Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, О среднем количестве наилучших приближений линейных форм, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 2, 61–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:05:46

УДК 511.36+511.37

А. А. Илларионов

О среднем количестве наилучших приближений линейных форм

Получены асимптотические формулы для среднего количества наилучших приближений линейных форм с рациональными коэффициентами и математического ожидания количества наилучших приближений линейных форм с вещественными коэффициентами.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: многомерные наилучшие приближения, f -наилучшие приближения линейных форм, диофантовы приближения.

DOI: 10.4213/im7978

Введение

Понятие наилучшего приближения играет важную роль в теории диофантовых приближений. Напомним определения.

Дробь v/u , $v \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{N}$, называется *наилучшим приближением* (второго рода) к вещественному α , если не существует дроби v'/u' , $v' \in \mathbb{Z}$, $u' \in \mathbb{N}$, такой, что

$$|u'\alpha - v'| \leq |u\alpha - v|, \quad u' \leq u,$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим. Согласно классической теореме Лагранжа множество наилучших приближений к $\alpha \in (0, 1/2)$ состоит из подходящих дробей к α и поэтому однозначно определяется разложением α в непрерывную дробь. Рассмотрим следующее обобщение понятия наилучшего приближения в многомерном случае.

Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ является лучевой, т. е. для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

- 1) $0 \leq f(x)$, $f(x) = 0 \iff x = 0$;
- 2) $f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$.

Ненулевой вектор $(u, v) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ будем называть *f -наилучшим приближением* линейной формы $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, если не существует ненулевого вектора $(u', v') \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ такого, что

$$|Lu' - v'| \leq |Lu - v|, \quad f(u') \leq f(u),$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Далее всюду считаем, что функция f непрерывная и кусочно дифференцируемая.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00628-а), Президиума ДВО РАН (проект № 12-I-П19-01).

Пусть $\mathfrak{B}_f(\alpha)$ – множество f -наилучших приближений линейной формы $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Множество $\mathfrak{B}_f(\alpha)$ конечно только в том случае, когда числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1$ линейно зависимы над кольцом $\mathbb{Z}$.

Для любых $P \geq 1$ и $\alpha \in [0, 1]^n$ определим множество

$$\mathfrak{B}_f(\alpha, P) = \{(u, v) \in \mathfrak{B}_f(\alpha) : f(u) \leq P\}.$$

Оно конечно, причем

$$\#\mathfrak{B}_f(\alpha, P) \ll_f \ln P + 1. \quad (0.1)$$

Здесь и далее $\#X$ – количество элементов конечного множества X . Если $f(x) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, то неравенство (0.1) вытекает из известных результатов об экспоненциальном росте наилучших приближений [1, лемма 1]. В общем случае оно является тривиальным следствием из [2, теорема 1] (соотношение (0.1) также легко получается методами из [1, лемма 1]).

Для любого вещественного $R > 1$ определим множество $\Delta_n(R)$, состоящее из рациональных векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i = P_i/Q$, где P_i, Q целые, причем

$$0 \leq P_i < Q \leq R, \quad i = \overline{1, n}.$$

Используя теорему Минковского о выпуклом теле, получаем (см. лемму 3.1), что если $\alpha \in \Delta_n(R)$, то для любого наилучшего приближения $(u, v) \in \mathfrak{B}_f(\alpha)$ при $v \neq \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ имеет место оценка

$$f(u) \leq C_f^* R^{1/n}, \quad (0.2)$$

где постоянная C_f^* зависит только от f .

Пусть

$$E_f(R, P) = \frac{1}{\#\Delta_n(R)} \sum_{\alpha \in \Delta_n(R)} \#\mathfrak{B}_f(\alpha, P),$$

$$E_f(R) = \frac{1}{\#\Delta_n(R)} \sum_{\alpha \in \Delta_n(R)} \#\mathfrak{B}_f(\alpha)$$

– средние количества f -наилучших приближений линейных форм с рациональными коэффициентами из $\Delta_n(R)$;

$$\mathcal{E}_f(P) = \int_{[0,1]^n} \#\mathfrak{B}_f(\alpha, P) d\alpha$$

– математическое ожидание количества f -наилучших приближений (u, v) при $f(u) \leq P$. Отметим, что функция $\alpha \in [0, 1]^n \rightarrow \#\mathfrak{B}_f(\alpha, P)$ измерима по Лебегу (см. лемму 3.2) и является ограниченной (согласно (0.1)). Поэтому интеграл Лебега $\mathcal{E}_f(P)$ существует и конечен.

В одномерном случае (т. е. при $n = 1$, $f(x) = |x|$) асимптотические формулы для определенных средних величин вытекают из известных статистических свойств непрерывных дробей (см. [3]–[6] и ссылки в [6]). В частности,

$$E_f(R) = C_1 \ln R + O(1), \quad \mathcal{E}_f(P) = C_1 \ln P + O(1), \quad C_1 = \frac{24 \ln 2}{\pi^2}.$$

Из [3], [5], [6] также следуют асимптотические формулы с двумя значащими членами и степенным понижением в остатках.

В настоящей работе мы доказываем обобщение этих результатов в многомерном случае: для любого $n \geq 1$ и любой непрерывной кусочно дифференцируемой лучевой функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ справедливы формулы

$$E_f(R, P) = C_f \ln P + O_f(1), \quad P \leq C_f^* R^{1/n}, \quad (0.3)$$

$$\mathcal{E}_f(P) = C_f \ln P + O_f(1), \quad (0.4)$$

где C_f – положительная постоянная, зависящая только от f . Формула для C_f будет приведена ниже (см. (3.2)).

ЗАМЕЧАНИЕ 0.1. Для любого $\alpha \in [0, 1]^n$ количество $(u, v) \in \mathfrak{B}_f(\alpha)$, удовлетворяющих условию $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, оценивается величиной $O_f(1)$. Поэтому, используя (0.2) и выбирая $P = C_f^* R^{1/n}$ в (0.3), получаем

$$E_f(R) = \frac{C_f}{n} \ln R + O_f(1).$$

Доказательство (0.3) основано на идеях из работы [7], в которой получена асимптотическая формула для среднего числа цилиндрических минимумов целочисленных решеток. Метод из [7] позволяет свести вычисление суммы $\sum_{\alpha \in \Delta_n(R)} \#\mathfrak{B}_f(\alpha, P)$ к нахождению количества целочисленных матриц M размера $(n+1) \times (n+1)$, удовлетворяющих условиям

$$M \in \Omega_f, \quad |\det M| \in [1, R], \quad d_n(M) = 1, \quad f(m_{11}, \dots, m_{n1}) \leq P, \quad (0.5)$$

где Ω_f – некоторое подмножество в $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, а $d_n(M)$ – наибольший общий делитель алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы M .

Формула (0.4) получается предельным переходом в (0.3) при $R \rightarrow \infty$.

В §1 мы получим асимптотическую формулу для количества целочисленных матриц, удовлетворяющих условиям вида (0.5), в §2 приведем результаты о цилиндрических минимумах и в §3 докажем формулы (0.3), (0.4).

Введем следующие обозначения: $\mathbb{R}_+$ – множество положительных вещественных чисел; $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел; ∂U – граница множества U ; mes – мера Лебега; $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана; $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ – множество невырожденных вещественных матриц размера $s \times s$; $\mathrm{SL}_s(\mathbb{Z})$ – множество целочисленных унимодулярных матриц размера $s \times s$; $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}_+)$ – множество диагональных матриц из $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ с главной диагональю вида $\rho, \rho, \dots, \rho, h$, где $\rho, h \in \mathbb{R}_+$.

Если $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, то

$$|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq s} |x_i|, \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^s x_i^2}, \quad \rho(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{s-1} x_i^2}.$$

Если $X = ((x_{ij}))$ – вещественная матрица размера $s \times s$, то

$$h_j(X) = x_{sj}, \quad \rho_j(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{s-1} x_{ij}^2}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Если M – целочисленная матрица, то $d_t(M)$ – наибольший общий делитель миноров порядка t , составленных из элементов первых t строк матрицы M .

Запись

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{либо } f(x) = O(g(x))) \quad \text{при } x \in X$$

означает, что существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что $|f(x)| \leq Cg(x)$ при всех $x \in X$. Если постоянная C зависит от параметра θ , то записываем $f(x) \ll_{\theta} g(x)$ (либо $f(x) = O_{\theta}(g(x))$). Запись $f \asymp g$ означает, что $f \ll g \ll f$.

Границу $\partial\Omega$ множества $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ называем *кусочно дифференцируемой*, если она состоит из фиксированного числа гиперповерхностей класса C^1 .

Автор благодарен рецензенту за указанные опечатки и неточности в первоначальной версии статьи.

§ 1. Количество целочисленных матриц, удовлетворяющих (0.5)

Определим целое $s = n + 1$. Пусть множество $\Omega \subset \text{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям:

- i) Ω инвариантно относительно левого действия группы $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}_+)$;
- ii) существует такая постоянная $C = C(\Omega) > 0$, что для любой матрицы $X \in \Omega$

$$\max_{1 \leq j \leq s} |h_j(X)| \leq Ch_1(X), \quad \rho_j(X) \leq C\rho_{j+1}(X), \quad j = \overline{1, s-1},$$

$$h_1(X) \prod_{j=2}^s \rho_j(X) \leq C|\det X|;$$

- iii) граница $\partial\Omega$ кусочно дифференцируема;
- iv) если $r \in [1, +\infty)$, Q – целочисленная матрица из $\text{GL}_s(\mathbb{R})$, то количество матриц $M \in \Omega \cap (Q \cdot \text{SL}_s(\mathbb{Z}))$, удовлетворяющих условию

$$h_1(M) \leq r \quad \text{либо} \quad \rho_1(M) \leq r,$$

не больше $O_{\Omega}(\ln r + 1)$.

Целью в настоящем параграфе является вывод асимптотической формулы для количества целочисленных матриц $M \in \Omega$, удовлетворяющих условиям

$$d_{s-1}(M) = 1, \quad |\det M| \in [1, R], \quad \rho_s(M) \leq P,$$

где $R, P \in (1, +\infty)$. Поскольку нас интересует только главный член, доказательство будет проведено элементарными методами.

Пусть Ω_R – множество матриц $X \in \Omega$ таких, что

$$|\det X| \in [1, R], \quad h_1(X) \geq 1, \quad \rho_2(X) \geq 1.$$

Определим

$$\Omega_{R,P} = \{X \in \Omega_R : \rho_s(X) \leq P\}.$$

Тогда наша задача заключается в вычислении количества целочисленных точек $M \in \Omega_{P,R}$, удовлетворяющих условию $d_{s-1}(M) = 1$.

Отметим, что согласно условиям i), ii)

$$C_0 \equiv \inf_{X \in \Omega_{R,P}} \rho_s(X) \underset{\Omega}{\asymp} 1. \quad (1.1)$$

1.1. Количество целочисленных точек в заданном множестве. Не претендуя на оригинальность, приведем некоторые элементарные результаты о количестве целочисленных точек в заданном множестве пространства $\mathbb{R}^s$.

Для любого числа $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и множества $G \subset \mathbb{R}^s$ определим

$$U(G, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^s : \rho_\infty(G, x) \leq \varepsilon\},$$

$$B(G, \varepsilon) = G \cap U(\partial G, s\varepsilon) = \{x \in G : \rho_\infty(x, \partial G) \leq s\varepsilon\},$$

где

$$\rho_\infty(G, x) = \inf_{y \in G} |x - y|_\infty,$$

т. е. $U(G, \varepsilon)$ – замыкание окрестности радиуса ε множества G , а $B(G, \varepsilon)$ состоит из точек множества G , которые находятся на расстоянии не более чем $s\varepsilon$ от границы ∂G (относительно метрики ρ_∞).

ЛЕММА 1.1. Пусть G – ограниченное измеримое по Лебегу множество из $\mathbb{R}^s$. Тогда

$$|\#(\mathbb{Z}^s \cap G) - \text{mes } G| \leq \text{mes } U(\partial G, 1), \quad (1.2)$$

$$|\#(\mathbb{Z}^s \cap G) - \text{mes } G| \leq \#(\mathbb{Z}^s \cap U(\partial G, 1)). \quad (1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого целочисленного вектора $x \in \mathbb{Z}^s$ обозначим через

$$\Pi(x) = [0, 1]^s + x = \{y + x : y \in [0, 1]^s\}$$

сдвиг куба $[0, 1]^s$ на вектор x . Отметим, что $\Pi(x) \cap \mathbb{Z}^s = \{x\}$. Пусть G_* – объединение всех $\Pi(x)$, которые содержатся в G , а G^* – объединение всех $\Pi(x)$, которые пересекаются с G , т. е.

$$G_* = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^s : \Pi(x) \subset G} \Pi(x), \quad G^* = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^s : \Pi(x) \cap G \neq \emptyset} \Pi(x).$$

Тогда $G_* \subset G \subset G^*$, $\text{mes } G_* = \#(\mathbb{Z}^s \cap G_*)$, $\text{mes } G^* = \#(\mathbb{Z}^s \cap G^*)$. Поэтому

$$|\text{mes } G - \#(G \cap \mathbb{Z}^s)| \leq \text{mes}(G^* \setminus G_*) = \#(\mathbb{Z}^s \cap (G^* \setminus G_*)).$$

Осталось учесть, что $G^* \setminus G_* \subset U(G, 1)$.

ЛЕММА 1.2. Пусть G – ограниченное измеримое по Лебегу множество из $\mathbb{R}^s$. Пусть Γ – полная целочисленная решетка в $\mathbb{R}^s$, $\det \Gamma = D$. Тогда

$$\#(\Gamma \cap G) = \frac{\#(\mathbb{Z}^s \cap G)}{D} + O\left(\xi_1 + \frac{\xi_2}{D}\right),$$

где $\xi_1 = \#(\Gamma \cap B(G, 2D))$, $\xi_2 = \#(\mathbb{Z}^s \cap B(G, 2D))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e^{(i)}\}_{i=1}^s$ – базис Γ , удовлетворяющий условиям $|e^{(i)}|_\infty \leq D$. Такой базис всегда существует (см., например, [8, гл. 1]). Обозначим через

$$\tilde{\Pi} = \{t_1 e^{(1)} + \dots + t_s e^{(s)} : t_i \in [0, 1]\}$$

основной параллелепипед Γ и определим $\tilde{\Pi}(\gamma) = \{x + \gamma : x \in \tilde{\Pi}\}$.

Пусть G' – объединение всех $\tilde{\Pi}(\gamma)$ таких, что

$$\gamma \in \Gamma, \quad \tilde{\Pi}(\gamma) \subset G, \quad \rho_\infty(\partial G, \tilde{\Pi}(\gamma)) > 1.$$

Тогда $G \setminus G' \subset B(G, 2D)$, $U(\partial G', 1) \subset B(G, 2D)$. Поэтому, используя (1.3) для выражения $\text{mes } G'$ через число целых точек в G' , получаем

$$\begin{aligned} \#(\Gamma \cap G) &= \#(\Gamma \cap G') + O(\xi_1) = \frac{\text{mes } G'}{D} + O(\xi_1) \\ &= \frac{\#(\mathbb{Z}^s \cap G') + O(\#(\mathbb{Z}^s \cap U(\partial G', 1)))}{D} + O(\xi_1) = \frac{\#(\mathbb{Z}^s \cap G) + O(\xi_2)}{D} + O(\xi_1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

1.2. Количество целочисленных матриц из $\Omega_{R,P}$. Вычислим количество целочисленных матриц из $\Omega_{R,P}$, используя формулу (1.2).

Согласно условиям i)–iii) множество Ω можно представить в виде

$$\Omega = D'_s(\mathbb{R}_+) \cdot \Omega_0 = \{\text{Diag}(\rho, h) \cdot M : M \in \Omega_0, \rho, h \in \mathbb{R}_+\},$$

где $\text{Diag}(\rho, h)$ – матрица из $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R}_+)$ с главной диагональю $\rho, \rho, \dots, \rho, h$, а Ω_0 – ограниченное множество с кусочно дифференцируемой границей, лежащее на поверхности

$$\mathcal{S} = \{X \in \text{GL}_s(\mathbb{R}) : h_1(X) = \rho_s(X) = 1\}.$$

Определим

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega_0} \frac{d\mathcal{S}(X)}{|\det X|^s},$$

где $d\mathcal{S}(X)$ – дифференциал $(s^2 - 2)$ -мерной меры Лебега поверхности $\mathcal{S}$ в точке X . В [7] доказано, что интеграл $\mu(\Omega)$ сходится, причем количество целочисленных матриц $M \in \Omega_R$ равно

$$\frac{R^s}{s(s-1)} (\mu(\Omega) \ln R + O_\Omega(1)).$$

Пусть $\varepsilon, r \in [1, +\infty]$. Следующие оценки доказываются точно так же, как в [7, следствие 2, теорема 2]:

$$\text{mes } U(\partial \Omega_{R,P}, \varepsilon) \ll_\Omega \varepsilon R^s, \quad (1.4)$$

$$\text{mes}\{X \in U(\partial \Omega_{R,P}, \varepsilon) : \min\{\rho_1(X), |h_1(X)|\} \geq r\} \ll_\Omega \frac{\varepsilon R^s}{r}. \quad (1.5)$$

ЛЕММА 1.3. Пусть $P, R \in [1, +\infty)$, $C_{P,R} = \max\{1, \ln(P^{s-1}/R)\}$. Тогда количество целочисленных матриц в $\Omega_{R,P}$ равно

$$\frac{R^s}{s}(\mu(\Omega) \ln P + O_\Omega(C_{P,R})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно неравенству (1.2) и оценке (1.4), в которой $\varepsilon = 1$, количество целочисленных точек в $\Omega_{R,P}$ равно

$$\text{mes } \Omega_{R,P} + O_\Omega(R^s).$$

Осталось вычислить $\text{mes } \Omega_{R,P}$. Для этого мы точно так же, как и в [7, доказательство теоремы 2], сделаем в интеграле

$$\text{mes } \Omega_{R,P} = \int_{\Omega_{R,P}} dX$$

замену $X = \text{Diag}(\rho, h) \cdot X'$, где $\rho = \rho_s(X)$, $h = h_1(X)$ и $X' \in \mathcal{S}$. Тогда

$$dX = (\rho^{s-1})^{s-1} \rho^{s-2} h^{s-1} d\rho dh d\mathcal{S}(X')$$

и, учитывая, что

$$|\det X| \in [1, R] \iff \frac{1}{|\det X'|} \leq \rho^{s-1} h \leq \frac{R}{|\det X'|},$$

получаем

$$\text{mes } \Omega_{R,P} = \int_{\Omega_0} \left(\int_{Q(X')} \rho^{s(s-1)-1} h^{s-1} d\rho dh \right) d\mathcal{S}(X'),$$

где

$$Q(X') = \left\{ (\rho, h) \in [C_0, P] \times [1, +\infty) : \frac{1}{|\det X'|} \leq \rho^{s-1} h \leq \frac{R}{|\det X'|} \right\},$$

а C_0 – постоянная из (1.1). Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{Q(X')} \rho^{s(s-1)-1} h^{s-1} d\rho dh &= \frac{R^s}{s} \frac{\ln P}{|\det X'|^s} + O_{s,C_0} \left(C_{P,R} R^s \frac{1 + |\ln |\det X'||}{|\det X'|^s} \right), \\ \int_{\Omega_0} \frac{d\mathcal{S}(X')}{|\det X'|^s} &= \mu(\Omega), \quad \int_{\Omega_0} \frac{1 + |\ln |\det X'||}{|\det X'|^s} d\mathcal{S}(X') < +\infty, \end{aligned}$$

то

$$\text{mes } \Omega_{R,P} = \frac{R^s}{s} (\mu(\Omega) \ln P + O_\Omega(C_{P,R})).$$

Лемма доказана.

1.3. О количестве целочисленных матриц M с $d_t(M) = 1$. Пусть $M_s(\mathbb{R})$ – множество вещественных матриц размера $s \times s$.

ЛЕММА 1.4. Пусть Θ – ограниченное измеримое по Лебегу множество из $M_s(\mathbb{R})$, а $\Theta(\mathbb{Z})$ – множество целочисленных матриц из Θ . Определим

$$g(0) = \#\Theta(\mathbb{Z}),$$

$$g(t) = \#\{M \in \Theta(\mathbb{Z}) : d_t(M) = 1\}, \quad t = \overline{1, s-1}.$$

Тогда для любого $t \in \{0, \dots, s-2\}$ имеет место формула

$$g(t+1) = \frac{1}{\zeta(s-t)}g(t) + O\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\xi_1(k) + \frac{\xi_2(k)}{k^{s-t}}\right)\right),$$

где $\xi_1(k)$ – количество целочисленных матриц $M \in B(\Theta, 2k^{s-t})$ таких, что

$$d_t(M) = 1, \quad d_{t+1}(M) \equiv 0 \pmod{k}, \quad (1.6)$$

а $\xi_2(k)$ – количество целочисленных матриц $M \in B(\Theta, 2k^{s-t})$ таких, что $d_t(M) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d_{t+1}(M) = 1$, то и $d_t(M) = 1$. Поэтому, используя свойства функции Мёбиуса μ , получаем

$$g(t+1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(k)g(t, k), \quad (1.7)$$

где $g(t, k)$ – количество матриц $M \in \Theta(\mathbb{Z})$, удовлетворяющих (1.6).

Пусть множество Θ' составлено из матриц, полученных из $X \in \Theta$ вычеркиванием $(t+1)$ -й строки. Возьмем $X' \in \Theta'$ и $x \in \mathbb{R}^s$. Между t -й и $(t+1)$ -й строками матрицы X' вставим x в качестве еще одной строки и обозначим полученную матрицу через $\mathcal{M}(X', x) \in M_s(\mathbb{R})$, т. е.

$$\mathcal{M}(X', x) = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} & \dots & x'_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{t1} & x'_{t2} & x'_{t3} & \dots & x'_{ts} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_s \\ x'_{(t+1)1} & x'_{(t+1)2} & x'_{(t+1)3} & \dots & x'_{(t+1)s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{(s-1)1} & x'_{(s-1)2} & x'_{(s-1)3} & \dots & x'_{(s-1)s} \end{pmatrix}.$$

Пусть $G(X') = \{x \in \mathbb{R}^s : \mathcal{M}(X', x) \in \Theta\}$. Тогда

$$\Theta = \{\mathcal{M}(X', x) : X' \in \Theta', x \in G(X')\},$$

$$g(t, k) = \sum_{M' \in \Theta(\mathbb{Z}), d_t(M')=1} \#(\Gamma(M', k) \cap G(M')), \quad (1.8)$$

где $\Gamma(M', k)$ – решетка, состоящая из решений $m \in \mathbb{Z}^s$ сравнения

$$d_{t+1}(\mathcal{M}(M', m)) \equiv 0 \pmod{k}.$$

Поскольку $d_t(M') = 1$, то $\det \Gamma(M', k) = k^{s-t}$ (см., например, [9, лемма 8]). Поэтому, применяя лемму 1.2, получаем

$$\#(\Gamma(M', k) \cap G(M')) = \frac{1}{k^{s-t}} \#(\mathbb{Z}^s \cap G(M')) + O\left(\eta_1(M', k) + \frac{\eta_2(M', k)}{k^{s-t}}\right), \quad (1.9)$$

где $\eta_1(M', k)$ – количество узлов решетки $\Gamma'(M', k)$ в $B(G(M'), 2k^{s-t})$, а $\eta_2(M', k)$ – количество целочисленных точек в $B(G(M'), 2k^{s-t})$.

Если $X = \mathcal{M}(X', x)$, причем $\rho_\infty(x, \partial G(X')) \leq r$, то $\rho_\infty(X, \partial \Theta) \leq r$. Поэтому

$$\sum_{M' \in \Theta'(\mathbb{Z}), d_t(M')=1} \eta_i(M', k) \leq \xi_i(k), \quad i = 1, 2. \quad (1.10)$$

Кроме того,

$$\sum_{M' \in \Theta'(\mathbb{Z}), d_t(M')=1} \#(\mathbb{Z}^s \cap G(M')) = g(t).$$

Используя (1.7)–(1.10), получаем

$$\begin{aligned} g(t+1) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(k) \sum_{\substack{M' \in \Theta'(\mathbb{Z}) \\ d_t(M')=1}} \#(\Gamma(M', k) \cap G(M')) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(k) \left(\frac{g(t)}{k^{s-t}} + O\left(\xi_1(k) + \frac{\xi_2(k)}{k^{s-t}}\right) \right). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mu(k)}{k^{s-t}} = \frac{1}{\zeta(s-t)}.$$

Лемма доказана.

1.4. Вспомогательные оценки. Чтобы применить лемму 1.4 к множеству $\Theta = \Omega_{R,P}$, нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, которые будут использоваться для оценок $\xi_1(k)$, $\xi_2(k)$.

Пусть $\text{TM}_s(\mathbb{Z})$ – множество целочисленных невырожденных нижнетреугольных матриц $T = ((t_{ij}))$ размера $s \times s$ таких, что

$$\begin{aligned} t_{ij} &= 0 \quad \text{при} \quad j > i, \\ 0 \leq t_{ij} < t_{ii} \quad \text{при} \quad j < i, \quad i = \overline{2, s}, \\ t_{11} &> 0. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.5. Любая целочисленная матрица $M \in \text{GL}_s(\mathbb{R})$ единственным образом представима в виде $M = TS$, где $T \in \text{TM}_s(\mathbb{Z})$, $S \in \text{SL}_s(\mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО существования матриц T и S см., например, в [8, гл. 1], единственность легко проверяется от противного.

ЛЕММА 1.6. Пусть M – целочисленная матрица размера $s \times s$. Тогда $d_t(M) = d_t(MS)$ для всех $S \in \text{SL}_s(\mathbb{Z})$, $t \in \{1, \dots, s-1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [9, лемма 3].

ЛЕММА 1.7. Пусть $r \in [1, +\infty)$, $d \in \mathbb{N}$, $t \in \{0, 1, \dots, s-2\}$. Тогда количество целочисленных матриц $M \in \Omega_R$, удовлетворяющих условиям

$$d_{t+1}(M) \equiv 0 \pmod{d}, \quad (1.11)$$

$$\rho_1(M) \leq r \quad \text{либо} \quad h_1(M) \leq r, \quad (1.12)$$

не больше чем

$$O_\Omega \left(R^s \ln(r+1) \frac{\sigma_{-1}(d)}{d^{s-t}} \right),$$

где $\sigma_{-1}(d) = \sum_{r|d} r^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$T(R, d) = \{T \in \text{TM}_s(\mathbb{Z}) : d_{t+1}(T) \equiv 0 \pmod{d}, \det T \in [1, R]\},$$

и пусть $\text{M}_s(\mathbb{Z})$ – множество целочисленных матриц размера $s \times s$.

Согласно леммам 1.5, 1.6 любая матрица $M \in \text{M}_s(\mathbb{Z})$ такая, что

$$|\det M| \in [1, R], \quad d_{t+1}(M) \equiv 0 \pmod{d},$$

единственным образом представима в виде $M = TS$, где $T \in T(R, d)$, $S \in \text{SL}_s(\mathbb{Z})$. Кроме того, $\Omega_R \cap \text{M}_s(\mathbb{Z}) = \{M \in \Omega \cap \text{M}_s(\mathbb{Z}) : |\det M| \in [1, R]\}$. Поэтому количество целочисленных матриц $M \in \Omega_R$, удовлетворяющих (1.11), (1.12), равно

$$\sum_{T \in T(R, d)} \#\{M \in \Omega \cap (T \cdot \text{SL}_s(\mathbb{Z})) : \text{выполняется (1.12)}\}.$$

Применяя условие iv), получаем, что искомое количество оценивается величиной

$$O_\Omega(\ln(r+1) \#T(R, d)).$$

Осталось заметить, что $\#T(R, d) \ll_s R^s \sigma_{-1}(d) d^{-(s-t)}$ (см. [9, доказательство леммы 5]).

ЛЕММА 1.8. Пусть $\varepsilon, r \in [1, +\infty)$. Тогда количество целочисленных матриц $M \in B(\Omega_{R,P}, \varepsilon)$ таких, что $\rho_1(M) \geq r$, $|h_1(M)| \geq r$, не больше чем $O_\Omega(\varepsilon R^s / r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из (1.2), (1.4), (1.5).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $t \in \{0, 1, \dots, s-2\}$, $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in [1, +\infty)$. Тогда количество целочисленных матриц $M \in B(\Omega_{R,P}, \varepsilon)$, удовлетворяющих сравнению $d_{t+1}(M) \equiv 0 \pmod{d}$, не больше чем

$$O_\Omega \left(R^s \frac{\sigma_{-1}(d)(1 + \ln(\varepsilon d))}{d^{s-t}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое количество не больше $v_1 + v_2$, где v_1 – количество целочисленных матриц $M \in \Omega_R$, удовлетворяющих (1.11), (1.12) при $r = \varepsilon d^{s-t}$, а v_2 – количество целочисленных матриц $M \in B(\Omega_{R,P}, \varepsilon)$ таких, что $\min\{|h_1(M)|, \rho_1(M)\} \geq r = \varepsilon d^{s-t}$. Осталось применить леммы 1.7, 1.8 для оценки v_1 и v_2 соответственно.

1.5. Основные результаты. Всюду далее (до конца параграфа) предполагается, что

$$P, R \in [1, +\infty), \quad C_{P,R} = \max\{1, \ln(P^{s-1}/R)\}.$$

ЛЕММА 1.9. Пусть $t \in \{0, 1, \dots, s-2\}$ и $F(t+1)$ – количество целочисленных матриц $M \in \Omega_{R,P}$, $d_{t+1}(M) = 1$. Тогда

$$F(t+1) = \left(\prod_{k=s-t}^s \zeta(k) \right)^{-1} F(0) + O_{\Omega}(R^s),$$

где $F(0)$ – количество целочисленных матриц $M \in \Omega_{R,P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по $t = 0, 1, 2, \dots, s-2$.

При $t = 0$ утверждение леммы тривиально. Проведем индукционный переход от t к $t+1$. Согласно лемме 1.4

$$F(t+1) = \frac{1}{\zeta(s-t)} F(t) + O\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\xi_1(k) + \frac{\xi_2(k)}{k^{s-t}}\right)\right), \quad (1.13)$$

где $\xi_1(k)$ – количество целочисленных матриц $M \in B(\Omega_{R,P}, 2k^{s-t})$ таких, что $d_{t+1}(M) \equiv 0 \pmod{k}$, а $\xi_2(k)$ – количество целочисленных матриц $M \in B(\Omega_R, 2k^{s-t})$.

Используя следствие 1.1 для оценок $\xi_1(k)$ и $\xi_2(k)$ (выбираем $\varepsilon = 2k^{s-t}$, $d = k$ для ξ_1 и $\varepsilon = 2k^{s-t}$, $d = 1$ для ξ_2), получаем

$$\begin{aligned} \xi_1(k) &\ll_{\Omega} R^s \frac{\sigma_{-1}(k)(\ln k + 1)}{k^{s-t}}, & \xi_2(k) &\ll_{\Omega} R^s \sigma_{-1}(k)(\ln k + 1), \\ \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\xi_1(k) + \frac{\xi_2(k)}{k^{s-t}}\right) &\ll_{\Omega} R^s \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_{-1}(k)(1 + \ln k)}{k^{s-t}} \ll R^s. \end{aligned}$$

Осталось применить (1.13) и предположение индукции.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Количество целочисленных матриц $M \in \Omega_{R,P}$, удовлетворяющих условию $d_{s-1}(M) = 1$, равно

$$\frac{R^s}{s} \left(\frac{\mu(\Omega)}{\zeta(2) \cdots \zeta(s)} \ln P + O_{\Omega}(C_{P,R}) \right). \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из лемм 1.9, 1.3.

ЛЕММА 1.10. Количество целочисленных матриц $M \in \Omega_R$ таких, что $\rho_1(M) \leq P < \rho_s(M)$, не больше чем $O_{s,C}(R^s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условия ii), получаем, что искомое число не превосходит $O(S(R, P, C, s))$, где

$$S(R, P, C, s) = \sum \left(h^{s-1} \prod_{i=1}^s \rho_i^{s-2} \right) \quad (1.15)$$

– сумма по всем целым $(\rho, h) = (\rho_1, \dots, \rho_s, h) \in \mathbb{Z}_+^{s+1}$ таким, что

$$\rho \in \Upsilon = \{\rho \in \mathbb{Z}_+^s : \rho_i \ll \rho_{i+1}, i = \overline{1, s-1}; \rho_1 \ll P \ll \rho_s\},$$

$$h \prod_{i=2}^s \rho_i \ll R.$$

Здесь и далее в этом доказательстве постоянные в оценках $O(\dots)$ и $\ll$ зависят только от s и C . Суммируя в (1.15) по $h \ll R/(\rho_2 \cdots \rho_s)$, получаем

$$S(R, P, C, s) \ll R^s \sum_{\rho \in \Upsilon} \frac{\rho_1^{s-2}}{\rho_2^2 \cdots \rho_s^2}. \quad (1.16)$$

Множество Υ разобьем на части $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_{s-1}$ так, что

$$\forall \rho \in \Upsilon_l \quad \rho_l \ll P \ll \rho_{l+1}.$$

Возьмем любое $l \in \{1, \dots, s-1\}$. Суммируя в (1.16) сначала по $\rho_i \gg P$, $i = \overline{l+1, s}$, а потом по $\rho_1 \ll \rho_2$, $\rho_2 \ll \rho_3, \dots, \rho_{l-1} \ll \rho_l$, $\rho_l \ll P$, получаем

$$\begin{aligned} R^s \sum_{\rho \in \Upsilon_l} \frac{\rho_1^{s-2}}{\rho_2^2 \cdots \rho_s^2} &\ll \frac{R^s}{P^{s-l}} \sum \frac{\rho_1^{s-2}}{\rho_2^2 \rho_3^2 \cdots \rho_l^2} \\ &\ll \frac{R^s}{P^{s-l}} \sum \frac{\rho_2^{s-3}}{\rho_3^2 \cdots \rho_l^2} \ll \cdots \ll \frac{R^s}{P^{s-l}} \sum_{1 \leq \rho_l \ll P} \rho_l^{s-l-1} \ll R^s. \end{aligned}$$

В силу произвольности l доказали, что $S(R, P, C, s) \ll R^s$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Количество целочисленных матриц $M \in \Omega_R$, удовлетворяющих условиям*

$$d_{s-1}(M) = 1, \quad \rho_1(M) \leq P,$$

равно (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из леммы 1.10 и следствия 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Количество целочисленных матриц $M \in \Omega_R$, удовлетворяющих условиям*

$$d_{s-1}(M) = 1, \quad \rho_1(M) \leq P, \quad |\det M| P^{-s} \leq h_1(M),$$

равно (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – целочисленная матрица из Ω_R такая, что $\rho_1(M) \leq P$ и $h_1(M) < |\det M| P^{-s}$. Применяя условия ii), получаем

$$|\det M| \ll_{C,s} h_1(M) \prod_{j=2}^s \rho_j(M) \ll_{C,s} (|\det M| P^{-s}) (\rho_s(M))^{s-1}.$$

Следовательно, $\rho_s(M) \gg_{C,s} P$. Согласно лемме 1.10 таких матриц не больше чем $O_{C,s}(R^s)$. Используя следствие 1.3, приходим к формуле (1.14).

§ 2. Цилиндрические минимумы

Так же, как и в предыдущем параграфе, считаем, что $s = n + 1$.

Пусть Γ – полная решетка (в дальнейшем слово “полная” не используем) в $\mathbb{R}^s$, т. е. это множество вида

$$\Gamma = \{n_1 a^{(1)} + \dots + n_s a^{(s)} : n_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, s}\},$$

где $a^{(1)}, \dots, a^{(s)}$ – некоторые линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ). Матрицу со столбцами $(a^{(1)})^T, \dots, (a^{(s)})^T$ будем называть *базисной*. Модуль определителя базисной матрицы называется *определителем решетки* и обозначается $\det \Gamma$.

Ненулевой узел a решетки Γ будем называть *цилиндрическим f -минимумом*, если не существует узла $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ такого, что

$$f(\gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}) \leq f(a_1, \dots, a_{s-1}), \quad |\gamma_s| \leq |a_s|, \quad (2.1)$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим.

Цилиндрические минимумы (при $s = 3$, $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) впервые появились в работах Г. Ф. Вороного (см. [10], [11]) в связи с методами построения единиц в кубических числовых полях отрицательного дискриминанта. Они также естественным образом возникают в теории многомерных приближений.

В этом параграфе мы приведем некоторые результаты из статьи [7], в которой рассмотрен вопрос о среднем количестве цилиндрических минимумов целочисленных решеток. Отметим, что в [7] предполагалось, что функция f является нормой. Однако все результаты из [7], которые приводятся в настоящей работе без доказательства, остаются в силе, если f является только лучевой функцией (неравенство треугольника в [7] использовалось только при обосновании оценки (2.5)).

2.1. Приведенные базисы. Базис $e^{(1)}, \dots, e^{(m)}$ решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ называется *приведенным* (по Минковскому), если выполняются следующие условия:

1) $|e^{(1)}| = \min\{|\gamma| : \gamma \in \Lambda \setminus \{0\}\}$;

2) если $j \geq 2$, то $|e^{(j)}| = \min |\eta|$, где минимум берется по всем узлам $\eta \in \Lambda$ таким, что система $e^{(1)}, \dots, e^{(j-1)}, \eta$ дополняется до базиса решетки Λ .

Известно, что (см., например, [8, гл. II, § 2]) базис $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m$ является приведенным тогда и только тогда, когда для любого $j \in \{1, \dots, m\}$

$$|e^{(j)}| \leq \left| \sum_{i=1}^m k_i e^{(i)} \right| \quad (2.2)$$

при всех $(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ таких, что $\text{НОД}(k_j, k_{j+1}, \dots, k_m) = 1$.

Введем следующее отношение упорядоченности на $\mathbb{R}^m$ (лексикографическое). Пусть $x, y \in \mathbb{R}^m$. Будем записывать $x \prec y$, если существует такой номер $l \in \{1, \dots, m\}$, что

$$x_i = y_i, \quad i = \overline{1, l-1}; \quad x_l < y_l.$$

Пусть $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m$ и $\{f^{(i)}\}_{i=1}^m$ – два набора векторов из $\mathbb{R}^m$. Записываем $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m \prec \{f^{(i)}\}_{i=1}^m$, если существует такой номер $l \in \{1, \dots, m\}$, что

$$e^{(i)} = f^{(i)}, \quad i = \overline{1, l-1}; \quad e^{(l)} \prec f^{(l)}.$$

Приведенный базис $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m$ решетки Λ будем называть *вполне приведенным*, если $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m \prec \{f^{(i)}\}_{i=1}^m$ для любого другого приведенного базиса $\{f^{(i)}\}_{i=1}^m$ решетки Λ .

Любая решетка имеет единственный вполне приведенный базис.

Пусть

$$\tilde{\mathfrak{R}}_m \subset \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_m$$

– множество, составленное из всех приведенных базисов m -мерных решеток. Согласно известным свойствам приведенных квадратичных форм (см., например, [13, гл. 12, теорема 1.3]) существует такое конечное множество (зависящее только от размерности m) условий вида (2.2), что если базис $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m$ удовлетворяет условиям этого множества, то $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m$ – приведенный базис. В частности, это означает, что граница множества $\tilde{\mathfrak{R}}_m$ состоит из фиксированного числа поверхностей класса C^∞ .

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{R}_m \subset \tilde{\mathfrak{R}}_m$, составленное из всех вполне приведенных базисов m -мерных решеток. Если $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m$ – приведенный базис Λ , то элементы матрицы перехода от $\{e^{(i)}\}_{i=1}^m$ к любому другому приведенному базису решетки Λ ограничены некоторой константой, зависящей только от m (см., например, [13, гл. 12, теорема 1.2]). Поэтому граница множества $\mathfrak{R}_m$ также состоит из фиксированного числа поверхностей класса C^∞ .

2.2. Базисы Вороного и их свойства. Рассмотрим метод дополнения примитивного узла решетки до базиса, предложенный Г. Ф. Вороным. Используем определения из [12, гл. 5, § 60]).

Пусть Γ – решетка из $\mathbb{R}^s$. Возьмем любой примитивный узел $a = (a_1, \dots, a_s) \in \Gamma$, где $a_s > 0$. Все точки решетки лежат на прямых, параллельных a (*параллелях*). Эти прямые пересекают плоскость $\pi_s = \{x \in \mathbb{R}^s : x_s = 0\}$ в узлах некоторой решетки Λ , которую можно рассматривать как $(s-1)$ -мерную полную решетку, если вычеркнуть последние координаты узлов (которые равны нулю). Узел решетки Λ будем называть *основанием* параллели. Отрезок параллели от основания до первой, лежащей не ниже плоскости π_s , точки решетки Γ будем называть *гвоздиком*, первую точку решетки – *шапочкой* гвоздика, а основание параллели – *основанием* гвоздика.

Отметим, что гвоздик может иметь нулевую длину (если его основание является узлом Γ). Шапочка γ и основание η гвоздика связаны между собой соотношением

$$\eta = \gamma - a \frac{\gamma_s}{a_s}. \quad (2.3)$$

Узел $\gamma \in \Gamma$ является шапочкой некоторого гвоздика, если и только если $0 \leq \gamma_s < a_s$. Поэтому для любого гвоздика с шапочкой γ и основанием η

$$\rho(\gamma) - \rho(a) \leq |\eta| \leq \rho(\gamma) + \rho(a). \quad (2.4)$$

Пусть $\{b^{(j)}\}_{j=2}^s$ – вполне приведенный базис Λ . Обозначим $a^{(1)} = a$, и пусть $a^{(j)}$ – шапочка гвоздика с основанием в точке $b^{(j)}$, $j \geq 2$. Тогда $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ будет базисом Γ . Назовем его *базисом Вороного*.

Будем говорить, что ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ *нарушает минимальность* узла a , если выполняются неравенства (2.1), причем хотя бы одно из них является строгим.

ЛЕММА 2.1. *Пусть шапочки гвоздиков с основаниями в точках $\pm b^{(2)}$ не нарушают минимальность узла $a^{(1)}$. Положим $\rho_j = \rho(a^{(j)})$, $j = \overline{1, s}$. Тогда*

$$\rho_1 \underset{f}{\ll} |b^{(2)}|, \quad (2.5)$$

$$a_s \prod_{j=2}^s \rho_j \underset{f}{\ll} \det \Gamma. \quad (2.6)$$

Если, дополнительно, узлы $a^{(3)}, \dots, a^{(s)}$ не нарушают минимальность узла $a^{(1)}$, то

$$\rho_j \underset{f}{\asymp} |b^{(j)}|, \quad j = \overline{2, s}, \quad (2.7)$$

$$\rho_j \ll \rho_{j+1}, \quad j = \overline{1, s-1}. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства записи будем считать, что функция f определена на всем $\mathbb{R}^s$ по правилу

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{s-1}) \quad \text{при} \quad x = (x_1, \dots, x_{s-1}, x_s) \in \mathbb{R}^s.$$

Поскольку f – непрерывная и лучевая функция, то

$$\forall x \in \mathbb{R}^s \quad f(x) \underset{f}{\asymp} \rho(x). \quad (2.9)$$

Так как функция f непрерывна и кусочно дифференцируема, то она удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует такая постоянная $l > 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^s$

$$|f(x) - f(y)| \leq l|x - y|.$$

Перепишем последнюю оценку в следующем виде:

$$f(x + y) \leq f(y) + l|x|. \quad (2.10)$$

Если шапочка γ некоторого гвоздика не нарушает минимальность a , то $f(a) < f(\gamma)$ и согласно (2.9)

$$\rho_1 \underset{f}{\ll} \rho(\gamma).$$

Докажем (2.5). Пусть $\tilde{a}$ – шапочка гвоздика с основанием в точке $(-b^{(2)})$. Согласно (2.3) узел $a^{(2)}$ и шапочку $\tilde{a}$ можно представить в виде

$$a^{(2)} = b^{(2)} + ta, \quad \tilde{a} = -b^{(2)} + (1 - t)a$$

с некоторым $t \in [0, 1)$. Поскольку $\tilde{a}$ и $a^{(2)}$ не могут нарушать минимальность a , то, учитывая (2.10), получаем

$$\begin{aligned} f(a) &< f(a^{(2)}) = f(b^{(2)} + ta) \leq tf(a) + l|b^{(2)}|, \\ f(a) &< f(\tilde{a}) = f(-b^{(2)} + (1-t)a) \leq (1-t)f(a) + l|b^{(2)}|. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(a) < 2l|b^{(2)}|$, и, используя (2.9), приходим к (2.5).

Неравенство (2.6) доказано в [7, лемма 1]. Выведем (2.7). Возьмем любое $j \in \{2, \dots, s\}$. Согласно (2.4) имеем

$$|b^{(j)}| \leq \rho_j + \rho_1, \quad \rho_j \leq |b^{(j)}| + \rho_1.$$

Поскольку $a^{(j)}$ не нарушает минимальность a , то

$$\rho_1 \leq_f \rho_j.$$

Используя (2.5) и определение приведенного базиса, получаем

$$\rho_1 \leq_f |b^{(2)}| \leq |b^{(j)}|.$$

Из этих соотношений следуют оценки (2.7).

Неравенства (2.8) вытекают из (2.7) и оценок $|b^{(j)}| \leq |b^{(j+1)}|$.

ЛЕММА 2.2. *Существует такое конечное множество $\mathfrak{C}_f \subset \mathbb{Z}^s$, зависящее только от f , что если $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ – базис Вороного решетки Γ и узлы вида*

$$\gamma = \sum_{i=1}^s k_i a^{(i)}, \quad (k_1, \dots, k_s) \in \mathfrak{C}_f, \quad (2.11)$$

не нарушают минимальность $a^{(1)}$, то $a^{(1)}$ является цилиндрическим f -минимумом решетки Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [7, следствие 1].

Рассмотрим базис Вороного $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ решетки Γ из $\mathbb{R}^s$, удовлетворяющий следующему дополнительному условию: $a^{(1)}$ – цилиндрический f -минимум Γ . Пусть $A = ((a_i^{(j)}))$ – соответствующая базисная матрица (со столбцами $(a^{(1)})^T, \dots, (a^{(s)})^T$). Будем называть ее *матрицей Вороного*.

Пусть Ω_f – множество, состоящее из всех матриц Вороного решеток из $\mathbb{R}^s$.

Любая матрица $A = ((a_i^{(j)})) \in \Omega_f$ обладает следующими свойствами:

j) справедливы оценки $0 \leq a_s^{(j)} < a_s^{(1)}$, $j = \overline{2, s}$;

jj) если

$$b^{(j)} = a^{(j)} - a^{(1)} \frac{a_s^{(j)}}{a_s^{(1)}}, \quad j = \overline{2, s},$$

– основания гвоздиков с шапочками в точках $a^{(j)}$, то $(b^{(2)}, \dots, b^{(s)})$ содержится во множестве вполне приведенных базисов $\mathfrak{R}_{s-1}$;

jjj) узлы (2.11) не нарушают минимальность узла $a^{(1)}$.

Верно и обратное: если матрица $A \in \text{GL}_s(\mathbb{R})$ (со столбцами $(a^{(1)})^T, \dots, (a^{(s)})^T$) удовлетворяет j)–jjj), то $A \in \Omega_f$.

Множество $\Omega = \Omega_f$ удовлетворяет условиям i)–iii) из §1. Выполнение условия i) вытекает из определения матрицы Вороного, условия ii) – из j) и соотношений (2.6), (2.8). Условие iii) следует из j)–jjj).

2.3. О множестве Ω_f при $s = 3$. Можно уточнить условия jjj) в следующем частном случае:

$$s = 3, \quad f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.12)$$

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)$ – примитивный узел трехмерной решетки Γ и $a_3 > 0$. Пусть l_a – луч, выходящий из начала координат и проходящий через точку $(a_1, a_2, 0)$. На двумерной решетке оснований гвоздиков Λ определим *шестиугольник Зеллинга* как шестиугольник, составленный из шести остроугольных (или прямоугольных) примитивных треугольников решетки Λ , сходящихся в начале координат. Определим *основной треугольник Зеллинга* как тот из шести треугольников, через который проходит луч l_a .

Рассмотрим шапочки семи гвоздиков с основаниями в вершинах шестиугольника Зеллинга и в точке $(\beta + \gamma)$, где β и γ – вершины основного треугольника Зеллинга, отличные от нуля. Будем называть их *шапочками Вороного*.

ТЕОРЕМА ВОРОНОГО. Пусть выполняются условия (2.12). Если шапочки Вороного не нарушают минимальность узла a , то a является цилиндрическим f -минимумом.

Данная теорема была доказана Г. Ф. Вороным [10], [11] (переработанное доказательство см. в [12, гл. 5, § 60]) в случае, когда решетка Γ удовлетворяет условию (решетка общего положения)

$$\rho(\gamma) \neq \rho(\eta), \quad |\gamma_s| \neq |\eta_s|, \quad \gamma, \eta \in \Gamma, \quad \eta \neq \gamma. \quad (2.13)$$

Доказательство этой теоремы для произвольных решеток, в том числе и целочисленных, см. в [14].

Таким образом, в случае (2.12) условие jjj) можно заменить на следующее: jjj') шапочки Вороного не нарушают минимальность a .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если (2.13) не выполняется, то основной треугольник Зеллинга (и даже шестиугольник Зеллинга) может определяться неоднозначно. Однако утверждение теоремы Вороного остается в силе независимо от выбора этого треугольника (и шестиугольника). Отметим, что в этом случае число рассматриваемых шапочек Вороного можно уменьшить (см. [14]).

2.4. Среднее количество цилиндрических минимумов. Определим отображение Φ , которое каждой матрице $X \in \text{GL}_s(\mathbb{R})$ ставит в соответствие пару $(\Gamma(X), a(X))$, где:

1) $\Gamma(X)$ – решетка с базисной матрицей X (т. е. столбцы X образуют базис $\Gamma(X)$);

2) $a(X) = (x_{11}, \dots, x_{s1})$ – узел $\Gamma(X)$ (первый столбец X).

Пусть $\mathfrak{M}_f(\Gamma)$ – множество цилиндрических f -минимумов решетки Γ и $\mathfrak{M}_f^+(\Gamma)$ – множество минимумов $a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma)$, удовлетворяющих условию $a_s > 0$.

Определим множество $\mathcal{U}_f$, состоящее из пар (Γ, a) , где Γ – решетка в $\mathbb{R}^s$ и $a \in \mathfrak{M}_f^+(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отображение Φ взаимно однозначно переводит Ω_f на все множество $\mathcal{U}_f$ (это вытекает из определений). Кроме того, если $M(\Gamma)$ – множество базисных матриц решетки Γ , то множество цилиндрических минимумов с $a_s > 0$ определяется формулой

$$\mathfrak{M}_f^+(\Gamma) = \{a(M) : M \in \Omega_f \cap M(\Gamma)\},$$

т.е. оно состоит из первых столбцов базисных матриц Вороного решетки Γ . Последнее соотношение можно записать следующим образом:

$$\forall X \in M(\Gamma) \quad \mathfrak{M}_f^+(\Gamma) = \{a(Y) : Y \in \Omega_f \cap (X \cdot \text{SL}_s(\mathbb{Z}))\}. \quad (2.14)$$

Используя замечание 2.2, можно сводить вычисление усредненного по некоторому множеству решеток числа цилиндрических минимумов к нахождению количества матриц из некоторого подмножества Ω_f . Так, в [7] была доказана асимптотическая формула

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])} \#\mathfrak{M}_f(\Gamma) = \frac{C_f}{s-1} \ln R + O_f(1),$$

где $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])$ – множество s -мерных целочисленных решеток Γ таких, что $\det \Gamma \in [1, R]$,

$$C_f = 2 \cdot \frac{\mu(\Omega_f)}{\zeta(2) \cdots \zeta(s)}. \quad (2.15)$$

В настоящей статье мы ограничимся доказательством тех результатов, которые потребуются при исследовании наилучших приближений линейных форм. Для вычисления мощности подмножеств Ω_f будем использовать результаты из § 1. Как уже отмечалось, множество $\Omega = \Omega_f$ удовлетворяет условиям i)–iii) из § 1. Докажем выполнение iv).

Возьмем любую решетку Γ из $\mathbb{R}^s$ и положительные вещественные $r_2 \geq r_1$, $h_2 \geq h_1$. Согласно [2, теорема 1.1] справедливы оценки

$$\#\{a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma) : r_1 \leq \rho(a) \leq r_2\} \ll_f \ln \left(\frac{r_2}{r_1} + 1 \right), \quad (2.16)$$

$$\#\{a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma) : h_1 \leq |a_s| \leq h_2\} \ll_f \ln \left(\frac{h_2}{h_1} + 1 \right). \quad (2.17)$$

ЛЕММА 2.3. *Множество $\Omega = \Omega_f$ удовлетворяет условию iv) из § 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in [1, +\infty)$ и Q – целочисленная матрица из Ω_f . Согласно (2.14) количество матриц $M \in \Omega_f(Q \cdot \text{SL}_s(\mathbb{Z}))$, удовлетворяющих условию $\rho_1(M) \leq r$ либо $h_1(M) \leq r$, не больше чем число минимумов $a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma(Q))$, для которых $\rho(a) \leq r$ либо $|a_s| \leq r$. Используя (2.16), (2.17), мы видим, что количество таких минимумов не превосходит $O_f(\ln r + 1)$. Лемма доказана.

Для любых $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_{s-1}) \in \mathbb{Z}_+^{s-1}$ и $N \in \mathbb{N}$ определим решетку $\Gamma(\mathbf{P}, N)$ с базисной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ P_1 & P_2 & \dots & P_{s-1} & N \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Пусть $\mathcal{L}_s(R)$ – множество, состоящее из решеток $\Gamma(\mathbf{P}, N)$ с целыми P_i, N , удовлетворяющими неравенствам $0 \leq P_i < N \leq R, i = \overline{1, s-1}$. Отметим, что

$$\#\mathcal{L}_s(R) = \frac{R^s}{s} + O_s(R^{s-1}). \quad (2.19)$$

Выясним, какие матрицы порождают решетки из $\mathcal{L}_s(R)$.

ЛЕММА 2.4. Пусть M – целочисленная матрица из $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$. Пусть $\Gamma = \Gamma(M)$ – решетка с базисной матрицей M . Тогда $\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)$, если и только если $|\det M| \in [1, R], d_{s-1}(M) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)$. Тогда $\det \Gamma \in [1, R]$, и поэтому $|\det M| \in [1, R]$. Кроме того, существует матрица $S \in \mathrm{SL}_s(\mathbb{Z})$ такая, что $M = TS$, где T – матрица вида (2.18). Поскольку $d_{s-1}(T) = 1$, согласно лемме 1.6 имеем $d_{s-1}(M) = 1$.

Пусть $|\det M| \in [1, R], d_{s-1}(M) = 1$. Согласно лемме 1.5 матрицу M можно представить в виде $M = TS$, где $S \in \mathrm{SL}_s(\mathbb{Z})$, а $T \in \mathrm{TM}_s(\mathbb{Z})$ – еще одна базисная матрица Γ . Поскольку $d_{s-1}(M) = 1$, по лемме 1.6 имеем $d_{s-1}(T) = 1$. Значит, $t_{ii} = 1, i = \overline{1, s-1}$, и, следовательно, матрица T имеет вид (2.18). Так как $|\det M| \in [1, R]$, то $N \leq R$. Лемма доказана.

Для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in [0, 1)^{s-1}$ определим решетку Γ_α с базисной матрицей

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{s-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

т. е. Γ_α состоит из узлов вида

$$\gamma = (k_1, k_2, \dots, k_{s-1}, k_1\alpha_1 + \dots + k_{s-1}\alpha_{s-1} - k_s), \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим функции $\varphi, \psi: [0, 1)^{s-1} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, действующие по формулам

$$\varphi(\alpha) = \#\{a \in \mathfrak{M}_f^+(\Gamma_\alpha) : f(a_1, \dots, a_{s-1}) \leq P\}, \quad (2.21)$$

$$\psi(\alpha) = \#\{a \in \mathfrak{M}_f^+(\Gamma_\alpha) : f(a_1, \dots, a_{s-1}) \leq P, P^{-s} \leq a_s\}. \quad (2.22)$$

Множество векторов $\Delta_{s-1}(R)$ определено во введении.

ЛЕММА 2.5. Для любых $P, R \in (1, +\infty)$ имеют место асимптотические формулы

$$\frac{1}{\#\Delta_{s-1}(R)} \sum_{\alpha \in \Delta_{s-1}(R)} \varphi(\alpha) = \frac{\mathcal{C}_f}{2} \ln P + O_f\left(\frac{P^{s-1}}{R} + 1\right), \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\#\Delta_{s-1}(R)} \sum_{\alpha \in \Delta_{s-1}(R)} \psi(\alpha) = \frac{\mathcal{C}_f}{2} \ln P + O_f\left(\frac{P^{s-1}}{R} + 1\right), \quad (2.24)$$

где постоянная $\mathcal{C}_f$ определяется формулой (2.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала (2.23). Пусть

$$\alpha = \left(\frac{P_1}{N}, \dots, \frac{P_{s-1}}{N}\right) \in \Delta_{s-1}(R).$$

Отображение

$$(x_1, \dots, x_{s-1}, x_s) \in \mathbb{R}^s \rightarrow (x_1, \dots, x_{s-1}, Nx_s)$$

взаимно однозначно переводит Γ_α на решетку $\Gamma = \Gamma(\mathbf{P}, N) \in \mathcal{L}_s(R)$, при этом минимумы Γ_α переходят в минимумы Γ . Поэтому $\varphi(\alpha) = \varphi(\Gamma)$, где $\varphi(\Gamma)$ – количество минимумов $a \in \mathfrak{M}_f^+(\Gamma)$, удовлетворяющих условию $f(a_1, \dots, a_{s-1}) \leq P$. Значит, достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_s(R)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)} \varphi(\Gamma) = \frac{\mathcal{C}_f}{2} \ln P + O_f\left(\frac{P^{s-1}}{R} + 1\right). \quad (2.25)$$

Возьмем любую решетку $\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)$. Пусть $\tilde{\varphi}(\Gamma)$ – количество минимумов $a \in \mathfrak{M}_f^+(\Gamma)$ таких, что $\rho(a) \leq P$. Если $a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma)$, причем $\rho(a) \leq P \leq f(a)$ либо $f(a) \leq P \leq \rho(a)$, то согласно (2.9) имеем $\rho(a) \asymp_f P$. Используя оценку (2.16), получаем, что таких минимумов не больше чем $O_f(1)$. Следовательно, $\varphi(\Gamma) = \tilde{\varphi}(\Gamma) + O_f(1)$, и

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)} \varphi(\Gamma) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)} \tilde{\varphi}(\Gamma) + O_f(\#\mathcal{L}_s(R)). \quad (2.26)$$

Пусть $\mathcal{U}_f^* = \mathcal{U}_f^*(P, R)$ – множество пар $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_f$, где $\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)$ и a – минимум из $\mathfrak{M}_f^+(\Gamma)$ такой, что $\rho(a) \leq P$. Тогда

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)} \tilde{\varphi}(\Gamma) = \#\mathcal{U}_f^*.$$

Определим множество $\Omega_f^* = \Omega_f^*(P, R)$, составленное из всех матриц Вороного для пар (Γ, a) из $\mathcal{U}_f^*$, т.е. $\Phi(\Omega_f^*) = \mathcal{U}_f^*$. Поскольку отображение Φ взаимно однозначное, то $\#\mathcal{U}_f^* = \#\Omega_f^*$. Используя определения и лемму 2.4, получаем, что множество Ω_f^* состоит из целочисленных матриц $M \in \Omega_f$ таких, что

$$\rho_1(M) \leq P, \quad |\det M| \in [1, R], \quad d_{s-1}(M) = 1.$$

Множество $\Omega = \Omega_f$ удовлетворяет условиям i)–iv) из § 1. Поэтому согласно следствию 1.3 имеем

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(R)} \tilde{\varphi}(\Gamma) = \#\mathcal{U}_f^* = \#\Omega_f^* = \frac{R^s}{s} \left(\frac{\mu(\Omega_f)}{\zeta(2) \cdots \zeta(s)} \ln P + O_f \left(1 + \frac{P^{s-1}}{R} \right) \right).$$

Подставляя последнее соотношение в (2.26) и учитывая (2.19), приходим к соотношению (2.25). Оценка (2.23) доказана.

Для доказательства (2.24) достаточно повторить рассуждения, использованные при обосновании (2.23). В итоге получаем

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{s-1}(R)} \psi(\alpha) = \#\Omega_f^{**} + O_f(\#\mathcal{L}_s(R)),$$

где Ω_f^{**} состоит из целочисленных матриц $M \in \Omega_f$ таких, что

$$\rho_1(M) \leq P, \quad |\det M| P^{-s} \leq h_1(M), \quad |\det M| \in [1, R], \quad d_{s-1}(M) = 1.$$

Применяя для вычисления $\#\Omega_f^{**}$ следствие 1.4, приходим к требуемой формуле.

§ 3. Среднее количество наилучших приближений

Напомним, что размерность s решеток из предыдущего параграфа и размерность n рассматриваемых линейных форм связаны соотношением $s = n + 1$.

Возьмем любой вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Определим линейную форму

$$L_\alpha x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

и решетку Γ_α с базисной матрицей (2.20). Из определений вытекает, что множество минимумов $\mathfrak{M}_f(\Gamma_\alpha)$ состоит из векторов $(u_1, \dots, u_n, L_\alpha u - v)$, где $(u, v) - f$ -наилучшее приближение линейной формы L_α . Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между цилиндрическими минимумами и наилучшими приближениями линейной формы. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\#\{a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma_\alpha; P) : f(a_1, \dots, a_{s-1}) \leq P\} = \#\mathfrak{B}_f(\alpha; P).$$

Если $a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma_\alpha)$, то и $(-a) \in \mathfrak{M}(\Gamma_\alpha)$. Поэтому

$$\#\mathfrak{B}_f(\alpha; P) = 2\varphi(\alpha) + \xi(\alpha), \quad (3.1)$$

где $\varphi(\alpha)$ определяется (2.21), а $\xi(\alpha)$ – количество минимумов $a \in \mathfrak{M}_f(\Gamma_\alpha)$ таких, что $a_s = 0$, $f(a_1, \dots, a_{s-1}) \leq P$. Очевидно, что $\xi(\alpha) = O_f(1)$.

Рассмотрим сначала дискретный случай.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любых $P, R > 1$ справедлива асимптотическая формула (0.3), в которой*

$$\mathcal{C}_f = 2 \cdot \frac{\mu(\Omega_f)}{\zeta(2) \cdots \zeta(n+1)}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из (3.1) и (2.23).

ЛЕММА 3.1. Пусть $\alpha \in \Delta_n(R)$. Тогда для любого наилучшего приближения $(u, v) \in \mathfrak{B}_f(\alpha)$, удовлетворяющего условию $L_\alpha u \neq v$, имеет место оценка (0.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta = |L_\alpha u - v|$. Тогда $\theta \geq R^{-1}$. Согласно (2.9) и определению наилучшего приближения существует такая постоянная $C = C(f) > 0$, что выпуклое множество

$$U(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^s : \rho(x) \leq Cf(u), |\alpha x_1 + \dots + \alpha_n x_n - x_{n+1}| \leq \theta\}$$

не содержит ненулевых целочисленных точек. Используя теорему Минковского о выпуклом теле, получаем

$$2^s \geq \text{mes } U(\gamma) \gg_n (Cf(u))^n \theta \geq (Cf(u))^n R^{-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. По-видимому, справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\frac{1}{N^n} \sum_{P_i \in [0, N] \cap \mathbb{Z}} \#\mathfrak{B}_f\left(\frac{P_1}{N}, \dots, \frac{P_n}{N}\right) \sim \frac{C_f}{n} \ln N, \quad N \rightarrow \infty,$$

– аналог результата Хейльбронна о средней длине непрерывной дроби для рациональных чисел с фиксированным знаменателем. Из § 2 вытекает, что

$$\frac{1}{N^n} \sum_{P_i \in [0, N] \cap \mathbb{Z}} \#\mathfrak{B}_f\left(\frac{P_1}{N}, \dots, \frac{P_n}{N}\right) = 2 \cdot \frac{\#\Omega_f^*(\mathbb{Z}; N)}{N^n} + O_f(1),$$

где $\Omega_f^*(\mathbb{Z}; N)$ – множество целочисленных матриц $M \in \Omega_f$, удовлетворяющих условию $d_{s-1}(M) = 1$ и имеющих фиксированный определитель $|\det M| = N$.

Перейдем теперь к рассмотрению непрерывного случая.

ЛЕММА 3.2. Функция $\alpha \in [0, 1)^n \rightarrow \#\mathfrak{B}_f(\alpha, P)$ измерима по Лебегу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим (3.1). Если $\xi(\alpha) \neq 0$, то $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, 1$ линейно зависимы над кольцом $\mathbb{Z}$. Множество таких α имеет меру нуль по Лебегу. Поэтому

$$\#\mathfrak{B}_f(\alpha, P) = 2\varphi(\alpha) \quad \text{почти при всех } \alpha \in [0, 1)^{s-1}. \quad (3.3)$$

Осталось доказать, что функция φ измерима по Лебегу.

Предположим, что Ω'_f – множество всех возможных матриц Вороного для решеток Γ_α , т. е.

$$\Omega'_f = \left\{ X \in \Omega_f : \Gamma(X) \in \bigcup_{\alpha \in [0, 1)^{s-1}} \Gamma_\alpha \right\}.$$

Определим

$$\Omega'_{f,P} = \{X \in \Omega'_f : f(x_{11}, \dots, x_{(s-1)1}) \leq P\}.$$

Используя (2.14), получаем

$$\varphi(\alpha) = \sum_{S \in \mathrm{SL}_s(\mathbb{Z})} \chi(\alpha, S), \quad \chi(\alpha, S) = \begin{cases} 1, & \text{если } T_\alpha \in \Omega'_{f,P} S^{-1}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где матрица T_α определяется (2.20). Для любой матрицы $S \in \mathrm{SL}_s(\mathbb{Z})$ функция $\alpha \in [0, 1)^{s-1} \rightarrow \chi(\alpha, S)$ является измеримой по Лебегу как характеристическая функция некоторого измеримого множества. Значит, φ измерима как поточечный предел последовательности измеримых функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть ω – связное подмножество в $[0, 1)^{s-1}$ с липшицевой границей $\partial\omega$. Тогда для любого $R \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\#(\omega \cap \Delta_{s-1}(R))}{\#\Delta_{s-1}(R)} &= \frac{1}{\#\Delta_{s-1}(R)} \sum_{1 \leq N \leq R} \#(\mathbb{Z}^{s-1} \cap (N\omega)) \\ &= \frac{1}{\#\Delta_{s-1}(R)} \sum_{1 \leq N \leq R} (N^{s-1} \mathrm{mes} \omega + O_\omega(N^{s-2})) = \mathrm{mes} \omega + O_\omega(R^{-1}). \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться, например, формулой (1.2).

Вместо $\mathfrak{B}_f(\alpha, P)$ будем рассматривать множество

$$\mathfrak{B}'_f(\alpha, P) = \{(u, v) \in \mathfrak{B}_f(\alpha, P) : |L_\alpha u - v| \geq P^{-(n+1)}\}. \quad (3.4)$$

Нам нужна оценка меры множества α таких, что $\mathfrak{B}'_f(\alpha, P) \neq \mathfrak{B}_f(\alpha, P)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $P, Q > 1$. Определим множество $G = G(P, Q)$, состоящее из точек $\alpha \in [0, 1)^n$, удовлетворяющих условию: для любого $\alpha \in G$ существует ненулевой целочисленный вектор $(u, v) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ такой, что

$$|u|_\infty \leq P, \quad |L_\alpha u - v| \leq \frac{1}{Q}. \quad (3.5)$$

Тогда $\mathrm{mes} G \ll_n P^n / Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любой ненулевой набор $(u, v) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$. Пусть $g(u, v)$ – множество таких $\alpha \in [0, 1)^n$, которые удовлетворяют (3.5). Тогда

$$\mathrm{mes} g(u, v) \leq \frac{2}{Q|u|_\infty}.$$

Если набор (u, v) удовлетворяет (3.5) с некоторым $\alpha \in [0, 1)^n$, то

$$|v| \leq \frac{1}{Q} + |L_\alpha u| \leq (n+1)|u|_\infty.$$

Следовательно, имеем

$$\mathrm{mes} G \leq \sum_{u,v} \mathrm{mes} g(u, v) \leq \sum_{u,v} \frac{2}{Q|u|_\infty} \ll_n \frac{P^n}{Q},$$

где сумма берется по всем таким $(u, v) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$, что $1 \leq |u|_\infty \leq P$, $|v| \leq (n+1)|u|_\infty$.

ТЕОРЕМА 3.2. Для любого $P > 1$ справедлива асимптотическая формула (0.4), в которой постоянная C_f определяется (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.3 имеем

$$\text{mes}\{\alpha \in [0, 1)^n : \mathfrak{B}'_f(\alpha, P) \neq \mathfrak{B}_f(\alpha, P)\} = O_n(P^{-1}).$$

Напомним, что $\mathfrak{B}'_f(\alpha, P)$ определяется (3.4). Поэтому, учитывая (0.1), получаем

$$\int_{[0,1)^n} \# \mathfrak{B}_f(\alpha, P) d\alpha = \int_{[0,1)^n} \# \mathfrak{B}'_f(\alpha, P) d\alpha + O_f\left(\frac{\ln P + 1}{P}\right).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве (3.3), приходим к формуле

$$\# \mathfrak{B}'_f(\alpha, P) = 2\psi(\alpha) \quad \text{почти при всех } \alpha \in [0, 1)^n.$$

Следовательно, имеем

$$\mathcal{E}_f(P) = 2 \int_{[0,1)^{s-1}} \psi(\alpha) d\alpha + O_f\left(\frac{\ln P + 1}{P}\right). \quad (3.6)$$

Из (2.14) вытекает соотношение

$$\psi(\alpha) = \sum_{S \in \text{SL}_s(\mathbb{Z})} \tilde{\chi}(\alpha, S),$$

где

$$\tilde{\chi}(\alpha, S) = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_\alpha S \in \Omega''_{f,P}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \Omega''_{f,P} = \{X \in \Omega'_{f,P} : h_1(X) \geq P^{-s}\},$$

множество $\Omega'_{f,P}$ определено при доказательстве леммы 3.2.

Согласно свойствам Ω_f для любой $X \in \Omega''_{f,P}$ справедливы оценки

$$P^{-s} \leq h_1(X) = \max_{1 \leq j \leq s} |h_j(X)|, \quad \rho_1(X) \leq_f \rho_2(X),$$

$$h_1(X) \prod_{j=2}^s \rho_j(X) \leq_f |\det X| = 1.$$

Кроме того, $\rho_j(X) \neq 0$ при любом $j \geq 2$ (иначе $\det X = 0$). Учитывая, что первые $s - 1$ строк матрицы X целочисленные, получаем $\rho_j(X) \geq 1$. Используя эти соотношения, нетрудно проверить, что множество $\Omega''_{f,P}$ ограниченное. Значит, множества

$$Y_\alpha^{-1} \cdot \Omega''_{f,P}, \quad \{S \in \text{SL}_s(\mathbb{Z}) : \tilde{\chi}(\alpha, S) \neq 0\}$$

ограничены равномерно по α . Поэтому существует такое конечное множество $S_P \subset \text{SL}_s(\mathbb{Z})$ (зависящее только от P и f), что для любого $\alpha \in [0, 1)^{s-1}$

$$\sum_{S \in S_P} \tilde{\chi}(\alpha, S) = \sum_{S \in \text{SL}_s(\mathbb{Z})} \tilde{\chi}(\alpha, S) = \psi(\alpha). \quad (3.7)$$

Пусть $\omega(S) = \{\alpha \in [0, 1)^{s-1} : Y_\alpha S \in \Omega''_{f,P}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} \psi(\alpha) d\alpha &= \int_{[0,1]^{s-1}} \left(\sum_{S \in S_P} \tilde{\chi}(\alpha, S) \right) d\alpha \\ &= \sum_{S \in S_P} \left(\int_{[0,1]^{s-1}} \tilde{\chi}(\alpha, S) d\alpha \right) = \sum_{S \in S_P} \text{mes } \omega(S). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если множество $\omega(S)$ не пусто, то оно имеет кусочно дифференцируемую границу (так как граница Ω_f кусочно дифференцируемая). Возьмем любое $R > P$. Используя замечание 3.2, получаем

$$\text{mes } \omega(S) = \frac{\#(\omega(S) \cap \Delta_{s-1}(R))}{\#\Delta_{s-1}(R)} + O_{\omega(S)}(R^{-1}). \quad (3.9)$$

Согласно (3.7) и (2.24) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{S \in S_P} \frac{\#(\omega(S) \cap \Delta_{s-1}(R))}{\#\Delta_{s-1}(R)} &= \frac{1}{\#\Delta_{s-1}(R)} \sum_{S \in S_P} \sum_{\alpha \in \Delta_{s-1}(R)} \tilde{\chi}(\alpha, S) \\ &= \frac{1}{\#\Delta_{s-1}(R)} \sum_{\alpha \in \Delta_{s-1}(R)} \psi(\alpha) = \frac{C_f}{2} \ln P + O_f(1). \end{aligned}$$

Используя последнюю формулу, а также (3.8), (3.9), приходим к соотношению

$$\int_{[0,1]^n} \psi(\alpha) d\alpha = \sum_{S \in S_P} \text{mes } \omega(S) = \frac{C_f}{2} \ln P + O_f(1) + \sum_{S \in S_P} O_{\omega(S)}(R^{-1}).$$

Константы, входящие в символы $O(\dots)$, не зависят от R . Множество S_P также не зависит от R . Поэтому, переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$, получаем

$$\int_{[0,1]^n} \psi(\alpha) d\alpha = \frac{C_f}{2} \ln P + O_f(1).$$

Осталось подставить последнее соотношение в (3.6). Теорема доказана.

В заключение отметим, что аналогичным образом можно исследовать вопросы о статистических свойствах наилучших *совместных* приближений вещественных $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Например, чтобы получить асимптотическую формулу для среднего числа f -наилучших совместных приближений рациональных $\alpha \in \Delta_n(R)$, нужно подсчитать количество целочисленных матриц $M \in \Omega_f$, удовлетворяющих условиям

$$|\det M| \in [1, R], \quad \text{НОД}(m_{s1}, m_{s2}, \dots, m_{ss}) = 1, \quad \prod_{i=1}^{s-1} D_i(M) = |\det M|^{s-2},$$

где $D_i(M)$ – наибольший общий делитель алгебраических дополнений к элементам i -й строки M .

Список литературы

1. Y. Bugeaud, M. Laurent, “On exponents of homogeneous and inhomogeneous Diophantine approximation”, *Mosc. Math. J.*, **5:4** (2005), 747–766.

2. А. А. Илларионов, “О статистических свойствах локальных минимумов целочисленных решеток”, *Дальневост. матем. журн.*, **12**:2 (2012), 201–230.
3. G. Lochs, “Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmässigen Kettenbrüche”, *Monatsh. Math.*, **65** (1961), 27–52.
4. H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number Theory and Analysis*, VEB, Berlin, 1968, 87–96.
5. J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1 (1975), 20–28.
6. А. В. Устинов, *Приложения сумм Клостермана в арифметике и геометрии*, LAMBERT Academic Publishing, 2011.
7. А. А. Илларионов, “О цилиндрических минимумах целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ*, **24**:2 (2012), 154–170; англ. пер.: А. А. Illarionov, “Cylindrical minima of integral lattices”, *St. Petersburg Math. J.*, **24**:2 (2013), 301–312.
8. Дж. В. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, М., 1995; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
9. А. Illarionov, “On the asymptotic distribution of integer matrices”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **1**:4 (2011), 13–57.
10. Г. Ф. Вороной, *Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей*, Типография Варшавского учебного округа, Варшава, 1896.
11. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений в 3-х томах*, т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
12. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, “Теория иррациональностей третьей степени”, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **11**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, 3–340.
13. Дж. В. Касселс, *Рациональные квадратичные формы*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, London Math. Soc. Monogr., **13**, Academic Press, London, 1978.
14. А. В. Устинов, “К теореме Вороного о цилиндрических минимумах трехмерных решеток”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:2 (2011), 213–221.

Андрей Анатольевич Илларионов
 (ANDREI A. ILLARIONOV)
 Хабаровское отделение
 Института прикладной математики ДВО РАН,
 г. Хабаровск
 E-mail: illar_a@list.ru

Поступило в редакцию
 13.03.2012
 05.04.2013