Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Эминян, Проблема Гольдбаха в простых числах с двоичными разложениями специального вида, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 215–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:13:57

УДК 511

К. М. Эминян

Проблема Гольдбаха в простых числах с двоичными разложениями специального вида

Получена асимптотическая формула для числа представлений нечетного числа N суммой трех простых чисел из множества $\mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел, двоичные разложения которых имеют четное число 1.

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: тернарная проблема Гольдбаха, проблема Гельфонда, большое решето, тригонометрические суммы.

§ 1. Введение

Пусть $n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \dots + \varepsilon_k 2^k$ – представление натурального числа n в двоичной системе счисления, $\varepsilon_j = 0, 1$. Пусть

$$\mathbb{N}_0 = \left\{ n: n \in \mathbb{N}; \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 0 \pmod{2} \right\}, \quad \mathbb{N}_1 = \left\{ n: n \in \mathbb{N}; \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 1 \pmod{2} \right\},$$

и пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{если } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

А. О. Гельфонд в 1968 г. доказал [1], что числа классов $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ регулярно распределены в арифметических прогрессиях.

В 1991 г. автор получил [2] асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{n \leq x, n \in \mathbb{N}_0} \tau(n)$$

и тем самым решил проблему делителей Дирихле в числах класса $\mathbb{N}_0$.

К. Маудюит и Дж. Риват в 2010 г. доказали [3], в частности, что плотности множеств простых чисел из классов $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ совпадают. Другое доказательство этого факта дал Б. Грин [4]. Результаты, полученные в указанных работах, основаны на оценках специального вида тригонометрических сумм, которые как по своей силе, так и по доказательствам представляют собой варианты принадлежащей автору оценки интеграла от модуля тригонометрической суммы специального вида, полученной в [2, лемма 4].

В настоящей работе решается тернарная проблема Гольдбаха в простых числах из класса $\mathbb{N}_0$.

Основные результаты содержатся в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1. Пусть α – произвольное вещественное число, $\Lambda(n)$ – функция Мангольда. Тогда существует абсолютная постоянная $\varkappa > 0$ такая, что

$$S = \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n} = O(X^{1-\varkappa}).$$

Постоянная в знаке O абсолютная.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $J(N)$ – число представлений нечетного N суммой трех простых чисел, и пусть $J_0(N)$ – число представлений нечетного N суммой трех простых чисел из класса $\mathbb{N}_0$. Тогда справедливо равенство

$$J_0(N) = \frac{1}{8} J(N) (1 + O(N^{-\varkappa} \ln N)),$$

где $\varkappa > 0$ – константа из теоремы 1.

§ 2. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $q \geq 1$, $|\theta| \leq 1$. Тогда при любом $\beta \in \mathbb{R}$ и $U > 0$, $P \geq 1$ имеем

$$\sum_{x=1}^P \min(U, \|\alpha x + \beta\|^{-1}) \leq 6 \left(\frac{P}{q} + 1 \right) (U + q \ln q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [5, гл. 4].

ЛЕММА 2 (А. О. Гельфонд). Пусть $Q \in \mathbb{N}$. Справедливо неравенство

$$\left| \prod_{r=0}^{2Q-1} (1 - e^{2\pi i \alpha 2^r}) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} 2^{2Q\lambda},$$

где $\lambda = \frac{\ln 3}{\ln 4} = 0.7924812 \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1].

СЛЕДСТВИЕ 1. При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \right| = O(X^\lambda \ln X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим натуральное число Q из неравенств

$$2^{2(Q-1)} < X + 1 \leq 2^{2Q}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \right| &= \left| \sum_{n < 2^{2Q}} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \sum_{n_1 \leq X} \frac{1}{2^{2Q}} \sum_{l=1}^{2^{2Q}} e^{2\pi i (n-n_1) \cdot 2^{-2Q} l} \right| \\ &\leq 2^{-2Q} \sum_{l=1}^{2^{2Q}} \left| \sum_{n < 2^{2Q}} \varepsilon(n) e^{2\pi i (\alpha + 2^{-2Q} l) n} \right| \left| \sum_{n_1 \leq X} e^{-2\pi i n_1 2^{-2Q} l} \right|. \end{aligned}$$

Далее, из тождества

$$\sum_{n < 2^{2Q}} \varepsilon(n) e^{2\pi i(\alpha + 2^{-2Q}l)n} = \prod_{r=0}^{2Q-1} (1 - e^{2\pi i(\alpha + 2^{-2Q}l)2^r})$$

и леммы 2 следует, что

$$\left| \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \right| \ll 2^{-2Q} X^\lambda \sum_{l=1}^{2^{2Q}} \min(X, \|2^{-2Q}l\|^{-1}).$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает утверждение следствия.

ЛЕММА 3 (П. К. Галлахер). Пусть $S(t)$ – комплекснозначная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[t_0, t_k]$ функция, $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k$. Тогда, полагая $\delta = \min_{0 \leq r < k} (t_{r+1} - t_r)$, имеем

$$\sum_{r=1}^k |S(t_r)| \leq \frac{1}{\delta} \int_{t_0}^{t_k} |S(t)| dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} |S'(t)| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [6, гл. 1].

§ 3. Основная лемма и следствия из нее

ЛЕММА 4. Пусть $Q \in \mathbb{N}$, и пусть

$$S_Q(a) = \prod_{r=0}^{2Q-1} (1 - e^{2\pi i a 2^r}).$$

Справедливо неравенство

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha)| d\alpha \leq 2^{Q\theta_0},$$

где $\theta_0 = \log_2 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 0.88577\dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2].

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \right| d\alpha \leq X^{\theta_0/2} \ln X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in \mathbb{N}$, $2^{2(Q-1)} < X + 1 \leq 2^{2Q}$. Тогда

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \leq X} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \right| d\alpha \ll 2^{-2Q} \sum_{l=1}^{2^{2Q}} \min(X, \|2^{-2Q}l\|^{-1}) \int_0^1 |S_Q(\alpha + 2^{-2Q}l)| d\alpha.$$

Поскольку $S_Q(\alpha)$ – периодическая функция от t с периодом 1, имеем

$$\int_0^1 |S_Q(\alpha + 2^{-2Q}l)| d\alpha = \int_0^1 |S_Q(\alpha)| d\alpha.$$

В силу леммы 1 получаем

$$2^{-2Q} \sum_{l=1}^{2^{2Q}} \min(X, \|2^{-2Q}l\|^{-1}) \ll \ln X.$$

Теперь утверждение следствия вытекает из леммы 4.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Справедлива оценка

$$2^{-k} \sum_{r=0}^{2^k-1} \left| \sum_{x=0}^{2^k-1} \varepsilon(x) e^{2\pi i r x 2^{-k}} \right| \ll 2^{\theta_0 k} k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем лемму 3, положив в ней

$$S(t) = \sum_{x=0}^{2^k-1} \varepsilon(x) e^{2\pi i t x}, \quad t_r = \frac{r}{2^k}.$$

Тогда

$$S'(t) = 2\pi i \sum_{x=0}^{2^k-1} x \varepsilon(x) e^{2\pi i t x}.$$

Следовательно,

$$2^{-k} \sum_{r=0}^{2^k-1} \left| \sum_{x=0}^{2^k-1} \varepsilon(x) e^{2\pi i r x 2^{-k}} \right| = 2^{-k} \sum_{r=0}^{2^k-1} |S(t_r)| \leq \int_0^1 |S(t)| dt + 2^{-k} \int_0^1 |S'(t)| dt.$$

Применим к $S'(t)$ преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} 2^{-k} \int_0^1 |S'(t)| dt &\ll 2^{-k} \int_0^1 2^k \left| \sum_{x=0}^{2^k-1} \varepsilon(x) e^{2\pi i x t} \right| dt \\ &+ 2^{-k} \int_0^1 \int_0^{2^k-1} \left(\left| \sum_{x \leq u} \varepsilon(x) e^{2\pi i x t} \right| dt \right) du \ll \int_0^1 \left| \sum_{x \leq u_0} \varepsilon(x) e^{2\pi i x t} \right| dt, \end{aligned}$$

где u_0 – то число из промежутка $[0, 2^k - 1]$, при котором последний интеграл максимален. Теперь утверждение следствия вытекает из следствия 2.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть k и t – целые числа, $0 \leq t \leq k$. Пусть при $m \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\varepsilon}_m(r) = 2^{-m} \sum_{x=0}^{2^m-1} \varepsilon(x) e^{-2\pi i r x 2^{-m}},$$

и пусть a – произвольное число из промежутка $[0, 2^k - 1]$. Тогда

$$\sum_{\substack{r=0 \\ r \equiv a \pmod{2^t}}}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| \ll 2^{(0.5-c)(k-t)} |\widehat{\varepsilon}_t(a)| k,$$

где $c = \frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{2}$, θ_0 – константа из леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r=0 \\ r \equiv a \pmod{2^t}}}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| &= 2^{-k} \sum_{r \pmod{2^{k-t}}} \left| \sum_{x=0}^{2^k-1} \varepsilon(x) e^{2\pi i (a+2^t r) 2^{-k} x} \right| \\ &= 2^{-k} \sum_{r \pmod{2^{k-t}}} \left| \sum_{x=0}^{2^{k-t}-1} \sum_{y=0}^{2^t-1} \varepsilon(x + 2^{k-t} y) e^{2\pi i (a+2^t r) 2^{-k} (x+2^{k-t} y)} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon(x + 2^{k-t}y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r=0 \\ r \equiv a \pmod{2^t}}}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| &= 2^{-(k-t)} \sum_{r \bmod 2^{k-t}} \left| \sum_{x=0}^{2^{k-t}-1} \varepsilon(x) e^{2\pi i \left(\frac{r}{2^{k-t}} + \frac{a}{2^k} \right) x} \right| \left| 2^{-t} \sum_{y=0}^{2^t-1} \varepsilon(y) e^{2\pi i \frac{ay}{2^t}} \right| \\ &= 2^{-(k-t)} \sum_{r \bmod 2^{k-t}} \left| \sum_{x=0}^{2^{k-t}-1} \varepsilon(x) e^{2\pi i \left(\frac{r}{2^{k-t}} + \frac{a}{2^k} \right) x} \right| |\widehat{\varepsilon}_t(a)|. \end{aligned}$$

Сумма в правой части последнего равенства оценивается точно так же, как аналогичная сумма из следствия 3.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Воспользуемся тождеством Вона (см., например, [5, гл. 3, задача 9]), положив в нем $u = X^{0.1}$:

$$S = \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \varepsilon(n) = W_1 - W_2 - W_3 + O(u \ln u),$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{n \leq Xd^{-1}} \varepsilon(dn) e^{2\pi i \alpha d n} \ln n, \\ W_2 &= \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{n \leq u} \Lambda(n) \sum_{dnr \leq X} \varepsilon(dnr) e^{2\pi i \alpha dnr}, \\ W_3 &= \sum_{u < m \leq Xu^{-1}} a_m \sum_{u < n \leq Xm^{-1}} \Lambda(n) \varepsilon(mn) e^{2\pi i \alpha mn}, \\ a_m &= \sum_{d|m, d \leq u} \mu(d). \end{aligned}$$

Суммы W_1 и W_2 оцениваются одинаково. Оценим, например, W_1 .

Зафиксируем $d \leq u$. Применим к внутренней сумме, которую обозначим $S_1(d)$, преобразование Абеля; получим

$$|S_1(d)| \ll \left| \sum_{dn \leq u_0} \varepsilon(dn) e^{2\pi i \alpha d n} \right| \ln X,$$

где u_0 – некоторое число, не превосходящее X .

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{dn \leq u_0} \varepsilon(dn) e^{2\pi i \alpha d n} &= \sum_{m \leq u_0} \varepsilon(m) e^{2\pi i \alpha m} \frac{1}{d} \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i \frac{bm}{d}}, \\ \left| \sum_{dn \leq u_0} \varepsilon(dn) e^{2\pi i \alpha d n} \right| &\leq \frac{1}{d} \sum_{b=0}^{d-1} \left| \sum_{m \leq u_0} \varepsilon(m) e^{2\pi i \left(\alpha + \frac{b}{d} \right) m} \right|. \end{aligned}$$

Сумму по m оценим по следствию 1:

$$\left| \sum_{m \leq u_0} \varepsilon(m) e^{2\pi i \left(\alpha + \frac{b}{d} \right) m} \right| \ll X^\lambda \ln X,$$

где $\lambda = 0.792 \dots$. Таким образом, для любых $d \leq u$ имеем

$$|S_1(d)| \ll X^\lambda \ln X,$$

следовательно,

$$|W_1| \ll u X^\lambda \ln X.$$

Аналогично приходим к оценке

$$|W_2| \ll u^2 X^\lambda \ln X.$$

Параметр u выбран так, что

$$|W_1| \ll X^{1-\kappa_1}, \quad |W_2| \ll X^{1-\kappa_1},$$

где $\kappa_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

Оценим сумму W_3 . Разобьем промежуток суммирования по m на $O(\ln X)$ промежутков вида $(\frac{M}{2}, M]$, где $u < \frac{M}{2} < M \leq \frac{X}{u}$; один из таких промежутков может оказаться неполным. Имеем

$$W_3 = \sum_M W_3(M),$$

где

$$W_3(M) = \sum_{M/2 < m \leq M_1} a_m \sum_{u < n \leq X/m} \Lambda(n) \varepsilon(mn) e^{2\pi i \alpha mn};$$

здесь $\frac{M}{2} < M_1 \leq M$.

Далее,

$$\begin{aligned} W_3(M) &= \sum_{M/2 < m \leq M_1} a_m \sum_{u < n \leq X/M_1} \Lambda(n) \varepsilon(mn) e^{2\pi i \alpha mn} \\ &+ \sum_{M/2 < m \leq M_1} a_m \sum_{X/M_1 < n \leq X/m} \Lambda(n) \varepsilon(mn) e^{2\pi i \alpha mn}. \end{aligned}$$

Разбивая промежуток суммирования по n на $O(\log X)$ промежутков вида $(\frac{N}{2}, N_1]$, где $\frac{N}{2} < N_1 \leq N$, $u < N \leq \frac{X}{M_1}$, приходим к неравенству

$$|W_3| \ll |W_3(M, N)| \ln^2 X,$$

где

$$W_3(M, N) = \sum_{M/2 < m \leq M_1} a_m \sum_{N/2 < n \leq N_1} \Lambda(n) \varepsilon(mn) e^{2\pi i \alpha mn};$$

здесь $u < \frac{M}{2} < M_1 \leq M \leq Xu^{-1}$, $u < \frac{N}{2} < N_1 \leq N \leq Xu^{-1}$; может оказаться, что $N_1 = Xm^{-1}$.

Без ограничения общности считаем, что $M \leq N$.

Пользуясь тем, что $|a_m| \leq \tau(m) \ll m^\varepsilon$, и применяя неравенство Коши, получим

$$|W_3(M, N)|^2 \ll M^{1+\varepsilon} \sum_{M/2 < m \leq M_1} \left| \sum_{N/2 < n \leq N_1} \Lambda(n) \varepsilon(mn) e^{2\pi i \alpha mn} \right|^2.$$

Пусть $H = [X^\rho]$, где $0 < \rho < 10^{-3}$ – малый параметр, который будет выбран позже. Применим неравенство ван дер Корпута (см., например, [4], [5, гл. 1]):

$$\left| \sum_{N/2 < n \leq N_1} \Lambda(n) \varepsilon(mn) e^{2\pi i \alpha mn} \right|^2 \ll \frac{N}{H} \sum_{|h| \leq H} \left(1 - \frac{|h|}{H} \right) \times \\ \times \sum_{\substack{N/2 < n \leq N_1 \\ N/2 < n+h \leq N_1}} \Lambda(n) \Lambda(n+h) \varepsilon(mn) \varepsilon(mn+mh) e^{2\pi i \alpha mn} e^{-2\pi i \alpha m(n+h)}.$$

Вклад $h = 0$ оценивается как $O\left(\frac{N^2}{H}\right)$, поэтому

$$|W_3(M, N)|^2 \ll \frac{X^{1+\varepsilon}}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{N/2 < n \leq N_1} \left| \sum_{M/2 < m \leq M_1} \varepsilon(mn) \varepsilon(mn+mh) e^{-2\pi i \alpha mh} \right| + \frac{X^{2+\varepsilon}}{H}.$$

Зафиксируем $h \in [1, H]$. Теперь достаточно доказать, что

$$W_4(M, N) = \sum_{N/2 < n \leq N} \left| \sum_{M/2 < m \leq M_1} \varepsilon(mn) \varepsilon(mn+mh) e^{-2\pi i \alpha mh} \right| \ll X^{1-\varkappa}.$$

Выберем натуральное число k из неравенств

$$2^{k-1} < MX^{2\rho} \leq 2^k.$$

Введем функцию

$$\varepsilon_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{если сумма первых } k \text{ двоичных цифр } n \text{ четна,} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Докажем, что тогда

$$|W_4(M, N)| \ll \sum_{N/2 < n \leq N} \left| \sum_{M/2 < m \leq M_1} \varepsilon_k(mn) \varepsilon_k(mn+mh) e^{-2\pi i \alpha mh} \right| + X^{1-\rho+\varepsilon}.$$

Разделим mn на 2^k с остатком: $mn = 2^k q + r$, $0 \leq r < 2^k$. Если $r < 2^k - 2MH$, то $mn + mh = 2^k q + r + mh$, $0 < r + mh < 2^k$. Для таких mn имеем

$$\varepsilon(mn) \varepsilon(mn + mh) = \varepsilon(r) \varepsilon(r + mh) = \varepsilon_k(mn) \varepsilon_k(mn + mh).$$

Число пар (m, n) таких, что остаток от деления mn на 2^k лежит между $2^k - 2MH$ и $2^k - 1$, есть $O(2^{-k} X M H X^\varepsilon) = O(X^{1-\rho+\varepsilon})$.

Перейдем к оценке

$$|W_5(M, N)| = \sum_{N/2 < n \leq N} \left| \sum_{M/2 < m \leq M_1} \varepsilon_k(mn) \varepsilon_k(mn + mh) e^{-2\pi i \alpha mh} \right|.$$

Введем для $\varepsilon_k(r)$ дискретное преобразование Фурье

$$\widehat{\varepsilon}_k(r) = 2^{-k} \sum_{l=0}^{2^k-1} \varepsilon_k(l) e^{-2\pi i \frac{rl}{2^k}}.$$

Из этого определения следует, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_k(mn) &= \sum_{r=0}^{2^k-1} \widehat{\varepsilon}_k(r) \exp\left\{\frac{2\pi i r m n}{2^k}\right\}, \\ \varepsilon_k(mn + mh) &= \sum_{s=0}^{2^k-1} \widehat{\varepsilon}_k(s) \exp\left\{\frac{2\pi i s(mn + mh)}{2^k}\right\}.\end{aligned}$$

Суммируя получившиеся линейные суммы по m , получаем неравенство

$$|W_5(M, N)| \leq \sum_{r=0}^{2^k-1} \sum_{s=0}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| |\widehat{\varepsilon}_k(s)| \sum_{N/2 < n \leq N} \min\left(M, \left\|\frac{r+s}{2^k}n + \frac{sh}{2^k} - \alpha h\right\|^{-1}\right).$$

Далее будем считать, что $\rho = \frac{c}{200}$, где $c = \frac{1-\theta_0}{2}$, θ_0 – константа из леммы 4.

Пусть t – целое неотрицательное число такое, что $2^t \parallel (r+s)$, последнее означает, что $2^t \mid (r+s)$, но $2^{t+1} \nmid (r+s)$.

Пусть сначала $0 \leq t \leq k - \frac{2\rho}{c} \log_2 X$. Заметим, что из неравенств $2^k > M \geq X^{1/10}$ следует, что $k > \frac{1}{10} \log_2 X$; отсюда и из равенства $\frac{2\rho}{c} = \frac{1}{100}$ вытекает неравенство $k - \frac{2\rho}{c} \log_2 X \geq \frac{4}{5}k$.

Применим к сумме

$$\sum_{N/2 < n \leq N} \min\left(M, \left\|\frac{r+s}{2^k}n + \frac{sh}{2^k} - \alpha h\right\|^{-1}\right)$$

лемму 1, положив в ней $q = 2^{k-t}$, $\alpha = \frac{r+s}{2^k}$, $\beta = \frac{sh}{2^k} - \alpha h$; получим

$$\sum_{N/2 < n \leq N} \min\left(M, \left\|\frac{r+s}{2^k}n + \frac{sh}{2^k} - \alpha h\right\|^{-1}\right) \ll \left(\frac{N}{2^{k-t}} + 1\right)(M + 2^{k-t}k).$$

Упростим правую часть последнего неравенства. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{N}{2^{k-t}} + 1 &< \frac{NX^{2\rho}}{2^{k-t}} + 1 \leq 2 \frac{NX^{2\rho}}{2^{k-t}}, \\ M + 2^{k-t}k &< MX^{2\rho} + 2^{k-t}k < 2MX^{3\rho},\end{aligned}$$

таким образом,

$$\begin{aligned}\left(\frac{N}{2^{k-t}} + 1\right)(M + 2^{k-t}k) &< 4 \cdot 2^{-(k-t)} M N X^{5\rho} \leq 5 \cdot 2^{-(k-t)} X^{1+5\rho}, \\ \sum_{N/2 < n \leq N} \min\left(M, \left\|\frac{r+s}{2^k}n + \frac{sh}{2^k} - \alpha h\right\|^{-1}\right) &\ll 2^{-(k-t)} X^{1+5\rho}.\end{aligned}$$

Теперь оценим сумму

$$\sum_{\substack{r=0 \\ 2^t \parallel (r+s)}}^{2^k-1} \sum_{s=0}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| |\widehat{\varepsilon}_k(s)| \leq \sum_{a=0}^{2^t-1} \sum_{\substack{r=0 \\ r \equiv a \pmod{2^t}}}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| \sum_{\substack{s=0 \\ s \equiv -a \pmod{2^t}}}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(s)|.$$

Воспользуемся следствием 4:

$$\sum_{r=0}^{2^k-1} \sum_{\substack{s=0 \\ 2^t \parallel (r+s)}}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| |\widehat{\varepsilon}_k(s)| \ll 2^{(1-2c)(k-t)} \ln^2 X \sum_{a=0}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_t(a)|^2 = 2^{(1-2c)(k-t)} \ln^2 X.$$

В рассматриваемом случае получена оценка

$$|W_5(M, N)| \ll 2^{-2c(k-t)} X^{1+6\rho} \ln^2 X.$$

Учитывая, что

$$k-t \geq \frac{4}{5}k, \quad 2^k > M \geq X^{1/10},$$

получаем

$$|W_5(M, N)| \ll X^{1+6\rho-\frac{8}{50}c};$$

наконец, из неравенства $\rho \leq \frac{c}{100}$ имеем $6\rho - \frac{8}{50}c < -\rho$,

$$|W_5(M, N)| \ll X^{1-\rho}.$$

Осталось рассмотреть случай

$$k - \frac{2\rho}{c} \log_2 X < t \leq k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |W_5(M, N)| &\leq \sum_{r=0}^{2^k-1} \sum_{\substack{s=0 \\ 2^t \parallel (r+s)}}^{2^k-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r)| |\widehat{\varepsilon}_k(s)| \sum_{N/2 < n \leq N} \min \left(M, \left\| \frac{r+s}{2^k} n + \frac{sh}{2^k} - \alpha h \right\|^{-1} \right) \\ &= \sum_{N/2 < n \leq N} \sum_{s_2=0}^{2^{k-t}-1} \sum_{r_2=0}^{2^{k-t}-1} \sum_{\substack{s_1=0 \\ r_1+s_1 \equiv 0 \pmod{2^t}}}^{2^t-1} |\widehat{\varepsilon}_k(r_1 + 2^t r_2)| |\widehat{\varepsilon}_k(s_1 + 2^t s_2)| \\ &\quad \times \min \left(M, \left\| \frac{r_1 + s_1 + 2^t(r_2 + s_2)}{2^k} n + \frac{(s_1 + 2^t s_2)h}{2^k} - \alpha h \right\|^{-1} \right). \end{aligned}$$

При $0 \leq s_1, r_1 < 2^t$ из сравнения $r_1 + s_1 \equiv 0 \pmod{2^t}$ следует, что либо $r_1 = s_1 = 0$, либо $r_1 + s_1 = 2^t$. Отсюда и из леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} |W_5(M, N)| &\ll 2^{-2k(1-\lambda)} \sum_{N/2 < n \leq N} \sum_{s_2=0}^{2^{k-t}-1} \sum_{r_2=0}^{2^{k-t}-1} \sum_{s_1=0}^{2^t-1} \min \left(M, \left\| \frac{hs_1}{2^k} + \beta \right\|^{-1} \right) \\ &\quad + 2^{-2k(1-\lambda)} 2^{2(k-t)} X, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta = \frac{1+r_2+s_2}{2^{k-t}} n + \frac{hs_2}{2^{k-t}} - \alpha h$.

Пусть $\frac{hs_1}{2^k} = \frac{h_1 s_1}{2^{k_1}}$, где $\frac{h_1 s_1}{2^{k_1}}$ – несократимая дробь. В силу леммы 1 и неравенств

$$2^{-k_1} \leq 2^{-k} X^\rho, \quad M + 2^{k_1} k_1 \ll M X^{3\rho}$$

имеем

$$\sum_{s_1=0}^{2^t-1} \min \left(M, \left\| \frac{hs_1}{2^k} + \beta \right\|^{-1} \right) \ll M X^{5\rho}. \quad (2)$$

Подставляя неравенство (2) в соотношение (1), получаем

$$|W_5(M, N)| \ll 2^{k-t} 2^{-2k(1-\lambda)} X^{1+5\rho}.$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$2^{k-t} \leq X^{4\rho/c}, \quad \frac{\rho}{c} \leq \frac{1}{200}, \quad c < 0.06, \quad 2^k > M \geq X^{0.1}.$$

Получим

$$|W_5(M, N)| \ll X^{1-0.01}.$$

Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Пусть

$$S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}, \quad S_0(\alpha) = \sum_{p \leq N} \varepsilon(p) e^{2\pi i \alpha p}.$$

Тогда

$$J_0(N) = \frac{1}{8} \int_0^1 (S(\alpha) + S_0(\alpha))^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Раскрывая скобки и пользуясь теоремой 1 и неравенством Коши, получаем

$$J_0(N) = \frac{1}{8} \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha + O(\pi(N) N^{1-\kappa}).$$

Поскольку

$$J(N) = \int_0^1 S^3(\alpha) e^{-2\pi i N \alpha} d\alpha, \quad J(N) \gg N^2 (\ln N)^{-3}$$

(при достаточно больших нечетных N), теорема 2 доказана.

Список литературы

1. A. O. Gel'fond, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données", *Acta Arith.*, **13** (1968), 259–265.
2. К. М. Эминян, "О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:3 (1991), 680–686; англ. пер.: К. М. Ėminyan, "On the Dirichlet divisor problem in some sequences of natural numbers", *Math. USSR-Izv.*, **38**:3 (1992), 669–675.
3. C. Mauduit, J. Rivat, "Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers", *Ann. of Math. (2)*, **171**:3 (2010), 1591–1646.
4. B. Green, *Three topics in additive prime number theory*, arXiv: 0710.0823.
5. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983; англ. пер.: A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
6. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: H. L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Lecture Notes in Math., **227**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

КАРАПЕТ МКРТИЧЕВИЧ ЭМИНЯН

(КАРАПЕТ М. ЕМИНЯН)

Финансовый университет при Правительстве РФ,

г. Москва;

Московский государственный технический

университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: eminyan@mail.ru

Поступило в редакцию

10.04.2012