функции $S_{\lambda, \varkappa, v}(s)$ равномерно ограничено и отделено от нуля при $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$.

Теперь докажем невырожденность точки максимума s_0 функции $S_{\lambda, \varkappa, v}(s)$. Сначала заметим, что

$$S''_{\lambda, \varkappa, v}(s) = - \sum_{j=1}^d \frac{v_j^2}{s^2 \sqrt{v_j^2 + s^2}} < 0, \quad (3.21)$$

значит, $S_{\lambda, \varkappa, v}(s)$ — строго выпуклая вверх функция. Здесь $s \leq \sqrt{v_j^2 + s^2} \leq \sqrt{1 + s^2}$ при всех $j = 1, 2, \dots, d$, поскольку $|v| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_d^2} = 1$. Поэтому

$$-\frac{1}{s_0^3} \leq S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) \leq -\frac{1}{s_0^2 \sqrt{1 + s_0^2}}.$$

Следовательно, величина $S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)$ равномерно ограничена и отделена от нуля при $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$.

Теперь вычислим асимптотику интеграла (3.13), который может быть представлен в виде суммы:

$$I_{\lambda, \varkappa, v}(\mu) = \frac{\mu}{2\varkappa} (I_1(\mu) + I_2(\mu) + I_3(\mu)), \quad (3.22)$$

где

$$I_1(\mu) = \int_0^{s_0 - \alpha(\mu)} e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s)} h_d(\mu s, \mu v) ds, \quad (3.23)$$

$$I_2(\mu) = \int_{s_0 - \alpha(\mu)}^{s_0 + \alpha(\mu)} e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s)} h_d(\mu s, \mu v) ds, \quad (3.24)$$

$$I_3(\mu) = \int_{s_0 + \alpha(\mu)}^{\infty} e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s)} h_d(\mu s, \mu v) ds, \quad (3.25)$$

а функция $\alpha(\mu)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\alpha(\mu) \rightarrow 0, \quad \alpha(\mu)\sqrt{\mu} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Например, в качестве $\alpha(\mu)$ можно взять величину $\alpha(\mu) = \mu^{-\frac{1}{4}}$.

Оценку интегралов (3.23)–(3.25) начнем с интеграла $I_2(\mu)$, в котором функцию $h_d(\mu s, \mu v)$ удобно представить в явном виде, используя (2.23) и (2.24):

$$I_2(\mu) = \int_{s_0 - \alpha(\mu)}^{s_0 + \alpha(\mu)} \frac{e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s)}}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{j=1}^d (s^2 + v_j^2) \right)^{\frac{1}{4}}} \cdot (1 + \nu_d(\mu s, \mu v)) ds. \quad (3.27)$$

Здесь $\mu s \rightarrow \infty$ при $s \in [s_0 - \alpha(\mu), s_0 + \alpha(\mu)]$ равномерно по $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$, поскольку $\alpha(\mu) \rightarrow 0$ в силу (3.26), а точка s_0 в силу (3.20) отделена от нуля. В этом случае $\nu_d(\mu s, \mu v) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ равномерно по $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$ согласно теореме 2.2. Значит, сомножитель $1 + \nu_d(\mu s, \mu v)$ под знаком интеграла в (3.27) равномерно по $s \in [s_0 - \alpha(\mu), s_0 + \alpha(\mu)]$ и $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$ стремится к единице при $\mu \rightarrow \infty$.

Заметим также, что функция $\prod_{j=1}^d (s^2 + v_j^2)$ равномерно по $s \in [s_0 - \alpha(\mu), s_0 + \alpha(\mu)]$ и $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$ стремится к $\prod_{j=1}^d (s_0^2 + v_j^2)$ при $\mu \rightarrow \infty$, поэтому для функции

$$h_d^*(\mu s, \mu v) = \frac{1}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{j=1}^d (s^2 + v_j^2) \right)^{\frac{1}{4}}}$$

справедливо равномерное по $s \in [s_0 - \alpha(\mu), s_0 + \alpha(\mu)]$ и $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$ соотношение

$$\frac{h_d^*(\mu s, \mu v)}{h_d^*(\mu s_0, \mu v)} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Проведенные оценки показывают, что для интеграла (3.24) выполнены условия теоремы 2.2 из [12, гл. II], откуда имеем

$$I_2(\mu) = \frac{1}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{j=1}^d (s_0^2 + v_j^2) \right)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{2\pi}{-\mu S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)}} e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)} (1 + o(1)) \quad (3.28)$$

равномерно по $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$ (здесь и до конца доказательства через $o(1)$ обозначаются величины, стремящиеся к нулю при $\mu \rightarrow \infty$).

Осталось оценить интегралы $I_1(\mu)$ и $I_3(\mu)$. Поскольку эти интегралы оцениваются по одной и той же схеме, приведем лишь оценку интеграла $I_3(\mu)$. Воспользуемся тем, что в силу теоремы 2.2 для $h_d(\mu s, \mu v)$ при $s \in [s_0 + \alpha(\mu), \infty)$ справедлива оценка сверху $h_d(\mu s, \mu v) \leq 1$. Поэтому

$$I_3(\mu) \leq \int_{s_0 + \alpha(\mu)}^{\infty} e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s)} ds.$$

Здесь в силу (3.21) функция $S_{\lambda, \varkappa, v}(s)$ строго выпукла, и поэтому согласно [12, гл II, формула (2.19)] имеет место оценка

$$I_3(\mu) \leq \frac{e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0 + \alpha(\mu))}}{|S'_{\lambda, \varkappa, v}(s_0 + \alpha(\mu))|}.$$

Учитывая, что s_0 – точка максимума функции $S_{\lambda, \varkappa, v}(s)$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0 + \alpha(\mu)) &= S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) + \frac{1}{2} S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) \alpha^2(\mu) + O(\alpha^3(\mu)), \\ S'_{\lambda, \varkappa, v}(s_0 + \alpha(\mu)) &= \frac{1}{2} S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) \alpha(\mu) + O(\alpha^2(\mu)). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая выбор $\alpha(\mu) = \mu^{-1/4}$ в (3.26), получаем

$$\begin{aligned} \mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0 + \alpha(\mu)) &= \mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) + \frac{1}{2} S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) \mu^{\frac{1}{2}} (1 + o(1)), \\ |S'_{\lambda, \varkappa, v}(s_0 + \alpha(\mu))| &= \frac{1}{2} |S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)| \mu^{-\frac{1}{4}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_3(\mu) \leq e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)} \frac{2 \exp\left\{\frac{1}{2} S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) \mu^{\frac{1}{2}} (1 + o(1))\right\}}{|S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)| \mu^{-\frac{1}{4}} (1 + o(1))}. \quad (3.29)$$

Здесь, как отмечалось выше, величина $S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)$ равномерно ограничена и отделена от нуля при $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$. Поэтому

$$\exp\left\{\frac{1}{2} S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) \mu^{\frac{1}{2}} (1 + o(1))\right\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty$$

быстрее любой степенной функции аргумента μ равномерно по $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$. Отсюда, сравнивая (3.28) с (3.29), получаем

$$I_3(\mu) \leq I_2(\mu) o(1) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty \quad (3.30)$$

равномерно по $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$. Аналогичное соотношение справедливо и для интеграла $I_1(\mu)$, и поэтому из (3.22), (3.28) и (3.30) окончательно получаем

$$I_{\lambda, \varkappa, v}(\mu) = \frac{\mu}{2\varkappa} \frac{1}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}} (\prod_{j=1}^d (s_0^2 + v_j^2))^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{2\pi}{-\mu S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)}} e^{\mu S_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)} (1 + o(1))$$

равномерно по $\{\lambda, \varkappa, v\} \in U$. Таким образом, с использованием (3.16) и (3.21) и изначальных обозначений для функции Грина случайного блуждания получаем окончательное представление (3.8) для функции $G_\lambda(y)$:

$$G_\lambda(y) = \frac{\exp\{-|y|r_{\lambda,\kappa}(\frac{y}{|y|})\}}{|y|^{\frac{d-1}{2}}} R_{\lambda,\kappa}\left(\frac{y}{|y|}\right)(1+o(1)),$$

где

$$r_{\lambda,\kappa}(v) = \sum_{j=1}^d v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{s_0},$$

$$R_{\lambda,\kappa}(v) = \frac{(2\pi)^{\frac{1-d}{2}}}{2\varkappa} \left(\prod_{j=1}^d (s_0^2 + v_j^2) \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sum_{j=1}^d \frac{v_j^2}{s_0^2 \sqrt{s_0^2 + v_j^2}} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что следующая теорема не является прямым следствием теоремы 3.2, хотя при доказательстве также используется метод Лапласа.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\varkappa > 0$. Если $\lambda \rightarrow 0$ и $|y - x| \rightarrow \infty$, и при этом $|y - x|\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$, то для резольвенты оператора $\varkappa\Delta$ справедливо представление

$$G_\lambda(x, y) = \frac{C_d(\lambda)e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}|y-x|}}{|y-x|^{\frac{d-1}{2}}}(1+o(1)),$$

где

$$C_d(\lambda) = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} (2\varkappa)^{-1} \left(\frac{\lambda}{\varkappa} \right)^{\frac{d-3}{4}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varkappa > 0$ фиксировано. Начнем с исследования максимума функции

$$S_{\lambda,\varkappa,y}(t) = -\lambda t + H_d(2\varkappa t, y)$$

в представлении функции Грина (3.11). Здесь

$$S'_{\lambda,\varkappa,y}(t) = -\lambda + 2\varkappa \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y_j}{2\varkappa t} \right)^2} - 1 \right). \quad (3.31)$$

Будем искать корень $t = t_0$ уравнения $S'_{\lambda,\varkappa,y}(t) = 0$, которое с учетом равенства (3.31) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\varkappa} &= \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y_j}{2\varkappa t} \right)^2} - 1 \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{\left(\frac{y_j}{2\varkappa t} \right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_j}{2\varkappa t} \right)^2} + 1} = \sum_{j=1}^d \frac{y_j^2}{(2\varkappa t)^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y_j}{2\varkappa t} \right)^2} + 1 \right)}. \end{aligned}$$

Оценивая сверху и снизу правую часть последнего равенства, получаем

$$\left(\frac{|y|}{2\kappa t}\right)^2 \frac{1}{2 + \left(\frac{|y|}{2\kappa t}\right)^2} \leq \left(\frac{|y|}{2\kappa t}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{|y|}{2\kappa t}\right)^2} + 1} \leq \frac{\lambda}{2\kappa} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{|y|}{2\kappa t}\right)^2.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\lambda}{\kappa} \leq \left(\frac{|y|}{2\kappa t}\right)^2 \leq \frac{\lambda}{\kappa} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\kappa}}.$$

Следовательно, при $\lambda \rightarrow 0$ значения решения t_0 и нормы $|y|$ связаны соотношением

$$\left(\frac{|y|}{2\kappa t_0}\right)^2 = \frac{\lambda}{\kappa} (1 + \mathcal{O}(\lambda)),$$

и, в частности, $\frac{|y|}{2\kappa t_0} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Более того,

$$2\kappa t_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} |y| (1 + \mathcal{O}(\lambda)),$$

откуда вытекает, в частности, что $2\kappa t_0 \rightarrow \infty$ при $|y| \geq C > 0$.

Теперь произведем в (3.11) замену переменных $2\kappa t = \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} |y| s$ и обозначим $s_0 = \frac{2\kappa t_0}{|y|} \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$; тогда при $\lambda \rightarrow 0$ будет выполняться соотношение

$$s_0 = 1 + \mathcal{O}(\lambda).$$

При этом (3.11) предстанет в виде

$$G_\lambda(y) = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} |y| \int_0^\infty e^{S_{\lambda, \kappa, y} \left(\frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} |y| s \right)} h_d \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} |y| s, y \right) ds. \quad (3.32)$$

Положим $\mu = |y|$ и введем переменную $v = \mu^{-1} y = \frac{y}{|y|}$. Тогда (3.32) примет вид

$$G_\lambda(y) = \tilde{G}_\lambda(\mu) := \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} \mu \int_0^\infty e^{\tilde{S}_{\lambda, \kappa, \mu}(s)} h_d \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} \mu s, \mu v \right) ds, \quad (3.33)$$

где

$$\tilde{S}_{\lambda, \kappa, \mu, v}(s) = S_{\lambda, \kappa, \mu v} \left(\frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} \mu s \right). \quad (3.34)$$

По построению точка s_0 является точкой максимума функции $\tilde{S}_{\lambda, \kappa, \mu}(s)$, и при этом, как несложно подсчитать,

$$\tilde{S}_{\lambda, \kappa, \mu, v}(s_0) = S_{\lambda, \kappa, \mu v} \left(\frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} |y| s_0 \right) = -\mu \sum_{j=1}^d v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} s_0}.$$

Здесь при $\lambda \rightarrow 0$ имеет место соотношение $\frac{v_j}{\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} s_0} \rightarrow 0$ и, как отмечалось выше, $s_0 \rightarrow 1$. Поэтому

$$\tilde{S}_{\lambda, \kappa, \mu}(s_0) = -\mu \sum_{j=1}^d \frac{v_j^2}{\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}} s_0} (1 + \mathcal{O}(\lambda)) = -\mu \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}} (1 + \mathcal{O}(\lambda)). \quad (3.35)$$

Теперь найдем $\tilde{S}''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)$, продифференцировав (3.34):

$$\tilde{S}''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) = -\mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}} \sum_{j=1}^d \frac{v_j^2}{s_0^2 \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa} v_j^2 + s_0^2}}.$$

Отсюда в силу того, что $s_0 \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow 0$, получаем асимптотическое представление

$$S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0) = -\mu \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}} (1 + \mathcal{O}(\lambda)). \quad (3.36)$$

Теперь приступим к вычислению асимптотики интеграла (3.33), который может быть представлен (как и в теореме 3.2) в виде суммы трех интегралов:

$$\tilde{G}_\lambda(\mu) := \frac{1}{2\varkappa} \sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu (I_1(\lambda, \mu) + I_2(\lambda, \mu) + I_3(\lambda, \mu)), \quad (3.37)$$

где

$$I_1(\lambda, \mu) = \int_0^{s_0 - \alpha(\lambda, \mu)} e^{\tilde{S}_{\lambda, \varkappa, \mu}(s)} h_d\left(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v\right) ds, \quad (3.38)$$

$$I_2(\lambda, \mu) = \int_{s_0 - \alpha(\lambda, \mu)}^{s_0 + \alpha(\lambda, \mu)} e^{\tilde{S}_{\lambda, \varkappa, \mu}(s)} h_d\left(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v\right) ds, \quad (3.39)$$

$$I_3(\lambda, \mu) = \int_{s_0 + \alpha(\lambda, \mu)}^{\infty} e^{\tilde{S}_{\lambda, \varkappa, \mu}(s)} h_d\left(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v\right) ds, \quad (3.40)$$

а функция $\alpha(\lambda, \mu)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\alpha(\lambda, \mu) \rightarrow 0, \quad \alpha(\lambda, \mu) \sqrt{|S''_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)|} \rightarrow \infty \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \infty,$$

равносильные условиям

$$\alpha(\lambda, \mu) \rightarrow 0, \quad \alpha(\lambda, \mu) \mu^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{4}} \rightarrow \infty \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

Поскольку по условию теоремы $\mu \sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$, в качестве $\alpha(\lambda, \mu)$ можно взять величину $\alpha(\lambda, \mu) = \mu^{-\frac{1}{4}} \lambda^{-\frac{1}{8}}$.

Оценку интегралов (3.38)–(3.40) начнем с интеграла $I_2(\lambda, \mu)$, в котором удобно представить функцию $h_d(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v)$ в явном виде, используя (2.23) и (2.24):

$$I_2(\lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^{\frac{d}{4}} \int_{s_0 - \alpha(\lambda, \mu)}^{s_0 + \alpha(\lambda, \mu)} \frac{e^{\tilde{S}_{\lambda, \varkappa, v}(s)}}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{j=1}^d (s^2 + \frac{\lambda}{\varkappa} v_j^2)\right)^{\frac{1}{4}}} \left(1 + \nu_d\left(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v\right)\right) ds. \quad (3.42)$$

Заметим, что $\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s \rightarrow \infty$ при $s \in [s_0 - \alpha(\lambda, \mu), s_0 + \alpha(\lambda, \mu)]$ равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, поскольку в силу (3.41) имеем $\alpha(\lambda, \mu) \rightarrow 0$ и $s_0 \rightarrow 1$. В этом случае по теореме 2.2 имеем $\nu_d(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\mu \sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$ равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Значит, сомножитель $1 + \nu_d(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v)$ под знаком интеграла в (3.42) равномерно по $s \in [s_0 - \alpha(\lambda, \mu), s_0 + \alpha(\lambda, \mu)]$ и $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ стремится к единице при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\mu \sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$.

Заметим также, что функция $\prod_{j=1}^d (s^2 + \frac{\lambda}{\varkappa} v_j^2)$ стремится к $\prod_{j=1}^d s_0^2 \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\mu\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$ равномерно по $s \in [s_0 - \alpha(\lambda, \mu), s_0 + \alpha(\lambda, \mu)]$ и $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, поэтому для функции

$$h_d^* \left(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v \right) = \left(\frac{\lambda}{\varkappa} \right)^{\frac{d}{4}} \frac{1}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{j=1}^d (s^2 + \frac{\lambda}{\varkappa} v_j^2) \right)^{\frac{1}{4}}}$$

справедливо равномерное по $s \in [s_0 - \alpha(\lambda, \mu), s_0 + \alpha(\lambda, \mu)]$ и $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ соотношение

$$\frac{h_d^* \left(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s, \mu v \right)}{h_d^* \left(\sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu s_0, \mu v \right)} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \mu\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty.$$

Проведенные оценки показывают, что для интеграла (3.42) выполнены условия теоремы 2.2 из [12, гл. II], откуда имеем

$$I_2(\lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda}{\varkappa} \right)^{\frac{d}{4}} \frac{1}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}}} \sqrt{\frac{2\pi}{-\tilde{S}_{\lambda, \varkappa, v}''(s_0)}} e^{\tilde{S}_{\lambda, \varkappa, v}(s_0)} (1 + o(1)),$$

или с учетом явного вида (3.35) и (3.36)

$$I_2(\lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda}{\varkappa} \right)^{\frac{d}{4}} \frac{1}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}}} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}} e^{-\mu\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}} (1 + o(1)). \quad (3.43)$$

Интегралы $I_1(\lambda, \mu)$ и $I_3(\lambda, \mu)$ оцениваются так же, как интегралы $I_1(\mu)$ и $I_3(\mu)$ в доказательстве теоремы 3.2, и удовлетворяют соотношениям

$$I_1(\lambda, \mu), I_3(\lambda, \mu) \leq I_2(\lambda, \mu) o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \mu\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty \quad (3.44)$$

равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Поэтому из (3.37), (3.43) и (3.44) получаем

$$\tilde{G}_\lambda(\mu) = \frac{1}{2\varkappa} \sqrt{\frac{\varkappa}{\lambda}} \mu \left(\frac{\lambda}{\varkappa} \right)^{\frac{d}{4}} \frac{1}{(2\pi\mu)^{\frac{d}{2}}} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}} e^{-\mu\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}} (1 + o(1))$$

равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Таким образом, для функции Грина (3.33) с учетом равенства $\mu = |y|$ справедливо соотношение

$$G_\lambda(y) = \frac{C_d(\lambda)}{|y|^{\frac{d-1}{2}}} e^{-\mu\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}} (1 + o(1)), \quad (3.45)$$

где

$$C_d(\lambda) = (2\pi)^{-\frac{d-1}{2}} (2\varkappa)^{-1} \left(\frac{\lambda}{\varkappa} \right)^{\frac{d-3}{4}}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\lambda = 0$ и $d \geq 3$. Тогда для резольвенты $G_0(x, y)$ оператора $\kappa\Delta$ при $|y - x| \rightarrow \infty$ справедливо представление

$$G_0(y - x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{4\kappa\pi^{\frac{d}{2}}|y - x|^{d-2}}(1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая $d = 3$ доказательство содержится в [9]. Мы применим иной подход, позволяющий провести доказательство для произвольной размерности $d \geq 3$. Из теоремы 2.2 вытекает соотношение

$$G_0(y) = \int_0^\infty e^{H_d(2\kappa t, y)} h_d(2\kappa t, y) dt, \quad (3.46)$$

в котором $H_d(2\kappa t, y)$ и $h_d(2\kappa t, y)$ определены равенствами (2.21) и (2.23). Для удобства изложения сделаем замену переменных $2\kappa t = t'$ и затем заменим t' на t . Тогда

$$G_0(y) = \frac{1}{2\kappa} \tilde{G}_0(y), \quad \text{где} \quad \tilde{G}_0(y) = \int_0^\infty e^{H_d(t, y)} h_d(t, y) dt. \quad (3.47)$$

По теореме 2.2 функция $h_d(t, y)$ удовлетворяет (2.22), т. е.

$$h_d(t, z) \leq \min \left\{ 1, \prod_{j=1}^d \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2 + z_j^2)^{\frac{1}{4}}} \right\}.$$

Следовательно, функция $h_d(t, y)$ определяется равенством

$$h_d(t, z) = \prod_{j=1}^d \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2 + z_j^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad (3.48)$$

если

$$\prod_{j=1}^d \frac{\sqrt{2\pi}}{4(t^2 + y_j^2)^{\frac{1}{4}}} \leq \left(\frac{\pi}{8t} \right)^{\frac{d}{2}} \leq 1.$$

Поэтому $h_d(t, y) \leq 1$ при $\frac{\pi}{8t} \leq 1$, т. е. при $t \geq \frac{\pi}{8} = t_*$, в силу (3.48).

Как и в теореме 3.3, положим $\mu = |y|$ и введем переменную $v = \mu^{-1}y = \frac{y}{|y|} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В этом случае функция $\tilde{G}_0(y)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{G}_0(y) = Q_0(\mu) + Q_1(\mu),$$

где

$$Q_0(\mu) = \int_0^{t_*} e^{H_d(t, \mu v)} h_d(t, \mu v) dt, \quad 0 \leq h_d(t, y) \leq 1, \quad (3.49)$$

$$Q_1(\mu) = \int_{t_*}^\infty \frac{e^{H_d(t, \mu v)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{j=1}^d (t^2 + (\mu v_j)^2) \right)^{\frac{1}{4}}} (1 + \nu_d(t, \mu v)) dt. \quad (3.50)$$

Исследуем сначала поведение $Q_0(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Как уже неоднократно вычислялось при доказательстве предыдущих теорем,

$$\frac{\partial H_d(t, y)}{\partial t} = \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y_j}{t} \right)^2} - 1 \right) \geq 0.$$

Значит, функция $H_d(t, y)$ не убывает по t , и поэтому $H_d(t, y) \leq H_d(t_*, y)$ при $0 \leq t \leq t_*$. В этом случае

$$\begin{aligned} H_d(t, \mu v) &= H_d(t_*, \mu v) \leq \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{t_*^2 + (\mu v_j)^2} - t_* - \mu v_j \operatorname{arcsch} \frac{\mu v_j}{t_*} \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\frac{(\mu v_j)^2}{\sqrt{t_*^2 + (\mu v_j)^2} + t_*} - \mu v_j \operatorname{arcsch} \frac{\mu v_j}{t_*} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^d \left(\mu |v_j| - \mu |v_j| \operatorname{arcsch} \frac{\mu |v_j|}{t_*} \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись представлением $\operatorname{arcsch} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, получаем

$$\begin{aligned} H_d(t, \mu v) &\leq \sum_{j=1}^d \left(\mu |v_j| - \mu |v_j| \ln \left(\frac{\mu |v_j|}{t_*} + \sqrt{1 + \frac{\mu |v_j|}{t_*}} \right) \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^d \left(\mu |v_j| - \mu |v_j| \ln \frac{2\mu |v_j|}{t_*} \right) = \mu \sum_{j=1}^d \left(|v_j| - |v_j| \ln \frac{2|v_j|}{t_*} \right) - \mu \ln \mu \sum_{j=1}^d |v_j|. \end{aligned}$$

Поскольку $|v|^2 = \sum_{j=1}^d v_j^2 = 1$, то $\sum_{j=1}^d |v_j| \geq 1$. При этом величина $\sum_{j=1}^d |v_j| (1 - \ln \frac{2|v_j|}{t_*})$ ограничена некоторой абсолютной константой C_* . Следовательно,

$$H_d(t, \mu v) \leq C_* \mu - \mu \ln \mu.$$

Отсюда имеем

$$Q_0(\mu) = \int_0^{t_*} e^{H_d(t, \mu v)} h_d(t, \mu v) dt \leq t_* e^{C_* \mu} \mu^{-\mu}.$$

Таким образом, $Q_0(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, причем быстрее любой степенной функции μ .

Вычислим теперь асимптотику $Q_1(\mu)$. Для этого произведем в интеграле (3.50) замену переменных $t = \mu^2 s$. После этой замены переменных $Q_1(\mu)$ можно представить в виде

$$Q_1(\mu) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \mu^{d-2}} W(\mu),$$

где

$$W(\mu) = \int_{t_*/\mu^2}^{\infty} \frac{e^{H_d(\mu^2 s, \mu v)}}{(\prod_{j=1}^d (s^2 + \mu^{-2} v_j^2))^{\frac{1}{4}}} (1 + \nu_d(\mu^2 s, \mu v)) ds. \quad (3.51)$$

Покажем, что подынтегральная функция равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ при достаточно больших μ ограничена сверху функцией, суммируемой на $[0, \infty)$.

Сначала заметим, что в силу теоремы 2.2 справедлива оценка

$$0 < 1 + \nu_d(\mu^2 s, \mu v) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^d, \quad (3.52)$$

и, кроме того,

$$\left(\prod_{j=1}^d (s^2 + \mu^{-2} v_j^2)\right)^{-\frac{1}{4}} \leq s^{-\frac{d}{2}}, \quad (3.53)$$

причем в правой части стоит функция, суммируемая на бесконечности при $d \geq 3$.

Для оценки $e^{H_d(\mu^2 s, \mu v)}$ рассмотрим функцию

$$Z(\mu, s, v) := H_d(\mu^2 s, \mu v) = \sum_{j=1}^d \left(\sqrt{\mu^4 s^2 + \mu^2 v_j^2} - \mu^2 s - \mu v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{\mu s} \right).$$

Покажем, что $Z(\mu, s, v)$ монотонно убывает по μ , для чего вычислим ее производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z(\mu, s, v)}{\partial \mu} &= \sum_{j=1}^d \left(\frac{2\mu^3 s^2 + \mu v_j^2}{\sqrt{\mu^4 s^2 + \mu^2 v_j^2}} - 2\mu s - v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{\mu s} + \mu v_j \frac{v_j}{\mu^2 s \sqrt{\frac{v_j^2}{\mu^2 s^2} + 1}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \left(\frac{2(\mu^2 s^2 + v_j^2)}{\sqrt{\mu^2 s^2 + v_j^2}} - 2\mu s - v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{\mu s} \right) \\ &= \sum_{j=1}^d \left(2\sqrt{\mu^2 s^2 + v_j^2} - 2\mu s - v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{\mu s} \right) \\ &= \mu s \sum_{j=1}^d \left(2\sqrt{1 + \left(\frac{v_j}{\mu s}\right)^2} - 2 - \frac{v_j}{\mu s} \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{\mu s} \right). \end{aligned}$$

Представим $\frac{\partial Z(\mu, s, v)}{\partial \mu}$ в виде

$$\frac{\partial Z(\mu, s, v)}{\partial \mu} = \mu s \sum_{j=1}^d \Psi\left(\frac{v_j}{\mu s}\right), \quad (3.54)$$

где

$$\Psi(\tau) = 2\sqrt{1 + \tau^2} - 2 - \tau \operatorname{arcsch} \tau,$$

и покажем, что $\Psi(\tau) \leq 0$ для всех τ . Очевидно, $\Psi(0) = 0$, а так как

$$\frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + 1}} - \operatorname{arcsch} \tau,$$

то $\frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0$ и, кроме того, $\frac{\partial^2 \Psi(\tau)}{\partial \tau^2} = -\frac{\tau^2}{(1+\tau^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 0$. Из полученных соотношений видно, что функция $\Psi(\tau)$ достигает своего максимума в точке $\tau = 0$ и, следовательно, неположительна.

Итак, из (3.54) следует, что

$$\frac{\partial Z(\mu, s, v)}{\partial \mu} \leq 0$$

при всех $\mu > 0$, $s > 0$ и $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. Отсюда получаем, что в (3.51) при любом μ_0 подынтегральная функция равномерно по $\mu \geq \mu_0$ и $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ ограничена сверху функцией

$$w(\mu_0, s, v) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^d e^{H_d(\mu_0^2 s, \mu_0 v)} s^{-\frac{d}{2}}.$$

Напомним, что $H_d(\mu^2 s, \mu v) \leq 0$ при всех s и $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, и поэтому

$$w(\mu_0, s, v) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^d s^{-\frac{d}{2}}, \quad (3.55)$$

откуда вытекает суммируемость функции $w(\mu_0, s, v)$ при $d \geq 3$ на бесконечности равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$. При малых s на некотором полуинтервале $(0, s_0]$, где $s_0 \leq 1$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} Z_0(\mu_0, s, v) &= H_d(\mu_0^2 s, \mu_0 v) = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\mu_0^2 v_j^2}{\sqrt{\mu_0^4 s^2 + \mu_0^2 v_j^2} + \mu_0 s} - \mu_0 v_j \operatorname{arcsch} \frac{v_j}{\mu_0 s} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^d \left(\mu_0 |v_j| - \mu_0 |v_j| \ln \left(\frac{|v_j|}{\mu_0 s} + \sqrt{1 + \left(\frac{|v_j|}{\mu_0 s} \right)^2} \right) \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^d \left(\mu_0 |v_j| - \mu_0 |v_j| \ln \frac{|v_j|}{\mu_0 s} \right) = \mu_0 \sum_{j=1}^d |v_j| - \mu_0 \sum_{j=1}^d |v_j| \ln \frac{|v_j|}{\mu_0} + \mu_0 \ln s \sum_{j=1}^d |v_j|. \end{aligned}$$

Здесь при всех $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ выражение $\mu_0 \sum_{j=1}^d |v_j| - \mu_0 \sum_{j=1}^d |v_j| \ln \frac{|v_j|}{\mu_0}$ оценивается сверху некоторой константой $C_{**}(\mu_0)$, а поскольку при $0 < s \leq s_0 \leq 1$ величина $\ln s$ отрицательна и $\sum_{j=1}^d |v_j| \geq 1$ при $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, то $\mu_0 \ln s \sum_{j=1}^d |v_j| \leq \mu_0 \ln s$. Отсюда

$$Z_0(\mu_0, s, v) \leq C_{**}(\mu_0) + \mu_0 \ln s$$

равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда

$$w(\mu_0, s, v) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^d s^{-\frac{d}{2}} e^{C_{**}(\mu_0)} s^{\mu_0}, \quad 0 < s \leq s_0 \leq 1.$$

Из полученного неравенства следует, что при всех $\mu > \mu_0 > d/2$ подынтегральное выражение в (3.51) ограничено сверху равномерно по $\mu \geq \mu_0$ и $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ суммируемой на $(0, s_0]$ функцией. Вместе с (3.55) данный факт означает, что функция $w(\mu_0, s, v)$ суммируема на всем интервале $(0, \infty)$ равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$, поскольку при этом на каждом ограниченном интервале $[s_0, s_1]$, $0 < s_0 \leq s < \infty$, имеют место равномерно по $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ соотношения

$$\begin{aligned} 1 + \nu_d(\mu^2 s, \mu v) &\rightarrow 1, \quad \mu \rightarrow \infty, \\ \left(\prod_{j=1}^d (s^2 + \mu^{-2} v_j^2) \right)^{-\frac{1}{4}} &\rightarrow s^{-\frac{d}{2}}, \quad \mu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, как нетрудно проверить, $H_d(\mu^2 s, \mu v) \rightarrow -1/(2s)$, $\mu \rightarrow \infty$. Таким образом, окончательно получаем

$$\tilde{G}_0(\mu) = o(\mu^{-k}) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \mu^{d-2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2s}} s^{-\frac{d}{2}} ds (1 + o(1))$$

при любом целом $k \geq 0$. Следовательно,

$$\tilde{G}_0(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |y|^{d-2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2s}} s^{-\frac{d}{2}} ds (1 + o(1)).$$

Тогда в силу (3.47)

$$G_0(y) = \frac{1}{2\kappa(2\pi)^{\frac{d}{2}} |y|^{d-2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2s}} s^{-\frac{d}{2}} ds (1 + o(1)).$$

Как известно,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2s}} s^{-\frac{d}{2}} ds = 2^{\frac{d}{2}-1} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right),$$

и поэтому окончательно имеем

$$G_0(y) = \frac{2^{\frac{d}{2}-1}}{2\kappa(2\pi)^{\frac{d}{2}} |y|^{d-2}} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - 1)}{4\kappa\pi^{\frac{d}{2}} |y|^{d-2}} (1 + o(1)).$$

Теорема доказана.

Авторы выражают признательность профессору А. Н. Ширяеву за внимание к работе.

Список литературы

1. J. Gärtner, S. A. Molchanov, “Parabolic problems for the Anderson model. I. Intermittency and related topics”, *Comm. Math. Phys.*, **132**:3 (1990), 613–655.
2. J. Gärtner, S. A. Molchanov, “Parabolic problems for the Anderson model. II. Second-order asymptotics and structure of high peaks”, *Probab. Theory Related Fields*, **111**:1 (1998), 7–55.
3. R. Carmona, L. Koralov, S. Molchanov, “Asymptotics for the almost sure Lyapunov exponent for the solution of the parabolic Anderson problem”, *Random Oper. Stochastic Equations*, **9**:1 (2001), 77–86.
4. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, ЦПИ при мех.-мат. Моск. ун-та, М., 2007.
5. Е. Б. Яровая, “Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий”, *ТВП*, **55**:4 (2010), 705–731; англ. пер.: Е. В. Yarovaia, “Criteria of exponential growth for the numbers of particles in models of branching random walks”, *Theory Probab. Appl.*, **55**:4 (2011), 661–682.
6. M. Cranston, S. Molchanov, “On phase transitions and limit theorems for homopolymers”, *Probability and mathematical physics*, CRM Proc. Lecture Notes, **42**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 97–112.
7. Е. Б. Яровая, “Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 123–140; англ. пер.: Е. В. Yarovaia, “Spectral properties of evolutionary operators in branching random walk models”, *Math. Notes*, **92**:1 (2012), 115–131.

8. M. Cranston, L. Korolov, S. Molchanov, B. Vainberg, “Continuous model for homopolymers”, *J. Funct. Anal.*, **256**:8 (2009), 2656–2696.
9. Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич, *Теоремы и задачи о процессах Маркова*, Наука, М., 1967.
10. P. Kuchment, A. Raich, *Green’s function asymptotics near the internal edges of spectra of periodic elliptic operators. Spectral edge case*, arXiv: abs/1110.0225.
11. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
12. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
13. Ф. Спитцер, *Принципы случайного блуждания*, Наука, М., 1994; пер. с англ.: F. Spitzer, *Principles of random walks*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976.
14. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984; пер. с англ.: W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, v. 2, Wiley, New York, 1971.

С. А. МОЛЧАНОВ (S. A. MOLCHANOV)
University of North Carolina Charlotte, USA
E-mail: smolchan@uncc.edu

Поступило в редакцию
16.02.2012

Е. Б. ЯРОВАЯ (E. B. YAROVAYA)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su