Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф.-Ш. Ден, Щ.-Юй. Чжоу, Жесткость групп автоморфизмов инвариантных областей на однородных пространствах Штейна, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 37–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:44:27

УДК 517.553

Ф.-Ш. Ден, Ш.-Юй Чжоу

Жесткость групп автоморфизмов инвариантных областей на однородных пространствах Штейна

Для широкого класса многообразий Штейна, однородных относительно комплексной редуктивной группы Ли, установлено свойство жесткости групп автоморфизмов областей, инвариантных относительно компактной формы этой комплексной группы.

Библиография: 40 наименований.

Ключевые слова: однородное многообразие Штейна, группа голоморфных автоморфизмов.

DOI: 10.4213/im7977

§ 1. Введение

Группа голоморфных автоморфизмов комплексного многообразия – это фундаментальный инвариант в теории функций нескольких комплексных переменных и комплексной геометрии. Изучению этой группы посвящено много работ. В настоящей статье рассматриваются группы голоморфных автоморфизмов инвариантных областей в однородных пространствах Штейна. Под областью всюду понимается открытое связное множество. Пусть G – связная компактная группа Ли, а K – ее замкнутая подгруппа. Тогда $X = G/K$ – компактное однородное пространство, комплексификацией которого является $X_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$, где $G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}$ – универсальные комплексификации групп G, K . Известно, что $X_{\mathbb{C}}$ – многообразие Штейна и $G_{\mathbb{C}}$ голоморфно действует на $X_{\mathbb{C}}$ левыми сдвигами.

Ш.-Ю. Чжоу доказал следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1 [1]. *Для любой G -инвариантной области $D \subset\subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ группа $\text{Aut}(D)$ компактна.*

Этот результат был ранее доказан Г. Фелсом и Л. Джатти для важного частного случая, когда (G, K) – риманова симметрическая пара (см. [2]). В этом случае $X_{\mathbb{C}}$ является так называемым комплексным симметрическим пространством в смысле Бореля [3]. Связное комплексное пространство X называется *симметрическим*, если для каждой точки $x \in X$ существует инволюция $s_x \in \text{Aut}(X)$, у которой x является изолированной неподвижной точкой.

Работа выполнена при частичной поддержке грантами Китайского национального научного фонда.

В настоящей работе мы подробнее опишем группу $\text{Aut}(D)$, имея в виду следующую проблему. Ясно, что группа автоморфизмов $\text{Aut}(D)$ области D содержит G , если действие эффективно. Естественно, возникает вопрос: существуют ли дополнительные группы симметрий положительной размерности? Их отсутствие можно было бы интерпретировать как некое свойство жесткости группы автоморфизмов. Однако в общем случае они могут и присутствовать. Например, если изучаемая G -область в $G_{\mathbb{C}}$ является также $(G \times G)$ -областью, то ее группа автоморфизмов содержит подгруппу $G \times G$, строго большую, чем G .

Однако в специальных ситуациях (например, для областей Рейнхардта в $(\mathbb{C}^*)^n$) ответ может быть и другим в силу хорошо известных результатов о жесткости групп автоморфизмов. Этими результатами в связи с поставленным выше вопросом и мотивирована наша работа.

Пусть T^n – n -мерный тор. Это компактная группа Ли с (универсальной) комплексификацией $(\mathbb{C}^*)^n$, где $\mathbb{C}^*$ – проколота комплексная плоскость, рассматриваемая как группа по умножению. Групповое умножение задает естественное действие тора T^n на $(\mathbb{C}^*)^n$, и (по определению) области Рейнхардта инвариантны относительно этого действия.

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(D)$ такой области D , очевидно, содержит n -мерный тор T^n . Существуют ли дополнительные группы симметрий положительной размерности? Для относительно компактных D ответ отрицательный. Так, в одномерном случае хорошо известно, что группа автоморфизмов кольца есть в точности $T \rtimes \mathbb{Z}_2$. Многомерными аналогами колец являются области Рейнхардта $D \subset \subset (\mathbb{C}^*)^n$. Свойство жесткости группы $\text{Aut}(D)$ гласит, что ее связная компонента единицы $\text{Aut}(D)^0$ в точности равна T^n . Этот результат был получен в 1980-х годах несколькими различными методами (см. [4]–[7]).

Заметим, что области Рейнхардта можно рассматривать в контексте нашего вопроса в виде частного случая, когда $G = T^n$, а подгруппа K тривиальна. Мы изучим вопрос о жесткости в общей постановке и перенесем известные результаты об областях Рейнхардта на случай общих инвариантных областей на однородных пространствах Штейна некоторых важных классов, например на комплексификациях изотропно неприводимых пространств, включая комплексификации неприводимых римановых симметрических пространств компактного типа, являющиеся комплексными симметрическими пространствами.

Рассмотрим $X_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$. Для любой G -инвариантной области D в $X_{\mathbb{C}}$ существует гомоморфизм из G в $\text{Aut}(D)$. Обозначим образ G в $\text{Aut}(D)$ через $\check{G}$. В общем случае можно отождествить $\check{G}$ с некоторой факторгруппой группы G . Если действие эффективно, то группа $\check{G}$ изоморфна G .

Первый основной результат настоящей работы связывает группу автоморфизмов области D с группой изометрий пространства $X = G/K$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $D \subset X_{\mathbb{C}}$ – G -инвариантная область, а подгруппа K связна. Если W – связная компактная подгруппа в $\text{Aut}(D)$, содержащая $\check{G}$, то W естественно отождествляется с некоторой подгруппой группы изометрий $\text{Iso}(X, g)$ пространства (X, g) для некоторой G -инвариантной римановой метрики g на X . Далее, если область D относительно компактна

в $X_{\mathbb{C}}$, то связная компонента единицы $\text{Aut}(D)^0$ группы $\text{Aut}(D)$ реализуется в виде замкнутой подгруппы группы $\text{Iso}(X, g)$.

Хотя в теореме 1.2 требуется связность K , в §3 будет показано, что этого ограничения можно не налагать. Это будет важно в приложениях теоремы 1.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Упомянутый выше известный результат об областях Рейнхардта немедленно вытекает из теоремы 1.2, поскольку связная компонента единицы в группе изометрий тора T^n , снабженного любой T^n -инвариантной римановой метрикой, равна T^n . В частности, группа автоморфизмов кольца совпадает с группой изометрий окружности T^1 . Это позволяет по-новому взглянуть на хорошо известные результаты об областях Рейнхардта.

В случае, когда (G, K) – риманова симметрическая пара, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $G, K, D, \check{G}$ – такие же, как и выше (подгруппа K не обязательно связна), и пусть (G, K) – риманова симметрическая пара. Тогда $\check{G}$ – максимальная связная компактная подгруппа группы $\text{Aut}(D)$. В частности, если связная компонента единицы $\text{Aut}(D)^0$ группы $\text{Aut}(D)$ компактна, то $\text{Aut}(D)^0 = \check{G}$.

Объединяя теорему 1.4 с теоремой 1.1, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.5. В предположениях и обозначениях теоремы 1.4 допустим, что область D относительно компактна в $X_{\mathbb{C}}$. Тогда $\text{Aut}(D)^0 = \check{G}$.

Следствие 1.5 усиливает основной результат (теорему 0.1) статьи [2], полученный другими методами.

Неприводимые симметрические пространства – это частный случай изотропно неприводимых пространств. На самом деле теорема 1.4 и следствие 1.5 обобщаются и на случай изотропно неприводимого пространства G/K (см. подробное определение в §5).

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $X = G/K$ – строго изотропно неприводимое пространство, а $D \subset \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ – G -инвариантная область, причем универсальная накрывающая группа $\tilde{G}$ группы G не равна ни G_2 , ни $\text{Spin}(7)$. Тогда $\text{Aut}(D)^0 = \check{G}$.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть $X = G/K$ – изотропно неприводимое однородное пространство, не являющееся строго изотропно неприводимым. Допустим, что $\dim K > 0$, а $D \subset \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ – G -инвариантная область. Тогда $\text{Aut}(D)^0 = \check{G}$.

Случай $\dim K = 0$ разбирается в §6.

Наши результаты об изотропно неприводимых однородных пространствах можно распространить на более общий случай так называемых “асистатических” транзитивных действий. Транзитивное действие группы G на G/K называется асистатическим, если группа всех автоморфизмов однородного G -пространства G/K дискретна, т. е. если группа $N_G(K)/K$ дискретна. Еще один пример такого действия дается пространством G/T , где T – максимальный

компактный тор в G . Группы изометрий асистатических пространств также обладают свойством жесткости (см. [8]).

Естественно также изучать гиперболические по Кобаяши инвариантные области, которые могут и не быть относительно компактными. Группа автоморфизмов такой области всегда есть группа Ли, собственно действующая на области [9]. В настоящей работе гиперболичность комплексного многообразия всегда понимается в смысле Кобаяши, т.е. состоит в том, что псевдометрика Кобаяши этого многообразия является метрикой [9]. В отличие от случая относительно компактных инвариантных областей, группа автоморфизмов гиперболической инвариантной области может быть некомпактной. Тем не менее, и здесь можно ожидать, что связная компонента единицы группы автоморфизмов компактна и обладает свойством жесткости. Для гиперболических областей Рейнхардта D в $(\mathbb{C}^*)^n$ известно, что связная компонента единицы группы $\text{Aut}(D)$ – в точности n -мерный тор T^n (см. [6]), а также существуют примеры, когда $\text{Aut}(D)$ может иметь бесконечно много компонент. Мы установим следующие результаты о жесткости групп автоморфизмов гиперболических инвариантных областей на комплексификациях изотропно неприводимых пространств.

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть $X = G/K$ – строго изотропно неприводимое пространство, а $D \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ – гиперболическая G -инвариантная область, причем универсальная накрывающая группа $\tilde{G}$ группы G не равна ни G_2 , ни $\text{Spin}(7)$. Тогда $\text{Aut}(D)^0 = \tilde{G}$.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть $X = G/K$ – изотропно неприводимое однородное пространство, не являющееся строго изотропно неприводимым. Допустим, что $\dim K > 0$, а $D \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ – штейнова гиперболическая G -инвариантная область. Тогда $\text{Aut}(D)^0 = \tilde{G}$.

В частном случае $\dim K = 0$ теоремы 1.9 имеем, что G – связная компактная простая группа Ли, пространство G/K изометрически изоморфно G с некоторой биинвариантной римановой метрикой и $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}$. В этом случае доказательство теоремы 1.9 показывает, что $\text{Aut}(D)^0 = \{(g, h) \in G \times G; gDh = D\}$. В частности, если область D гиперболична и G -биинвариантна, то $\text{Aut}(D)^0 = G \times G$.

Отметим, что хотя теорема 1.6 следует из теоремы 1.8, их доказательства различны. Сравнение этих двух разных методов может оказаться полезным для дальнейшего изучения подобных вопросов. При этом теорема 1.7 не следует из теоремы 1.9, так как в последней требуется штейновость изучаемой области. Это требование необходимо в связи с тем, что оболочка голоморфности гиперболической инвариантной области не обязательно должна быть гиперболической. В § 7 мы вернемся к рассмотрению вопроса о гиперболичности оболочки голоморфности гиперболического многообразия.

Главная идея доказательств наших основных результатов состоит в том, чтобы связать группу автоморфизмов инвариантной области с группой изометрий минимальной орбиты в этой области и применить известные результаты

о группах изометрий изотропно неприводимых однородных пространств. В доказательствах используется теорема 1.1 и результат из [10] об однолиственности оболочек голоморфности инвариантных областей.

Авторы благодарны профессору Ж.-Ж. Лёбу за полезные обсуждения, а также рецензенту за ценные предложения.

§ 2. Предварительные сведения

В настоящем параграфе приводятся нужные для дальнейшего обозначения и известные результаты.

2.1. Голоморфные накрытия комплексных многообразий. Пусть M – связное комплексное многообразие, а $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ – топологическое накрытие многообразия M . Тогда существует единственная комплексная структура на $\widetilde{M}$, относительно которой π голоморфно. Это означает, что множества классов изоморфности топологических и голоморфных накрытий многообразия M совпадают. Если накрытие $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ имеет конечную степень n , то его можно рассматривать как расслоение над M со слоем $\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ и структурной группой S_n (группой перестановок n точек). В силу эффективности действия S_n на $\bar{n}$ любое расслоение над M со слоем $\bar{n}$ и структурной группой S_n определяет главное S_n -расслоение над M и однозначно определяется им. Поскольку группа S_n конечна, все главные S_n -расслоения над M являются плоскими, так что каждое из них задается морфизмом групп из $\pi_1(M)$ в S_n . Два главных S_n -расслоения над M изоморфны тогда и только тогда, когда ассоциированные с ними представления перестановками сопряжены под действием S_n . Одним словом, множество классов изоморфности голоморфных (не обязательно связных) накрытий степени n над M находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\text{Hom}(\pi_1(M), S_n)/S_n$. В качестве следствия получаем следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. *Пусть M – комплексное многообразие, а n – натуральное число. Если группа $\pi_1(M)$ конечно порождена, то множество классов изоморфности голоморфных накрытий степени n над M конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа $\pi_1(M)$ порождена элементами $u_1, \dots, u_r$. Тогда каждый гомоморфизм $f \in \text{Hom}(\pi_1(M), S_n)$ однозначно определяется перестановками $f(u_1), \dots, f(u_r)$. Поэтому множество $\text{Hom}(\pi_1(M), S_n)$ конечно и утверждение леммы вытекает из изложенного в начале пункта.

2.2. Разложение Картана и разложение Мостова. Пусть G – компактная связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда ее комплексификация $G_{\mathbb{C}}$ есть связная комплексная редуктивная группа Ли.

ЛЕММА 2.2 (разложение Картана [11]). *Отображение $G \times \mathfrak{g} \rightarrow G_{\mathbb{C}}$, заданное формулой $(g, v) \mapsto g \exp(iv)$, является диффеоморфизмом.*

Пусть K – компактная подгруппа в G , а $\mathfrak{k}$ – ее алгебра Ли. Присоединенное представление группы G индуцирует представление группы K на $\mathfrak{g}$, обозначаемое через Ad_K . Заметим, что $\mathfrak{k}$ является Ad_K -подмодулем в $\mathfrak{g}$. В силу компактности K найдется Ad_K -подмодуль $\mathfrak{p}$ такой, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Можно отождествить $\mathfrak{p}$ с касательным пространством к G/K в точке eK , а сужение Ad_K на $\mathfrak{p}$ – с представлением изотропии K в точке $eK \in G/K$. Группа K действует на $G \times \mathfrak{p}$ по формуле

$$k: (g, v) \longmapsto (gk^{-1}, \text{Ad}_K(k)v).$$

Обозначая соответствующее факторпространство через $G \times_K \mathfrak{p}$, имеем следующее обобщение леммы 2.2.

ЛЕММА 2.3 (разложение Мостова [12]). *Отображение $G \times_K \mathfrak{p} \rightarrow G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$, заданное формулой $[(g, v)] \longmapsto g \exp(iv)K_{\mathbb{C}}$, является G -эквивариантным диффеоморфизмом.*

2.3. Некоторые результаты о многообразиях Штейна. Комплексное многообразие называется *многообразием Штейна*, если оно голоморфно отделимо и голоморфно выпукло. Голоморфная отделимость означает, что для любых двух различных точек существует голоморфная функция на многообразии, принимающая в этих точках различные значения. Голоморфная выпуклость многообразия X означает, что для любого бесконечного подмножества в X , не имеющего предельных точек, найдется голоморфная функция на X , неограниченная на этом подмножестве. Легко видеть, что пространство $\mathbb{C}^n$ голоморфно отделимо и голоморфно выпукло, т. е. штейново, и что замкнутое комплексное подмногообразие многообразия Штейна также является многообразием Штейна. Хорошо известно, что комплексное многообразие штейново тогда и только тогда, когда его можно голоморфно реализовать как замкнутое комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ для некоторого n . Отсюда вытекает, что всякое штейново многообразие допускает вещественно-аналитическую строго плюрисубгармоническую исчерпывающую функцию. Всякое многообразие Штейна голоморфно выпукло, но обратное неверно. Однако легко видеть, что область на многообразии Штейна является штейновой тогда и только тогда, когда она голоморфно выпукла.

2.4. Группы изометрий симметрических пространств. Всякое односвязное риманово симметрическое пространство M разлагается в произведение: $M = M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_r$, где M_0 – евклидово пространство, а $M_1, \dots, M_r$ – неприводимые римановы симметрические пространства компактного или некомпактного типов. Пусть $\text{Iso}(M)^0$ – связная компонента единицы в группе изометрий пространства M .

ЛЕММА 2.4 [13]. *Имеем $\text{Iso}(M)^0 = \text{Iso}(M_0)^0 \times \cdots \times \text{Iso}(M_r)^0$.*

Пусть G – группа Ли, а K – ее компактная подгруппа. Пара (G, K) называется (римановой) *симметрической парой*, если существует инволюция σ

на G такая, что K состоит из точек, неподвижных при σ , и содержит связную компоненту единицы подгруппы всех точек G , неподвижных при σ . Если (G, K) – симметрическая пара, то любая G -инвариантная риманова метрика на G/K превращает G/K в риманово симметрическое пространство [14]. Для симметрических пространств, получаемых из симметрических пар, при некоторых естественных предположениях легко описать связную компоненту единицы группы изометрий. Хорошо известен следующий результат.

ЛЕММА 2.5 [14, теорема 4.1]. Пусть (G, K) – риманова симметрическая пара, причем группа G полупроста и эффективно действует на факторпространстве $X = G/K$. Пусть g – любая G -инвариантная риманова метрика на X . Тогда справедливо равенство групп Ли $G = \text{Iso}(X, g)^0$, где $\text{Iso}(X, g)^0$ – связная компонента единицы группы изометрий пространства (X, g) .

2.5. Орбитальная связность, орбитальная выпуклость и оболочки голоморфности инвариантных областей. Пусть M – многообразие Штейна, а D – область в M . Скажем, что область D имеет однолистную оболочку голоморфности $E(D)$ (или что $E(D)$ однолистна), если $E(D) \subset M$ – голоморфно выпуклая область и любая голоморфная функция на D продолжается до голоморфной функции на $E(D)$. Для любой области D можно определить ее оболочку голоморфности $E(D)$ как риманову область над многообразием Штейна M , но она не будет в общем случае однолистной. Вопрос об однолистности оболочки голоморфности $E(D)$ является одним из основных в теории функций нескольких комплексных переменных.

Известно, что всякий автоморфизм области D продолжается до автоморфизма $E(D)$. Действительно, по определению оболочки голоморфности любой автоморфизм $f \in \text{Aut}(D)$ продолжается до голоморфного отображения $F: E(D) \rightarrow E(D)$, и легко видеть, что продолжение $\tilde{F}: E(D) \rightarrow E(D)$ отображения f^{-1} является обратным к F .

Рассмотрим оболочки голоморфности инвариантных областей в комплексных однородных пространствах.

Всякая связная комплексная редуктивная группа Ли W является многообразием Штейна, так как она реализуется в виде замкнутой комплексной матричной группы. Пусть $V \subset W$ – замкнутая комплексная подгруппа. По теореме Мацумисы–Онищика [15] комплексно однородное пространство W/V штейново тогда и только тогда, когда V комплексно редуктивна. В частности, пространство $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ штейново для любой компактной группы G и ее замкнутой подгруппы K .

Пусть теперь G – связная компактная группа Ли с инволюцией σ , а K – такая подгруппа в G , что $G_{\sigma}^0 \subset K \subset G_{\sigma}$, где подгруппа G_{σ} состоит из всех точек группы G , неподвижных при σ . Иными словами, (G, K) – симметрическая пара. Обозначим алгебры Ли групп $G, K, G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}$ через $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ соответственно. Продолжим σ до инволюции группы $G_{\mathbb{C}}$ и обозначим это продолжение также через σ . Определим подпространство $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{g}$ формулой $\mathfrak{l} = \{v \in \mathfrak{g}; \sigma(v) = -v\}$ и зафиксируем максимальную абелеву подалгебру $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{l}$. Из единственности

в разложении Картана вытекает, что экспоненциальное отображение – диффеоморфизм $\mathbf{a}$ на аналитическую подгруппу A с алгеброй Ли $\mathbf{a}$. Обозначим обратное отображение через $\log_A$. Группа Вейля $W = N_K(A)/Z_K(A)$ пары (G, K) конечна и действует на $\mathbf{a}$ сопряжением. Для любого G -инвариантного открытого подмножества D в $X_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ будем называть базой D открытое W -инвариантное подмножество $\mathcal{D} = \log_A(p^{-1}D \cap A)$ алгебры Ли $\mathbf{a}$, где через $p: G_{\mathbb{C}} \rightarrow X_{\mathbb{C}}$ обозначена естественная проекция. Этим задается взаимно однозначное соответствие между G -инвариантными открытыми подмножествами $X_{\mathbb{C}}$ и W -инвариантными открытыми подмножествами $\mathbf{a}$.

ЛЕММА 2.6. Пусть D – G -инвариантная область в $X_{\mathbb{C}}$, а $\mathcal{D}$ – ее база. Тогда:

- (а) голоморфная выпуклость D равносильна выпуклости $\mathcal{D}$;
- (б) G -инвариантная область $\hat{D}$ в $X_{\mathbb{C}}$, базой которой является выпуклая оболочка $\mathcal{D}$, есть однолистная оболочка голоморфности области D .

Данный результат был получен М. Лассалем [16] в частном случае, когда $G = W \times W$ для некоторой связной компактной группы Ли W , а $K = \Delta W$ – диагональ в G . В общем виде он был впервые доказан в [17], а затем другим способом – в [18].

Пусть Y – комплексное пространство с голоморфным действием группы $G_{\mathbb{C}}$. Для $z \in Y$ определим орбитальное отображение $l_z: G_{\mathbb{C}} \rightarrow Y$ по формуле $g \mapsto g.z$. Напомним, что G -инвариантное подмножество D пространства Y называется орбитально связным, если прообраз $l_z^{-1}(D)$ связан для всех $z \in D$, и орбитально выпуклым, если для всех $x \in D$ и $v \in \mathfrak{g}$, удовлетворяющих $\exp(iv).x \in D$, имеем $\exp(itv).x \in D$ для всех $t \in [0, 1]$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G .

Следующая лемма хорошо известна.

ЛЕММА 2.7 [10], [19]. 1) Всякая инвариантная область D в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ орбитально связна, если подгруппа K связна.

2) Для всякой инвариантной области D в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ можно указать подгруппу K_1 в K , состоящую из связных компонент группы K , и G -эквивариантное открытое вложение $l: D \rightarrow G_{\mathbb{C}}/(K_1)_{\mathbb{C}}$ такие, что $e(K_1)_{\mathbb{C}} \in l(D)$ и множество $l(D)$ орбитально связно.

3) Для штейновых инвариантных областей в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ орбитальная связность эквивалентна орбитальной выпуклости.

В [10] один из авторов детально изучал свойство однолистности оболочек голоморфности областей, инвариантных относительно более общих групповых действий. Приведем частные случаи его результатов, полезные при решении вопроса об однолистности оболочек голоморфности инвариантных областей.

ЛЕММА 2.8 [10]. Если G -инвариантная область $D \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ орбитально связна, то $E(D)$ однолистка.

СЛЕДСТВИЕ 2.9 [10]. Пусть G – связная компактная группа Ли, K – ее связная замкнутая подгруппа, а $D \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ – G -инвариантная область. Тогда $E(D)$ однолистка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается использованием леммы 2.8 и утверждения 1) леммы 2.7.

§ 3. Связь между группами автоморфизмов и группами изометрий

3.1. Доказательство теоремы 1.2. Сначала докажем лемму.

ЛЕММА 3.1. Пусть G – связная компактная группа Ли, а K и L – ее замкнутые подгруппы. Если K и L сопряжены в $G_{\mathbb{C}}$, то они сопряжены в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2 найдутся $g \in G$ и $\xi \in \exp(i\mathfrak{g})$ такие, что $\text{Ad}_{g\xi}(K) = L$. Для каждого $x \in K$ существует $y \in L$ со свойством $(g\xi)x(g\xi)^{-1} = y$, т. е. $\text{Ad}_{g^{-1}}(y)\xi = x\text{Ad}_{x^{-1}}(\xi)$. Поскольку $\text{Ad}_{x^{-1}}(\xi) \in \exp(i\mathfrak{g})$, получаем из единственности в разложении Картана, что $\text{Ad}_{g^{-1}}(y) = x$. Это означает, что $K \subset \text{Ad}_{g^{-1}}(L)$. Аналогично доказывается, что $L \subset \text{Ad}_g(K)$. Таким образом, $\text{Ad}_g(K) = L$, и K, L сопряжены в G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть G – связная компактная группа Ли, а K – ее замкнутая подгруппа. Положим $X = G/K$ и $X_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$. Тогда:

- 1) любая G -орбита в $X_{\mathbb{C}}$ имеет размерность $\geq \dim X$;
- 2) если размерность некоторой орбиты O равна $\dim X$, то существует G -эквивариантный диффеоморфизм O на G/K' для некоторой подгруппы K' группы K , состоящей из связных компонент K ; в частности, если K связна, то $K' = K$ и существует G -эквивариантный диффеоморфизм O на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим орбиту $O = G \cdot g_0 K_{\mathbb{C}}$ группы G на $X_{\mathbb{C}}$, где $g_0 \in G_{\mathbb{C}}$. Вычислим подгруппу изотропии группы G в точке $g_0 K_{\mathbb{C}}$. Если $g \in G$ удовлетворяет $gg_0 K_{\mathbb{C}} = g_0 K_{\mathbb{C}}$, то $g \in g_0 K_{\mathbb{C}} g_0^{-1} = \text{Ad}_{g_0}(K_{\mathbb{C}})$. Поэтому подгруппа изотропии L' группы G в точке $g_0 K_{\mathbb{C}}$ равна $G \cap \text{Ad}_{g_0}(K_{\mathbb{C}})$. Поскольку G вполне вещественна в $G_{\mathbb{C}}$, то и L' вполне вещественна в $\text{Ad}_{g_0}(K_{\mathbb{C}})$. Отсюда

$$\dim L' \leq \dim K,$$

т. е.

$$\dim O = \dim G - \dim L' \geq \dim G - \dim K = \dim X.$$

2) Пусть O и L' означают то же, что в доказательстве п. 1). Если $\dim O = \dim X$, то $\dim L' = \dim G \cap \text{Ad}_{g_0}(K_{\mathbb{C}}) = \dim K$. По лемме 2.2 множество $K_{\mathbb{C}} = K \exp(i\mathfrak{k})$ замкнуто в $G_{\mathbb{C}}$, где $\mathfrak{k}$ – алгебра Ли группы K . Тогда множество $L' = G \cap \text{Ad}_{g_0}(K_{\mathbb{C}})$ замкнуто в G и тем самым компактно. Ясно, что $L'_{\mathbb{C}} \subset \text{Ad}_{g_0}(K_{\mathbb{C}})$ состоит из связных компонент группы $\text{Ad}_{g_0}(K_{\mathbb{C}})$ и что L' – максимальная компактная подгруппа в $L'_{\mathbb{C}}$. Ясно также, что множества $K' := \text{Ad}_{g_0^{-1}}(L'_{\mathbb{C}}) \cap K$ и $\text{Ad}_{g_0^{-1}}(L')$ являются максимальными компактными подгруппами в $\text{Ad}_{g_0^{-1}}(L'_{\mathbb{C}})$. Поскольку максимальная компактная подгруппа группы Ли единственна с точностью до сопряжения, группы K' и L' сопряжены

в $\text{Ad}_{g_0^{-1}}(L'_\mathbb{C}) \subset G_\mathbb{C}$. По лемме 3.1 они сопряжены в G . Поэтому существует G -эквивариантный диффеоморфизм между $O = G/L'$ и G/K' .

Предложение 3.2 налагает ограничения на размерность G -орбит в $X_\mathbb{C}$ и описывает орбиты минимальной размерности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $G, K, X, X_\mathbb{C}$ имеют тот же смысл, что и в предложении 3.2, $n = \dim X$. Пусть D – G -инвариантная штейнова область в $X_\mathbb{C}$, а $W \subset \text{Aut}(D)$ – связная компактная подгруппа группы голоморфных автоморфизмов области D , содержащая $\check{G}$ (см. определение в §1). Тогда существуют вполне вещественная W -орбита размерности n на D и W -инвариантная риманова метрика на этой орбите.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу штейновости на D существует аналитическая исчерпывающая строго плюрисубгармоническая функция $\tilde{f}$ (см. п. 2.3). Зададим функцию f формулой

$$f(x) = \int_W \tilde{f}(hx) dh,$$

где dh – нормированная мера Хаара на W . Тогда f – W -инвариантная, вещественно-аналитическая строго плюрисубгармоническая исчерпывающая функция на D .

Поскольку f – исчерпывающая функция, она достигает своего минимума на D . Поэтому множество

$$\Lambda := \{x \in D; df(x) = 0\}$$

непусто. Оно является W -инвариантным вещественно-аналитическим подмножеством в D . Поскольку вещественный гессиан f в силу строгой плюрисубгармоничности имеет ранг не ниже n во всех точках области D , то $\dim \Lambda \leq n$. С другой стороны, $\dim \Lambda \geq n$ по предложению 3.2, откуда $\dim \Lambda = n$. Покажем, что любая связная компонента Λ^0 множества Λ – гладкая W -орбита. Действительно, возьмем $x \in \Lambda^0$. Тогда $\dim Gx \geq \dim \Lambda^0$ и, значит, $\dim Gx = \dim \Lambda^0$. Поскольку Λ^0 не имеет собственных замкнутых подмногообразий размерности n , получаем, что $\Lambda^0 = Gx$ – вполне вещественное подмногообразие в D . Так как группа W связна, то $\Lambda^0 = Wx$ является W -орбитой.

Будучи W -инвариантной и строго плюрисубгармонической, функция f задает W -инвариантную кэлерову метрику h на D . Тогда сужение g метрики h на Λ^0 является W -инвариантной римановой метрикой на Λ^0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. При дополнительном предположении орбитальной выпуклости D существует минимальная G -орбита типа G/K . Отметим, что в общем случае, когда (G, K) не является симметрической парой, из штейновости области D не вытекает ее орбитальная выпуклость (см. [19]). По теореме Мостова о разложении из орбитальной выпуклости вытекает, что D допускает деформационную ретракцию на G/K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. В силу связности K оболочка $E(D)$ однолистка по лемме 2.7, а благодаря штейновости $X_\mathbb{C}$ оболочка $E(D)$ штейнова

(см. п. 2.3). Поскольку $\text{Aut}(D)$ можно рассматривать как замкнутую подгруппу в $\text{Aut}(E(D))$, мы можем считать, что область $D = E(D)$ штейнова.

Пусть $W \subset \text{Aut}(D)$ – связная компактная подгруппа группы $\text{Aut}(D)$ (в компактно открытой топологии), содержащая $\check{G}$. По предложению 3.3 имеем вполне вещественную W -орбиту O размерности n , лежащую в D , и W -инвариантную риманову метрику g на O , где $n = \dim X$. Поскольку O вполне вещественна и $\dim O = \dim_{\mathbb{C}} D$, всякий элемент из W однозначно определяется своим действием на O . Поэтому можно рассматривать W как подгруппу группы $\text{Iso}(O, g)$ всех изометрий (O, g) .

По предложению 3.2 существует G -эквивариантный диффеоморфизм между O и X , так что имеем действие W на X , совместимое с действием G на X . Тем самым, можно рассматривать g как G -инвариантную риманову метрику на X , а W – как подгруппу группы $\text{Iso}(X, g)$.

3.2. Случай, когда подгруппа K несвязна. В теореме 1.2 требуется, чтобы подгруппа K была связной. Однако далее мы увидим, что случай несвязной K по существу сводится к случаю связной K .

В следующем предложении и его доказательстве описывается связь между группами голоморфных автоморфизмов произвольного комплексного многообразия и его накрытия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть X – комплексное многообразие с конечно порожденной фундаментальной группой $\pi_1(X)$, а $p: \tilde{X} \rightarrow X$ – голоморфное накрытие конечной степени. Тогда связная компонента единицы $\text{Aut}(X)^0$ группы голоморфных автоморфизмов X естественно изоморфна факторгруппе некоторой замкнутой подгруппы $\text{Aut}(\tilde{X})$. В частности, если размерность $\dim \text{Aut}(\tilde{X})$ конечна, то $\dim \text{Aut}(X) \leq \dim \text{Aut}(\tilde{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим степень накрытия через r . Заметим, что не всякий элемент из $\text{Aut}(X)$ может подниматься до элемента из $\text{Aut}(\tilde{X})$, поскольку накрытие не обязательно будет нормальным. Пусть $H_{1,r}$ – множество классов изоморфности голоморфных накрытий степени r над X . Тогда группа $\text{Aut}(X)$ действует на $H_{1,r}$ взятием прообраза. Рассмотрим подгруппу H тех элементов из $\text{Aut}(X)$, действие которых на $H_{1,r}$ оставляет на месте класс накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Тогда H – замкнутая подгруппа в $\text{Aut}(X)$ и, следовательно, подгруппа Ли.

Для каждого элемента $g \in H$ существуют биголоморфные отображения $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$, делающие диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{g}_2} & g^* \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{g}_1} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ & & X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

коммутативной. Получаем поднятие $\tilde{g} = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2$ до элемента из $\text{Aut}(\tilde{X})$. Хотя g однозначно восстанавливается по $\tilde{g}$, сам элемент $\tilde{g}$ не единствен: различные

поднятия элемента g сопряжены посредством накрывающих преобразований. Обозначая группу всех накрывающих преобразований накрытия $p: \tilde{X} \rightarrow X$ через Γ , получаем естественный изоморфизм групп Ли между H и $N_\Gamma(\text{Aut}(\tilde{X}))/\Gamma$, где $N_\Gamma(\text{Aut}(\tilde{X}))$ – нормализатор подгруппы Γ в $\text{Aut}(\tilde{X})$.

По лемме 2.1 множество $H_{1,r}$ конечно, поскольку $\pi_1(X)$ конечно порождена. Поэтому $\text{Aut}(X)/H$ – группа конечного порядка и, следовательно, H состоит из связных компонент группы $\text{Aut}(X)$. В частности, $\text{Aut}(X)^0 = H^0$. Предложение доказано.

Пусть K^0 – связная компонента единицы группы K . Тогда она является замкнутой подгруппой в G . Естественная проекция $p: G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}^0 \rightarrow G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ задает G -инвариантное голоморфное накрытие конечной степени $\sharp K/K^0$ над $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$. Если D – какая-либо G -инвариантная область в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$, то $p^{-1}(D)$ есть G -инвариантное открытое множество в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}^0$, не обязательно связное. Любая связная компонента $\tilde{D}$ множества $p^{-1}(D)$ является G -инвариантной областью в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}^0$. В качестве свойства жесткости группы $\text{Aut}(D)$ имеем

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *В тех же обозначениях, что и выше, допустим, что фундаментальная группа $\pi_1(D)$ области D конечно порождена. Тогда $\text{Aut}(D)^0$ естественно изоморфна факторгруппе некоторой замкнутой подгруппы $\text{Aut}(\tilde{D})$. В частности, если $\dim \text{Aut}(\tilde{D})$ конечна, то $\dim \text{Aut}(D) \leq \dim \text{Aut}(\tilde{D})$.*

Дальнейшие применения предложения 3.5 будут даны в § 5.

§ 4. Ограниченные инвариантные области в комплексификациях компактных римановых симметрических пространств

Для доказательства теоремы 1.4 сначала установим лемму, дающую полное описание связной компоненты единицы группы изометрий компактного симметрического пространства, не обязательно односвязного или неприводимого.

ЛЕММА 4.1. *Пусть G – связная компактная группа Ли, а K – ее замкнутая подгруппа такая, что (G, K) – симметрическая пара. Пусть g – G -инвариантная риманова метрика на $X = G/K$, а $\text{Iso}(X, g)^0$ – связная компонента единицы группы изометрий пространства (X, g) . Тогда естественное отображение $p: G \rightarrow \text{Iso}(X, g)^0$ сюръективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ – такая инволюция группы G , что $K \subset G^\sigma$ и $\dim G^\sigma = \dim K$. О ядре $H \subset G$ отображения p ясно, что $H \subset K$ остается неподвижным при σ . Поэтому $(G/H, K/H)$ также является симметрической парой и X естественно диффеоморфно $(G/H)/(K/H)$. Поскольку G/H эффективно действует на $(G/H)/(K/H)$, то, заменяя G/K на $(G/H)/(K/H)$ при $H \neq \{e\}$, мы можем считать, что G эффективно действует на X .

Пусть $(\mathfrak{g}, s)$ – ортогональная симметрическая алгебра Ли, ассоциированная с (G, K) , где s – инволюция $\mathfrak{g}$, индуцированная отображением σ . По изложенному выше можно считать, что эта алгебра эффективна, т. е. пересечение $\mathfrak{k}$

(алгебры Ли группы K) с центром $\mathfrak{g}$ равно $\{0\}$. Поэтому можно разложить $(\mathfrak{g}, s)$ в сумму эффективных ортогональных симметрических алгебр Ли $(\mathfrak{g}_0, s_0)$, $(\mathfrak{g}_-, s_-)$ и $(\mathfrak{g}_+, s_+)$, имеющих соответственно евклидов тип, компактный тип и некомпактный тип. При этом $\mathfrak{g}_+ = \{0\}$, поскольку универсальное накрытие компактной полупростой группы Ли компактно.

Пусть (G_0, K_0) и (G_-, K_-) – универсальные римановы симметрические пары, ассоциированные с $(\mathfrak{g}_0, s_0)$ и $(\mathfrak{g}_-, s_-)$ соответственно, где G_0 и G_- – некоторые подгруппы Ли универсального накрытия $\tilde{G}$ группы G , совместно порождающие $\tilde{G}$. Обозначим G_0/K_0 и G_-/K_- через X_0 и X_- .

Естественное отображение $p_- : G_- \rightarrow \text{Iso}(X_-)^0$ сюръективно в силу леммы 2.5 и изложенного выше. Поскольку пространство X_0 евклидово и G_0 действует на X_0 транзитивно, группа $p_0(G_0)$ должна быть изоморфна $\mathbb{R}^r \ltimes U$, где $r = \dim X_0$, а U – некоторая замкнутая подгруппа в $\text{SO}(r)$.

По лемме 2.4 имеем

$$\text{Iso}(\tilde{X})^0 = \text{Iso}(X_0)^0 \times \text{Iso}(X_-)^0 = (\mathbb{R}^r \ltimes \text{SO}(r)) \times p_-(G_-),$$

где $\tilde{X} = X_0 \times X_-$. Заметим, что $\tilde{X}$ – универсальное риманово накрытие пространства X и любой элемент из $\text{Iso}(X)^0$ поднимается до элемента из $\text{Iso}(\tilde{X})^0$. Поскольку X компактно, множество всех элементов $\text{SO}(n)$, полученных поднятием элементов $\text{Iso}(X)^0$, должно сохранять некоторую решетку в X_0 , следовательно, является дискретным.

Отсюда вытекает, что все элементы $\text{Iso}(X)^0$ получаются опусканием элементов множества $\mathbb{R}^r \times p_-(G_-) \subset \tilde{p}(\tilde{G})$, где $\tilde{p}: \tilde{G} \rightarrow \text{Iso}(\tilde{X})^0$ – естественное отображение. Поскольку операция опускания совпадает с $p\pi$, где $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ – универсальное накрытие, то p сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1.2, мы можем считать по лемме 2.6, что область D штейнова. Пусть W – связная компактная подгруппа в $\text{Aut}(D)$, содержащая $\check{G}$. Тогда по предложению 3.3 имеем вполне вещественную W -орбиту O размерности n в D и W -инвариантную риманову метрику на O . Поскольку O вполне вещественна и $\dim O = \dim_{\mathbb{C}} D$, всякий элемент из W однозначно определяется своим действием на O . Поэтому можно рассматривать W как подгруппу группы $\text{Iso}(O, g)$ всех изометрий пространства (O, g) .

По предложению 3.2 существует G -эквивариантный диффеоморфизм между O и $X' = G/K'$ для некоторой подгруппы K' в K , состоящей из связных компонент группы K . Тем самым, мы имеем действие W на X' , совместимое с действием G на X' , и, следовательно, можем рассматривать g как G -инвариантную риманову метрику на X' , а W – как подгруппу в $\text{Iso}(X', g)$.

Поскольку (G, K) – симметрическая пара, (G, K') также является симметрической парой. Тогда (X', g) – риманово симметрическое пространство в силу G -инвариантности метрики g . По лемме 4.1 связная компонента единицы группы $\text{Iso}(X', g)$ совпадает с подгруппой в $\text{Iso}(X', g)$, индуцированной действием G на X' . Отсюда вытекает, что $W = \check{G}$.

В частности, если группа $\text{Aut}(D)^0$ компактна, то, выбирая $W = \text{Aut}(D)^0$, мы получаем $\text{Aut}(D)^0 = \check{G}$.

§ 5. Ограниченные инвариантные области в комплексификациях изотропно неприводимых пространств

Пусть (M, g) – риманово многообразие, а $I_p(M)$ – группа всех изометрий M , оставляющих на месте точку $p \in M$. Напомним, что M называется *изотропно неприводимым в точке p* , если представление изотропии группы $I_p(M)$ на $T_p(M)$ неприводимо, и *строго изотропно неприводимым в точке p* , если представление изотропии связной компоненты единицы группы $I_p(M)$ неприводимо. Назовем многообразие M (*строго*) *изотропно неприводимым*, если оно является (*строго*) изотропно неприводимым в каждой точке. Например, всякое неприводимое риманово симметрическое пространство является изотропно неприводимым. Из определения вытекает, что универсальное накрытие всякого изотропно неприводимого пространства также изотропно неприводимо, и любая степень неприводимого пространства, снабженная метрикой произведения, также неприводима.

Оказывается, что все изотропно неприводимые римановы многообразия однородны, т.е. имеют вид G/K для некоторой группы Ли G и ее компактной подгруппы Ли K . Обратно, если (не обязательно связная) группа Ли G и ее компактная подгруппа K таковы, что пространство G/K связно и действие K на $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ неприводимо (где $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ – алгебры Ли групп G и K), то любые две G -инвариантные римановы метрики на G/K отличаются только скалярным множителем и каждая из них превращает G/K в изотропно неприводимое пространство. Как и в случае симметрических пространств, представление изотропно неприводимого пространства в виде G/K может быть не единственно. Следуя [20], будем называть G/K *изотропно неприводимым однородным пространством* (соответственно, *строго изотропно неприводимым однородным пространством*), если действие K (соответственно, K^0) на $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ неприводимо.

Известна полная классификация строго изотропно неприводимых пространств и односвязных изотропно неприводимых пространств. Еще Э. Картан построил классификацию неприводимых симметрических пространств (составляющих важный подкласс изотропно неприводимых однородных пространств). Несимметрические строго изотропно неприводимые однородные пространства были классифицированы О.В. Мантуровым [21]–[23] в 1961 г. и независимо от него Дж. Вольфом [24] в 1968 г., а также М. Крамером [25] в 1975 г. Односвязные изотропно неприводимые однородные пространства, не являющиеся строго неприводимыми, были полностью классифицированы М. Вангом и В. Циллером в 1991 г. [20].

В табл. 1, 2 приведен полный список несимметрических односвязных строго изотропно неприводимых пространств $M = G/K$, где G – связная группа Ли, а K – ее связная компактная подгруппа [24].

ТАБЛИЦА 1

G	K	Условия	G	K	Условия
$SU(pq)/Z_m$	$SU(p)/Z_p \times SU(q)/Z_q$	$p \geq q \geq 2$ $pq > 4$ $m = \text{НОК}(p, q)$	$SU(16)/Z_4$	$SO(10)/Z_2$	–
$SU(27)/Z_3$	E_6/Z_3	–	$\frac{SU(\frac{n(n-1)}{2})}{Z_m}$	$SU(n)/Z_n$	$m = \begin{cases} n \geq 5 \\ n/2, n \text{ чёт.}, \\ n, n \text{ нечёт.} \end{cases}$
$\frac{SU(\frac{n(n+1)}{2})}{Z_m}$	$SU(n)/Z_n$	$n \geq 3$ m , как выше	$Sp(2)/Z_2$	$SO(3)$	–
$Sp(7)/Z_2$	$Sp(3)/Z_2$	–	$Sp(10)/Z_2$	$SU(6)/Z_6$	–
$Sp(16)/Z_2$	$SO(12)/Z_2$	–	$Sp(28)/Z_2$	E_7/Z_2	–
$SO(20)$	$SU(4)/Z_4$	–	$SO(70)/Z_2$	$SU(8)/Z_8$	–
$Spin(n^2 - 1)$, если n нечёт.; $SO(n^2 - 1)$, если n чёт.	$SU(n)/Z_n$	–	$Spin(16)/Z_2$	$SO(9)$	–
$SO(2n^2 + n)$	$SO(2n + 1)$	$n \geq 2$	$SO(2n^2 + 3n)$	$SO(2n + 1)$	$n \geq 2$
$Spin(42)$	$Sp(4)/Z_2$	–	$Spin(2n^2 - n - 1)$, $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$; $SO(2n^2 - n - 1)$, $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$	$Sp(n)/Z_2$	$n \geq 3$
$Spin(2n^2 + n)$, $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$; $SO(2n^2 + n)$, $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$	$Sp(n)/Z_2$	$n \geq 3$	$Spin(128)/Z_2$	$SO(16)/Z_2$	–

Пусть G/H – компактное односвязное эффективное риманово однородное пространство, неприводимое в смысле де Рама, и пусть G^0, H^0 – связные компоненты единицы в группах G, H . Тогда $G/H = G^0/H^0$, и если пространство G/H изотропно неприводимо, но не строго изотропно неприводимо, то $G/H = G^0/H^0$ содержится в табл. 3 (см. [20]). Обратно, каждая пара из табл. 3 соответствует (вообще говоря, нескольким) изотропно неприводимым пространствам G/H .

Для решения задачи классификации Дж. Вольф вычислил в каждом случае группу изометрий соответствующего однородного пространства. Он доказал следующую важную лемму.

ЛЕММА 5.1 [24]. Пусть $X = G/K$ – неевклидово односвязное эффективное пространство смежных классов, снабженное G -инвариантной римановой метрикой, где G – связная группа Ли, а K – ее компактная связная подгруппа. Допустим, что представление изотропии группы K на $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ неприводимо, причем $G_2/SU(3) \neq G/K \neq Spin(7)/G_2$. Тогда $G = \text{Iso}(X)^0$ совпадает со связной компонентой единицы в группе изометрий пространства X .

ТАБЛИЦА 2

G	K	G	K	G	K
$\text{Spin}(2n^2 - n),$ если n чёт.; $\text{SO}(2n^2 + n - 1),$ если n нечёт. $n > 3$	$\text{SO}(2n)/Z_2$	$\text{Spin}(7)$	G_2	$\text{Spin}(14)$	G_2
$\text{Spin}(26)$	F_4	$\text{Spin}(52)$	F_4	$\text{Spin}(78)$	E_6/Z_3
$\text{SO}(133)$	E_7/Z_2	$\text{Spin}(248)$	E_8	G_2	$\text{SO}(3)$
G_2	$\text{SU}(3)$	F_4	$\text{SO}(3) \times G_2$	F_4	$\frac{\text{SU}(3) \times \text{SU}(3)}{Z_3}$
E_6	$\text{SU}(3)/Z_2$	E_6	G_2	E_6/Z_3	$\text{SU}(3)/Z_3 \times G_2$
E_6/Z_3	$[\text{SU}(3) \times \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)]/(Z_2 \times Z_2)$	E_7	$\text{SU}(3)/Z_3$	E_7/Z_2	$\text{Sp}(3)/Z_2 \times G_2$
E_7/Z_2	$\text{SO}(3) \times F_4$	E_7/Z_2	$\frac{\text{SU}(3) \times \text{SU}(3)}{Z_6}$	E_8	$G_2 \times F_4$
E_6	$\text{SU}(9)/Z_3$	E_8	$\frac{\text{SU}(3) \times E_6}{Z_3}$	–	–

Объединяя теоремы 1.1, 1.2 с леммой 5.1, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $X = G/K$ удовлетворяет условиям леммы 5.1, а $D \subset \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ – G -инвариантная область. Тогда $\text{Aut}(D)^0 = \check{G}$.

Теорема 5.2 применима и к частным случаям $G/K = G_2/\text{SU}(3) \approx S^6$ и $G/K = \text{Spin}(7)/G_2 \approx S^7$, если переписать их в виде $\text{SO}(7)/\text{SO}(6)$ и $\text{SO}(8)/\text{SO}(7)$ соответственно.

Пользуясь предложением 3.5, мы можем теперь доказать теорему 1.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Пусть N – максимальная подгруппа в G , действующая тривиально на G/K . Ясно, что $(G/N)/(K/N)$ также является строго изотропно неприводимым пространством. Заменяя G/K на $(G/N)/(K/N)$ при $N \neq \{e\}$, мы можем считать, что действие G на G/K эффективно. Осталось доказать, что $\dim \text{Aut}(D) = \dim G$.

Согласно лемме 2.7, 2) и лемме 2.8 можно считать, что область D орбитально связна и штейнова. Согласно лемме 2.7, 3) область D орбитально выпукла. Поэтому она гомотопна G/K в силу леммы 2.3. Поскольку G/K – конечный CW-комплекс, фундаментальная группа $\pi_1(D)$ области D конечно порождена.

Если G не полупроста, то пространство $X = G/K$ должно быть плоским согласно [20, теорема 2.1]. Поскольку G связна и G/K компактно, из классификации изотропно неприводимых пространств вытекает, что пространство G/K

ТАБЛИЦА 3

G^0	H^0	G^0	H^0
G^0 компактна, проста, без центра; все корни ее алгебры Ли имеют одинаковую длину	максимальный тор T	$SU(nk)/Z_{nk}$ $n \geq 3, k \geq 2$	$S(\underbrace{U(k) \times \cdots \times U(k)}_n)/Z_{nk}$
$SO(nk)/Z_2$ $n \geq 3, k \geq 3$ k чётное	$[\underbrace{SO(k) \times \cdots \times SO(k)}_n]/Z_2$	$Sp(nk)/Z_2$ $n \geq 3, k \geq 1$	$[\underbrace{Sp(k) \times \cdots \times Sp(k)}_n]/Z_2$
F_4	$Spin(8)$ $H^0 \subset Spin(9) \subset F_4$	E_6/Z_3	$\frac{Spin(8) \times U(1) \times U(1)}{Z_2 \times Z_2}$ $H^0 \subset [Spin(10) \times U(1)]/\Delta Z_4$ $\subset E_6/Z_3$
E_7/Z_2	$[Spin(8) \times 3 SU(2)]/Z_2^3$ $H^0 = [Spin(8) \times Spin(4) \times SU(2)]/Z_2^3$ $\subset [Spin(12) \times SU(2)]/Z_2^2$ $\subset E_7/Z_2$	E_7/Z_2	$7 SU(2)/Z_2^4$ $H^0 = [3 Spin(4) \times SU(2)]/Z_2^4$ $\subset [Spin(12) \times SU(2)]/Z_2^2$ $\subset E_7/Z_2$
E_8	$[SU(5) \times SU(5)]/\Delta Z_5$ – максимальная подгруппа	E_8	$[Spin(8) \times Spin(8)]/\Delta(Z_2 \times Z_2)$ $H^0 \subset Spin(16)/Z_2 \subset E_8$
E_8	$4 SU(3)/\Delta Z_3$ $H^0 \subset [E_6 \times SU(3)]/\Delta Z_3 \subset E_8$	E_8	$8 SU(2)/Z_2^4$ $H^0 = 4 Spin(4)/Z_2^4$ $\subset Spin(16)/Z_2 \subset E_8$
$SO(nk)$ $n \geq 3, k \geq 3$ k нечётное	$\underbrace{SO(k) \times \cdots \times SO(k)}_n$	$SO(n^2)$ n нечётное	$SO(n) \times SO(n)$
$Spin(n^2)/Z_2$ $n \equiv 0 \pmod{4}$	$SO(n)/Z_2 \times SO(n)/Z_2$	$SO(n^2)/Z_2$ $n \geq 3$ $n \equiv 2 \pmod{4}$	$SO(n)/Z_2 \times SO(n)/Z_2$
$SO(4n^2)/Z_2$ n нечётное	$Sp(n)/Z_2 \times Sp(n)/Z_2$	$Spin(4n^2)/Z_2$ n чётное	$Sp(n)/Z_2 \times Sp(n)/Z_2$
$\underbrace{(K \times \cdots \times K)}_n/\Delta Z(K)$ $n \geq 3$ K компактна, проста, односвязна	$\Delta(K/Z(K))$	G^0 компактна, проста, односвязна	1
$Spin(8)$	G_2 $G_2 \subset Spin(7) \subset Spin(8)$	E_7	$SO(8)/Z_2$ $H^0 \subset SU(8)/Z_2 \subset E_7$

должно быть диффеоморфно единичной окружности, а область D – биголоморфно эквивалентной кольцу в $\mathbb{C}^*$. Для этого случая результат теоремы хорошо известен.

Пусть теперь группа G полупроста. Тогда группа $\tilde{G}$ полупроста и компактна. Обозначая через $\tilde{K}^0$ связную компоненту единицы в группе $\pi^{-1}(K)$, где

$\pi: \tilde{G} \longrightarrow G$ – универсальное накрытие, получаем естественное голоморфное накрытие $p: \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{K}_{\mathbb{C}}^0 \longrightarrow G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ конечной степени.

Пусть $\tilde{D}$ – любая связная компонента множества $p^{-1}(D) \subset \tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{K}_{\mathbb{C}}^0$. Тогда $p|_{\tilde{D}}: \tilde{D} \rightarrow D$ – голоморфное накрытие конечной степени. Поскольку группа $\pi_1(D)$ конечно порождена, мы видим из предложения 3.5, что $\dim \text{Aut}(D) \leq \dim \text{Aut}(\tilde{D})$. Поэтому достаточно доказать, что $\dim \text{Aut}(\tilde{D}) = \dim G = \dim \tilde{G}$.

Заметим, что $\tilde{G}/\tilde{K}^0$ также является изотропно неприводимым однородным пространством, причем неевклидовым. Кроме того, пространство $\tilde{G}/\tilde{K}^0$ односвязно (это будет доказано далее в лемме 5.3). Отметим, что действие $\tilde{G}$ на $\tilde{G}/\tilde{K}^0$ может не быть эффективным, и обозначим через H подгруппу всех тех элементов из $\tilde{G}$, действие которых на $\tilde{G}/\tilde{K}^0$ тривиально. В силу эффективности действия G на X группа H должна быть конечной, так что $\dim G = \dim G/H$. Поэтому, рассуждая, как в доказательстве леммы 4.1, мы можем считать, что $\tilde{G}/\tilde{K}^0$ – эффективное пространство смежных классов. Заметим, что $\tilde{D}$ – $\tilde{G}$ -инвариантная относительно компактная область в $\tilde{G}_{\mathbb{C}}/\tilde{K}_{\mathbb{C}}^0$. По теореме 5.2 имеем $\text{Aut}(\tilde{D}) = \tilde{G}$ и, в частности, $\dim \text{Aut}(\tilde{D}) = \dim \tilde{G}$. Теорема доказана.

Теперь докажем следующее утверждение, использованное в доказательстве теоремы 1.6.

ЛЕММА 5.3. *Пусть G – связная и односвязная группа, а K – ее связная замкнутая подгруппа. Тогда однородное пространство G/K односвязно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно рассматривать G как главное расслоение над G/K со структурной группой K . Тогда имеем точную последовательность гомотопических групп

$$\pi_1(G) \rightarrow \pi_1(G/K) \rightarrow \pi_0(K),$$

в которой $\pi_1(G) = \{e\}$ в силу односвязности G и $\pi_0(K) = \{e\}$ в силу связности K . Поэтому $\pi_1(G/K) = \{e\}$ и G/K односвязно. Лемма доказана.

Для изотропно неприводимых, но не строго изотропно неприводимых однородных пространств известен аналог леммы 5.1.

ЛЕММА 5.4 [20]. *Пусть $X = G/K$ – односвязное изотропно неприводимое пространство, не являющееся строго изотропно неприводимым. Тогда связная компонента единицы группы изометрий пространства X равна G^0 , за исключением следующих случаев:*

- (a) $G/K = [\mathbb{R}^n \ltimes H]/H$ – плоское пространство с группой изометрий $\mathbb{R}^n \ltimes O(n)$;
- (b) $G/K = [H \ltimes \Gamma]/\Gamma$ для некоторой связной, компактной и односвязной группы H и конечной подгруппы $\Gamma \subset \text{Aut}(H)$, действующей неприводимо на $\mathfrak{h}$ (в этом случае связная компонента единицы группы изометрий совпадает с группой $(H \times H)/\Delta Z(H)$, действующей левыми и правыми сдвигами на H).

С помощью леммы 5.4 можно доказать теорему 1.7. Трудность доказательства этой теоремы объясняется тем, что накрытие изотропно неприводимого

пространства не обязано быть изотропно неприводимым, так что мы не можем непосредственно сослаться на п. 2) леммы 2.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.7. Если G не полупроста, то пространство X плоско. Как показано в доказательстве теоремы 1.6, это приводит к случаю кольца в $\mathbb{C}^*$.

Пусть теперь G полупроста. Если N – подгруппа в G , действующая тривиально на G/K , то N действует тривиально и на $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Поэтому однородное пространство $(G/N)/(K/N)$ также является изотропно неприводимым, но не сильно изотропно неприводимым. Поскольку имеются естественные G -эквивариантные диффеоморфизмы между G/K и $(G/N)/(K/N)$, а также между $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ и $(G/N)_{\mathbb{C}}/(K/N)_{\mathbb{C}}$, то, заменяя G/K на $(G/N)/(K/N)$ при $N \neq \{e\}$, мы можем считать, что G действует на $X = G/K$ эффективно, и, тем самым, рассматривать G как подгруппу группы изометрий $\text{Iso}(X)$ пространства X с G -инвариантной римановой метрикой (которая единственна с точностью до множителя).

Достаточно доказать, что $\dim \text{Aut}(D) = \dim G$. Согласно лемме 2.7, 2) для некоторой подгруппы K_1 группы K , состоящей из связных коипонент последней, имеем G -эквивариантное открытое вложение $l: D \rightarrow G_{\mathbb{C}}/(K_1)_{\mathbb{C}}$ такое, что $e(K_1)_{\mathbb{C}} \in l(D)$ и область $l(D)$ орбитально связна. По лемме 2.8 оболочка голоморфности $E(l(D))$ области $l(D)$ однолистка. Согласно лемме 2.7, 3) оболочка $E(l(D))$ орбитально выпукла. Достаточно доказать, что $\dim E(l(D)) = \dim G$. Поскольку область $E(l(D))$ также G -инвариантна и относительно компактна, мы можем считать, что $l(D) = E(l(D))$, т.е. что уже сама область $l(D)$ штейнова и орбитально связна.

Поскольку пространство G/K_1 может не быть изотропно неприводимым, мы перейдем на универсальное накрытие пространства G/K . Обозначим через $\tilde{X}$ универсальное накрывающее пространство над X с поднятой метрикой и проекцией $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$. Пусть $\Gamma \subset \text{Iso}(\tilde{X})$ – группа накрывающих преобразований, а $N_{\Gamma}(\text{Iso}(\tilde{X}))$ – нормализатор Γ в $\text{Iso}(\tilde{X})$. Тогда имеем естественное накрытие

$$p: N_{\Gamma}(\text{Iso}(\tilde{X})) \twoheadrightarrow \text{Iso}(X).$$

Пусть $G^* = p^{-1}(G)$, фиксируем элемент $x \in \tilde{X}$ такой, что $\pi(x) = eK \in X$. Тогда G^* действует транзитивно на $\tilde{X}$ и $\tilde{X} = G^*/K^*$, где K^* – подгруппа изотропии в точке x . Ясно, что $p(K^*) = K$. Поэтому пространство $\tilde{X} = G^*/K^*$ также является изотропно неприводимым, но не строго изотропно неприводимым. Заметим, что группа Ли G^* несвязна для не строго изотропно неприводимых G/K . Положим $K_1^* = p^{-1}(K_1)$. Это подгруппа в K^* , состоящая из связных компонент K^* . Тогда имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G^*/K_1^* & \xrightarrow{p_1} & G/K_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \\ G^*/K^* & \xrightarrow{\pi} & G/K \end{array}$$

где p_1 и p_2 – естественные проекции (накрытия). В силу односвязности G^*/K^* пространство G^*/K_1^* не связно (кроме случая $K_1^* = K^*$) и p_2 отображает каждую связную компоненту G^*/K_1^* диффеоморфно на G^*/K^* . Предыдущая диаграмма индуцирует коммутативную диаграмму комплексификаций

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{C}}^*/K_{1\mathbb{C}}^* & \xrightarrow{p_1} & G_{\mathbb{C}}/K_{1\mathbb{C}} \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \\ G_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}^* & \xrightarrow{\pi} & G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Здесь комплексификации отображений p_1 , p_2 и π обозначены также через p_1 , p_2 и π .

Обозначим через $\tilde{D}_1$ связную компоненту множества $p_1^{-1}(l(D))$, содержащую элемент $e.K_{1\mathbb{C}}^* \in G_{\mathbb{C}}^*/K_{1\mathbb{C}}^*$. Это относительно компактная штейнова $(G^*)^0$ -инвариантная область в $G_{\mathbb{C}}^*/K_{1\mathbb{C}}^*$, где $(G^*)^0$ – связная компонента единицы группы G^* . Множество $\tilde{D} = p_2(\tilde{D}_1)$ является относительно компактной штейновой $(G^*)^0$ -инвариантной областью в $G_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}^*$, содержащей $e.K_{\mathbb{C}}^* \in G_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}^*$. Здесь важно, что область $\tilde{D}$ также G^* -инвариантна, поскольку она содержит G^* -орбиту $G^*/K^* = (G^*)^0/(K^*)^0$.

В силу орбитальной выпуклости область $l(D)$ гомотопна G/K_1 по лемме 2.3 и, следовательно, группа $\pi_1(l(D))$ конечно порождена. Замечая, что $p_1|_{\tilde{D}_1}: \tilde{D}_1 \rightarrow l(D)$ – голоморфное накрытие конечной степени, мы имеем $\dim \text{Aut}(l(D)) \leq \dim \text{Aut}(\tilde{D}_1)$ по предложению 3.5. Поэтому достаточно доказать, что $\dim \text{Aut}(\tilde{D}_1) = \dim G^* = \dim G$. Поскольку p_2 устанавливает голоморфную эквивалентность $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}$, достаточно доказать, что $\dim \text{Aut}(\tilde{D}) = \dim G^* = \dim G$.

Благодаря односвязности G^*/K^* имеем $G^*/K^* = (G^*)^0/(K^*)^0$ (как дифференцируемые многообразия) и $G_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}^* = (G_{\mathbb{C}}^*)^0/(K_{\mathbb{C}}^*)^0$. Поэтому область $\tilde{D}$ орбитально связна согласно лемме 2.7, 1) и, следовательно, орбитально выпукла согласно лемме 2.7, 3). Тем самым, $\text{Aut}(D)$ оставляет на месте некоторую орбиту в D типа $(G^*)^0/(K^*)^0$ [1]. Из компактности $\text{Aut}(D)$ вытекает существование $\text{Aut}(D)$ -инвариантной римановой метрики на этой орбите. Однако тогда можно считать $\text{Aut}(D)$ замкнутой подгруппой в группе изометрий этой орбиты, потому что орбита вполне вещественна и имеет максимальную размерность. По лемме 5.4 получаем, что $\dim \text{Aut}(\tilde{D}) = \dim G^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Имеется связь между нашим результатом и хорошо известными утверждениями о жесткости грауэртовских трубчатых областей. Напомним, что комплексная структура на касательном расслоении TM риманова многообразия M называется *адаптированной*, если для любой геодезической $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ индуцированное ею отображение $\gamma_*: (\gamma_*)^{-1}(TM) \rightarrow TM$ становится голоморфным после отождествления каждого вектора $y\partial/\partial x$ из касательного пространства $T_x\mathbb{R}$ с точкой $x + iy \in \mathbb{C}$. Трубчатые окрестности $T^r M$

с адаптированной комплексной структурой называются *грауэртовскими трубчатymi областями*. Они являются многообразиями Штейна, так как в качестве гладкой строго плюрисубгармонической исчерпывающей функции можно взять квадрат функции расстояния. В случае, когда $M = G/K$, известно, что существует G -эквивариантный биголоморфизм между TM и $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$, а также что $\text{Aut}(T^r M)^0 = G$ (см. [26]–[33] и др.). В этом случае грауэртовские трубчатые области реализуются в виде специальных G -инвариантных областей в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$, так что вышеизложенное вытекает из результатов настоящей работы. Действительно, в силу связности полной группы автоморфизмов мы можем доказать, что если D – относительно компактная строго псевдовыпуклая область с гладкой границей в пространстве $X_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ размерности не менее 2, то $\text{Aut}(D) = G$. Заметим, что жесткость грауэртовских трубчатых областей равносильна тому, что $\text{Aut}(D) = G$ (см. [27], [28]). Второй автор благодарен профессору Р. Кобаяши, обратившему его внимание на работу [27].

§ 6. Ограниченные биинвариантные области в комплексных редуктивных группах

В настоящем параграфе мы дадим несколько простых, но интересных примеров к теоремам 1.2, 1.4, а именно рассмотрим инвариантные области в комплексных редуктивных группах Ли. Согласно содержащейся в табл. 3 классификации изотропно неприводимых пространств приведенное далее следствие 6.1 можно считать дополнением к теореме 1.7 в случае $\dim K = 0$.

Пусть G – связная компактная группа Ли. Отображение $\sigma: G \times G \rightarrow G \times G$, заданное формулой $\sigma(x, y) = (y, x)$, является инволюцией группы $G \times G$, причем подгруппа неподвижных при σ точек равна диагонали Δ . Таким образом, $(G \times G, \Delta)$ – риманова симметрическая пара, для которой факторпространство $X = G \times G / \Delta$ естественно отождествляется с G , а действие $G \times G$ на X задается левыми и правыми сдвигами на G . Любая $(G \times G)$ -инвариантная метрика на X индуцирует при таком отождествлении биинвариантную метрику на G , так что любая биинвариантная метрика на G превращает G в симметрическое пространство. Поэтому из следствия 1.5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть G – связная компактная группа Ли, D – относительно компактная G -биинвариантная область в $G_{\mathbb{C}}$, а группа $G \times G$ действует на D левыми и правыми сдвигами. Тогда связная компонента единицы $\text{Aut}(D)^0$ группы $\text{Aut}(D)$ состоит из элементов, заданных этим действием $G \times G$ на D .

Выбирая в следствии 6.1 многомерный тор в качестве G , получаем классическое свойство жесткости областей Рейнхардта, упомянутое в § 1.

Можно также рассмотреть левоинвариантные области в комплексной редуктивной группе Ли. Пусть группа G такая же, как выше, и пусть $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, а D – G -левоинвариантная область в $G_{\mathbb{C}}$. По лемме 2.2 существует единственное открытое подмножество E в $\mathfrak{g}$ такое, что $D = G \exp(iE)$. Множество $N(E) = \{g \in G; \text{Ad}_g(E) = E\}$ является замкнутой подгруппой в G . Для $g \in G$

обозначим через L_g и R_g соответственно левый и правый сдвиги $G_{\mathbb{C}}$ на элемент g . Тогда имеем

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть G , D и $N(E)$ такие, как указано выше. Предположим, что группа G проста, а область D относительно компактна в $G_{\mathbb{C}}$. Тогда $\text{Aut}(D)^0 = L(G)R(N(E)^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим, используя теорему 1.2 и следующие далее леммы 6.3, 6.4.

ЛЕММА 6.3. Правый сдвиг $R_{g^{-1}}$ группы $G_{\mathbb{C}}$ на элемент $g \in G$ сохраняет D тогда и только тогда, когда $\text{Ad}_g(E) = E$, т.е. $g \in N(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x = h \exp(i\theta) \in D$, где $h \in G$, $\theta \in E$. Тогда имеем $R_{g^{-1}}x = hg^{-1} \exp(i \text{Ad}_g \theta) \in D$, если и только если $\text{Ad}_g \theta \in E$.

ЛЕММА 6.4 [34]. Пусть G – простая компактная группа Ли. Тогда связанная компонента единицы группы изометрий любой левоинвариантной метрики на G содержится в $L(G)R(G)$.

§ 7. Гиперболические инвариантные области в комплексификациях изотропно неприводимых пространств

Выше, в основном, изучались группы автоморфизмов относительно компактных инвариантных областей в многообразии Штейна, являющемся однородным для некоторой комплексной редуктивной группы Ли. Естественно также рассмотреть те инвариантные области, которые гиперболически по Кобаяши. В этом параграфе мы рассмотрим гиперболические инвариантные области в комплексификациях изотропно неприводимых пространств. Наш подход здесь не такой, как в предыдущих параграфах. Он опирается на некоторые результаты теории представлений и теорему Накаджимы о том, что всякое однородное гиперболическое комплексное многообразие биголоморфно некоторой ограниченной однородной области. Мы ограничимся лишь рассмотрением комплексификаций изотропно неприводимых пространств, хотя, по нашему мнению, этот подход применим и в более общих ситуациях.

Для доказательства теорем 1.8, 1.9 напомним три леммы и докажем предложение.

ЛЕММА 7.1 [35]. Пусть Y – гиперболическое n -мерное комплексное многообразие. Если Y однородно, то оно биголоморфно однородной ограниченной области в $\mathbb{C}^n$.

ЛЕММА 7.2 [36]. Всякая ограниченная однородная область в $\mathbb{C}^n$ биголоморфна области Зигеля второго рода и, в частности, гомеоморфна единичному шару пространства $\mathbb{C}^n$.

ЛЕММА 7.3 [37]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ – ограниченная область. Если метрика Бергмана на Ω полна, то Ω псевдовыпукла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Пусть G – связная компактная группа Ли, K – ее замкнутая подгруппа, а $D \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ – гиперболическая G -инвариантная область. Тогда D не может быть однородной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.7, 2) можно считать область D орбитально связной. Если D однородна, то она по лемме 7.1 биголоморфно эквивалентна ограниченной однородной области. Поскольку метрика Бергмана на ограниченной однородной области очевидно полна, то D штейнова по лемме 7.3. Согласно лемме 2.7, 3) область D орбитально выпукла и, следовательно, гомотопна G/K . С другой стороны, в силу лемм 7.1, 7.2 она гомеоморфна единичному шару и, тем самым, стягиваема. Противоречие. Следовательно, D не может быть однородной. Предложение доказано.

Напомним, что непрерывное действие топологической группы H на топологическом пространстве X называется *собственным*, если отображение

$$H \times X \rightarrow X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

собственное. Хорошо известно следующее свойство гиперболических комплексных многообразий.

ЛЕММА 7.5 [9], [38]. Если Y – гиперболическое комплексное многообразие, то группа $\text{Aut}(Y)$ его голоморфных автоморфизмов является группой Ли и действует на Y собственнo. В частности, все орбиты замкнуты в Y , и подгруппа изотропии в $\text{Aut}(Y)$ каждой точки из Y компактна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.8. Поскольку конечнолистное накрытие гиперболического многообразия само гиперболично, рассуждение из доказательства теоремы 1.7 позволяет нам свести общую ситуацию к случаю, когда G действует на X эффективно, X односвязно, а D – штейнова орбитально выпуклая инвариантная область, причем $e.K_{\mathbb{C}} \in D$.

Пусть $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ и $\mathfrak{k} = \text{Lie}(K)$. Присоединенное представление G на $\mathfrak{g}$ индуцирует представление группы K на $\mathfrak{g}$. Выберем K -подмодуль $\mathfrak{p}$ пространства $\mathfrak{g}$ так, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Тогда представление K^0 на $\mathfrak{p}$ неприводимо в силу строгой изотропной неприводимости пространства G/K . Можно естественно отождествить $\mathfrak{p}$ с $T_{x_0}G/K$, а $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p} \oplus i\mathfrak{p}$ с $T_{x_0}D$, где $x_0 = e.K_{\mathbb{C}}$. Пусть $O = \text{Aut}(D)^0 x_0$ – орбита точки x_0 под действием группы $\text{Aut}(D)^0$. Мы хотим доказать, что $O = G/K$. Если бы это было не так, то мы имели бы $\dim O > \dim G/K$. Тогда $T_{x_0}O$ являлось бы вещественным K^0 -подмодулем в $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, содержащим $\mathfrak{p}$ как собственное подмножество. Тем самым, $T_{x_0}O = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, поскольку действие K^0 на $\mathfrak{p}$ неприводимо. Отсюда $\dim O = \dim D$, т.е. O – открытая орбита в D . С другой стороны, O замкнута в D по лемме 7.5. В силу связности D это означает, что $O = D$, так что область D однородна. Это противоречит предложению 7.4.

Заметим, что $O = G/K$ – вполне вещественное подмногообразие максимальной размерности в D и, следовательно, каждый элемент из $\text{Aut}(D)^0$ однозначно определяется своим действием на G/K . По лемме 7.5 действие $\text{Aut}(D)^0$ на D

собственно, откуда вытекает, что подгруппа изотропии точки x_0 в $\text{Aut}(D)^0$ компактна. Поскольку пространство G/K также компактно, получаем компактность группы $\text{Aut}(D)^0$. Поэтому существует $\text{Aut}(D)^0$ -инвариантная риманова метрика g на G/K , превращающая G/K в риманово строго изотропно неприводимое пространство. Теперь теорема вытекает из леммы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.9. Случай неодносвязного G/K сводится к односвязному аналогично доказательству теоремы 1.7.

Мы также видели при доказательстве теоремы 1.7, что случай неполупростой группы G тривиален. Поэтому допустим, что G полупроста и действует на G/K эффективно. Тогда можно считать G подгруппой в группе $\text{Iso}(X)$ всех изометрий пространства X , снабженного G -инвариантной римановой метрикой (единственной с точностью до константы). Достаточно доказать, что $\dim \text{Aut}(D) = \dim G$.

Согласно лемме 2.7, 2) существует G -эквивариантное открытое вложение $l: D \rightarrow G_{\mathbb{C}}/K_{1\mathbb{C}}$ для некоторой группы K_1 , состоящей из связных компонент группы K , причем $e.K_{1\mathbb{C}} \in l(D)$ и область $l(D)$ орбитально связна.

Определим G^* и K^* , как в доказательстве теоремы 1.7, и пусть $p: G^* \rightarrow G$ – естественное отображение. Положим $K_1^* = p^{-1}(K_1)$. Это подгруппа в K^* , состоящая из связных компонент группы K^* . Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G^*/K_1^* & \xrightarrow{p_1} & G/K_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \\ G^*/K^* & \xrightarrow{\pi} & G/K \end{array}$$

где p_1, p_2 – естественные проекции (накрытия). В силу односвязности G^*/K^* пространство G^*/K_1^* несвязно (кроме случая $K_1^* = K^*$) и p_2 отображает каждую связную компоненту G^*/K_1^* диффеоморфно на G^*/K^* . Предыдущая диаграмма индуцирует коммутативную диаграмму комплексификаций

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{C}}^*/K_{1\mathbb{C}}^* & \xrightarrow{p_1} & G_{\mathbb{C}}/K_{1\mathbb{C}} \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \\ G_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}^* & \xrightarrow{\pi} & G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Здесь комплексификации отображений p_1, p_2 и π обозначены также через p_1, p_2 и π .

Обозначим через $\tilde{D}_1$ связную компоненту множества $p_1^{-1}(l(D))$, содержащую элемент $e.K_{1\mathbb{C}}^* \in G_{\mathbb{C}}^*/K_{1\mathbb{C}}^*$. Это $(G^*)^0$ -инвариантная область в $G_{\mathbb{C}}^*/K_{1\mathbb{C}}^*$, где $(G^*)^0$ – связная компонента единицы в группе G^* . Поскольку область $l(D)$ гиперболична, а отображение $\tilde{D}_1 \rightarrow l(D)$ – голоморфное накрытие, область $\tilde{D}_1$ также гиперболична (см. [9, теорема 3.2.8]). Множество $\tilde{D} = p_2(\tilde{D}_1)$ является относительно компактной штейновой $(G^*)^0$ -инвариантной областью в $G_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}^*$, содержащей $e.K_{\mathbb{C}}^* \in G_{\mathbb{C}}^*/K_{\mathbb{C}}^*$. Здесь важно, что область $\tilde{D}$ также G^* -инвариантна, поскольку она содержит G^* -орбиту $G^*/K^* = (G^*)^0/(K^*)^0$.

Будучи по условию штейновой, область $l(D)$ орбитально выпукла согласно лемме 2.7, 2) и, тем самым, гомотопна G/K_1 . Значит, группа $\pi_1(l(D))$ конечно порождена. Замечая, что $p_1|_{\tilde{D}_1}: \tilde{D}_1 \rightarrow l(D)$ – голоморфное накрытие конечной степени, имеем $\dim \operatorname{Aut}(l(D)) \leq \dim \operatorname{Aut}(\tilde{D}_1)$ по предложению 3.5. Поэтому достаточно доказать, что $\dim \operatorname{Aut}(\tilde{D}_1) = \dim G^* = \dim G$. Поскольку p_2 уравнивает голоморфную эквивалентность $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}$, достаточно доказать, что $\dim \operatorname{Aut}(\tilde{D}) = \dim G^* = \dim G$.

Обозначим через $\operatorname{Aut}(\tilde{D})_1$ подмножество в $\operatorname{Aut}(\tilde{D})$, состоящее из тех связных компонент $\operatorname{Aut}(\tilde{D})$, которые имеют непустое пересечение с G^* . Здесь мы рассматриваем G^* как подгруппу в $\operatorname{Aut}(\tilde{D})$. Ясно, что множество $\operatorname{Aut}(\tilde{D})_1$ замкнуто относительно операций умножения и взятия обратного и, тем самым, является подгруппой Ли в $\operatorname{Aut}(\tilde{D})$. Пусть $x_0 = e.K_{1\mathbb{C}}^* \in D$. По определению $\operatorname{Aut}(\tilde{D})_1$ орбита $O = \operatorname{Aut}(\tilde{D})_1 x_0$ связна, поскольку множество $G^* x_0 = G/K$ связно. Покажем, что $O = G^*/K^*$. Действительно, если это не так, то $\dim O > \dim G^*/K^*$. Отсюда вытекает, как в доказательстве теоремы 1.8, что $\dim O = \dim \tilde{D}$. Поскольку область $\tilde{D}$ также гиперболична, получаем по лемме 7.5, что $O = \tilde{D}$. Однако тогда область $\tilde{D}$ однородна. Это противоречит предложению 7.4.

Поскольку $O = G^*/K^*$ – вполне вещественное подмногообразие максимальной размерности в $\tilde{D}$, всякий элемент из $\operatorname{Aut}(\tilde{D})_1$ однозначно определяется своим действием на G^*/K^* . По лемме 7.5 группа $\operatorname{Aut}(\tilde{D})_1$ собственнo действует на $\tilde{D}$. Поэтому группа $\operatorname{Aut}(\tilde{D})_1$ компактна и существует $\operatorname{Aut}(\tilde{D})_1$ -инвариантная риманова метрика g на G^*/K^* , превращающая G^*/K^* в риманово изотропно неприводимое пространство. Отсюда $\dim \operatorname{Aut}(\tilde{D}) = \dim G^* = \dim G$ по лемме 5.4.

Наш метод доказательства теорем 1.8, 1.9 сильно отличается от метода из работы [6] (где важна коммутативность группы T^n) и может быть применен для доказательства этих теорем в более общей ситуации. Однако для такого обобщения потребуется тщательно изучить возможные CR-структуры на орбитах группы автоморфизмов.

В ходе доказательства выяснилась необходимость предположения о штейновости D . Было бы интересно доказать тот же результат без этого предположения. Основная трудность здесь связана с тем, что оболочка голоморфности гиперболического комплексного многообразия в общем случае не обязана быть гиперболической. Известны примеры этого явления. Так, в $\mathbb{C}^2$ существует гиперболическая трубчатая область, оболочка голоморфности которой – все $\mathbb{C}^2$ [39], а недавно было построено семейство гиперболических $SU(1, 1)$ -инвариантных областей в $SL(2, \mathbb{C})/U(1)^{\mathbb{C}}$, оболочки голоморфности которых не гиперболичны [40]. Однако все эти примеры связаны с действиями некомпактных групп. Будет ли оболочка голоморфности любой гиперболической G -инвариантной области в $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ гиперболична, если группа G компактна? В общем случае на этот вопрос также приходится ответить отрицательно, так как существует гиперболическая область Рейнхардта в $(\mathbb{C}^*)^2$, оболочка голоморфности которой не гиперболична. Приведем этот контрпример.

Определим область D в $\mathbb{C}^2$ следующим образом:

$$D = \left\{ (z_1, z_2); |y_2| < \frac{1}{(1+y_1)(1-y_1)}, |y_1| < 1 \right\},$$

где $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда D является трубчатой областью. Рассмотрим проекцию $p: D \rightarrow D_1$, заданную формулой $(z_1, z_2) \mapsto z_1$, где $D_1 = \{z \in \mathbb{C}; |y| < 1\}$. Тогда согласно [9, теорема 3.2.14] имеем гиперболичность D по Кобаяши. Оболочка голоморфности области D есть

$$E(D) = \{(z_1, z_2); |y_1| < 1\},$$

и она, очевидно, не гиперболична.

Соответствующая область Рейнхардта $\exp(D) \subset (\mathbb{C}^*)^2$ покрывается областью D и, следовательно, гиперболична по [9, теорема 3.2.8]. Оболочка голоморфности $E(\exp(D))$ области $\exp(D)$ совпадает с $\exp(E(D))$ и по той же теореме не гиперболична.

Список литературы

1. X.-Y. Zhou, "On invariant domains in certain complex homogeneous spaces", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **47**:4 (1997), 1101–1115.
2. G. Fels, L. Geatti, "Invariant domains in complex symmetric spaces", *J. Reine Angew. Math.*, **454** (1994), 97–118.
3. A. Borel, "Symmetric compact complex spaces", *Arch. Math. (Basel)*, **33**:1 (1979), 49–56.
4. D. E. Barrett, "Holomorphic equivalence and proper mapping of bounded Reinhardt domains not containing the origin", *Comment. Math. Helv.*, **59**:4 (1984), 550–564.
5. E. Bedford, "Holomorphic mapping of products of annuli in $\mathbb{C}^n$ ", *Pacific J. Math.*, **87**:2 (1980), 271–281.
6. Н. Г. Кружилин, "Голоморфные автоморфизмы гиперболических областей Рейнхардта", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:1 (1988), 16–40; англ. пер.: N. G. Kruzhilin, "Holomorphic automorphisms of hyperbolic Reinhardt domains", *Math. USSR-Izv.*, **32**:1 (1989), 15–38.
7. S. Shimizu, "Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin", *Tohoku Math. J. (2)*, **40**:1 (1980), 119–152.
8. В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, "Группы Ли преобразований", *Группы Ли и алгебры Ли – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240; англ. пер.: V. V. Gorbachevich, A. L. Onishchik, "Lie transformation groups", *Lie groups and Lie algebras*, I, Encyclopaedia Math. Sci., **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 95–235.
9. S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren Math. Wiss., **318**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1998.
10. X. Y. Zhou, "On orbit connectedness, orbit convexity and envelopes of holomorphy", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:2 (1994), 196–205; X. Y. Zhou, "On orbit connectedness, orbit convexity and envelopes of holomorphy", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**:2 (1995), 403–413.
11. A. W. Knap, *Lie groups beyond an introduction*, Progr. Math., **40**, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.

12. G. D. Mostow, "Covariant fiberings of Klein spaces. II", *Amer. J. Math.*, **84**:3 (1962), 466–474.
13. J. A. Wolf, "Locally symmetric homogeneous spaces", *Comment. Math. Helv.*, **37**:1 (1962), 65–101.
14. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал, М., 2005; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
15. Y. Matsushima, "Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes", *Nagoya Math. J.*, **16** (1960), 205–218.
16. M. Lassalle, "Sur la transformation de Fourier–Laurent dans un groupe analytique complexe réductif", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **28**:1 (1978), 115–138.
17. M. Lassalle, "Séries de Laurent des fonctions holomorphes dans la complexification d'un espace symétrique compact", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **11**:2 (1978), 167–210.
18. H. Azad, J.-J. Loeb, "Plurisubharmonic functions and Kählerian metrics on complexification of symmetric spaces", *Indag. Math. (N.S.)*, **3**:4 (1992), 365–375.
19. P. Heinzner, "Geometric invariant theory on Stein spaces", *Math. Ann.*, **289**:4 (1991), 631–662.
20. M. Wang, W. Ziller, "On isotropy irreducible Riemannian manifolds", *Acta Math.*, **166**:3–4 (1991), 223–261.
21. О. В. Мантуров, "Однородные асимметрические римановы пространства с неприводимой группой движений", *Докл. АН СССР*, **141** (1961), 792–795; англ. пер.: O. V. Manturov, "Homogeneous asymmetric Riemannian spaces with an irreducible group of rotations", *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 1550–1554.
22. О. В. Мантуров, "Римановы пространства с ортогональной и симплектической группами движений и с неприводимой группой вращений", *Докл. АН СССР*, **141** (1961), 1034–1037; англ. пер.: O. V. Manturov, "Riemannian spaces with orthogonal and symplectic groups of motions and an irreducible group of rotations", *Soviet Math. Dokl.*, **2** (1961), 1608–1611.
23. О. В. Мантуров, "Однородные римановы многообразия с неприводимой группой изотропии", *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **13** (1966), 68–145.
24. J. A. Wolf, "The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces", *Acta Math.*, **120**:1 (1968), 59–148; correction, *Acta Math.*, **152** (1984), 141–142.
25. M. Krämer, "Eine Klassifikation bestimmter Untergruppen kompakter zusammenhängender Liegruppen", *Comm. Algebra*, **3**:8 (1975), 691–737.
26. G. Patrizio, Pit-Mann Wong, "Stein manifolds with compact symmetric center", *Math. Ann.*, **289**:3 (1991), 355–382.
27. D. Burns, R. Hind, "Symplectic geometry and the uniqueness of Grauert tubes", *Geom. Funct. Anal.*, **11**:1 (2001), 1–10.
28. D. Burns, "On the uniqueness and characterization of Grauert tubes", *Complex analysis and geometry* (Trento, 1993), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **173**, Dekker, New York, 1996, 119–133.
29. V. Guillemin, M. Stenzel, "Grauert tubes and the homogeneous Monge–Ampère equation", *J. Differential Geom.*, **34**:2 (1991), 561–570.
30. L. Lempert, R. Szöke, "Global solutions of the homogeneous complex Monge–Ampère equation and complex structures on the tangent bundle of Riemannian manifolds", *Math. Ann.*, **290**:4 (1991), 689–712.
31. S.-J. Kan, "On rigidity of Grauert tubes over homogeneous Riemannian manifolds", *J. Reine Angew. Math.*, **577** (2004), 213–233; Erratum, *J. Reine Angew. Math.*, **596** (2006), 235.

32. R. Szöke, “Automorphisms of certain Stein manifolds”, *Math. Z.*, **219**:3 (1995), 357–385.
33. R. Szöke, “Complex structures on tangent bundles of Riemannian manifolds”, *Math. Ann.*, **291**:3 (1991), 409–428.
34. T. Ochiai, T. Takahashi, “The group of isometries of a left-invariant Riemannian metric on a Lie group”, *Math. Ann.*, **223** (1976), 91–96.
35. K. Nakajima, “Homogeneous hyperbolic manifolds and homogeneous Siegel domains”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **25**:2 (1985), 269–291.
36. Э. Б. Винберг, С. Г. Гиндикин, И. И. Пятецкий-Шапиро, “О классификации и канонической реализации комплексных однородных ограниченных областей”, Тр. ММО, **12**, ГИФМЛ, М., 1963, 359–388; англ. пер.: E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, I. I. Piatetski-Shapiro, “Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 404–437.
37. M. Jarnicki, P. Pflug, “Invariant distances and metrics in complex analysis”, de Gruyter Exp. Math., **9**, de Gruyter, Berlin, 1993.
38. W. Kaup, “Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen”, *Invent. Math.*, **3** (1967), 43–70.
39. J.-J. Loeb, “Applications harmoniques et hyperbolicite de domaines tubes”, *Enseign. Math.* (2), **53**:3–4 (2007), 347–367.
40. L. Geatti, A. Iannuzzi, J.-J. Loeb, *Hyperbolic manifolds whose envelopes of holomorphy are not hyperbolic*, arXiv: abs/math/0612182.

ФУ-ШЕН ДЕН
(FUSHENG DENG)
Graduate University of the Chinese Academy
of Sciences, Beijing, China

Поступило в редакцию
08.03.2012

ШАНЬ-ЮЙ ЧЖОУ
(ZHOU XIANG YU)
Institute of Mathematics Academia Sinica,
Taipei, Taiwan;
Hua Loo-Keng Key Laboratory of Mathematics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing, China

Перевод с английского А. В. Домрина