Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Греб, Х. Лен, З. Ролленске, Лагранжевы слоения
на четырехмерных гиперкэлеровых многообразиях, *Изв.
РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 25–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7973>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:55:52

УДК 514.154

Д. Греб, Х. Лен, З. Ролленске

Лагранжевы слоения на четырехмерных гиперкэлеровых многообразиях

В качестве ответа на усиленный вариант вопроса, поставленного А. Бовиллем, дается короткое геометрическое доказательство того, что всякое четырехмерное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжев подтор L , допускает голоморфное лагранжево слоение со слоем L .

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: гиперкэлерово многообразие, лагранжево слоение.

DOI: 10.4213/im7973

§ 1. Введение

Пусть X – гиперкэлерово многообразие, т. е. компактное односвязное кэлерово многообразие, для которого векторное пространство $H^0(X, \Omega_X^2)$ порождается некоторой голоморфной симплектической формой σ . Из работ Д. Маццучити хорошо известно, что любое нетривиальное голоморфное отображение из X в комплексное пространство меньшей размерности является лагранжевым слоением (см. § 2). Более того, частный случай так называемой гиперкэлеровой SYZ-гипотезы гласит, что всякое гиперкэлерово многообразие можно продеформировать в гиперкэлерово многообразие, допускающее лагранжево слоение.

Поэтому важной задачей является нахождение геометрических условий для гиперкэлерова многообразия, которые гарантировали бы существование на нем лагранжева слоения. Следующий вопрос был поставлен А. Бовиллем [1, п. 1.6].

ВОПРОС А. Пусть X – гиперкэлерово многообразие, а L – лагранжев тор в X . Является ли тогда L слоем некоторого (мероморфного) лагранжева слоения $f: X \rightarrow B$?

В нашей предыдущей статье [2] был дан положительный ответ на вопрос А в случае непроективного X . Более того, для всякого гиперкэлерова многообразия, допускающего почти голоморфное лагранжево слоение, было найдено бирационально эквивалентное ему гиперкэлерово многообразие, на котором это лагранжево слоение становится голоморфным.

Развиваемый в настоящей работе подход к решению вопроса Бовилля в проективном случае основан на детальном изучении теории деформаций тора L в многообразии X . Для этого рассмотрим компоненту $\mathfrak{B}$ пространства Барлета, содержащую $[L]$, вместе с универсальным семейством и вычисляющим отображением со значениями в X :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U} & \xrightarrow{\varepsilon} & X \\ \pi \downarrow & & \\ \mathfrak{B} & & \end{array}$$

В [2, лемма 3.1] было показано, что отображение ε сюръективно и его слои в общем положении конечны, а также что X допускает почти голоморфное лагранжево слоение тогда и только тогда, когда $\deg(\varepsilon) = 1$.

Если степень отображения ε строго больше единицы, то некоторые деформации тора L пересекают L неожиданным образом. Для изучения этой ситуации введем понятие *L -редукции*: для каждого проективного гиперкэлерова многообразия, содержащего лагранжев тор, найдутся проективное многообразие $\mathfrak{T}$ и рациональное отображение $\varphi_L: X \dashrightarrow \mathfrak{T}$, единственное с точностью до бирациональной эквивалентности, слой которого, проходящий через общую точку x , равен связной компоненте пересечения всех деформаций тора L , проходящих через x . Многообразие X назовем *L -отделимым*, если отображение φ_L бирационально. Мы докажем следующий результат (теорема 3.5): *пусть X – проективное гиперкэлерово многообразие, а $L \subset X$ – лагранжев подтор; тогда X допускает почти голоморфное слоение с сильным слоем L в том и только в том случае, когда X не является L -отделимым.*

Для четырехмерных гиперкэлеровых многообразий X можно исключить случай L -отделимости X с помощью симплектической линейной алгебры. Более того, детальное знание бирациональной геометрии четырехмерных гиперкэлеровых многообразий дает положительный ответ на самый сильный вариант вопроса Бовилля (теорема 5.1): *пусть X – четырехмерное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжев тор L ; тогда X допускает голоморфное лагранжево слоение со слоем L .*

На конференции “Геометрические структуры на комплексных многообразиях” в Москве Е. Америк обратила наше внимание на следующий результат, независимо полученный ею на основе одного замечания из [3]: в размерности четыре всякое проективное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжев подтор L , допускает почти голоморфное лагранжево слоение со слоем L [4].

Уже после того, как наша статья была написана, появился препринт Хуанга и Вайсса, где для проективного случая дан ответ на *ослабленный вариант* вопроса Бовилля: построено *почти голоморфное* лагранжево слоение на любом проективном $2n$ -мерном гиперкэлеровом многообразии, содержащем лагранжев тор (см. [5]). Их рассуждение состоит из двух частей: геометрической и относящейся к абстрактной теории групп. В отличие от этого наш ответ (теорема 5.1) на *сильный вариант* вопроса Бовилля является чисто геометрическим, опирается на глобальные рассуждения в дополнение к локальным соображениям теории деформаций, а вместо теоретико-групповой части использует симплектическую линейную алгебру.

Авторы признательны Д. Хюбрехтсу за интерес к работе и ряд стимулирующих обсуждений. Благодарим Е. Америк, сообщившую нам наблюдение, содержащееся в лемме 5.3, которое сильно упростило наше предыдущее рассуждение. Второй автор благодарен Л. Манивелю за стимулирующие обсуждения и, в частности, за указание на замечание 5.4. Третий автор благодарит М. Вербицкого за приглашение в Москву.

Для успеха нашего сотрудничества была неоценимой поддержка Немецкого исследовательского общества (DFG) по проекту SFB/TR 45, исследовательская группа 790, а также поддержка работы третьего автора по проекту Э. Нётер. Первый автор благодарен фонду Бадена–Вюртемберга за поддержку по линии “Eliteprogramm für Postdoktorandinnen und Postdoktoranden”. Второй ав-

тор благодарит за поддержку Национальный совет по научным исследованиям (CNRS) и институт Фурье.

§ 2. Предварительные сведения и обозначения

2.1. Лагранжевы слоения. Дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть X – гиперкэлериово многообразие. *Лагранжевым слоением* на X называется голоморфное сюръективное отображение $f: X \rightarrow B$ со связными слоями на нормальное комплексное пространство B такое, что каждая неприводимая компонента редукции каждого слоя f является лагранжевым подмногообразием в X .

Из фундаментальных результатов Мацуситы вытекает, что всякое слоение на гиперкэлериовом многообразии автоматически лагранжево.

ТЕОРЕМА 2.2 [6]–[9]. Пусть X – гиперкэлериово многообразие размерности $2n$, а $f: X \rightarrow B$ – морфизм со связными слоями в нормальное комплексное пространство B , где $0 < \dim B < \dim X$. Тогда f является лагранжевым слоением. В частности, f равноразмерностно¹, и $\dim B = n$. При этом каждый гладкий слой отображения f является комплексным тором.

2.2. Мероморфные отображения. Пусть X – нормальное комплексное пространство, Y – компактное комплексное пространство, а $f: X \dashrightarrow Y$ – мероморфное отображение. Рассмотрим разрешение неопределенностей

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ p \swarrow & & \searrow \tilde{f} \\ X & \dashrightarrow & Y \end{array} \quad (2.1)$$

отображения f . Определим *слой* F_y отображения f над точкой $y \in Y$ по формуле $F_y := p(\tilde{f}^{-1}(y))$. Это определение не зависит от выбора разрешения неопределенностей.

Напомним, что мероморфное отображение $f: X \dashrightarrow Y$ указанного выше вида называется *почти голоморфным*, если существует открытое по Зарисскому подмножество $U \subset Y$ такое, что сужение $f|_{f^{-1}(U)}: f^{-1}(U) \rightarrow U$ есть собственное голоморфное отображение. Слой отображения $f|_{f^{-1}(U)}$ называется *сильным слоем* почти голоморфного отображения f .

Пусть X – нормальное алгебраическое многообразие, B – полное алгебраическое многообразие, а $f: X \dashrightarrow B$ – почти голоморфное рациональное отображение. Для любого дивизора A на B можно определить его *прообраз* при f либо геометрически, как замыкание прообраза A на множестве точек голоморфности f , либо на уровне локально свободных пучков по формуле $f^* \mathcal{O}_B(A) := (p_* \tilde{f}^* \mathcal{O}_B(A))^{\vee\vee}$, где $p: \tilde{X} \rightarrow X$ – любое разрешение неопределенностей, как на диаграмме (2.1).

2.3. Деформации лагранжевых подторов. Отправной точкой нашего подхода к решению вопроса Бовилля является теория деформаций лагранжева

¹То есть все слои отображения f имеют одинаковые размерности.

подтора L в гиперкэлеровом многообразии X . Напомним кратко нужные нам результаты из [2, § 2, 3].

Пространство Барлета $\mathfrak{B}(X)$ многообразия X (или схема Чжоу в проективном случае) параметризует компактные циклы на X . Оказывается (см. ниже п. (i) леммы 2.3), что существует единственная неприводимая компонента $\mathfrak{B}$ пространства $\mathfrak{B}(X)$, содержащая точку $[L]$. Обозначая через $\mathfrak{U}$ график универсального семейства над $\mathfrak{B}$, а через Δ – дискриминантное множество компоненты $\mathfrak{B}$ (т. е. множество точек, параметризующих сингулярные элементы семейства $\mathfrak{B}$), получаем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{U}_\Delta & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{U} \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Delta & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{B} \end{array} \quad (2.2)$$

Подробный анализ отображений, входящих в диаграмму (2.2), показывает, что малая этальная или аналитическая окрестность подмногообразия L в X расслаивается над окрестностью точки $[L]$ в $\mathfrak{B}$. Точнее, имеем следующий результат.

ЛЕММА 2.3 [2, лемма 3.1]. *Пусть X – гиперкэлерово многообразие размерности $2n$, а L – лагранжесв подтор в X . Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *пространство Барлета $\mathfrak{B}(X)$ гладко и имеет размерность n вблизи $[L]$; в частности, $[L]$ содержится в единственной неприводимой компоненте $\mathfrak{B}$ пространства $\mathfrak{B}(X)$, а $\mathfrak{U}$ является гладким и имеет размерность $2n$ вблизи множества $\pi^{-1}([L])$;*

(ii) *морфизм ε конечен и этален вдоль гладких слоев отображения π ; в частности, достаточно малые деформации L не пересекаются с L и не существует семейств положительной размерности из гладких слоев, проходящих через точку $x \in X$ общего положения;*

(iii) *если $[L'] \in \mathfrak{B}$ для гладкого L' , то L' является лагранжесвым подтором в X .*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Приведем два простых, но полезных следствия леммы 2.3.

(i) Множество $X_\Delta := \varepsilon(\mathfrak{U}_\Delta)$ состоит из тех точек $x \in X$, для которых существует сингулярная деформация тора L , проходящая через x . По соображениям размерности множество X_Δ является собственным подмножеством в X , а по лемме 2.3, (ii) отображение ε конечно и этально на прообразе множества $X \setminus X_\Delta$.

(ii) Из утверждения (ii) леммы 2.3 вытекает, в частности, что для любых двух точек $[L], [M] \in \mathfrak{B}$ их произведение-пересечение $[L].[M]$ как циклов в X равно нулю. Поэтому члены семейства $\mathfrak{B}$ не могут пересекаться по конечному числу точек.

2.4. Почти голоморфные лагранжесвы слоения и пространства Барлета. Следующий результат связывает обсуждавшуюся выше теорию деформаций L в X с нашим вопросом о глобально определенных почти голоморфных лагранжесвых слоениях.

ЛЕММА 2.5 [2, лемма 3.2]. *Пусть X – гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжесв подтор L . Тогда X допускает почти голоморфное лагранжесво слоение с сильным слоем L в том и только в том случае, если вычисляющее отображение ε из диаграммы (2.2) бимероморфно.*

Если отображение ε бирационально, то $\pi \circ \varepsilon^{-1}$ – искомое почти голоморфное слоение (с точностью до нормализации пространства $\mathfrak{B}$). Обратное доказывается с помощью пространства Барлета разрешения неопределенностей.

§ 3. L -редукция и L -отделимые многообразия

Пусть X – проективное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжев подтор L . В этом параграфе начинается наш анализ отображений, входящих в диаграмму (2.2). Напомним, что согласно лемме 2.5 для положительного ответа на вопрос Бовилля надо установить бирациональность отображения ε .

3.1. L -редукция. Здесь строится мероморфное отображение, ассоциированное с накрывающим семейством $\{L_t\}_{t \in \mathfrak{B}}$. В общей точке это отображение является факторизацией по мероморфному отношению эквивалентности, заданному семейством $\{L_t\}$, т.е. отождествляет те точки из X , которые не разделяются элементами из $\{L_t\}$.

3.1.1. Построение L -редукции. Пользуясь обозначениями из диаграммы (2.2), положим $\mathfrak{U}_{\text{reg}} := \varepsilon^{-1}(X \setminus X_\Delta)$. Напомним, что по замечанию 2.4 отображение

$$\varepsilon|_{\mathfrak{U}_{\text{reg}}} : \mathfrak{U}_{\text{reg}} \rightarrow X \setminus X_\Delta$$

конечно и этально. Обозначим его степень через d .

Отображение $\varepsilon|_{\mathfrak{U}_{\text{reg}}}$ индуцирует морфизм $X \setminus X_\Delta \rightarrow \text{Sym}^d(\mathfrak{U}_{\text{reg}})$. Его композиция с естественным морфизмом $\text{Sym}^d(\mathfrak{U}_{\text{reg}}) \rightarrow \text{Sym}^d(\mathfrak{B})$, индуцированным отображением $\pi : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{B}$, дает морфизм $X \setminus X_\Delta \rightarrow \text{Sym}^d(\mathfrak{B})$. Последний естественно продолжается до рационального отображения $\psi : X \dashrightarrow \text{Sym}^d(\mathfrak{B})$. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \text{Sym}^d(\mathfrak{B}) \\ \downarrow p & & \\ X & & \end{array}$$

есть разрешение неопределенностей отображения ψ с неособым $\tilde{X}$. Тогда факторизация Штейна для $\tilde{\psi}$ дает следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p} & \tilde{X} \\ & \searrow \varphi_L & \downarrow \tilde{\varphi} \quad \searrow \tilde{\psi} \\ & & \mathfrak{T} \longrightarrow \text{Sym}^d(\mathfrak{B}) \end{array}$$

Здесь $\varphi_L = \tilde{\varphi} \circ p^{-1} : X \dashrightarrow \mathfrak{T}$ – рациональное отображение, индуцированное отображением $\tilde{\varphi}$. Заметим, что отображение $\varphi_L : X \dashrightarrow \mathfrak{T}$ единственно с точностью до бирациональной эквивалентности и, тем самым, канонически ассоциировано с парой (X, L) . Назовем его L -редукцией многообразия X .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для каждой точки $x \in X \setminus X_\Delta$ в семействе $\{L_t\}_{t \in \mathfrak{B}}$ имеют d различных гладких торов $L_1, \dots, L_d$, содержащих x . По построению отображение φ_L определено в точке x и переводит ее в класс набора $([L_1], \dots, [L_d])$ в $\text{Sym}^d(\mathfrak{B})$.

3.1.2. *Простейшие свойства L -редукции.* Следующее теоретико-множественное утверждение немедленно вытекает из конструкции отображения φ_L .

ЛЕММА 3.2. *Слой отображения φ_L , проходящий через точку $x \in X \setminus X_\Delta$, совпадает со связной компонентой множества*

$$\bigcap_{[M] \in \mathfrak{B}, x \in M} M,$$

содержащей x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in X \setminus X_\Delta$, то отображение ε этально в каждой точке прообраза $\varepsilon^{-1}(x)$. Поэтому образ $\pi(\varepsilon^{-1}(x)) = \{[L_1], \dots, [L_d]\}$ состоит из тех точек пространства $\mathfrak{B}$, которые параметризуют d различных подторов в X , проходящих через x . В частности, мероморфное отображение $\psi: X \dashrightarrow \text{Sym}^d(\mathfrak{B})$ определено в точке x , и его слой есть

$$\psi^{-1}(\psi(x)) = \bigcap_i L_i. \quad (3.1)$$

После факторизации Штейна слой φ_L равен проходящей через x компоненте множества (3.1), что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.3. *Пусть X – проективное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжесв подтор L . Тогда L -редукция $\varphi_L: X \dashrightarrow \mathfrak{T}$ почти голоморфна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{dom}(\varphi_L)$ – область определения φ_L , а $Z := X \setminus \text{dom}(\varphi_L)$ – множество, где φ_L не определено. Надо показать, что общий слой отображения φ_L не пересекает Z .

Рассуждая от противного, допустим, что для общей точки $x_0 \in X \setminus X_\Delta$ проходящий через нее слой F_{x_0} отображения φ_L имеет нетривиальное пересечение с Z . Напомним, что множество $X_\Delta = \varepsilon(\mathfrak{U}_\Delta)$ замечается сингулярными деформациями тора L согласно замечанию 2.4, (i) и что отображение φ_L голоморфно на $X \setminus X_\Delta$ согласно замечанию 3.1. Возьмем любую точку $z \in F_{x_0} \cap Z$ и рассмотрим график $X' \subset X \times \mathfrak{T}$ отображения φ_L с проекциями $p: X' \rightarrow X$ и $\varphi'_L: X' \rightarrow \mathfrak{T}$. Как объясняется, например, в [10, п. 1.39], замкнутое подмножество Z можно описать в виде

$$Z = \{x \in X \mid \dim p^{-1}(x) > 0\}. \quad (3.2)$$

Поскольку X нормально, а p бирационально, p имеет связные слои. Следовательно, многообразие $C' := \varphi'_L(p^{-1}(z))$ связно. Приведем еще некоторые свойства этого многообразия:

- (i) $\dim C' > 0$, потому что $\dim p^{-1}(z) > 0$, а X' – график φ_L ;
- (ii) $\varphi_L(x_0) \in C'$ при $z \in F_{x_0}$;
- (iii) z содержится во всех слоях над точками из C' .

Допустим, что справедлива диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & X \\ \varphi_L|_C \downarrow & & \downarrow \varphi_L \\ C' & \hookrightarrow & \mathfrak{T} \end{array}$$

где C связно, $x_0 \in C$ и $\varphi_L|_C$ – локальный изоморфизм в точке x_0 . Покажем, что это допущение приводит к противоречию. Действительно, пусть $L_1, \dots, L_d$ – $d = \deg \varepsilon$ различных торов из семейства $\{L_t\}_{t \in \mathfrak{B}}$, содержащих x_0 . Поскольку C связно и $C \not\subset F_{x_0}$ согласно свойству (i), из леммы 3.2 вытекает существование

$k \in \{1, \dots, d\}$ такого, что $C \not\subset L_k$. По лемме 2.3 малые деформации тора L_k образуют слоение некоторой аналитической окрестности точки x_0 . Значит, для каждой точки $y \in C \setminus \{x_0\}$, достаточно близкой к x_0 , найдется малая деформация L_y тора L_k такая, что $y \in L_y$ и

$$L_y \cap L_k = \emptyset. \quad (3.3)$$

С другой стороны, по свойству (iii) и лемме 3.2 имеем

$$z \in F_y \cap F_{x_0} \subset L_y \cap L_k,$$

что противоречит (3.3).

Остается найти нужное многообразие C . Заметим, что достаточно построить C в евклидовой открытой окрестности точки x_0 . Пользуясь общностью точки x_0 и теоремой о неявной функции, найдем малую окрестность $U \ni x_0$ такую, что сужение $\varphi_L: U \rightarrow V := \varphi_L(U)$ является тривиальным голоморфным расслоением. В частности, множество $V \subset \mathfrak{T}$ открыто, и существует сечение $C \subset U$ для подмногообразия $C' \cap V$. Остается лишь добиться связности множеств $C' \cap V$ и C . Это можно сделать, уменьшая V и U . Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Проективное гиперкэлерово многообразие X , содержащее лагранжев подтор L , называется *L -отделимым*, если его L -редукция $\varphi_L: X \dashrightarrow \mathfrak{T}$ бирациональна.

3.2. Лагранжевы слоения на многообразиях, не являющихся L -отделимыми. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть X – проективное гиперкэлерово многообразие и $L \subset X$ – лагранжев подтор. Тогда X допускает почти голоморфное слоение с сильным слоем L в том и только в том случае, если X не является L -отделимым.

Согласно последнему результату вопрос Бовилля можно переформулировать следующим образом.

ВОПРОС В. Существует ли такое проективное гиперкэлерово многообразие X с лагранжевым подтором L , что X является L -отделимым?

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5. Если X не является L -отделимым, то L -редукция $\varphi_L: X \dashrightarrow \mathfrak{T}$ почти голоморфна (по лемме 3.3) и $0 < \dim \mathfrak{T} < \dim X$. Тогда согласно [2, теорема 6.7] отображение φ_L – почти голоморфное лагранжево слоение на X . Описание общего слоя L -редукции (лемма 3.2) показывает, что тор L является сильным слоем φ_L .

Обратно, если $f: X \dashrightarrow B$ – почти голоморфное лагранжево слоение с сильным слоем L , то через общую точку проходит единственный лагранжев подтор в $\mathfrak{B}$ и L -редукция совпадает с рациональным отображением $\pi \circ \varepsilon^{-1}: X \dashrightarrow \mathfrak{B}$. В частности, X не является L -отделимым. Теорема доказана.

§ 4. Пересечение лагранжевых подторов

Как и выше, пусть X – проективное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжев подтор L . В этом параграфе мы подробнее изучим окрестность L в X , что даст ряд результатов о геометрии пересечений различных

элементов семейства $\mathfrak{B}$ деформаций тора L . Будем всюду пользоваться обозначениями и результатами из п. 2.3.

По лемме 2.3 семейство $\mathfrak{B}$ гладко в точке $[L]$ и найдется такая окрестность V этой точки, что сужение $\varepsilon|_{\mathfrak{U}_V} : \mathfrak{U}_V \rightarrow X$ вычисляющего отображения на прообраз $\mathfrak{U}_V := \pi^{-1}(V)$ вкладывает $\mathfrak{U}_V$ в X . Таким образом, можно рассматривать $\mathfrak{U}_V$ как открытое подмножество в X . Пересечение множества $\mathfrak{U}_V$ с подмногообразием $M \subset X$ показано на рис. 1.

Рис. 1. Окрестность $\mathfrak{U}_V$ тора L и ее проекция на $V \subset \mathfrak{B}$

ЛЕММА 4.1. Пусть $M \subseteq X$ – собственное гладкое подмногообразие и $L \subset X$ – гладкий тор, имеющий непустое пересечение с M . Тогда общая малая деформация тора L имеет гладкое пересечение с M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуемся теми же обозначениями, что и выше. Поскольку множество $\mathfrak{U}_V$ открыто в X , пересечение $M \cap \mathfrak{U}_V$ гладко. Далее, отображение $\pi|_{M \cap \mathfrak{U}_V} : M \cap \mathfrak{U}_V \rightarrow V$ собственное, поскольку π собственное, а M компактно. Следовательно, к $\pi|_{M \cap \mathfrak{U}_V}$ применима теорема о гладкости в общем положении, откуда и вытекает требуемый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $M \subseteq X$ – компактное подмногообразие и $L \subseteq X$ – лагранжесв подтор общего положения с $L \cap M \neq \emptyset$. Тогда расслоение $N_{L \cap M / M}$ тривиально. Если M – комплексный тор, то $L \cap M$ – несвязное объединение торов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу общности L пересечение $L \cap M$ гладко по лемме 4.1. Более того, оба утверждения можно проверить, рассматривая каждый раз лишь одну связную компоненту множества $L \cap M$. Будем пользоваться обозначениями, введенными в начале параграфа, и рассмотрим любую связную компоненту T множества $L \cap M$. Если окрестность V достаточно мала, то включение $L \cap M \hookrightarrow \mathfrak{U}_V \cap M$ индуцирует взаимно однозначное соответствие связных компонент. Пусть S – связная компонента множества $\mathfrak{U}_V \cap M$, соответствующая T . В силу общности L можно считать отображение $\pi|_S$ гладким,

так что множество $C := \pi(S) \subset V$ является гладким многообразием размерности $n - \dim T$ вблизи $[L]$. При этом C параметризует те малые деформации тора L , которые задают плоскую деформацию T внутри M . Таким образом, получаем, что семейству $S \rightarrow C$ соответствует классифицирующее отображение $\chi: C \rightarrow \mathcal{D}(M)$ из C в пространство Дуади многообразия M .

На уровне касательных пространств имеем $T_C([L]) \subset T_{\mathfrak{B}}([L]) = H^0(L, N_{L/X})$, где последнее равенство происходит из морфизма Гильберта–Чжоу (ср. [2, лемма 3.1]). Морфизм χ индуцирует отображение $\chi_*: T_C([L]) \rightarrow H^0(T, N_{T/M})$, но малые деформации T внутри M , индуцированные деформациями тора L , не пересекаются с T по лемме 2.3, (ii). Поэтому отображение χ_* инъективно и образ $T_C([L])$ состоит из нигде не обращающихся в нуль сечений. По соображениям размерности эти сечения порождают всё нормальное расслоение подмногообразия T в M . Следовательно, расслоение $N_{T/M}$ тривиально, что и требовалось показать.

Если M также является тором, то аналогично получаем тривиальность $T_M|_T$. Поэтому согласно последовательности нормального расслоения

$$0 \longrightarrow T_T \longrightarrow T_M|_T \longrightarrow N_{T/M} \longrightarrow 0$$

касательное расслоение T_T тривиально и, тем самым, T – комплексный тор. Предложение доказано.

Пользуясь предложением 4.2, уточним наблюдение из замечания 2.4, (ii).

ЛЕММА 4.3. Пусть X – четырехмерное гиперкэлериово многообразие, L и M – лагранжесвы гладко пересекающиеся торы, и пусть $I = L \cap M$. Тогда I – конечное несвязное объединение эллиптических кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось лишь исключить возможность существования нульмерных связных компонент у множества I . Согласно общей теории лагранжесвых пересечений (см., например, [11, введение]) имеем

$$[L].[M] = \chi(I).$$

Однако отсюда уже вытекает требуемое, так как в силу предложения 4.2 всякая компонента положительной размерности множества I является гладкой эллиптической кривой и ее вклад в эйлерову характеристику $\chi(I)$ равен нулю. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть X – четырехмерное проективное гиперкэлериово многообразие, L – лагранжесв подтор. Если X является L -отделимым, то вычисляющее отображение ε из диаграммы (2.2) имеет степень не меньше трех.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу L -отделимости X из теоремы 3.5 и леммы 2.5 вытекает, что отображение ε не бирационально. Остается исключить случай $\deg \varepsilon = 2$. По лемме 3.2 L -отделимость означает, что в общей точке $x \in X$ связная компонента множества $\bigcap_{[M] \in \mathfrak{B}, x \in M} M$ равна x . Если $\deg \varepsilon = 2$, то существуют только два тора в $\mathfrak{B}$, содержащих x , скажем M_1 и M_2 . Поскольку точка x общего положения, пересечение $M_1 \cap M_2$ гладко по лемме 4.1. Тогда лемма 4.3 противоречит тому, что связная компонента множества $M_1 \cap M_2$, содержащая x , равна $\{x\}$.

§ 5. Четырехмерные гиперкэлеровы многообразия

С помощью результатов из § 4 мы докажем теперь наш основной результат, дающий положительный ответ (в самом сильном возможном смысле) на вопрос Бовилля.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть X – четырехмерное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжесов тор L . Тогда X допускает голоморфное лагранжесово слоение со слоем L .*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Мы благодарны Е. Америк, сообщившей нам следующее наблюдение из линейной алгебры, которое позволяет исключить L -отделимость многообразий $X \supset L$ в размерности четыре. Это сильно упростило наше первоначальное теоретико-деформационное доказательство.

ЛЕММА 5.3. *Пусть V – четырехмерное симплектическое векторное пространство с симплектической формой σ , а $W_1, W_2, W_3 \subset V$ – три лагранжесовых подпространства, причем $\dim W_i \cap W_j = 1$ для всех $i \neq j$. Тогда $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \neq \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим от противного, что $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$, и рассмотрим линейную оболочку $\langle W_1, W_2 \rangle$. Она трехмерна, так как по условию $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. Покажем, что

$$W_3 \subset \langle W_1, W_2 \rangle. \quad (5.1)$$

Действительно, иначе было бы $\dim W_3 \cap \langle W_1, W_2 \rangle = 1$, откуда все пересечения $W_3 \cap \langle W_1, W_2 \rangle = W_3 \cap W_1 = W_3 \cap W_2$ одномерны вопреки нашему предположению о том, что $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$.

Теперь, также пользуясь равенством $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$, запишем $\langle W_1, W_2 \rangle = W_3 \oplus (W_1 \cap W_2)$. Поскольку V симплектично, а W_3 лагранжесово, найдутся $v \in W_1 \cap W_2$ и $w \in W_3$ такие, что $\sigma(v, w) \neq 0$. Согласно включению (5.1) можно записать $w = w_1 + w_2$, где $w_i \in W_i$. Тогда

$$0 \neq \sigma(v, w) = \sigma(v, w_1) + \sigma(v, w_2) = 0 + 0 = 0,$$

поскольку W_1 и W_2 лагранжесовы. Противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Можно также доказать лемму 5.3 следующим красивым геометрическим рассуждением, которое рассказал нам Л. Манивель. Грассманиан лагранжесовых подпространств в $V \cong \mathbb{C}^4$ биголоморфен (гладкому) пересечению квадрики Плюккера $\tilde{Q} \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ и векторного подпространства, заданного обращением в нуль симплектической формы $\sigma: \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{C}$. Следовательно, он является гладкой квадратикой $Q \subset \mathbb{P}^4$. Условие $\dim W_i \cap W_j = 1$ означает, что прямая в $\mathbb{P}^4$, соединяющая точки $[W_i], [W_j] \in Q$, содержится в Q . Если $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$, то на $[W_1], [W_2], [W_3]$ натягивается некоторая плоскость P . Однако многообразие $P \cap Q$ имеет степень 2 и, следовательно, не может содержать объединение трех прямых.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Пусть X – проективное четырехмерное гиперкэлерово многообразие, содержащее лагранжесов тор L . Тогда X не является L -отделимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим от противного, что X L -отделимо. Для общей точки $x \in X$ по лемме 3.2 и следствию 4.4 найдутся натуральное число $d \geq 3$ и d гладких лагранжесовых подторов, локально высекающих x . В силу

общности x леммы 4.1, 4.3 дают нам два таких тора, скажем L_1 и L_2 , которые пересекаются по эллиптической кривой E в точке x . Всякий другой тор из $\mathfrak{B}$, проходящий через x , либо содержит E , либо высекает нульмерную подсхему.

В силу L -отделимости существует лагранжев тор L_3 , содержащий точку x , но не содержащий E и такой, что схема-пересечение $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ нульмерна в точке x . Опять пользуясь общностью x , мы можем считать пересечения $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_3$ и $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ гладкими в точке x . Следовательно, три лагранжевых подпространства $W_i := T_{L_i, x} \subset T_{X, x}$ удовлетворяют условиям леммы 5.3. Отсюда вытекает, что $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \neq \{0\}$ вопреки нашему выбору тором L_1 , L_2 , L_3 . Следовательно, X не может быть L -отделимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Если многообразие X не проективно, то нужное утверждение вытекает из [2, теорема 4.1]. Поэтому будем считать X проективным. По предложению 5.5 многообразие X не является L -отделимым и, следовательно, допускает почти голоморфное лагранжево слоение $f: X \dashrightarrow B$ по теореме 3.5. Остается показать, что из существования почти голоморфного лагранжевого слоения вытекает существование голоморфного. Это доказано в следующей лемме.

ЛЕММА 5.6. Пусть $f: X \dashrightarrow B$ – почти голоморфное лагранжево слоение на четырехмерном проективном гиперкэлеровом многообразии. Тогда существует бирациональная модификация $\psi: B \dashrightarrow B'$ такая, что $\psi \circ f: X \rightarrow B'$ – голоморфное лагранжево слоение.

Доказательство леммы 5.6 опирается на явное описание бирациональной геометрии четырехмерных гиперкэлеровых многообразий. Для формулировки этого описания напомним понятие *флопа Мукаи*. Пусть четырехмерное гиперкэлерово многообразие X содержит гладкое алгебраическое подмногообразие $P \cong \mathbb{P}^2$. Если раздуть P , то исключительный дивизор будет изоморфен проективному расслоению $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^2}^1)$, и хорошо известно, что существует его сдвиг в другом направлении, дающее новое гиперкэлерово многообразие X' . Полученное бирациональное преобразование $X \dashrightarrow X'$ называется *флопом Мукаи* относительно P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.6. Согласно [2, п. 6.2] существуют голоморфная модель для f , т. е. лагранжево слоение $f': X' \rightarrow B'$ на (возможно, другом) гиперкэлеровом многообразии X' , и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{\psi} & B' \end{array}$$

с бирациональными горизонтальными стрелками такими, что φ является изоморфизмом вблизи общего слоя отображения f .

Покажем, что композиция $f' \circ \varphi = \psi \circ f$ голоморфна и, следовательно, является лагранжевым слоением на X . Для этого заметим сначала, что согласно [12, теорема 1.2] отображение φ разлагается в конечную композицию флопов Мукаи. Поэтому можно считать по индукции, что φ^{-1} – одновременный флоп Мукаи относительно несвязного объединения вложенных проективных плоскостей $\mathbb{P}^2 \cong P_i \subset X'$.

В силу голоморфности φ^{-1} вблизи общего слоя f' ни одна из плоскостей P_i не может пересекать общий слой. Поэтому $f'(P_i)$ является собственным подмножеством B' и, следовательно, имеет размерность не выше 1. Поскольку непостоянных отображений из $\mathbb{P}^2$ в кривую не существует, $f'(P_i)$ – одна точка. Иными словами, множество точек неопределенности отображения φ^{-1} содержится в слоях f' , так что композиция $f' \circ \varphi$ остается голоморфной.

Список литературы

1. A. Beauville, “Holomorphic symplectic geometry: a problem list”, *Complex and differential geometry*, Springer Proc. Math., **8**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011, 49–63.
2. D. Greb, Ch. Lehn, S. Rollenske, *Lagrangian fibrations on hyperkahler manifolds – On a question of Beauville*, arXiv: abs/1105.3410.
3. E. Amerik, F. Campana, “Fibrations méromorphes sur certaines variétés à fibré canonique trivial”, *Pure Appl. Math. Q.*, **4**:2, part 1 (2008), 509–545.
4. E. Amerik, *A remark on a question of Beauville about lagrangian fibrations*, arXiv: abs/1110.2852.
5. Jun-Muk Hwang, R. Weiss, *Webs of Lagrangian tori in projective symplectic manifolds*, arXiv: abs/1201.2369.
6. D. Matsushita, “On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold”, *Topology*, **38**:1 (1999), 79–83.
7. D. Matsushita, “Equidimensionality of Lagrangian fibrations on holomorphic symplectic manifolds”, *Math. Res. Lett.*, **7**:4 (2000), 389–391.
8. D. Matsushita, “Addendum: “On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold””, *Topology*, **40**:2 (2001), 431–432.
9. D. Matsushita, “Holomorphic symplectic manifolds and Lagrangian fibrations”, *Acta Appl. Math.*, **75**:1–3 (2003), 117–123.
10. O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001.
11. K. Behrend, B. Fantechi, “Gerstenhaber and Batalin–Vilkovisky structures on Lagrangian intersections”, *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin*, v. I, Progr. Math., **269**, Birkhäuser, Boston, MA, 2009, 1–47.
12. J. Wierzba, J. A. Wiśniewski, “Small contractions of symplectic 4-folds”, *Duke Math. J.*, **120**:1 (2003), 65–95.

ДАНИЕЛЬ ГРЕБ
(DANIEL GREB)

A. Ludwigs University of Freiburg, Germany
E-mail: daniel.greb@math.uni-freiburg.de

ХРИСТИАН ЛЕН
(CHRISTIAN LEHN)

Institut Fourier, France
E-mail: christian.lehn@ujf-grenoble.fr

ЗЁНКЕ РОЛЛЕНСКЕ
(SONKE ROLLENESKE)

Department of Mathematics, Bielefeld University,
Germany
E-mail: rollenske@math.uni-bielefeld.de

Поступило в редакцию
02.03.2012

Перевод с английского А. В. Домрина