Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Ву, Р. В. Михайлов, Гомотопические группы как центры конечно представленных групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 3, 149–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7981>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:21:49

УДК 512.7

Дж. Ву, Р. В. Михайлов

Гомотопические группы как центры конечно представленных групп

Для каждой конечной абелевой группы A и $n \geq 3$ построена конечно представленная группа, заданная явными порождающими и соотношениями, такая, что ее центр изоморфен $\pi_n(\Sigma K(A, 1))$.

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: теория гомотопий, гомотопические группы, симплициальные группы, конечно представленные группы.

DOI: 10.4213/im7981

Посвящается И. Р. Шафаревичу

§ 1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем изучение связей между теорией групп и теорией гомотопий, начатое в [1]–[6]. Кратко изложим некоторые из результатов и идей этих работ.

Понятие симплициального множества и симплициальной группы интенсивно изучалось с момента их введения в начале 1950-х годов, когда Д. Кан представил свои фундаментальные работы по симплициальной теории гомотопий [7], [8]. Изучение симплициальных групп привело к различным важным результатам. Например, специальный случай спектральной последовательности Адамса, являющейся эффективным аппаратом вычисления гомотопических групп, получается из нижнего центрального ряда конструкции Кана [9]. Используя $F[K]$ -конструкцию Милнора [10], примененную к симплициальной окружности, вместе с теоремой Мура о симплициальных группах, второй автор получил комбинаторное описание гомотопических групп двумерной сферы [1]. Приведем это описание. Пусть F_n – свободная группа ранга $n \geq 1$ с базисом $\{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $R_i = \langle x_i \rangle^{F_n}$ – нормальные замыкания элементов x_i в F_n для $1 \leq i \leq n$ и $R_{n+1} = \langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle^{F_n}$ – нормальное замыкание произведения порождающих $x_1 x_2 \cdots x_n$ в F_n . Определим *симметрический коммутант*

$$[R_1, R_2, \dots, R_{n+1}]_S = \prod_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} [\dots [R_{\sigma(1)}, R_{\sigma(2)}], \dots, R_{\sigma(n+1)}]. \quad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке MOE Сингапура (AcRF Tier 1, WBS № R-146-000-137-112 и AcRF Tier 2, WBS № R-146-000-143-112) и NSFC Китая (грант № 11028104), Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, Программы Правительства РФ (договор 11.G34.31.0026).

ТЕОРЕМА 1.1 [1]. Для $n \geq 1$ существует изоморфизм

$$\pi_{n+1}(S^2) \simeq \frac{R_1 \cap \dots \cap R_{n+1}}{[R_1, \dots, R_{n+1}]_S}.$$

Более того, гомотопическая группа $\pi_{n+1}(S^2)$ изоморфна центру группы $F_n/[R_1, \dots, R_{n+1}]_S$.

Оказывается, для группы G и набора нормальных подгрупп $R_1, \dots, R_n$ в G определенные условия связности (см. точную формулировку в [2]) влекут, что ¹

$$\pi_n(X) \simeq \frac{R_1 \cap \dots \cap R_{n+1}}{[R_1, \dots, R_{n+1}]_S}, \quad (1.2)$$

где X является гомотопическим копределом классифицирующих пространств $K(G/\prod_{i \in I} R_i, 1)$, I пробегает все подмножества в $\{1, \dots, n\}$. В частности, описание (1.2) покрывает описание гомотопических групп S^2 , представленное в теореме 1.1.

Дальнейшее развитие данной темы привело к раскрытию интересных связей между гомотопическими группами, группами кос, группами классов отображений, группами зацеплений и теорией групповых колец [3], [5], [11]–[17]. Например, авторы применили гомотопические группы сфер к проблеме описания обобщенных размерных подгрупп, заданных симметрическими произведениями идеалов (см. [3]). Существует ряд чисто теоретико-групповых утверждений, которые доказываются с помощью теории гомотопий. При этом неясно, как их доказать без использования гомотопий. К примеру, если F_n и R_i такие же, как в теореме 1.1, факторгруппа $F_n/[R_1, \dots, R_{n+1}]_S$ аппроксимируется нильпотентными группами, т. е. пересечение ее нижнего центрального ряда тривиально. Этот результат следует из теоремы сходимости Кертиса для симплициальной конструкции Милнора $F[S^1]$, а также из описания границ Мура в $F[S^1]$ как симметрических коммутантов из [1].

Недавно был достигнут прогресс в комбинаторном описании гомотопических групп [6], а именно представлено комбинаторное описание гомотопических групп сфер и пространств Мура в теоретико-групповых терминах. В работе [6] показано, что все гомотопические группы сфер и пространств Мура могут быть представлены как центры некоторых конечно порожденных групп, заданных явными порождающими и соотношениями. Однако группы, построенные в [1], [6], центры которых изоморфны гомотопическим группам, могут не быть конечно представленными. Возникает естественный вопрос: для каких пространств X и $n \geq 2$ можно построить конечно представленную группу $\Gamma(X)$, заданную явными порождающими и соотношениями и такую, что центр $\Gamma(X)$ изоморфен $\pi_n(X)$? В настоящей работе мы изучаем данный вопрос для надстроек над классифицирующими пространствами конечных абелевых групп. Для любой конечной абелевой группы A и $n \geq 2$ мы строим конечно представленную группу $\mathcal{J}_n$ такую, что ² $Z(\mathcal{J}_n) \simeq \pi_{n+1}(\Sigma K(A, 1))$.

¹В работе [2] дано описание n -й гомотопической группы как пересечения подгрупп R_i по модулю подгруппы $(R_1, \dots, R_n) := \prod_{I \cup J = \{1, \dots, n\}, I \cap J = \emptyset} [\cap_{i \in I} R_i, \cap_{j \in J} R_j]$. Однако во многих важных случаях подгруппа $(R_1, \dots, R_n)$ совпадает с симметрическим коммутантом $[R_1, \dots, R_n]_S$ (см. [5]).

²Обозначаем центр группы G через $Z(G)$.

Основной подход в [1], [6] к построению конечно порожденных групп, центры которых изоморфны гомотопическим группам, состоит в следующем. Для некоторых односвязных пространств X существует симплициально-групповые модели G_* , задающие гомотопический тип петель над X , т.е. $|G_*| \simeq \Omega X$, и такие, что центры компонент симплициальных групп G_* тривиальны и существует комбинаторное описание границ Мура $\mathcal{B}G_*$. В данном случае гомотопические группы $\pi_{n+1}(X) \simeq \pi_n(G_*)$ изоморфны центрам факторгрупп $G_n/\mathcal{B}G_n$. Однако для всех таких симплициальных моделей в [1] и [6] границы Мура $\mathcal{B}G_n$ как нормальные подгруппы не порождаются конечным числом элементов в группе G_n . Заметим, что для двумерной сферы S^2 существует трюк, основанный на свойствах групп кос, которые позволяют построить набор конечно представленных групп, заданных явными порождающими и соотношениями, центры которых изоморфны $\pi_*(S^2) \times \mathbb{Z}$ [4]. При этом данный трюк не применим для других пространств, так как он основан на специфических свойствах симплициальной конструкции Милнора $F[S^1]$ [10]. Отметим также, что для группы G такой, что ее коммутатор $[G, G]$ имеет тривиальный центр, неабелев тензорный квадрат $G \otimes G$ в смысле Брауна–Лодэя [18] имеет следующее свойство:

$$\pi_3(\Sigma K(G, 1)) \simeq Z(G \otimes G).$$

При этом обобщение данной конструкции на высшие гомотопические группы кажется сложной проблемой.

Вычисление гомотопических групп надстроек $\Sigma K(A, 1)$ представляет собой крайне непростую задачу. Например, гомотопические группы $\pi_n(\Sigma K(\mathbb{Z}/2, 1))$ известны на данный момент лишь для $n \leq 6$ (см. [19], [20]).

Наша конструкция устроена следующим образом. Пусть A – абелева группа. Для $n \geq 1$ определим свободное произведение

$$T_n := \underbrace{(A \times \cdots \times A)}_n * \underbrace{(A \times \cdots \times A)}_n.$$

Для $i = 1, \dots, n$ обозначим через A_i (соответственно, A_{n+i}) i -ю копию группы A в первом (соответственно, втором) свободном сомножителе в T_n . Для $a \in A$ при $j = 1, \dots, 2n$ обозначим через a_j элемент a в A_j . Определим

$$R_1 = \langle a_1, a_{n+1} \mid a \in A \rangle^{T_n}, \quad (1.3)$$

$$R_i = \langle a_i a_{i-1}^{-1}, a_{n+i} a_{n+i-1}^{-1} \mid a \in A \rangle^{T_n}, \quad 1 < i \leq n, \quad (1.4)$$

$$R_{n+1} = \langle a_n, a_{2n} \mid a \in A \rangle^{T_n}. \quad (1.5)$$

Зададим теперь группу

$$\mathcal{J}_n(A) := T_n / (\gamma_{2n+1}([T_n, T_n])[R_1, \dots, R_{n+1}]s),$$

где $\gamma_k(-)$, $k \geq 1$, обозначает k -й член нижнего центрального ряда группы. Основной результат настоящей работы следующий.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть A – конечная абелева группа. Гомотопическая группа $\pi_{n+1}(\Sigma K(A, 1))$ изоморфна центру полициклической группы $\mathcal{J}_n(A)$ для всех $n \geq 2$.

Все полициклические группы конечно представлены, в частности конечно представлены группы $\mathcal{J}_n(A)$, более того, из определения следует, что группы $\mathcal{J}_n(A)$ виртуально нильпотентны. Группа $\mathcal{J}_n(A)$ получается каноническим образом из симплициальной группы $K(A, 1) * K(A, 1)$. Нижний центральный ряд свободного произведения $K(A, 1) * K(A, 1)$ может представить некоторую вычислительную информацию о гомотопических группах надстроек и группах $\mathcal{J}_n(A)$.

Конструкция конечно представленных групп, центры которых изоморфны группам $\pi_n(S^2) \times \mathbb{Z}$, приведена в [4]. Однако в работе [4] содержатся ошибки. В § 4 мы даем краткое описание основного результата из [4] и исправляем ошибки этой работы. Отметим, что понятие симметрического коммутанта (1.1) играет центральную роль в обсуждаемой конструкции.

§ 2. Симплициальные модели

Пусть A – абелева группа. Гомотопически коммутативная диаграмма последовательностей расслоений

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma K(A, 1) \wedge K(A, 1) & \xrightarrow{H} & \Sigma K(A, 1) & \longrightarrow & K(A, 2) = BK(A, 1) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \Sigma K(A, 1) \wedge K(A, 1) & \longrightarrow & K(A, 2) \vee K(A, 2) & \hookrightarrow & K(A, 2) \times K(A, 2) \end{array} \quad (2.1)$$

где H – расслоение Хопфа, влечет для $n \geq 3$ изоморфизмы

$$\pi_n(\Sigma K(A, 1)) \cong \pi_n(K(A, 2) \vee K(A, 2)). \quad (2.2)$$

Выберем простейшую симплициальную модель для $K(A, 1)$. Применяя обратное отображение функтору нормализации в смысле Дольда–Кана к комплексу $A[1]$, получаем абелеву симплициальную группу E_* с компонентами

$$E_i = \underbrace{(A \times \cdots \times A)}_i, \quad i \geq 1,$$

и свойством $|E_*| \simeq K(A, 1)$. Отображения граней и вырождений в E_* стандартны, их структура следует из определения обратного отображения к функтору нормализации.

Следующий факт вытекает из теоремы Уайтхеда [21] (по поводу симплициальной версии теоремы Уайтхеда см. [22, утверждение 4.3]).

ЛЕММА 2.1. *Для абелевой группы A существует гомотопическая эквивалентность*

$$|E_* * E_*| \simeq \Omega(K(A, 2) \vee K(A, 2)).$$

Здесь $E_* * E_*$ – свободное произведение двух копий симплициальной группы E_* .

Напомним, что симплициальная группа G_* называется *свободной*, если каждая группа G_i , $i \geq 0$, свободна с заданным базисом и образ базисных элементов при гомоморфизме вырождения – снова базисный элемент. Следующий результат принадлежит Е. Кертису [23].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть G_* – связная симплициальная группа. Тогда для каждого $r \geq 2$ гомоморфизм симплициальных групп $G \rightarrow G/\gamma_r(G)$ индуцирует изоморфизмы

$$\pi_i(G) \simeq \pi_i(G/\gamma_r(G))$$

для всех $i < \log_2 r$.

Рассмотрим теперь свободное произведение симплициальных групп $T_* := E_* * E_*$, имеющее следующие компоненты:

$$T_i := (\underbrace{A \times \cdots \times A}_i) * (\underbrace{A \times \cdots \times A}_i), \quad i \geq 1.$$

ЛЕММА 2.3. Симплициальная группа $[T_*, T_*]$ свободна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для абелевых групп B, C коммутаторная подгруппа $[G, G]$ свободного произведения $G = B * C$ свободна с базисом, заданным коммутаторами³ $[b, c]$, $1 \neq b \in B$, $1 \neq c \in C$ (см., например, [24]). Рассматривая такие коммутаторы как базисные элементы в $[T_*, T_*]$, мы сразу же получаем из определения T_* , что эти базисные элементы переходят в другие базисные элементы при гомоморфизмах вырождения.

Теперь теорема 2.2 и лемма 2.3 влекут то, что естественное отображение симплициальных групп

$$[T_*, T_*] \rightarrow [T_*, T_*]/\gamma_{2^{n+1}}([T_*, T_*])$$

индуцирует изоморфизм гомотопических групп

$$\pi_i([T_*, T_*]) \simeq \pi_i([T_*, T_*]/\gamma_{2^{n+1}}([T_*, T_*])), \quad i < n.$$

Короткая точная последовательность симплициальных групп

$$1 \rightarrow [T_*, T_*] \rightarrow T_* \rightarrow T_*/[T_*, T_*] \rightarrow 1$$

влечет длинную точную последовательность гомотопических групп. Гомотопическая эквивалентность

$$|T_*/[T_*, T_*]| \simeq K(A, 1) \times K(A, 1)$$

влечет то, что для $i \geq 3$ имеет место изоморфизм

$$\pi_i([T_*, T_*]) \simeq \pi_i(T_*).$$

Теперь мы получаем из леммы 2.1 и изоморфизма (2.2), что для всех $2 < i < n$ существуют изоморфизмы гомотопических групп

$$\pi_i(T_*) \simeq \pi_i(T_*/\gamma_{2^{n+1}}([T_*, T_*])) \simeq \pi_{i+1}(\Sigma K(A, 1)). \quad (2.3)$$

³Мы используем стандартное обозначение $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

ЛЕММА 3.1. Пусть A и B – нетривиальные конечные абелевы группы, $G = A * B$. Центр группы $H = G/\gamma_n([G, G])$ тривиален при $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутант $[G, G]$ – свободная группа с базисом $\{[a, b], 1 \neq a \in A, 1 \neq b \in B\}$ (см. [24]). Мы докажем утверждение для $n = 2$; доказательство для остальных n аналогичное.

Пусть $h \in [G, G]$; тогда, рассматривая h по модулю $\gamma_2([G, G])$, мы можем представить h единственным образом:

$$h = \prod_{1 \neq a \in A, 1 \neq b \in B} [a, b]^{m(a,b)}, \quad m(a, b) \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Для $c \in A$ получаем

$$\begin{aligned} h^c &\equiv \prod_{1 \neq a \in A, 1 \neq b \in B} [ca, b]^{m(a,b)} [c, b]^{-m(a,b)} \mod \gamma_2([G, G]), \\ [h, c] &\equiv \prod_{1 \neq a \in A, 1 \neq b \in B} [ca, b]^{m(a,b)} [a, b]^{-m(a,b)} [c, b]^{-m(a,b)} \mod \gamma_2([G, G]). \end{aligned}$$

Предположим, что $1 \neq \alpha \in Z(H)$. Мы можем записать α в виде $\alpha = f d h \cdot \gamma_2([G, G])$, $f \in A$, $d \in B$, $h \in [G, G]$. Допустим, что $d \neq 1$. Записывая α в форме (3.1) и рассматривая $c \in A$, получаем

$$[c, \alpha] \equiv [c, d] \prod_{1 \neq a \in A, 1 \neq b \in B} [ca, b]^{m(a,b)} [a, b]^{-m(a,b)} [c, b]^{-m(a,b)} \mod \gamma_2([G, G]).$$

Поскольку $\alpha \in Z(H)$ и $ca \neq c$ для $a \neq 1$, получаем

$$m(c, d) + \sum_{1 \neq a \in A} m(a, d) = 1. \quad (3.2)$$

Ввиду того, что $c \in A$ произвольно, тождество (3.2) выполнено для всех $c \in A$ (при этом фиксируется $d \in B$). Суммируя (3.2) по всем $c \in A$, получаем

$$(1 + |A|) \sum_{1 \neq a \in A} m(a, d) = |A|,$$

но это невозможно, так как все коэффициенты целые: $m(a, d) \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $d = 1$. Аналогичные аргументы позволяют показать, что $f = 1$, и поэтому $\alpha \in [G, G] \cdot \gamma_2([G, G])$. Теперь мы представим $\alpha = h \cdot \gamma_2([G, G])$ в форме (3.1). Поскольку $\alpha \in Z(H)$, получаем

$$[h, c] \equiv \prod_{1 \neq a \in A, 1 \neq b \in B} [ca, b]^{m(a,b)} [a, b]^{-m(a,b)} [c, b]^{-m(a,b)} \equiv 0 \mod \gamma_2([G, G])$$

для любого $c \in A$. Следовательно, для каждого $b \in B$

$$m(c, b) + \sum_{1 \neq a \in A} m(a, b) = 0. \quad (3.3)$$

Суммируя (3.3) по всем $c \in A$, получаем

$$(1 + |A|) \sum_{1 \neq a \in A} m(a, b) = 0,$$

и, следовательно, $\sum_{1 \neq a \in A} m(a, b) = 0$. Теперь (3.3) влечет $m(c, b) = 0$ для всех $c \in A$, $b \in B$. Поэтому $h \in \gamma_2([G, G])$ и утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Из леммы 3.1 следует, что центры компонент симплициальной группы $T_*/\gamma_{2^{n+1}}([T_*, T_*])$ тривиальны. Из изоморфизма (2.3) согласно [1, утверждение 2.14] вытекает изоморфизм

$$\pi_{n+1}(\Sigma K(A, 1)) \simeq Z(T_*/\gamma_{2^{n+1}}([T_*, T_*])\mathcal{B}_n),$$

где $\mathcal{B}_n$ – граница Мура. Остается показать, что граница Мура задается симметрическим коммутантом

$$\mathcal{B}_n = [R_1, R_2, \dots, R_{n+1}]_S. \quad (3.4)$$

Пусть $F = F(A \setminus \{1\})$ – свободная группа, порожденная всеми нетривиальными элементами ⁴ A . Пусть $\varphi: F \rightarrow A$ – каноническая проекция, а именно φ – гомоморфизм групп (единственный) такой, что $\varphi(a) = a$ для $a \in A \setminus \{1\}$. Тогда φ индуцирует симплициальный эпиморфизм ⁵

$$\tilde{\varphi}: F^F[S^1] \twoheadrightarrow F^A[S^1] \twoheadrightarrow F^A[S^1]^{\text{ab}} = K(A, 1).$$

Напомним, что симплициальная окружность S^1 имеет элементы, заданные следующим образом:

$$S_n^1 = \{*, x_{i+1} = s_{n-1} \cdots s_{i+1} s_i \cdots s_0 \sigma_1 \mid 0 \leq i \leq n-1\},$$

где σ_1 – невырожденный элемент в S_1^1 , и по определению конструкции Карлссона [25] группа $F^F[S^1]_n$ – свободное произведение копий F , пронумерованных элементами из $S_n^1 \setminus \{*\}$. Поэтому

$$F^F[S^1]_n = (F)_{x_1} * \cdots * (F)_{x_n},$$

где $(F)_{x_i}$ – копия F с меткой x_i . Эпиморфизм $\tilde{\varphi}: F^F[S^1]_n \rightarrow K(A, 1)_n$ задается как композиция

$$(F)_{x_1} * \cdots * (F)_{x_n} \twoheadrightarrow (A)_{x_1} * \cdots * (A)_{x_n} \twoheadrightarrow (A)_{x_1} \times \cdots \times (A)_{x_n},$$

поэтому

$$\tilde{\varphi}((a)_{x_i}) = a_i$$

для $a \in A \setminus \{0\}$ при $1 \leq i \leq n$. Рассмотрим эпиморфизм

$$\tilde{\varphi} * \tilde{\varphi}: F^F[S^1] * F^F[S^1] \twoheadrightarrow K(A, 1) * K(A, 1).$$

⁴Здесь мы используем мультипликативную запись для абелевых групп.

⁵Описание конструкции Карлссона $F^G[S^1]$ дано в [1], [25].

Заметим, что $F^F[S^1] * F^F[S^1] = F^{F*F}[S^1]$. Согласно обозначениям групп T_n из введения пусть B – копия группы A и $F * F$ – свободная группа с базисными элементами $a \in A \setminus \{1\}$ и $b \in B \setminus \{1\}$. Эпиморфизм

$$\tilde{\varphi} * \tilde{\varphi}: F^{F*F}[S^1]_n \rightarrow K(A, 1)_n * K(A, 1)_n = T_n$$

задается для $1 \leq i \leq n$ следующим образом:

$$(\tilde{\varphi} * \tilde{\varphi})((a)_{x_i}) = a \in A_i, \quad (\tilde{\varphi} * \tilde{\varphi})((b)_{x_i}) = b \in B_i.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \langle (a)_{x_1}, (b)_{x_1} \mid a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\} \rangle^{F^{F*F}[S^1]_n}, \\ \tilde{R}_i &= \langle (a)_{x_i} (a)_{x_{i-1}}^{-1}, (b)_{x_i} (b)_{x_{i-1}}^{-1} \mid a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\} \rangle^{F^{F*F}[S^1]_n}, \quad 1 < i \leq n, \\ \tilde{R}_{n+1} &= \langle (a)_{x_n}, (b)_{x_n} \mid a \in A \setminus \{1\}, b \in B \setminus \{1\} \rangle^{F^{F*F}[S^1]_n}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tilde{\varphi} * \tilde{\varphi}(\tilde{R}_i) = R_i$$

для $1 \leq i \leq n$ и

$$\tilde{\varphi} * \tilde{\varphi}([\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{n+1}]_S) = [R_1, \dots, R_{n+1}]_S. \quad (3.5)$$

Пусть H_j – последовательность подгрупп в G для $1 \leq j \leq k$. Напомним, что *толстый коммутант* $[[H_1, \dots, H_k]]$ порождается в G всеми коммутаторами $\beta^t(h_{i_1}^{(1)}, \dots, h_{i_t}^{(t)})$, где:

- 1) $1 \leq i_s \leq k$;
- 2) все целые числа из $\{1, 2, \dots, k\}$ встречаются как минимум один раз в целых числах i_s ;
- 3) $h_j^{(s)} \in H_j$;
- 4) β^t пробегает множество всех конфигураций скобок веса t для каждого $t \geq k$.

Из [1, доказательство теоремы 1.8] следует, что граница Мура представима в виде

$$\mathcal{B}_n F^{F*F}[S^1] = [[\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{n+1}]].$$

Следуя [5, теорема 1.1], заключаем, что

$$[[\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{n+1}]] = [\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{n+1}]_S.$$

Далее,

$$\mathcal{B}_n F^{F*F}[S^1] = [\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_{n+1}]_S. \quad (3.6)$$

Согласно [26, лемма 5, 3.8] любой симплицальный эпиморфизм индуцирует эпиморфизм цепей Мура, и поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(K(A, 1) * K(A, 1)) &= d_0 N_{n+1}(K(A, 1) * K(A, 1)) = d_0(\tilde{\varphi} * \tilde{\varphi}(N_{n+1}(F^{F*F}[S^1]))) \\ &= \tilde{\varphi} * \tilde{\varphi}(d_0 N_{n+1}(F^{F*F}[S^1])) = \tilde{\varphi} * \tilde{\varphi}(\mathcal{B}_n F^{F*F}[S^1]). \end{aligned}$$

Теперь соотношение (3.4) следует из (3.5) и (3.6). Это заканчивает доказательство. Отметим, что для пары конечных абелевых групп A, B факторгруппа $A * B / \gamma_n([A * B, A * B])$ полициклическа, т.е. является разрешимой группой, любая подгруппа которой конечно порождена. В частности, группы $\mathcal{J}_n(A) = T_n / \gamma_{2^{n+1}}([T_n, T_n])\mathcal{B}_n$ конечно представимы для всех $n \geq 2$.

§ 4. Гомотопические группы S^2

Рассматривая симплициальную группу $E_* * E_*$ из § 2, для $A = \mathbb{Z}$ получаем гомотопическую эквивалентность

$$|E_* * E_*| \simeq \Omega(K(\mathbb{Z}, 2) \vee K(\mathbb{Z}, 2)).$$

Поскольку границы Мура симплициальной группы $E_* * E_*$ могут быть описаны комбинаторно, используя симметрические коммутанты, мы получаем следующее комбинаторное описание гомотопических групп S^2 , альтернативное описанию, приведенному в [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $n \geq 3$, $T_n := (\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_n) * (\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_n)$. Существует изоморфизм

$$\pi_{n+1}(S^2) \simeq Z(T_n / [R_1, \dots, R_{n+1}]_S),$$

где подгруппы R_i , $i = 1, \dots, n+1$, определены, как в (1.3)–(1.5).

Заметим, что группы $T_n / [R_1, \dots, R_{n+1}]_S$ не являются, вообще говоря, конечно представленными, как и группы из [1], центр которых изоморфен $\pi_{n+1}(S^2)$. В [4] приведена конструкция конечно представленной группы, центр которой изоморфен $\pi_n(S^2) \times \mathbb{Z}$. Однако в работе [4] допущены ошибки. В этом параграфе мы дадим краткое описание основного результата из [4] и исправим ошибки.

Для $1 \leq i \leq n$ пусть $d_i: P_n \rightarrow P_{n-1}$ – гомоморфизм групп, получаемый посредством удаления i -й компоненты косы на n нитях. Существует корректно определенная дополнительная операция: гомоморфизм групп $d_0: P_n \rightarrow P_{n-1}$, определяемый формулой

$$d_0 A_{i,j} = A_{i-1,j-1}$$

для $1 \leq i < j \leq n$, где коса $A_{0,j} \in P_{n-1}$ есть

$$\begin{aligned} A_{0,j} &= (A_{j,j+1} \cdots A_{j,n-1})^{-1} (A_{1,j} \cdots A_{j-1,j})^{-1} \\ &= (\sigma_j \cdots \sigma_{n-3} \sigma_{n-2}^2 \sigma_{n-3} \cdots \sigma_j)^{-1} (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \cdots \sigma_{j-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда последовательность групп $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n \geq 0}$ образует Δ -группу с таким свойством (см. [4, предложение 2.5]), что гомотопическая группа Мура Δ -группы $\mathbb{P}$ задается формулой

$$\pi_n(\mathbb{P}) \cong \pi_n(S^2). \quad (4.1)$$

Из определения гомотопических групп Мура Δ -групп следует, что цепи Мура задаются следующим образом:

$$N_n \mathbb{P} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d_i: P_n \rightarrow P_{n-1}) = \text{Brun}_n, \quad (4.2)$$

где Brun_n – группа брунновских кос на n нитях. Пусть

$$\text{Bd}_n = d_0(\text{Brun}_{n+1}) = \mathcal{B}_n \mathbb{P}$$

– границы Мура для $\mathbb{P}$, которые в [4] называются *граничными брунновскими косами* на n нитях. Основной результат работы [4] следующий.

ТЕОРЕМА 4.2 [4, теорема 1.1, (2)]. *Группа Bd_n – нормальная подгруппа в группе кос Артина B_n . Для $n \geq 4$ существуют изоморфизмы групп*

$$Z(P_n/\text{Bd}_n) \cong \pi_n(S^2) \times \mathbb{Z}, \quad Z(B_n/\text{Bd}_n) \cong \{\alpha \in \pi_n(S^2) \mid 2\alpha = 0\} \times \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}$ возникает из $Z(P_n) = Z(B_n) = \mathbb{Z}$.

Основные результаты работы [4, теоремы 1, 3] верны. Также верно, что группы P_n/Bd_n и B_n/Bd_n конечно представимы. Основная ошибка в [4] состоит в том, что лемма 3.6 в ней не верна. Как следствие этой неверной леммы, теорема 3.7, лемма 3.11, следствия 3.12–3.14, предложение 3.15, а также утверждения из § 2 в [4, с. 523] также неверны. Во введении к основным результатам в [4] неверно представлены множества нормальных порождающих для Brun_n [4, с. 522, строка 3] и для Bd_n [4, с. 523, строка 14]. Здесь мы исправим упомянутые ошибки, описав конечные множества нормальных порождающих для Brun_n и Bd_n . Это подтвердит, что группы P_n/Bd_n и B_n/Bd_n конечно представлены.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть Brun_n – группа брунновских кос на n нитях, а Bd_n – группа граничных крашенных кос на n нитях. Тогда:*

1) *группа Brun_n является нормальным замыканием элементов в P_n*

$$[\dots [[A_{1,n}, A_{\sigma(2),j_2}], A_{\sigma(3),j_3}], \dots, A_{\sigma(n-1),j_{n-1}}]$$

для $\sigma \in \Sigma_{n-2}$, действующих на $\{2, 3, \dots, n-1\}$; здесь $1 \leq j_2, \dots, j_{n-1} \leq n$, $j_s \neq \sigma(s)$ при $2 \leq s \leq n-1$ и $A_{j,i} = A_{i,j}$, если $i > j$;

2) *группа Bd_n является нормальным замыканием элементов в P_n*

$$[\dots [[A_{0,n}, A_{\sigma(1),j_1}], A_{\sigma(2),j_2}], \dots, A_{\sigma(n-1),j_{n-1}}]$$

для $\sigma \in \Sigma_{n-1}$ и $1 \leq j_1, \dots, j_{n-1} \leq n$, $j_s \neq \sigma(s)$ при $2 \leq s \leq n-1$, где $A_{j,i} = A_{i,j}$, если $i > j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_{i,j}$ – нормальное замыкание элемента $A_{i,j}$ в P_n для $1 \leq i < j \leq n$. Из [11, теорема 1.1] следует, что

$$\text{Brun}_n = \prod_{\sigma \in \Sigma_{n-1}} [\dots [R_{\sigma(1),n}, R_{\sigma(2),n}], \dots, R_{\sigma(n-1),n}].$$

Согласно [5, теорема 1.2] получаем

$$\prod_{\sigma \in \Sigma_{n-1}} [\dots [R_{\sigma(1),n}, R_{\sigma(2),n}], \dots, R_{\sigma(n-1),n}] \\ = \prod_{\sigma \in \Sigma_{n-2}} [\dots [R_{1,n}, R_{\sigma(2),n}], \dots, R_{\sigma(n-1),n}].$$

Поэтому

$$\text{Brun}_n = \prod_{\sigma \in \Sigma_{n-2}} [\dots [R_{1,n}, R_{\sigma(2),n}], \dots, R_{\sigma(n-1),n}]. \quad (4.3)$$

Для каждого $1 \leq i \leq n$ пусть G_i – подгруппа в P_n , порожденная $A_{i,j}$ для $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, где $A_{i,j} = A_{j,i}$, если $i > j$. Напомним, что $P_n = \pi_1(F(\mathbb{C}, n))$, где

$$F(\mathbb{C}, n) = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \neq z_j, i \neq j\} \quad (4.4)$$

– упорядоченное конфигурационное пространство. В силу [11, предложение 3.2] получаем, что операция аннулирования i -й нити $d_i: P_n \rightarrow P_{n-1}$ индуцирована проекцией

$$\pi_i: F(\mathbb{R}^2, n) \longrightarrow F(\mathbb{R}^2, n-1), \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n).$$

Пусть $(p_1, \dots, p_n)$ – отмеченная точка в пространстве $F(\mathbb{C}, n)$. Именно, пусть $p_1, \dots, p_n$ – различные точки на плоскости $\mathbb{R}^2$. По классической теореме Фаделла–Нювирта [27] координатная проекция π_i является расслоением со слоем $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n\}$. Рассматривая фундаментальные группы расслоения (4.4), получаем

$$\text{Ker}(d_i: P_n \rightarrow P_{n-1}) = G_i = F_{n-1}.$$

Более того, для $1 \leq i < j \leq n$

$$G_i \cap G_j = \text{Ker}(d_i: P_n \rightarrow P_{n-1}) \cap \text{Ker}(d_j: P_n \rightarrow P_{n-1}) = R_{i,j},$$

так как ограничение d_i на G_j задается проекцией

$$F(A_{1,j}, \dots, A_{j-1,j}, A_{j,j+1}, \dots, A_{j,n}) \longrightarrow F(A_{1,j-1}, \dots, A_{j-1,n-1}) \leq P_{n-1},$$

где $d_i A_{i,j} = 1$, $d_i A_{s,j} = A_{s,j-1}$ для $s < i$. Далее, $d_i A_{s,j} = A_{s-1,j-1}$ для $i < s < j$, и $d_i A_{j,s} = A_{j-1,s-1}$ для $s > j$. Рассмотрим факторы в произведении (4.3). Для каждого $\sigma \in \Sigma_{n-2}$ имеем

$$[\dots [R_{1,n}, R_{\sigma(2),n}], \dots, R_{\sigma(n-1),n}] \leq [\dots [R_{1,n}, G_{\sigma(2)}], \dots, G_{\sigma(n-1)}].$$

Заметим, что

$$[\dots [R_{1,n}, G_{\sigma(2)}], \dots, G_{\sigma(n-1)}] \leq \text{Brun}_n.$$

Мы можем построить конечное множество нормальных порождающих в P_n для подгруппы $[\dots [R_{1,n}, G_{\sigma(2)}], \dots, G_{\sigma(n-1)}]$, основываясь на следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4 [11, доказательство леммы 5.2]. Пусть G – группа, A и B – нормальные подгруппы в G . Если $\{a_i \mid i \in I\}$ – множество нормальных порождающих для A в G и $\{b_j \mid j \in J\}$ – множество порождающих для B , то $\{[a_i, b_j] \mid i \in I, j \in J\}$ является множеством нормальных порождающих для коммутанта $[A, B]$ в G .

Конструкция множества нормальных порождающих для $[\dots [R_{1,n}, G_{\sigma(2)}], \dots, G_{\sigma(n-1)}]$ может быть представлена следующим образом. Отметим, что $R_{1,n}$ имеет нормальный порождающий $A_{1,n}$, а $G_{\sigma(2)}$ порождается $A_{\sigma(2),j_2}$ для $1 \leq j_2 \leq n$, $j_2 \neq \sigma(2)$. Из утверждения 4.4 следует, что множество нормальных порождающих $[R_{1,n}, G_{\sigma(2)}]$ может быть задано элементами

$$[A_{1,n}, A_{\sigma(2),j_2}]$$

для $1 \leq j_2 \leq n$, $j_2 \neq \sigma(2)$. Повторяя эту процедуру, получаем множество нормальных порождающих для $[\dots [R_{1,n}, G_{\sigma(2)}], \dots, G_{\sigma(n-1)}]$, заданных элементами

$$[\dots [A_{1,n}, A_{\sigma(2),j_2}], A_{\sigma(3),j_3}], \dots, A_{\sigma(n-1),j_{n-1}}]$$

при $1 \leq j_s \leq n$, $j_s \neq \sigma(s)$. Это заканчивает доказательство утверждения 1).

По определению имеем $\text{Bd}_n = d_0(\text{Brun}_{n+1})$. Поскольку

$$\begin{aligned} d_0([\dots [A_{1,n+1}, A_{\sigma(1)+1,j_1+1}], \dots, A_{\sigma(n-1)+1,j_{n-1}+1}]) \\ = [\dots [A_{0,n}, A_{\sigma(1),j_1}], \dots, A_{\sigma(n-1),j_{n-1}}], \end{aligned}$$

где

$$[\dots [A_{1,n+1}, A_{\sigma(1)+1,j_1+1}], \dots, A_{\sigma(n-1)+1,j_{n-1}+1}] \in \text{Brun}_{n+1},$$

элементы, приведенные в утверждении 2), лежат в Bd_n . Используя теперь теорему 4.3, получаем

$$\begin{aligned} \text{Bd}_n &= \prod_{\sigma \in \Sigma_{n-1}} [\dots [d_0(R_{1,n+1}), d_0(R_{\sigma(2),n+1})], \dots, d_0(R_{\sigma(n),n+1})] \\ &= \prod_{\sigma \in \Sigma_{n-1}} [\dots [R_{0,n}, R_{\sigma(2)-1,n}], \dots, R_{\sigma(n)-1,n}], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $R_{0,j}$ – нормальное замыкание $A_{0,j}$ в P_n . Для любого $\sigma \in \Sigma_{n-1}$, действующего на $\{2, \dots, n\}$, получаем

$$[\dots [R_{0,n}, R_{\sigma(2)-1,n}], \dots, R_{\sigma(n)-1,n}] \leq [\dots [R_{0,n}, G_{\sigma(2)-1}], \dots, G_{\sigma(n)-1}],$$

где $1 \leq \sigma(t) - 1 \leq n - 1$ для $2 \leq t \leq n$. Утверждение 4.4 влечет, что множество нормальных порождающих для $[\dots [R_{0,n}, G_{\sigma(2)-1}], \dots, G_{\sigma(n)-1}]$ задано элементами

$$[\dots [A_{0,n}, A_{\sigma(2)-1,j_2}], A_{\sigma(3)-1,j_3}], \dots, A_{\sigma(n)-1,j_n}]$$

при $1 \leq j_2, j_3, \dots, j_n \leq n$ и $j_s \neq \sigma(s) - 1$ для $2 \leq s \leq n$. Получаем утверждение 2). Теорема доказана.

Список литературы

1. J. Wu, "Combinatorial descriptions of homotopy groups of certain spaces", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **130**:3 (2001), 489–513.
2. G. Ellis, R. Mikhailov, "A colimit of classifying spaces", *Adv. Math.*, **223**:6 (2010), 2097–2113.
3. R. Mikhailov, I. B. S. Passi, J. Wu, "Symmetric ideals in group rings and simplicial homotopy", *J. Pure Appl. Algebra*, **215**:5 (2011), 1085–1092.
4. J. Y. Li, J. Wu, "Artin braid groups and homotopy groups", *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **99**:3 (2009), 521–556.
5. J. Y. Li, J. Wu, "On symmetric commutator subgroups, braids, links and homotopy groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363**:7 (2011), 3829–3852.
6. R. Mikhailov, J. Wu, "A combinatorial description of homotopy groups of spheres", *Geom. Topol.* (to appear); arXiv:1108.3055.
7. D. M. Kan, "A combinatorial definition of homotopy groups", *Ann. of Math.* (2), **67**:2 (1958), 282–312.
8. D. M. Kan, "On homotopy theory and c.s.s. groups", *Ann. of Math.* (2), **68**:1 (1958), 38–53.
9. A. K. Bousfield, E. B. Curtis, D. M. Kan, D. G. Quillen, D. L. Rector, J. W. Schesinger, "The mod- p lower central series and the Adams spectral sequence", *Topology*, **5** (1966), 331–342.
10. J. Milnor, "On the construction $F[K]$ ", *Algebraic topology. A student's guide*, Cambridge Univ. Press, London, 1972, 119–136.
11. V. G. Bardakov, R. Mikhailov, V. V. Vershinin, J. Wu, "Brunnian braids on surfaces", *Alg. Geom. Top.*, **12**:3 (2012), 1607–1648.
12. J. A. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong, J. Wu, "Configurations, braids, and homotopy groups", *J. Amer. Math. Soc.*, **19**:2 (2006), 265–326.
13. J. A. Berrick, L. Hanbury, J. Wu, "Delta-structures on mapping class groups and braid groups", *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear); http://www.math.nus.edu.sg/~matwujie/BHW_TAMS_12_09_07.pdf.
14. F. R. Cohen, J. Wu, "On braid groups, free groups, and the loop space of the 2-sphere", *Categorical decomposition techniques in algebraic topology* (Isle of Skye, UK, 2001), Progr. Math., **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, 93–105.
15. F. Cohen, J. Wu, "Artin's braid groups, free groups, and the loop space of the 2-sphere", *Q. J. Math.*, **62**:4 (2011), 891–921.
16. F. Lei, F. Li, J. Wu, *On simplicial resolutions of framed links*; http://www.math.nus.edu.sg/~matwujie/framed%20link_TRAN%20120514-Li_20120912.pdf.
17. J. Wu, "A braided simplicial group", *Proc. London Math. Soc.* (3), **84**:3 (2002), 645–662.
18. R. Brown, J.-L. Loday, "Van Kampen theorems for diagrams of spaces", *Topology*, **26**:3 (1987), 311–335.
19. R. Mikhailov, J. Wu, "On homotopy groups of the suspended classifying spaces", *Algebr. Geom. Topol.*, **10**:1 (2010), 565–625.
20. A. Romero, J. Rubio, "Homotopy groups of suspended classifying spaces: an experimental approach", *Math. Comp.*, 2012 (to appear).
21. J. H. C. Whitehead, "On the asphericity of regions in a 3-sphere", *Fund. Math.*, **32** (1939), 149–166.
22. D. M. Kan, W. P. Thurston, "Every connected space has the homology of a $K(\pi, 1)$ ", *Topology*, **15** (1976), 253–258.
23. E. B. Curtis, "Some relations between homotopy and homology", *Ann. of Math.* (2), **82**:3 (1965), 386–413.

24. W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*, Interscience Publ., New York–London–Sydney, 1966.
25. G. Carlsson, “A simplicial group construction for balanced products”, *Topology*, **23** (1984), 85–89.
26. D. G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lect. Notes in Math., **43**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
27. E. Fadell, L. Neuwirth, “Configuration spaces”, *Math. Scand.*, **10** (1962), 111–118.

Дж. Ву (J. Wu)

Department of Mathematics, National University
of Singapore

E-mail: matwuj@nus.edu.sg

Поступило в редакцию

21.03.2012

23.07.2012

Р. В. Михайлов (R. V. Mikhailov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,

Санкт-Петербургский государственный университет;
Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA

E-mail: romanvm@mi.ras.ru