Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Аппроксимация типа Мюнца–Саса
в прямых произведениях пространств, *Изв. РАН. Сер.
матем.*, 2006, том 70, выпуск 5, 179–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/im799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:46:56

УДК 517.5

А. М. Седлецкий

Аппроксимация типа Мюнца–Саса в прямых произведениях пространств

Рассмотрен вопрос о полноте системы экспонент $\exp\{-\lambda_n t\}$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, в прямых произведениях $E = E_1 \times E_2$ пространств $E_1 = E_1(0, 1)$ и $E_2 = E_2(1, \infty)$ функций, определенных соответственно на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$. Описаны достаточно широкие классы пространств E_1 и E_2 таких, что известное условие Саса необходимо для полноты упомянутой системы в E и достаточно для такой полноты.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о полноте системы экспонент

$$(e^{-\lambda_n t})_{n=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re} \lambda_n > 0, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (1)$$

в различных банаховых пространствах $E = E(\mathbb{R}_+)$ функций, определенных на полупрямой $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Если $E = L^p = L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, или $E = C_0 = C_0[0, \infty)$ (пространство с $\sup$ -нормой, состоящее из непрерывных на $[0, \infty)$ функций с условием $f(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$), то задача эквивалентна задаче о полноте систем степеней

$$(x^{\mu_n})_{n=1}^{\infty}, \quad \mu_n = \lambda_n - \frac{1}{p}, \quad (2)$$

в пространствах $L^p(0, 1)$ и $C_0[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$ (в (2) $p = \infty$ в случае C_0). Эту задачу первыми (если не учитывать вейерштрассовский случай $\mu_n = n$) рассмотрели Ч. Мюнц [1] и О. Сас [2] для пространств $L^2(0, 1)$ и $C_0[0, 1]$ (см. также [3], [4]). В дальнейшем важную роль играет (переформулированная для системы (1))

ТЕОРЕМА (САСА [2]). Полнота системы (1) в пространстве L^2 равносильна условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = +\infty. \quad (3)$$

Для полноты системы (1) в L^p условие Саса (3) необходимо при $1 \leq p \leq 2$ и достаточно при $p \geq 2$ и в случае пространства C_0 (см. [5]). Оно не является достаточным условием полноты при $1 \leq p < 2$ (см. [6], [7]) и не является необходимым в случае C_0 (см. [8]); до сих пор неизвестно, является ли оно необходимым для пространств L^p , $p > 2$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-01-00326) и программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-4564.2006.1).

В работе [9] было введено условие

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log \operatorname{dist}(iy, \Lambda)}{1 + y^2} dy > -\infty \quad (4)$$

“не слишком тесного” прилегания точек множества Λ к мнимой оси. При его выполнении условие (3) необходимо для полноты системы (1) в C_0 и L^p , $p > 2$ (см. [9]), и достаточно для полноты в L^p , $1 \leq p < 2$ (см. [10]). Таким образом, в классе последовательностей Λ со свойством (4) условие (3) необходимо и достаточно для полноты системы (1) в L^p , $1 \leq p < \infty$, и в C_0 .

Начиная с работы [11] в качестве E стали рассматриваться весовые пространства $L_{\alpha}^p(\mathbb{R}_+)$ с нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \|f(t)t^{\alpha/p}\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \alpha > -1.$$

Оказалось (см. [12]), что для полноты системы (1) в $L_{\alpha}^p(\mathbb{R}_+)$ условие (3):

- достаточно при $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha \leq \min(0, p-2)$;
- необходимо при $1 \leq p < \infty$, $\alpha \geq \max(0, p-2)$;
- не является достаточным при $1 \leq p < \infty$, $\alpha > \min(0, p/2-1)$;
- не является необходимым при $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \min(0, p/2-1)$.

Неполнота системы (1) в $L_{\alpha}^p(\mathbb{R}_+)$ равносильна существованию нетривиального линейного непрерывного функционала на $L_{\alpha}^p(\mathbb{R}_+)$, аннулирующего эту систему, т.е. существованию нетривиальной аналитической в полуплоскости $x = \operatorname{Re} z > 0$ функции вида

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in L_{\alpha'}^{p'}(\mathbb{R}_+), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha'}{p'} = 0, \quad (5)$$

обращающейся в нуль в точках последовательности Λ . Это означает, что вопрос о распределении нулей функций (5) является аналитическим эквивалентом задачи о полноте системы (1) в $L_{\alpha}^p(\mathbb{R}_+)$. Следующее простое наблюдение привело к новой постановке задачи. Из сказанного выше следует, что наименее исследованными являются случаи тесного прилегания точек последовательности Λ к мнимой оси. Однако поведение функции $\Phi(z)$ в “правой окрестности” $0 < x < \delta$ мнимой оси в существенном определяется поведением функции $\varphi(t)$ при достаточно больших t . Действительно, в сумме

$$\Phi(z) = \int_0^1 + \int_1^{\infty} = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$$

слагаемое $\Phi_1(z)$ есть целая функция, ограниченная в каждой вертикальной полосе, в то время как для слагаемого $\Phi_2(z)$ в наиболее характерных случаях (когда $\varphi(t)$ не убывает слишком быстро) мнимая ось служит границей области аналитичности. Здесь мы можем вспомнить и абелеву теорему [13]: если $\varphi(t) \sim t^{\alpha}$, $t \rightarrow \infty$, $\alpha > -1$, то $\Phi(x) \sim \Gamma(1+\alpha)/x^{1+\alpha}$, $x \rightarrow +0$. Таким образом, вклады компонент $\varphi_1 = \varphi|_{(0,1)}$ и $\varphi_2 = \varphi|_{(1,\infty)}$ в поведение функции $\Phi(z)$ при подходе к мнимой оси неравнозначны. Поэтому естественно ожидать, что мы добьемся большего продвижения, если рассмотрим ситуацию, когда функционалы φ_1 и φ_2 (мы отождествляем функционал с представляющей его функцией) уже не связаны друг с другом (например, единообразной нормой исходного

пространства $L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$). В итоге мы приходим к задаче описания полных систем (1) в прямых произведениях $E_1 \times E_2$ банаховых пространств $E_1 = E_1(0, 1)$ и $E_2 = E_2(1, \infty)$ функций, определенных соответственно на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$. При этом вместо 1 может быть взята произвольная точка $a \in \mathbb{R}_+$. В такой постановке задача ранее не рассматривалась, за исключением ее предварительной формы, встречавшейся в [14], где предложен класс весов $\omega(t)$, $t > 1$, таких, что при довольно общих предположениях относительно E_1 условие (3) не является необходимым для полноты системы (1) в $E_1(0, 1) \times L^p((1, \infty), \omega(t) dt)$, $p > 1$.

В настоящей работе найдены достаточно широкие классы пространств E_1 и E_2 таких, что условие (3) является:

- 1) необходимым условием полноты системы (1) в $E_1 \times E_2$;
- 2) достаточным условием полноты.

Также обсуждается роль двух других условий, налагаемых на множество Λ , одно из которых слабее, а другое сильнее условия (3), и роль условия (3) при ограничении (4). В частности, получено расширение теоремы Саса, т. е. предъявлены классы пространств E_1 и E_2 такие, что условие (3) равносильно полноте системы (1) в $E_1 \times E_2$.

§ 2. Функциональные пространства

Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p < \infty$. Через $W^m_p(a, b)$ обозначаем соболевское пространство функций, определенных на (a, b) , т. е. пространство функций f таких, что:

- 1) функции $f, f', \dots, f^{(m-1)}$ абсолютно непрерывны на $[a, b]$, если $b < \infty$, и на $[a, A]$ при всех $A \in (a, \infty)$, если $b = \infty$;
- 2) $f^{(m)} \in L^p(a, b)$.

Норма в $W^m_p(a, b)$ задается следующим образом:

$$\|f\| = \sum_{j=0}^m \|f^{(j)}\|_{L^p(a, b)}. \quad (6)$$

Если $b < \infty$, то через $C^m[a, b]$ обозначаем пространство функций f таких, что $f, f', \dots, f^{(m)} \in C[a, b]$. Норма в $C^m[a, b]$ задается правой частью формулы (6) при $p = \infty$. Отметим, что $W^0_p(a, b) = L^p(a, b)$, $C^0[a, b] = C[a, b]$. Через $C^m_0[a, \infty)$ обозначаем пространство функций f таких, что функции $f, f', \dots, f^{(m)}$ непрерывны на полупрямой $t \geq a$ и $f^{(j)}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $j = \overline{0, m}$. Норма в $C^m_0[a, \infty)$ задается правой частью формулы (6) при $b = p = \infty$.

Пусть $\omega(t)$ – вес на (a, b) , т. е. измеримая, почти всюду положительная функция на (a, b) . Через $L^q((a, b), \omega(t) dt)$ обозначается пространство функций с нормой

$$\|f\| = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(t)|^q \omega(t) dt \right)^{1/q} & \text{при } 1 \leq q < \infty, \\ \|f(t)\omega(t)\|_{L^\infty(a, b)} & \text{при } q = \infty. \end{cases}$$

Все введенные пространства – банаховы. Запись $E = E(a, b)$ обозначает, что элементами пространства E являются функции, определенные на (a, b) или почти всюду на (a, b) . Будем использовать запись $L^p_\alpha(1, \infty)$ вместо $L^p((1, \infty), t^\alpha dt)$ и $L^q_{\omega_1(t)}$ вместо $L^q((0, 1), \omega_1(t) dt)$.

Через E' обозначаем пространство функционалов на E (далее под функционалом понимаем линейный непрерывный функционал). Каждый функционал φ на $L^q((a, b), \omega(t) dt)$ реализуется с помощью функции $\varphi \in L^{q'}((a, b), u(t) dt)$, где $1/q + 1/q' = 1$,

$$u(t) = \begin{cases} \omega^{-q'/q}(t) & \text{при } 1 < q < \infty, \\ \frac{1}{\omega(t)} & \text{при } q = 1, \end{cases} \quad (7)$$

следующим образом:

$$(\varphi, f) = \int_a^b f(t) \varphi(t) dt, \quad f \in L^q((a, b), \omega(t) dt).$$

В работе фигурируют веса $\omega(t) = \omega_1(t), \omega_2(t)$; соответствующие им по формуле (7) функции $u(t)$ будем обозначать через $u_1(t)$ и $u_2(t)$. По неравенству Гёльдера условие $\omega_1(t) \in L^1(0, 1)$ влечет топологические вложения $(L_{\omega_1(t)}^q)' \hookrightarrow L^1(0, 1)$, $L^\infty(0, 1) \hookrightarrow L_{\omega_1(t)}^q$.

Через $V[a, b]$ ($V[a, \infty)$) обозначаем класс функций ограниченной вариации на $[a, b]$ (на $[a, \infty)$). Каждый функционал φ на $C^m[a, b]$ (на $C_0^m[a, \infty)$) реализуется с помощью упорядоченного набора $\mu_0(t), \mu_1(t), \dots, \mu_m(t)$ функций из $V[a, b]$ (из $V[a, \infty)$) по правилу

$$(\varphi, f) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \int_a^b f^{(j)}(t) d\mu_j(t), \quad f \in C^m[a, b] \quad (\in C_0^m[a, \infty)), \quad (8)$$

где следует брать $b = \infty$ в случае пространства $C_0^m[a, \infty)$; удобство чередования знаков обнаружится позже, при рассмотрении преобразований Лапласа от функционалов. Каждый функционал φ на $W_p^m(a, b)$ реализуется с помощью упорядоченного набора $g_0(t), g_1(t), \dots, g_m(t)$ функций из $L^{p'}(a, b)$ по правилу (8), где $d\mu_j(t) = g_j(t) dt$, $f \in W_p^m(a, b)$. При $m > 0$ реализация функционала не определяется однозначно, как показывает пример функционала φ на $C^2[a, b]$, действующего по правилу

$$(\varphi, f) = \int_a^b f''(t) dt = f'(b) - f'(a). \quad (9)$$

В связи с этим назовем *порядком* слагаемого в (8) порядок входящей в него производной, а *реализацию* (8) функционала φ назовем *правильной*, если порядок ни одного нетривиального слагаемого в (8) (т. е. такого, что $d\mu_j(t) \neq 0$) не может быть понижен. Формула (9) дает две реализации функционала; из них вторая правильная, а первая не правильная.

Пусть $E_1 = E_1(0, 1)$ и $E_2 = E_2(1, \infty)$ — банаховы пространства функций, определенных на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ соответственно. Рассмотрим их прямое произведение

$$E = E_1(0, 1) \times E_2(1, \infty),$$

являющееся пространством пар функций f_1, f_2 , где $f_i \in E_i$, $i = 1, 2$, с нормой

$$\|f_1\|_{E_1} + \|f_2\|_{E_2}.$$

Договоримся отождествлять пару f_1, f_2 с функцией f , заданной на $(0, 1) \cup (1, \infty)$, такой, что $f|_{(0,1)} = f_1$ и $f|_{(1,\infty)} = f_2$.

Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что E_1 – какое-нибудь из пространств $C^l[0, 1]$, $W_p^{l+1}(0, 1)$, а E_2 – какое-нибудь из пространств $C_0^m[1, \infty)$, $W_q^{m+1}(1, \infty)$. Тогда пространство $E = E_1 \times E_2$ содержит функции, разрывные в точке 1, поэтому система (1) заведомо не является полной в E . В связи с этим мы выделяем в E подпространство, состоящее из функций f таких, что функции $f, f', \dots, f^{(s)}$ непрерывны в точке 1, $s = \min(l, m)$. Это подпространство назовем *склеенным подпространством* пространства E и обозначим через E_c .

Если хотя бы одной компонентой E_j пространства E является пространство L^q с локально интегрируемым весом, то подобного препятствия для полноты системы (1) в E не существует и необходимость в выделении какого-либо подпространства отсутствует. Для единообразия формулировок в этих случаях под склеенным подпространством E понимаем само пространство E , т. е. $E_c = E$. Функционалы на E, E_1, E_2 обозначаем соответственно через $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$. Каждый функционал φ есть упорядоченная пара φ_1, φ_2 и

$$(\varphi, f) = (\varphi_1, f_1) + (\varphi_2, f_2), \quad f \in E \quad (10)$$

(см. [15]). Обратно, каждая пара φ_1, φ_2 задает функционал на E по правилу (10).

Пусть пространство E содержит функции e^{-zt} , $t > 0$, при всех $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда для функционалов $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ их преобразования Лапласа

$$\Phi(z) = (\varphi(t), e^{-zt}), \quad \Phi_j(t) = (\varphi_j(t), e^{-zt}), \quad j = 1, 2,$$

имеют смысл в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, причем $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Ясно, что $\varphi = 0$ влечет $\Phi(z) \equiv 0$, $\operatorname{Re} z > 0$. Скажем, что преобразования Лапласа функционалов на E обладают *свойством единственности*, если $\Phi(z) \equiv 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ влечет $\varphi = 0$. Очевидно, это свойство равносильно плотности в E линейных комбинаций функций e^{-zt} , $\operatorname{Re} z > 0$. В рассматриваемых нами случаях функции Φ, Φ_j будут аналитическими в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Через H^p обозначаем класс Харди в правой полуплоскости, т. е. класс H^p состоит из аналитических при $\operatorname{Re} z > 0$ функций, для которых

$$\sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^p dy < +\infty, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\sup_{\operatorname{Re} z>0} |F(z)| < +\infty, \quad p = \infty.$$

§ 3. Необходимость условия Саса

Пусть E и F – банаховы пространства. Скажем, что F *топологически плотно вложено* в E , если F топологически вложено в E , $F \hookrightarrow E$ (т. е. $\|x\|_E \leq C\|x\|_F$ для любого элемента $x \in F$, где C от x не зависит) и F плотно в E . Очевидно, топологически плотное вложение F в E равносильно тому, что любой ненулевой функционал на E является ненулевым функционалом на F .

Через Ω_q обозначаем класс весов $\omega_1(t)$, $t \in (0, 1)$, для каждого из которых при некотором $\delta \in [0, 1]$ выполняются условия

$$m(t) := \inf(\omega_1(x) : 0 < t \leq x < \delta) > 0, \quad 0 < t < \delta, \\ \omega_1^{-1/q}(t) \in L^{q'}(\delta, 1).$$

Если $\delta = 0$ ($\delta = 1$), то первое (второе) из этих условий отсутствует.

ТЕОРЕМА 1. Пусть пространство $E = E(\mathbb{R}_+)$ топологически плотно вложено в пространство

$$L^q_{\omega_1(t)} \times L^p(1, \infty), \quad 1 \leq q < \infty, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad \omega_1(t) \in L^1(0, 1), \quad (11)$$

где $\omega_1(t) \in \Omega_q$. Тогда условие (3) необходимо для полноты системы (1) в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что условие Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} < +\infty \quad (12)$$

влечет неполноту системы (1) в пространстве (11), которое обозначаем через E .

Пусть $\delta > 0$. Обозначим $g(t) = m^{1/q}(t)$. Ясно, что $g(t)$ не убывает на $(0, \delta)$ и $0 < g(t) \leq \omega_1^{1/q}(t)$, $0 < t < \delta$. В частности, $g \in L^q(0, \delta) \subset L^1(0, \delta)$. Пусть

$$G(z) = \int_0^{\delta} e^{-zt} g(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (13)$$

Ясно, что $G(z) \in H^{\infty}$. Пусть $B(z)$ – произведение Бляшке для полуплоскости, построенное по точкам λ_n , $n \in \mathbb{N}$; оно имеет смысл, благодаря условию (12). Имеем $B(z) \in H^{\infty}$ и $B(\lambda_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$H(z) = \frac{B(z)}{(1+z)^2}, \quad \Phi(z) = H(z)G(z).$$

Тогда $H(z)$, $\Phi(z) \in H^p$ при всех $p \in [1, 2]$. Отсюда с помощью теоремы Хаусдорфа–Юнга заключаем, что справедливы представления

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} h(t) dt, \quad \Phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \varphi(t) dt \quad (14)$$

при $\operatorname{Re} z > 0$, где $h, \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ для всех $p' \in [2, \infty]$. В частности, $h, \varphi \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ и

$$h_2 = h|_{(1, \infty)}, \quad \varphi_2 = \varphi|_{(1, \infty)} \in (L^p(1, \infty))'. \quad (15)$$

Поскольку $\Phi = HG$, то $\varphi = h * g$, т. е.

$$\varphi(x) = \int_0^x h(x-t)g(t) dt, \quad x > 0.$$

Отсюда с учетом ограниченности $h(t)$, а также неубывания и положительности $g(t)$ делаем вывод, что

$$|\varphi(x)| \leq Cxg(x) \leq C_1\omega_1^{1/q}(x), \quad 0 < x < \delta.$$

Значит, $|\varphi(t)|\omega_1^{-1/q}(t) \leq C < \infty$, $0 < t < \delta$, и потому $\varphi(t) \in L^{q'}((0, \delta), u_1(t) dt)$. Принадлежность $\varphi(t) \in L^{q'}((\delta, 1), u_1(t) dt)$ очевидна, так как $\varphi(t) \in L^\infty(\delta, 1)$ по доказанному и $\omega_1^{-1/q}(t) \in L^{q'}(\delta, 1)$ по условию. Следовательно,

$$\varphi_1 = \varphi|_{(0,1)} \in L_{u_1(t)}^{q'} = (L_{\omega_1(t)}^q)'. \quad (16)$$

Из формул (16), (15) вытекает, что функция $\varphi(t)$ задает функционал на E , причем $\varphi \neq 0$, так как $\Phi(z) \not\equiv 0$. Однако $\Phi(\lambda_n) = 0$, значит, этот функционал аннулирует систему (1). В итоге система (1) неполна в E , и случай $\delta > 0$ разобран.

В случае $\delta = 0$ функция $h(t)$ задает нетривиальный функционал на E . Это вытекает из свойства (15) для h_2 и свойства $h_1 = h|_{(0,1)} \in L_{u_1(t)}^{q'}$, являющегося следствием ограниченности $h(t)$ и условия $\omega_1^{-1/q}(t) \in L^{q'}(0, 1)$. Поскольку $H(\lambda_n) = 0$, то функционал h аннулирует систему (1). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств

$$C^l[0, 1], \quad W_q^l(0, 1), \quad L_{\omega_1(t)}^q, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq q < \infty, \quad \omega_1(t) \in L^1(0, 1), \quad (17)$$

где $\omega_1(t) \in \Omega_q$. Тогда условие (3) необходимо для полноты системы (1) в пространстве E_c , где

$$E = E_1 \times W_p^m(1, \infty), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq p \leq 2. \quad (18)$$

Следствие 1 вытекает из теоремы 1 и из утверждения 1) следующей леммы.

ЛЕММА 1. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17). Тогда:

- 1) если E – пространство (18), то E_c топологически плотно вложено в пространство (11);
- 2) если E_2 – какое-нибудь из пространств $C_0^m[1, \infty)$, $W_p^m(1, \infty)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p < \infty$, а $E = E_1 \times E_2$, то E_c топологически плотно вложено в пространство

$$L_{\omega_1(t)}^q \times L^p((1, \infty), t^{-2} dt), \quad 1 \leq q < \infty, \quad \omega_1(t) \in L^1(0, 1). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул § 2 следует, что произвольный нетривиальный функционал φ на $L_{\omega_1(t)}^q \times L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt)$ имеет вид

$$(\varphi, f) = \int_0^1 f_1(t) \varphi_1(t) dt + \int_1^\infty f_2(t) \varphi_2(t) dt, \quad (20)$$

где $\varphi_1 \in L_{u_1(t)}^{q'} \subset L^1(0, 1)$, а $\varphi_2 \in L^{p'}((1, \infty), u_2(t) dt)$, причем хотя бы одна из функций φ_1 , φ_2 не эквивалентна нулю.

1) Если $\omega_2(t) \equiv 1$, то $u_2(t) \equiv 1$ и очевидно, что правая часть в (20) задает нетривиальный функционал на E_c , где E – пространство (18). Это доказывает утверждение 1).

2) Если $\omega_2(t) = 1/t^2$, то $u_2(t) = t^{2p'/p}$ при $p > 1$ и $u_2(t) = t^2$ при $p = 1$. Это означает, что правая часть в (20) задает нетривиальный функционал на E_c , и утверждение 2) также верно. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17), где $\omega_1(t) \in \Omega_q$. Тогда если $p > 2$, $\alpha > p/2 - 1$, то условие (3) необходимо для полноты системы (1) в $E_1 \times L_\alpha^p(1, \infty)$. В частности, при $p > 2$, $\alpha > p/2 - 1$ условие (3) необходимо для полноты системы (1) в $L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 достаточно убедиться в том, что пространство $L_\alpha^p(1, \infty)$ топологически плотно вложено в $L^2(1, \infty)$. Ясно, что $L_\alpha^p(1, \infty)$ плотно в $L^2(1, \infty)$. Далее, если $f \in L_\alpha^p(1, \infty)$, то, применяя неравенство Гёльдера с показателями $r = p/2$ и $r' = p/(p-2)$, получаем

$$\|f\|_2^2 = \int_1^\infty (|f(t)|^2 t^{2\alpha/p})(t^{-2\alpha/p}) dt \leq \|f\|_{p,\alpha}^2 \left(\int_1^\infty t^{-2\alpha/(p-2)} dt \right)^{1/r'}.$$

При $\alpha > p/2 - 1$ последний интеграл конечен, что означает требуемое топологическое вложение. Следствие доказано.

§ 4. Свойство единственности

ЛЕММА 2. Если $f \in W_p^m(a, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, то

$$f^{(j)}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad j = \overline{0, m-1}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $m = 1$ и доказать (21) для $m = 0$, т.е. для f . Фиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначаем через $A_\varepsilon(R)$ множество тех точек полупрямой $t > R$, в которых $|f(t)| \geq \varepsilon$. Имеем

$$\varepsilon^p \text{mes } A_\varepsilon(R) \leq \int_R^\infty |f(t)|^p dt =: \delta(R),$$

где $\delta(R) \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$. Значит, $\text{mes } A_\varepsilon(R) < 1/2$, $R > R_0$, и потому если $t > R$, то на отрезке $[t, t+1]$ найдется хотя бы одна точка $t_1 \neq t$ такая, что $|f(t_1)| < \varepsilon$. Тогда

$$|f(t_1) - f(t)| = \left| \int_t^{t_1} f'(v) dv \right| \leq \left(\int_t^{t_1} |f'(v)|^p dv \right)^{1/p} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если R достаточно велико, то $|f(t)| < 2\varepsilon$ для всех $t > R$. А это и означает справедливость (21) для $j = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $E^m = C_0^m[0, \infty)$ ($E^m = W_p^m(\mathbb{R}_+)$), $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, и пусть $\Phi(z)$ – преобразование Лапласа функционала $\varphi \in (E^m)'$, т.е.

$$\Phi(z) = (\varphi(t), e^{-zt}) = \sum_{j=0}^m z^j \int_0^\infty e^{-zt} d\mu_j(t), \quad \text{Re } z > 0, \quad (22)$$

где $\mu_j \in V[0, \infty)$ ($d\mu_j(t) = g_j(t) dt$, $g_j \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$). Тогда при $\text{Re } z > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(z)}{1+z} &= \int_0^\infty e^{-zt} (e^{-t} * d\mu(t)) dt \\ &+ \sum_{j=1}^m (z^{j-1} + (-1)z^{j-2} + \dots + (-1)^{j-1}) \int_0^\infty e^{-zt} d\mu_j(t), \end{aligned} \quad (23)$$

$$d\mu(t) = \sum_{j=0}^m (-1)^j d\mu_j(t). \quad (24)$$

В частности, функция $\Phi(z)/(1+z)$ есть преобразование Лапласа некоторого функционала на E^{m-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\Phi(z)$ записывается в виде правой части (22), следует из формулы (8). Используя обозначение (24), запишем $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zt} d\mu(t) + \sum_{j=1}^m (z^j - (-1)^j) \int_0^\infty e^{-zt} d\mu_j(t). \quad (25)$$

Поскольку функция $1/(1+z)$ есть преобразование Лапласа функции e^{-t} , $t > 0$, то по теореме о свертке

$$\frac{1}{1+z} \int_0^\infty e^{-zt} d\mu(t) = \int_0^\infty e^{-zt} (e^{-t} * d\mu(t)) dt = \int_0^\infty e^{-zt} \left(e^{-t} \int_0^t e^v d\mu(v) \right) dt.$$

Учитывая это, после почленного деления (25) на $1+z$ получаем (23). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть функции $\mu_j \in V[0, \infty)$ ($g_j \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, $1 < p' \leq \infty$), $j = 0, m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, задают правильную реализацию функционала φ на $E = C_0^m[0, \infty)$ ($E = W_p^m(\mathbb{R}_+)$). Тогда если $\Phi(z) \equiv 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, то

$$d\mu_j(t) \equiv 0, \quad t \geq 0 \quad (g_j(t) = 0, \quad t > 0), \quad j = \overline{0, m}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство индукцией по m . По условию

$$\Phi(z) = (\varphi(t), e^{-zt}) = \sum_{j=0}^m z^j \int_0^\infty e^{-zt} d\mu_j(t), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (27)$$

где $d\mu_j(t) = g_j(t) dt$, $g_j \in L^{p'}$, в случае пространства W_p^m .

Пусть $E = C_0^m$. Интегралы в (27) задают функции, непрерывные при $\operatorname{Re} z \geq 0$, поэтому при $m = 0$ из (27) следует, что

$$\int_0^\infty e^{-iyt} d\mu_0(t) = 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда по теореме единственности для преобразования Фурье–Стилтьеса имеем $d\mu_0(t) \equiv 0$, и при $m = 0$ утверждение (26) верно.

Предположим, что (26) верно для индекса $m-1$, и докажем его для индекса m . По формуле (23) при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\int_0^\infty e^{-zt} (e^{-t} * d\mu(t)) dt + \sum_{j=1}^m (z^{j-1} + (-1)z^{j-2} + \dots + (-1)^{j-1}) \int_0^\infty e^{-zt} d\mu_j(t) \equiv 0.$$

Левая часть тождества есть преобразование Лапласа функционала на $C_0^{m-1}[0, \infty)$, и по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} d\mu_m(t) &\equiv 0, \\ (-1) d\mu_m(t) + d\mu_{m-1}(t) &\equiv 0, \\ &\dots\dots\dots \\ (-1)^{m-2} d\mu_m(t) + (-1)^{m-3} d\mu_{m-1}(t) + \dots + d\mu_2(t) &\equiv 0, \\ \left(e^{-t} \int_0^t e^v d\mu(v) \right) dt + \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} d\mu_j(t) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Начиная с первого соотношения, последовательно получаем, что

$$d\mu_m(t) = \dots = d\mu_2(t) \equiv 0, \quad (28)$$

$$\left(e^{-t} \int_0^t e^v d(\mu_0(v) - \mu_1(v)) \right) dt - d\mu_1(t) \equiv 0. \quad (29)$$

Обозначим

$$g(t) = e^{-t} * d(\mu_0(t) - \mu_1(t)). \quad (30)$$

Тогда из соотношения (29) следует, что

$$\int_0^\infty f'(t) d\mu_1(t) = \int_0^\infty f'(t) g(t) dt, \quad f'(t) \in C_0[0, \infty). \quad (31)$$

Поскольку e^{-t} , $\mu_0(t) - \mu_1(t) \in V[0, \infty)$, то свертка (30) лежит в $V[0, \infty)$ (см. [16]). В частности, $g(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Кроме того, в силу (30) имеем $g(0) = 0$. Используя это и условие $f(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ из определения пространства C_0^m и интегрируя в (31) по частям, находим

$$\int_0^\infty f'(t) d\mu_1(t) = \int_0^\infty g(t) df(t) = - \int_0^\infty f(t) dg(t).$$

Мы видим, что если $d\mu_1(t) \not\equiv 0$, то порядок левой части в (31), как порядок слагаемого в реализации (8) функционала φ , может быть понижен, а это противоречит правильности реализации. Значит, $d\mu_1(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, и соотношение (29) приобретает вид

$$e^{-t} * d\mu_0(t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Переходя к преобразованию Лапласа, отсюда получаем, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\frac{1}{1+z} \int_0^\infty e^{-zt} d\mu_0(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-zt} d\mu_0(t) \equiv 0. \quad (32)$$

Все свелось к разобранному случаю $m = 0$, по которому $d\mu_0(t) \equiv 0$. В итоге мы доказали (26) для $\mu_j(t)$. Это означает, что в случае $E = C_0^m[0, \infty)$ лемма доказана.

Пусть $E = W_p^m(\mathbb{R}_+)$; тогда в (27) $d\mu_j(t) = g_j(t) dt$, $g_j \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $m = 0$. Обозначим

$$G_0(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} g_0(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

По условию $G_0(z) \equiv 0$. Функция $G_0(1+iy)$ есть преобразование Фурье функции $e^{-t}g_0(t) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, и по теореме единственности для преобразования Фурье имеем $g_0(t) = 0$, $t > 0$. Итак, при $m = 0$ соотношения (26) верны. Предположим, что (26) верны для индекса $m - 1$, и докажем, что оно верно для индекса m .

Повторяя рассуждения, использованные для доказательства формул (28), (29), теперь получаем

$$\begin{aligned} g_m(t) &= \cdots = g_2(t) = 0, \quad t > 0, \\ g_1(t) &= e^{-t} * (g_0(t) - g_1(t)) = e^{-t} \int_0^t e^v (g_0(v) - g_1(v)) dv, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Последняя формула показывает, что $g_1(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, A]$ при всех $A > 0$, причем почти всюду на полупрямой $t > 0$

$$g'_1(t) = -e^{-t} * (g_0(t) - g_1(t)) + (g_0(t) - g_1(t)).$$

Поскольку $e^{-t} \in L^1$, а $g_0(t) - g_1(t) \in L^{p'}$, то $e^{-t} * (g_0(t) - g_1(t)) \in L^{p'}$. Значит, $g'_1(t) \in L^{p'}$. Далее, $g_1(0) = 0$ в силу (33), а $g_1(\infty)f(\infty) = 0$ в силу леммы 2 и ограниченности функции $g_1(t)$ как свертки функций $e^{-t} \in L^p$ и $g_0(t) - g_1(t) \in L^{p'}$. Пользуясь этим при интегрировании по частям, получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+} f'(t)g_1(t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} g_1(t) df(t) = - \int_{\mathbb{R}_+} f(t)g'_1(t) dt.$$

Если $g_1(t) \not\equiv 0$, то мы снова приходим к противоречию с правильностью реализации функционала. Поэтому $g_1(t) \equiv 0$, $t > 0$. Тогда из формулы (33) следует, что верно (32) при $d\mu_0(t) = g_0(t) dt$, и доказательство свелось к разобранному случаю $m = 0$, по которому $g_0(t) \equiv 0$. Тождества (26) верны. Лемма доказана полностью.

ЛЕММА 5. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17), а E_2 – какое-нибудь из пространств

$$C_0^m[1, \infty), \quad W_p^m(1, \infty), \quad L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (34)$$

где

$$e^{-at}\omega_2(t) \in L^1(1, \infty) \quad \forall a > 0. \quad (35)$$

Тогда преобразования Лапласа функционалов $\varphi \in E'_c$, где $E = E_1 \times E_2$, обладают свойством единственности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим, что если E совпадает с одной из своих компонент E_1 , E_2 , то свойство единственности имеет место. Действительно, если исключить случаи $E = L^q_{\omega_1(t)}, L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt)$, то оно верно по лемме 4, а для исключенных пространств оно верно по теореме единственности для преобразования Фурье, поскольку $(L^q_{\omega_1(t)})' \subset L^1(0, 1)$ и $\varphi_2 \in (L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt))' \Rightarrow e^{-t}\varphi_2(t) \in L^1(1, \infty)$, что следует из условия (35) и неравенства Гёльдера. Отметим, что условие (35) влечет аналитичность в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ преобразований Лапласа функционалов $\varphi_2 \in (L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt))'$.

По формуле (8) преобразования Лапласа функционалов $\varphi_1 \in E'_1$ имеют соответственно вид

$$\Phi_1(z) = \sum_{j=0}^l z^j \int_0^1 e^{-zt} d\sigma_j(t), \sum_{j=0}^l z^j \int_0^1 e^{-zt} g_j(t) dt, \int_0^1 e^{-zt} \varphi_1(t) dt, \quad (36)$$

где $\sigma_j(t) \in V$, $g_j(t) \in L^{q'}$, $\varphi_1 \in L^{q'}_{u_1(t)} \subset L^1(0, 1)$. Отсюда вытекают соответственно оценки

$$\Phi_1(z) = O((1 + |z|)^l), o((1 + |z|)^l), o(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} z \geq 0. \quad (37)$$

Преобразования Лапласа функционалов $\varphi_2 \in E'_2$ имеют соответственно вид

$$\Phi_2(z) = \sum_{j=0}^m z^j \int_1^\infty e^{-zt} d\sigma_j(t), \sum_{j=0}^m z^j \int_1^\infty e^{-zt} g_j(t) dt, \int_1^\infty e^{-zt} \varphi_2(t) dt, \quad (38)$$

где $\sigma_j \in V[1, \infty)$, $g_j \in L^{p'}(1, \infty)$, $\varphi_2 \in (L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt))'$. Заменяя в этих интегралах t на $t + 1$, получаем оценки

$$\Phi_2(z) = e^{-z} O(|z|^m), e^{-z} o(|z|^m), e^{-z} o(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad x \geq 2. \quad (39)$$

Каждый интеграл в (36) есть целая функция экспоненциального типа с индикаторной диаграммой, лежащей на $[-1, 0]$. Значит, и $\Phi_1(z)$ есть целая функция экспоненциального типа с индикаторной диаграммой $I \subset [-1, 0]$. Обозначим $-\delta = \sup\{t : t \in I\}$; ясно, что $-1 \leq -\delta \leq 0$. Тогда $h_{\Phi_1}(0) = -\delta$, где $h_{\Phi_1}(\theta)$ – индикатор функции $\Phi_1(z)$. По определению индикатора для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $x_k \rightarrow +\infty$ такая, что

$$|\Phi_1(x_k)| > \exp\{-(\delta + \varepsilon)x_k\}.$$

Однако в силу (39) имеем $\Phi_2(x) = e^{-x} O(x^m)$, $x \rightarrow +\infty$, и поскольку $|\Phi_1| = |\Phi_2|$ по условию $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \equiv 0$, то получаем, что $\delta = 1$, т. е. I есть точка -1 . Тогда индикаторная диаграмма функции $F(z) = e^z \Phi_1(z)$ есть точка 0 , и потому $h_F(\theta) \equiv 0$. Это означает, что $F(z)$ – функция минимального типа, а из (37), (39) и из $\Phi_1 = -\Phi_2$ следует, что

$$F(2 + iy) = O(|y|^l), O(|y|^m). \quad (40)$$

Значит, $F(z)$ – многочлен степени $r = \min(l, m)$, т. е.

$$\Phi_1(z) = e^{-z} \sum_{j=0}^r h_j z^j \Rightarrow \Phi_2(z) = -e^{-z} \sum_{j=0}^r h_j z^j. \quad (41)$$

Пусть $E_1 = C^l[0, 1]$. Если $E_2 = C^m_0[1, \infty)$, то из (41) следует, что

$$(\varphi_1, f_1) = \sum_{j=0}^r h_j f^{(j)}(1 - 0), \quad (\varphi_2, f_2) = - \sum_{j=0}^r h_j f^{(j)}(1 + 0). \quad (42)$$

Но мы рассматриваем склеенное подпространство E_c прямого произведения $E = E_1 \times E_2$, и потому $f^{(j)}(1 - 0) = f^{(j)}(1 + 0) = f^{(j)}(1)$. Значит, пара φ_1, φ_2 является нулевым функционалом на E_c . (Заметим, что на всем пространстве $E_1 \times E_2$ этот функционал нулевым не является.)

Если $E_2 = W_p^m(1, \infty)$, то верна вторая оценка (39); значит, в (40) оценка $O(|y|^m)$ заменяется на $o(|y|^m)$. Поэтому теперь $F(z)$ есть многочлен степени $r = \min(l, m - 1)$ (можно считать, что $m \geq 1$, так как случай $m = 0$ следует из рассмотрения пространства $E_2 = L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt)$). Формула (41), а значит, и формула (42) сохраняются. Снова функционал $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in E'_c$ является тривиальным.

Если $E_2 = L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt)$, то в силу третьей оценки (39), в (40) оценка $O(|y|^m)$ заменяется на $o(1)$. Тогда $F \equiv 0 \Rightarrow \Phi_1 \equiv 0 \Rightarrow \Phi_2 \equiv 0$. Поскольку для компонент E_1, E_2 свойство единственности имеет место, то $\varphi_1, \varphi_2 = 0$, а значит, и $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Мы рассмотрели случай $E_1 = C^l[0, 1]$.

Пусть $E_1 = W_q^l(0, 1)$. Тогда верна вторая оценка (37); значит, в (40) оценка $O(|y|^l)$ заменяется на $o(|y|^l)$, и потому (41) верно при $r = \min(l - 1, m)$ (здесь достаточно считать, что $l \geq 1$, так как случай $l = 0$ следует из рассмотрения пространства $L_{\omega_1(t)}^q$). Снова имеют место формулы (42). Начиная отсюда, последовательное рассмотрение компонент $E_2 = C_0^m, W_p^m, L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt)$ проводится так же, как в разобранном уже случае $E_1 = C^l[0, 1]$, и мы приходим к утверждению, что $\varphi = 0$.

Пусть $E_1 = L_{\omega_1(t)}^q$. Тогда верна третья оценка (37), по которой в (40) оценка $O(|y|^l)$ заменяется на $o(1)$. Тогда $F \equiv 0$, что, как и в случае $E_1 = C^l[0, 1]$, приводит к свойству $\varphi_1, \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Лемма доказана.

§ 5. Достаточность условия Саса

Пусть D – область в $\mathbb{C}$; определим класс Неванлинны $N(D)$ его известным характеристическим свойством в случае круга (см. [17], [18]). Именно, определим класс $N(D)$ как класс аналитических в D функций, представимых в виде частного двух аналитических и ограниченных в D функций. Отметим конформную инвариантность класса $N(D)$. Если $D = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$, то используем обозначение N вместо $N(D)$. Хорошо известно (см., например, [18]), что $H^p \subset N$, $0 < p \leq \infty$, и что для нулей функции класса N выполняется условие (12).

ЛЕММА 6. Пусть $E = E(\mathbb{R}_+)$ – банахово пространство функций такое, что $\Phi(z) \in N$ для любого функционала $\varphi \in E'$ и преобразования Лапласа функционалов $\varphi \in E'$ обладают свойством единственности. Тогда условие (3) достаточно для полноты системы (1) в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (3). Предположим противное: система (1) неполна в E . Тогда найдется нетривиальный функционал $\varphi \in E'$ такой, что $(\varphi, e^{-\lambda_n t}) = 0$ для всех n . Это означает, что $\Phi(\lambda_n) = 0$. Однако по условию леммы $\Phi(z) \in N$, причем $\Phi(z) \not\equiv 0$ по свойству единственности. Значит, для нулей функции $\Phi(z)$, в том числе и для точек λ_n , выполняется условие (12), которое противоположно условию (3). Противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17), а E_2 – какое-нибудь из пространств

$$\begin{aligned} & C_0^m[1, \infty), \quad W_p^m(1, \infty), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad 2 \leq p < \infty, \\ & L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt), \quad 1 \leq p < \infty, \quad \omega_2(t) \in L^1(1, \infty). \end{aligned}$$

Пусть пространство $E = E(\mathbb{R}_+)$ обладает свойством: склеенное подпространство пространства $E_1 \times E_2$ топологически плотно вложено в E . Тогда условие (3) достаточно для полноты системы (1) в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести для случая, когда E – склеенное подпространство пространства $E_1 \times E_2$. По лемме 5 для преобразований Лапласа $\Phi(z)$ функционалов $\varphi \in E'$ выполняется свойство единственности. По лемме 6 остается проверить, что $\Phi(z) \in N$, для чего достаточно убедиться в том, что $\Phi_1(z), \Phi_2(z) \in N$.

Выражения для $\Phi_1(z)$ определяются формулами (36). Очевидно, каждый интеграл в (36) есть функция класса $H^\infty \subset N$. Рассмотрим конформное отображение

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad |w| < 1, \quad (43)$$

круга $\Delta = \{w : |w| < 1\}$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Правая часть в (43) принадлежит $N(\Delta)$, так как числитель и знаменатель – функции, аналитические и ограниченные в Δ . В силу конформной инвариантности класса Неванлинны имеем $z \in N$, и поскольку произведение и сумма функций класса N являются функциями класса N , то $\Phi_1(z) \in N$.

Для $\Phi_2(z)$ верны формулы (38). Первая из функций (38) принадлежит N по тем же причинам, что и $\Phi_1(z)$ (все ее интегралы лежат в пространстве H^∞). Далее, так как $g_j \in L^{p'}$, $1 < p' \leq 2$, то по теореме Хаусдорфа–Юнга все интегралы во второй сумме (38) лежат в $H^p \subset N$, значит, и $\Phi_2(z) \in N$.

Последний интеграл в (38) есть функция пространства H^∞ ; действительно, благодаря условию $\omega_2(t) \in L^1(1, \infty)$ ее модуль не превосходит

$$\|\varphi_2\| \left(\int_1^\infty e^{-pxt} \omega_2(t) dt \right)^{1/p} \leq M < \infty.$$

Во всех случаях $\Phi_2(z) \in N$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17). Тогда если $1 \leq p < 2$, $\alpha < p/2 - 1$, то условие (3) достаточно для полноты системы (1) в $E_1 \times L_\alpha^p(1, \infty)$. В частности, при $1 \leq p < 2$, $-1 < \alpha < p/2 - 1$ условие (3) достаточно для полноты системы (1) в $L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_2 = L_\alpha^p(1, \infty)$. По теореме 2 достаточно проверить топологически плотное вложение пространства $E_1 \times L^2(1, \infty)$ в $E_1 \times E_2$. Поскольку $L^2(1, \infty)$ плотно в E_2 , то достаточно проверить топологическое вложение $L^2(1, \infty) \hookrightarrow E_2$, а оно следует из неравенства Гёльдера и условия $\alpha < p/2 - 1$:

$$\int_1^\infty |f(t)|^p t^\alpha dt \leq \left(\int_1^\infty |f(t)|^2 dt \right)^{p/2} \left(\int_1^\infty t^{2\alpha/(2-p)} dt \right)^{(2-p)/2} \leq C \|f\|_2^p.$$

Следствие доказано.

Из следствия 1 и из теоремы 2 сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4 (расширение теоремы Саса). Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17), где $\omega_1(t) \in \Omega_q$. Тогда условие (3) необходимо и достаточно для полноты системы (1) в склеенном подпространстве пространства $E_1 \times W_2^m(1, \infty)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

В теореме 2 содержится случай пространств $C_0^m[0, \infty)$ и $W_p^m(\mathbb{R}_+)$, однако на основании лемм из § 4 мы можем напрямую связать полноту системы (1) в $C_0^m(W_p^m)$ с ее полнотой в $C_0(L^p)$.

ТЕОРЕМА 3. Система (1) тогда и только тогда полна в $E^m = C_0^m[0, \infty)$ ($E = W_p^m(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$), $m \in \mathbb{N}$, когда она полна в $E^0 = C_0[1, \infty)$ ($E^0 = L^p(\mathbb{R}_+)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что неполнота системы (1) в E^0 влечет ее неполноту в E^m .

Пусть система (1) неполна в E^m , $m \in \mathbb{N}$. Тогда некоторый нетривиальный функционал φ на E^m аннулирует систему (1), т.е. $\Phi(\lambda_n) = 0$, где $\Phi(z)$ – преобразование Лапласа функционала φ . По лемме 4 имеем $\Phi(z) \neq 0$. Тогда $\Psi(z) = \Phi(z)/(1+z)^m \neq 0$. С другой стороны, по лемме 3 $\Psi(z)$ есть преобразование Лапласа некоторого функционала ψ на E^0 . Ясно, что $\psi \neq 0$, и так как $\Psi(\lambda_n) = 0$, то система (1) неполна в E^0 . Теорема доказана.

§ 6. Случай степенного веса

Объединим цитированные во введении утверждения для пространств $L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$ с утверждениями следствий 2 и 3 в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. 1) Условие (3) достаточно для полноты системы (1) в $L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$, если $-1 < \alpha < p/2 - 1$ при $1 \leq p < 2$ и $-1 < \alpha \leq 0$ при $p \geq 2$, и не является достаточным, если $\alpha > p/2 - 1$ при $1 \leq p < 2$ и $\alpha > 0$ при $p \geq 2$.

2) Условие (3) необходимо для полноты системы (1) в $L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$, если $\alpha \geq 0$ при $1 \leq p \leq 2$ и $\alpha > p/2 - 1$ при $p > 2$, и не является необходимым, если $-1 < \alpha < \min(0, p/2 - 1)$, $1 < p < \infty$.

§ 7. Необходимость ослабленного условия Саса

Сначала заметим, что интеграл в (4) не может быть равен $+\infty$. Действительно, если λ – какая-нибудь точка множества Λ , то

$$\text{dist}(iy, \Lambda) \leq |iy - \lambda| = O((1 + |y|))$$

и данное замечание верно.

ТЕОРЕМА 5. Пусть пространство $E = E(\mathbb{R}_+)$ топологически плотно вложено в пространство

$$L_{\omega_1(t)}^q \times L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt), \quad 1 \leq p, q < \infty, \quad \omega_1(t) \in L^1(0, 1) \cap \Omega_q, \quad (44)$$

где вес $\omega_2(t)$ удовлетворяет условию (35) и $1/\omega_2(t) = O(t^r)$ при некотором $r > 0$. Тогда условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re } \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\log(\text{dist}(iy, \Lambda))^{-1}}{1 + y^2} dy = +\infty \quad (45)$$

необходимо для полноты системы (1) в пространстве E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что отрицание условия (45) влечет неполноту системы (1) в пространстве (44), которое будем обозначать через E . Благодаря замечанию, приведенному перед формулировкой теоремы, это отрицание состоит в одновременном выполнении условий (12) и (4). Рассмотрим конформное отображение $w = (z - 1)/(z + 1)$ полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ на круг $|w| < 1$. Пусть $W = (w_n)$ – образ последовательности $\Lambda = (\lambda_n)$. Тогда условие (12) преобразуется в условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |w_n|) < +\infty, \quad (46)$$

а условие (4), как показано в [12], – в условие

$$\int_{\mathbb{T}} \log \operatorname{dist}(\zeta, W) |d\zeta| > -\infty, \quad \mathbb{T} = (\zeta : |\zeta| = 1). \quad (47)$$

Воспользуемся следующим результатом [19]: если выполнены условия (46) и (47), то существует нетривиальная аналитическая в круге $|w| < 1$ функция $F(w)$ такая, что $F(w_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, и функция $F^{(k)}(w)$ ограничена при всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $F(w)$ – такая функция; тогда функция

$$H(z) = \frac{1}{(1+z)^2} F\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \quad (48)$$

аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, обращается в нуль в точках λ_n , $n \in \mathbb{N}$, и при всех $k \in \mathbb{Z}_+$

$$H^{(k)}(z) = O\left(\frac{1}{|1+z|^2}\right), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (49)$$

Из этой оценки при $k = 0$ следует представление $H(z)$ в виде первой формулы (14), где $h(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Пусть δ – число из определения класса Ω_q . Случаи $\delta = 0$ и $\delta > 0$ разбираются отдельно.

Пусть $\delta = 0$. Поскольку $H(\lambda_n) = 0$, то достаточно показать, что функция $h(t)$ задает функционал в пространстве (44), т.е. что сужения h_1 , h_2 функции h соответственно на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ задают функционалы на компонентах пространства (44). Благодаря условию $\omega_1^{-1/q}(t) \in L^{q'}(0, 1)$ из $h_1 \in L^\infty(0, 1)$ следует $h_1 \in L_{u_1(t)}^{q'}$, и для h_1 требуемое утверждение верно.

Из первого представления в (14) вытекает, что

$$H^{(k)}(z) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} (t^k h(t)) dt.$$

Однако в силу (49) имеем $H^{(k)}(z) \in H^1$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Значит, $t^k h(t) \in L^\infty(1, \infty)$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку по условию имеем $\omega_2^{-1}(t) = O(t^r)$, то, взяв k таким, чтобы $r/p \leq k$, получаем

$$h_2(t) \omega_2^{-1/p}(t) = O(h_2(t) t^{r/p}) = O(1), \quad t > 1.$$

Значит,

$$h_2(t) \in L^{p'}((1, \infty), u_2(t) dt) = (L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt))', \quad (50)$$

и случай $\delta = 0$ разобран.

Если $\delta > 0$, то пусть $g(t)$ – функция из доказательства теоремы 1 и $G(z)$ задается формулой (13). Обозначим

$$\Phi(z) = H(z)G(z),$$

где $H(z)$ – функция, определенная в (48); для $\Phi(z)$ верно представление в виде второй формулы (14). В силу (13) $G(z)$ есть целая функция экспоненциального типа, ограниченная в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. По неравенству Бернштейна все производные $G^{(k)}(z)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, ограничены при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Отсюда и из формулы (49) вытекает оценка

$$\Phi^{(k)}(z) = O\left(\frac{1}{|1+z|^2}\right), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (51)$$

совпадающая с оценкой (49) для $H^{(k)}(z)$. Однако оценка (49), как мы только что показали, влечет свойство (50). Точно так же и оценка (51) влечет свойство $\varphi_2 \in (L^p((1, \infty), \omega_2(t) dt))'$. Далее используем рассуждения, следующие после соотношения (14), которые приводят к свойству (16). В итоге $\varphi \in E'$, причем функционал φ аннулирует систему (1), так как $\Phi(\lambda_n) = 0$. Случай $\delta > 0$ также разобран. Теорема доказана.

Из теоремы 5 и сделанного перед ней замечания сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть E – пространство, удовлетворяющее условиям теоремы 5. Тогда в классе последовательностей Λ со свойством (4) условие (3) необходимо для полноты системы (1) в E .

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $E = E_1 \times E_2$, где E_1 – какое-нибудь из пространств (17), причем $\omega_1(t) \in \Omega_q$, а E_2 – какое-нибудь из пространств (34), причем вес $\omega_2(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 5. Тогда:

- 1) условие (45) необходимо для полноты системы (1) в E_c ;
- 2) в классе последовательностей Λ со свойством (4) условие (3) необходимо для полноты системы (1) в E_c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если E_2 – третье пространство из (34), то топологически плотное вложение $E_1 \times E_2$ в пространство (44) очевидно. Если E_2 – одно из двух первых пространств (34), то по утверждению 2) леммы 1 имеет место топологически плотное вложение E_c в пространство (19). Во всех случаях выполнены условия теоремы 5, и утверждения 1), 2) следствия 6 верны соответственно по теореме 5 и следствию 5.

§ 8. Достаточность условия Саса при дополнительном ограничении

Следующий результат фактически установлен В. И. Ладыгиным [10], но не выделен им в виде отдельного утверждения; это сделано в [12], где также содержится доказательство. Формулируемая ниже теорема по существу является следствием теоремы А.

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $G(z)$ аналитична при $x = \operatorname{Re} z > 0$ и допускает оценку

$$G(z) = O\left(\max\left(\frac{1}{x^a}, 1\right)\right), \quad x > 0, \quad a > 0.$$

Пусть Λ – любая подпоследовательность нулей функций $G(z)$, удовлетворяющая условию (4). Тогда для Λ выполнено условие (12)

ТЕОРЕМА 6. Пусть пространство $E = E(\mathbb{R}_+)$ содержит все функции e^{-zt} , $\operatorname{Re} z > 0$. Пусть преобразование Лапласа $\Phi(z)$ произвольного функционала $\varphi \in E'$ есть аналитическая в полуплоскости $x = \operatorname{Re} z > 0$ функция, допускающая оценку

$$\Phi(z) = O\left((1 + |z|)^l \max\left(\frac{1}{x^a}, 1\right)\right), \quad x > 0, \quad l, a > 0, \quad (52)$$

и пусть выполняется свойство единственности: $\Phi(z) \equiv 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Тогда в классе последовательностей Λ со свойством (4) условие (3) достаточно для полноты системы (1) в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы при выполнении условий (3) и (4) система (1) была бы неполной в E , то некоторая нетривиальная (в силу свойства единственности) функция $\Phi(z) = (\varphi(t), e^{-zt})$, где $\varphi \in E'$, обращалась бы в нуль и точках Λ . Рассмотрим функцию $G(z) = \Phi(z)/(1 + z)^l$. В силу (52) для нее выполнены условия теоремы А, по которой Λ удовлетворяет условию (12), однако условие (12) противоположно (3). Противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17), где $\omega_1(t) \in \Omega_q$, а E_2 – какое-нибудь из пространств (34), где вес $\omega_2(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и, кроме того,

$$\|e^{-xt}\omega_2(t)\|_{L^1(1,\infty)} = O\left(\frac{1}{x^a}\right), \quad 0 < x < 1, \quad a > 0. \quad (53)$$

Тогда в классе последовательностей Λ со свойством (4) условие (3) необходимо и достаточно для полноты системы (1) в E_c , где $E = E_1 \times E_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_j \in E'$, $j = 1, 2$. Для $\Phi_1(z)$ имеют место формулы (36), а значит, и оценки (37). Для $\Phi_2(z)$ верны формулы (38). Первая из них дает оценку

$$\Phi_2(z) = e^{-x} O((1 + |z|)^m), \quad x = \operatorname{Re} z \geq 0,$$

а из второй формулы (38) по неравенству Гёльдера получается оценка

$$\Phi_2(z) = e^{-x} O\left(\frac{(1 + |z|)^m}{x^{1/p}}\right), \quad x > 0.$$

В случае третьей формулы (38) имеем

$$|\Phi_2(z)| \leq \|e^{-zt}\|_E \|\varphi_2\|_{E'} = C \left(\int_1^\infty e^{-pxt} \omega_2(t) dt \right)^{1/p},$$

и благодаря условию (53) получаем

$$\Phi_2(z) = O\left(\max\left(\frac{1}{x^{a/p}}, 1\right)\right), \quad x > 0.$$

Объединяя полученные оценки для $\Phi_j(z)$, видим, что выполнено условие (52). Свойство единственности выполняется по лемме 5. Все условия теоремы 6 имеют место. По ней достаточная часть следствия 7 верна. Необходимая часть содержится в теореме 5. Следствие доказано.

Веса $\omega_1(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, и $\omega_2(t) = t^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяют условиям следствия 7. Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 8. В классе последовательностей Λ со свойством (4) условие (3) необходимо и достаточно для полноты системы (1) в пространстве

$$L^q((0, 1), t^\alpha dt) \times L^p((1, \infty), t^\beta dt), \quad 1 \leq p, q < \infty, \quad \alpha > -1, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (54)$$

и, в частности, в пространстве $L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$.

§ 9. Достаточность усиленного условия Саса

Обозначим через B класс положительных невозрастающих функций $b(t)$, $t > 0$, для которых

$$\int^\infty b(t) dt < +\infty.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть пространство E – то же, что и в теореме 6. Тогда если условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n b\left(\log \frac{1}{\delta_n}\right) = +\infty, \quad \delta_n = \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2}, \quad (55)$$

выполнено для некоторой функции $b(t) \in B$, то система (1) полна в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $G(z)$ удовлетворяет условиям теоремы А, то для последовательности Λ ее нулей выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n b\left(\log \frac{1}{\delta_n}\right) < +\infty, \quad (56)$$

как только $b(t) \in B$ (см. [12]). В свою очередь, в условиях теоремы 6, как мы видели при ее доказательстве, для функции $G(z) = \Phi(z)/(1+z)^l$ выполнены условия теоремы А. Значит, предположение о неполноте системы (1) в E приводит к свойству (56) с любой функцией $b(t) \in B$, что противоречит условию (55). Теорема верна.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (17), а E_2 – какое-нибудь из пространств (34), где вес $\omega_2(t)$ удовлетворяет условиям следствия 7. Тогда если выполнено условие (55) для некоторой функции $b(t) \in B$, то система (1) полна в пространстве E_c , где $E = E_1 \times E_2$, и, в частности, в пространстве (54) и в пространстве $L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$.

В самом деле, в этом случае, как мы видели в ходе доказательства следствия 7, выполнены условия теоремы 6, и следствие 9 вытекает из теоремы 7.

Отметим, что если в условии (55) положить $b(t) \equiv 1$, то мы получим условие (3); данная функция $b(t) \equiv 1$ не входит в класс B . Принадлежность $b(t) \in B$ влечет свойство $b(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, показывающее, что условие (55) с функцией $b(t)$ класса B сильнее условия Саса (3).

Список литературы

1. Müntz Ch., *Über den Approximationssatz von Weierstrass*, H. A. Schwartz Festschrift, Berlin, 1914.
2. Szász O., "Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen", *Math. Ann.*, **77** (1916), 482–496.
3. Винер Н., Пэли Р., *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964.
4. Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
5. Schwartz L., *Étude des sommes d'exponentielles*, Hermann, Paris, 1959.
6. Crum M. M., "On the theorems of Müntz and Szász", *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 433–437.
7. Crum M., "Corrigendum and addendum: on the theorems of Müntz and Szász", *J. London Math. Soc.*, **32** (1957), 512.
8. Siegel A. R., "On the Müntz–Szász theorem for $C[0, 1]$ ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**:1 (1972), 161–166.
9. Седлецкий А. М., "К проблеме Мюнца–Саса для пространства $C[0, 1]$ ", *Тр. Моск. энергетич. ин-та*, 1975, вып. 260, 89–98.
10. Ладыгин В. И., "О проблеме Мюнца–Саса", *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 91–103.
11. Седлецкий А. М., "Проблема Мюнца–Саса и нули аналитических функций", *Тр. 3-й Сарат. зим. шк. "Теория функций и приближ."* 27 янв.–7 февр. 1986 г., Ч. 1, СГУ, Саратов, 1987, 59–63.
12. Седлецкий А. М., *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
13. Doetsch G., *Handbuch der Laplace–Transformation*, B. 1, Verlag Birkhäuser, Basel, 1950.
14. Седлецкий А. М., "Касательные граничные значения преобразований Лапласа. Применение к аппроксимации типа Мюнца–Саса", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:1 (2003), 177–198.
15. Бирман М. Ш., Виленкин Н. Я., Горин Е. А. и др., *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.
17. Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М., 1950.
18. Duren P. L., *Theory of H^p spaces*, Academic Press, N. Y.–London, 1970.
19. Taylor B. A., Williams D. L., "Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc", *Michigan Math. J.*, **18** (1971), 129–139.

А. М. СЕДЛЕЦКИЙ (SEDLITSKI A. M.)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: sedlet@mail.ru

Поступило в редакцию
 31.05.2004