Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О новых результатах, связанных с законом Грама, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 5, 71–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7990>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:30:36

УДК 511.331

М. А. Королёв

О новых результатах, связанных с законом Грама

Доказан ряд новых результатов, связанных с законом Грама в теории дзета-функции Римана и отражающих нерегулярность в распределении ординат комплексных нулей этой функции. Получены результаты о распределении пар, троек, четверок, ... соседних ординат таких нулей, одновременно не подчиняющихся закону Грама.

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, закон Грама, правило Грама.

Введение

Пусть $\vartheta(t)$ – приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ при изменении s вдоль отрезка, соединяющего точки $s = \frac{1}{2}$ и $s = \frac{1}{2} + it$. Для целого n точкой Грама t_n назовем решение уравнения $\vartheta(t_n) = (n-1)\pi$ (известно, что при любом $n \geq 2$ такое решение существует и единственно). Пусть, далее, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$ – упорядоченные по возрастанию ординаты нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащих в верхней полуплоскости.

Определив для заданной ординаты γ_n номер $m = m(n)$ так, чтобы выполнялись неравенства $t_{m-1} < \gamma_n \leq t_m$, следуя [1], положим $\Delta_n = m - n$. Будем говорить, что γ_n удовлетворяет закону Грама в том и только в том случае, когда $\Delta_n = 0$.

Известно (см. [1], [2, с. 355], а также [3], [4]), что число как положительных, так и отрицательных среди первых N членов последовательности Δ_n при $N \rightarrow +\infty$ асимптотически эквивалентно $N/2$, в то время как число номеров $n \leq N$ с условием $\Delta_n = 0$ есть $o(N)$. Отсюда несложно заключить, что неравенство

$$\Delta_n \Delta_{n+1} \neq 0 \quad (1)$$

выполняется для всех $n \leq N$, за исключением, самое большее, $o(N)$ номеров. Естественнo поставить следующий вопрос: как распределены знаки величин Δ_n, Δ_{n+1} , отвечающих условию (1)?

Из определения Δ_n следует, что одновременное выполнение неравенств $\Delta_n > 0, \Delta_{n+1} < 0$ привело бы к противоречивому соотношению $\gamma_{n+1} \leq t_n < \gamma_n$. Таким образом, номера n , отвечающие (1), можно разбить на три класса в зависимости от того, какое из следующих условий окажется выполненным:

- 1) $\Delta_n > 0, \Delta_{n+1} > 0$;
- 2) $\Delta_n < 0, \Delta_{n+1} < 0$;
- 3) $\Delta_n < 0, \Delta_{n+1} > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00759-а).

Вычисления показывают, что каждый из этих классов непуст, а наименьшие принадлежащие им значения n равны соответственно 4923, 3359 и 379. В табл. 1 приводятся данные о числе элементов каждого из этих классов, не превосходящих заданной величины N .

Таблица 1

N	$\Delta_n > 0, \Delta_{n+1} > 0$	$\Delta_n < 0, \Delta_{n+1} < 0$	$\Delta_n < 0, \Delta_{n+1} > 0$
$5 \cdot 10^4$	153	145	263
10^5	382	351	535
$5 \cdot 10^5$	2985	2963	2489
10^6	6992	7055	4865
$1.5 \cdot 10^6$	11384	11493	7210
$2 \cdot 10^6$	16070	16183	9550

Таким образом, среди первых двух миллионов номеров доли попавших в первый, второй и третий классы составляют 0.80%, 0.81% и 0.48%. Однако эта таблица плохо отражает истинное положение дел, поскольку при неограниченном возрастании N эти доли стремятся к 50%, 50% и 0% соответственно.

Похожая картина наблюдается и в случае, если вместо произведений двух соседних членов последовательности Δ_n рассматривать произведения трех, четырех, пяти и, вообще, любого фиксированного числа s подряд идущих величин $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$.

Именно, пусть E_s – множество номеров n с условием $\Delta_n \Delta_{n+1} \dots \Delta_{n+s-1} \neq 0$, и пусть $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ – произвольный набор, элементы которого равны ± 1 . Пусть, далее, $E_s(\mathbf{e})$ – множество тех номеров $n \in E_s$, для которых знак Δ_{n+j-1} совпадает с ε_j для всех $j = 1, \dots, s$.

Отметим, что большая часть из 2^s множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих всем возможным наборам $\mathbf{e}$, является пустой. Действительно, рассмотренный выше пример ($s = 2$, $\mathbf{e} = (1, -1)$) показывает, что непустому множеству не может отвечать набор $\mathbf{e}$, в котором найдется пара соседних элементов вида $\varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_{j+1} = -1$. Иначе говоря, для того чтобы множество $E_s(\mathbf{e})$ было непустым, необходимо, чтобы величины ε_j , составляющие набор $\mathbf{e}$, образовывали неубывающую последовательность $\varepsilon_1 \leq \dots \leq \varepsilon_s$. Поскольку $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, это возможно лишь в случае, когда $\mathbf{e}$ имеет вид

$$(\underbrace{-1, \dots, -1}_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{s-r}),$$

где $0 \leq r \leq s$. Следовательно, общее число допустимых наборов равно $s + 1$.

Как и в случае $s = 2$, среди $s + 1$ множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих допустимым наборам $\mathbf{e}$, можно указать два “исключительных” множества, для каждого из которых число элементов, не превосходящих N , составляет $N/2 + o(N)$ при неограниченном возрастании N . Эти исключительные множества (обозначаемые в дальнейшем через E_s^+ и E_s^-) отвечают наборам $\mathbf{e}^+ = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{e}^- = (-1, \dots, -1)$, составленным из чисел одного знака.

Этот неожиданный эффект “неравноправия” различных допустимых наборов можно пояснить следующим образом. Одновременному наличию в наборе ϵ положительных и отрицательных чисел должны отвечать перемены знака в последовательности величин Δ_n , т. е. неравенства

$$\Delta_n < 0, \quad \Delta_{n+1} > 0. \quad (2)$$

Если Δ_n велико по модулю, то для выполнения неравенств (2) величина Δ_m при переходе от $m = n$ к $m = n + 1$ должна совершить достаточно резкий скачок. С другой стороны, этот скачок может быть и не таким резким, но для этого необходимо, чтобы модуль величины Δ_n был не очень велик. Таким образом, для частого осуществления условий (2) имеются два препятствия.

Первое препятствие заключается в том, что при больших n величина $|\Delta_n|$, как правило, очень велика. Можно показать (см. [1], [3]), что для любой сколь угодно медленно растущей функции $\Phi(x) > 0$ количество номеров $n \leq N$ с условием

$$|\Delta_n| \leq \Phi^{-1}(n) \sqrt{\ln \ln n}$$

есть $o(N)$. Иными словами, “почти всегда” Δ_n имеет порядок $\sqrt{\ln \ln n}$ и выше.

Второе препятствие состоит в следующем. Согласно лемме 2 настоящей работы резкий скачок при переходе от Δ_n к Δ_{n+1} (и, как следствие, большое значение разности $\Delta_{n+1} - \Delta_n$) возникает в случае, когда соседние ординаты γ_n и γ_{n+1} разделены большим числом точек Грама. Можно, однако, показать (см. [5]), что доля номеров n , для которых промежутки $[\gamma_n, \gamma_{n+1})$ содержит не менее k таких точек, не превосходит $c_1 e^{-ck}$, где $c, c_1 > 0$, и, таким образом, чрезвычайно быстро убывает с ростом k .

Итак, если величина Δ_n положительна (отрицательна), то при любом фиксированном $s \geq 2$ все величины $\Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$ “почти всегда” будут иметь тот же знак, что и Δ_n . Поскольку число положительных (отрицательных) членов в последовательности Δ_n , $n \leq N$, эквивалентно $N/2$, то и число номеров n из того же промежутка, попавших в каждое из множеств E_s^+ , E_s^- , также эквивалентно $N/2$.

Строгому обоснованию приведенных выше рассуждений посвящен § 1 настоящей работы.

Желая исследовать поведение произведений $\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}$ более подробно, можно рассмотреть следующую задачу. Как отмечалось выше, в подавляющем большинстве случаев значение $|\Delta_n|$ близко по порядку к $\sqrt{\ln \ln n}$. Естественно ожидать, что и величины $\Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$ для “почти всех” n не только имеют тот же знак, что и Δ_n , но и тот же порядок, а модуль произведения $|\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|$ будет близок к $(\ln \ln n)^{s/2}$. Возможно ли, задавшись фиксированными числами a и b , $0 < a < b$, указать асимптотическую формулу для количества номеров $n \leq N$, принадлежащих множеству E_s^+ (или E_s^-) и таких, что

$$a(\ln \ln N)^{s/2} < |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}| \leq b(\ln \ln N)^{s/2}?$$

Положительный ответ на этот вопрос дается в § 2.

В работе используются следующие обозначения: $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ – сколь угодно малое фиксированное число; N, M – целые числа, удовлетворяющие условиям

$N \geq N_0(\varepsilon) > 1$, $N^{\alpha+\varepsilon_0} \leq M \leq N^{\alpha+\varepsilon}$, $\alpha = \frac{27}{82}$, $\varepsilon_0 = 0.9\varepsilon$. Там, где это не приводит к недоразумениям, будем записывать

$$\sum_n \dots \text{ вместо } \sum_{N < n \leq N+M} \dots, \quad \sum_{n \in A} \dots \text{ вместо } \sum_{\substack{N < n \leq N+M \\ n \in A}} \dots$$

(A – произвольное множество, в том числе бесконечное). Далее, $L = \ln \ln N$; $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots$ – комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы и в разных соотношениях, вообще говоря, разные; $c, c_0, c_1, c_2, \dots$ – положительные величины, зависящие лишь от ε ; $s \geq 2$ – фиксированное целое число.

§ 1. Распределение знаков в наборах $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$

Цель настоящего параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ – произвольный допустимый набор с условием $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \dots, s$, и пусть $\mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{e}; N, M)$ – число номеров n , $N < n \leq N + M$, для которых выполнены равенства

$$\text{sign}(\Delta_{n+j-1}) = \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (3)$$

Тогда

$$\mu(\mathbf{e}) = \kappa \cdot \frac{M}{2} + \theta R, \quad R = \frac{csM \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}},$$

где

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{e} = \mathbf{e}^+ \text{ или } \mathbf{e} = \mathbf{e}^-, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поясним идею доказательства на примере подсчета числа μ номеров, для которых одновременно выполнены неравенства

$$\Delta_n \geq 1, \quad \Delta_{n+1} \geq 1. \quad (4)$$

Полагая последовательно $x = \Delta_n, \Delta_{n+1}$ в тождестве

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|x|}{x} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

и перемножая получившиеся равенства, в случае $\Delta_n \Delta_{n+1} \neq 0$ заключаем, что величина

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{|\Delta_n|}{\Delta_n} + \frac{|\Delta_{n+1}|}{\Delta_{n+1}} + \frac{|\Delta_n \Delta_{n+1}|}{\Delta_n \Delta_{n+1}} \right)$$

принимает значения 1 или 0 в зависимости от того, выполнены или не выполнены условия (4). Таким образом, подсчет числа μ сводится к вычислению сумм

$$V_1 = \sum_n' \frac{|\Delta_n|}{\Delta_n}, \quad V_2 = \sum_n' \frac{|\Delta_n \Delta_{n+1}|}{\Delta_n \Delta_{n+1}}$$

(здесь и далее штрих означает суммирование по тем дробям, знаменатели которых отличны от нуля).

Сумма V_1 совпадает, очевидно, с разностью между числом положительных и числом отрицательных членов в последовательности Δ_n , $N < n \leq N + M$, и в силу теоремы Сельберга (лемма 5 настоящей статьи) не превосходит по порядку $M/\sqrt{\ln L}$.

Вычисление суммы V_2 опирается, помимо теоремы Сельберга, на тот факт, что разность $\Delta_{n+1} - \Delta_n$ “в среднем” ведет себя как постоянная величина (см. леммы 1–4). Это позволяет, грубо говоря, заменить в каждом из слагаемых V_2 величину Δ_{n+1} на Δ_n и заключить, что $V_2 \sim M$ (см. леммы 6–9).

Доказательству теоремы 1 предположим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. При любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^\kappa < c_1 \Gamma(\kappa + 1) \left(\frac{2\pi c_0}{\ln N} \right)^\kappa M,$$

где $c_0 = e^{20} \varepsilon^{-1.5}$, $c_1 = e^{24} \varepsilon^{-1.5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 3 из работы [5] (см. также замечание 2 к этой теореме, в котором следует положить $T = \gamma_N$, $T + H = \gamma_{N+M}$).

В следующих трех леммах изучаются свойства разностей $r_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.

ЛЕММА 2. Величина $r_n + 1$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определив номера μ и ν из неравенств

$$t_{\mu-1} < \gamma_{n-1} \leq t_\mu, \quad t_{\nu-1} < \gamma_n \leq t_\nu,$$

получим $\Delta_n = \nu - n$, $\Delta_{n-1} = \mu - n + 1$, $1 + r_n = \nu - \mu$, но разность $\nu - \mu$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При любом n справедливо неравенство $r_n \geq -1$.

ЛЕММА 3. При любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n |r_n|^\kappa \leq 1.5 c_1 (c_0 \kappa)^\kappa M$$

(здесь и далее c_0, c_1 – постоянные из леммы 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_{\nu-1} < \gamma_{N+M} \leq t_\nu$. Тогда

$$h = t_\nu - t_{\nu-1} = \frac{2\pi}{\ln \nu} \left(1 + \frac{\ln \ln \nu}{\ln \nu} (1 + o(1)) \right) > \frac{2\pi}{\ln N}$$

– длина наикратчайшего из промежутков Грама, имеющих непустое пересечение с отрезком $[\gamma_N, \gamma_{N+M}]$. Следовательно, при любом n , $N < n \leq N + M$, число точек Грама, попавших на интервал $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$, не превосходит

$(\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1} + 1$. Отсюда по лемме 2 заключаем, что $r_n \leq (\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1}$. Пользуясь оценкой леммы 1, получим

$$\begin{aligned} \sum_n |r_n|^\kappa &\leq \sum_{n: r_n = -1} 1 + \sum_{n: r_n \geq 1} ((\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1})^\kappa \leq M + c_1 \Gamma(\kappa + 1) \left(\frac{2\pi c_0}{h \ln N} \right)^\kappa M \\ &< M + 1.1c_1(\kappa c_0)^\kappa M < 1.5c_1(\kappa c_0)^\kappa M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для целых i, j с условием $0 \leq i < j$ положим $r_n(i, j) = \Delta_{n+j} - \Delta_{n+i}$.

ЛЕММА 4. Пусть $0 \leq i < j \leq s$. Тогда при любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n |r_n(i, j)|^\kappa \leq 2c_1(c_0 s \kappa)^\kappa M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения r_n и $r_n(i, j)$ следует тождество

$$r_n(i, j) = r_{n+j} + r_{n+j-1} + \dots + r_{n+i+1}.$$

Применяя к нему неравенство Гёльдера наряду с оценкой леммы 3, получим

$$\begin{aligned} \sum_n |r_n(i, j)|^\kappa &\leq \sum_n (j-i)^{\kappa-1} (|r_{n+j}|^\kappa + |r_{n+j-1}|^\kappa + \dots + |r_{n+i+1}|^\kappa) \\ &\leq s^{\kappa-1} \sum_n \sum_{t=i+1}^j |r_{n+t}|^\kappa \leq s^\kappa \sum_{N < n \leq N+M+s} |r_n|^\kappa \\ &\leq s^\kappa \cdot 1.5c_1(\kappa c_0)^\kappa (M + s) < 2c_1(\kappa c_0 s)^\kappa M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При любых a и b , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, число величин Δ_n с условиями

$$\frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{L}{2}} < \Delta_n \leq \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{L}{2}}, \quad N < n \leq N + M,$$

выражается формулой

$$M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du + \frac{\theta c_2}{\sqrt{\ln L}} \right), \quad c_2 = 2.2e^{22.4} \varepsilon^{-1.5}.$$

В частности, число тех n , для которых $\Delta_n = 0$, не превосходит $\frac{1.1c_2 M}{\sqrt{\ln L}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [4, теорема 3].

ЛЕММА 6. Пусть $0 \leq j \leq s$ — целое число. Тогда при любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum'_n |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} \leq \frac{2c_2 M}{\sqrt{\ln L}}$$

(здесь и далее c_2 — постоянная из леммы 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k_r – число величин Δ_n с условием $|\Delta_n| = r$, $N < n \leq N + M + s$, $r = 0, 1, 2, \dots$. Положив $R = \sqrt[4]{L}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_n' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} &\leq \sum_{N < n \leq N+M+s} |\Delta_n|^{-\kappa} = \sum_{r \geq 1} k_r r^{-\kappa} \\ &= \left(\sum_{r \leq R} + \sum_{r > R} \right) k_r r^{-\kappa} \leq \left(\sum_{r \leq R} k_r \right) + R^{-\kappa} \left(\sum_{r > R} k_r \right). \end{aligned}$$

Полагая $x = \pi R \sqrt{2/L}$ в лемме 5, находим

$$\sum_{r \leq R} k_r \leq (M + s) \left(\frac{2x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{c_2}{\sqrt{\ln L}} \right) < \frac{1.5c_2 M}{\sqrt{\ln L}}.$$

Таким образом, исходная сумма не превосходит

$$\frac{1.5c_2 M}{\sqrt{\ln L}} + MR^{-\kappa} < \frac{2c_2 M}{\sqrt{\ln L}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $0 \leq i < j \leq s$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n' \left| \frac{r_n(i, j)}{\Delta_{n+j}} \right| \leq \frac{3c_0 c_2 s M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\kappa = 0.5 \ln \ln L$. Применяя к исходной сумме неравенство Гёльдера наряду с оценками лемм 4, 6, получим

$$\begin{aligned} \sum_n' \left| \frac{r_n(i, j)}{\Delta_{n+j}} \right| &\leq \left(\sum_n |r_n(i, j)|^\kappa \right)^{1/\kappa} \left(\sum_n' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa/(\kappa-1)} \right)^{1-1/\kappa} \\ &\leq (2c_1 (c_0 s \kappa)^\kappa M)^{1/\kappa} \left(\frac{2c_2 M}{\sqrt{\ln L}} \right)^{1-1/\kappa} < \frac{3c_0 c_2 s M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $e_n = \text{sign } \Delta_n$, так что $e_n = |\Delta_n|/\Delta_n$ при $\Delta_n \neq 0$.

ЛЕММА 8. Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2m} < i_{2m+1}$ – целые числа. Тогда равенства

$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \dots e_{n+i_{2m}} = 1 + 2\theta_1 f_m, \quad (5)$$

$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \dots e_{n+i_{2m+1}} = e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_2 f_m, \quad (6)$$

в которых

$$f_m = \left| \frac{r_n(i_1, i_2)}{\Delta_{n+i_2}} \right| + \left| \frac{r_n(i_3, i_4)}{\Delta_{n+i_4}} \right| + \dots + \left| \frac{r_n(i_{2m-1}, i_{2m})}{\Delta_{n+i_{2m}}} \right|,$$

имеют место в случае, когда произведения в левых частях (5), (6) отличны от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (5) индукцией по m . Не ограничивая общности, можем считать $i_1 = 0$. Полагая для краткости $i_2 = i$ и пользуясь тем, что $|x + y| = |x| + \theta y$ при любых вещественных x и y , в случае $m = 1$ получим

$$\begin{aligned} e_n e_{n+i} &= \frac{|\Delta_n \Delta_{n+i}|}{\Delta_n \Delta_{n+i}} = \frac{|\Delta_n (\Delta_n + r_n(0, i))|}{\Delta_n \Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_n^2 + \theta_1 \Delta_n r_n(0, i)}{\Delta_n \Delta_{n+i}} \\ &= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+i}} + \theta_1 \frac{r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_{n+i} - r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} + \theta_1 \frac{r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} \\ &= 1 + (\theta_1 - 1) \frac{r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} = 1 + 2\theta_2 f_1. \end{aligned}$$

Допустим, что формула (5) верна при $m = 1, \dots, \mu$. По предположению индукции для $m = \mu + 1$ имеем

$$\begin{aligned} e_{n+i_1} \cdots e_{n+i_{2\mu}} e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} &= (1 + 2\theta_3 f_\mu) e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} \\ &= e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_5 \left| \frac{r_n(i_{2\mu+1}, i_{2\mu+2})}{\Delta_{n+i_{2\mu+2}}} \right| + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_6 f_{\mu+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать. Формула (6) следует из (5). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2m} < i_{2m+1} \leq s$ – фиксированные целые числа. Тогда справедливы соотношения

$$\sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m+1}} = \theta_1 R, \quad \sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m}} = M + \theta_2 R,$$

в которых

$$R = \frac{4c_0 c_2 s^2 M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим суммы из условия леммы через σ_1 и σ_2 соответственно. Согласно лемме 8 имеем

$$\sigma_1 = \sum'_n (e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_1 f_m) = \sigma^{(0)} + 2\theta_2 \sum_{k=1}^m \sigma^{(k)},$$

где

$$\sigma^{(0)} = \sum'_n e_{n+i_{2m+1}}, \quad \sigma^{(k)} = \sum'_n \left| \frac{r_n(i_{2k-1}, i_{2k})}{\Delta_{n+i_{2k}}} \right|.$$

Заметим следующее: если l и r – количества нулевых членов некоторых последовательностей a_n и b_n , $N < n \leq N + M$, то число нулевых членов в последовательности $a_n b_n$ не превосходит $l + r$. Отсюда и из леммы 5 заключаем, что число тех n , $N < n \leq N + M$, для которых $\Delta_{n+i_1} \Delta_{n+i_2} \cdots \Delta_{n+i_{2m}} = 0$, не превосходит величины

$$\frac{1.1 \cdot 2mc_2 M}{\sqrt{\ln L}} \leq \frac{1.1c_2 s M}{\sqrt{\ln L}}. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\sigma^{(0)} = \sum_n e_{n+i_{2m+1}} + \theta_2 \frac{1.1c_2 s M}{\sqrt{\ln L}} = \sum_n e_n + \theta_3 \left(\frac{1.1c_2 s M}{\sqrt{\ln L}} + s \right).$$

Последняя сумма по n совпадает с разностью между числом положительных и отрицательных членов последовательности Δ_n , $N < n \leq N + M$, и в силу леммы 5 не превосходит по модулю

$$M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du + \frac{c_2}{\sqrt{\ln L}} \right) - M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2} du - \frac{c_2}{\sqrt{\ln L}} \right) = \frac{2c_2 M}{\sqrt{\ln L}}.$$

Оценивая каждую из сумм $\sigma^{(k)}$ по лемме 6, находим

$$|\sigma_1| \leq \frac{2c_2 M}{\sqrt{\ln L}} + \frac{1.1c_2 s M}{\sqrt{\ln L}} + s + \frac{3c_0 c_2 s^2 M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}} < \frac{4c_0 c_2 s^2 M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}.$$

С помощью тех же рассуждений, что и выше, заключаем, что число ненулевых слагаемых в σ_2 отличается от M не более чем на (7). Вновь применяя леммы 6, 8, получим

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum'_n (1 + 2\theta_4 f_m) \\ &= M + \theta_5 \left(\frac{1.1c_2 s M}{\sqrt{\ln L}} + s + \frac{3c_0 c_2 s^2 M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}} \right) = M + \theta_6 \frac{4c_0 c_2 s^2 M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим произведение

$$E_n = \frac{1 + \varepsilon_1 e_n}{2} \frac{1 + \varepsilon_2 e_{n+1}}{2} \dots \frac{1 + \varepsilon_s e_{n+s-1}}{2}.$$

Поскольку

$$\frac{1 + \varepsilon_j e_{n+j-1}}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_{n+j-1} = \varepsilon_j, \\ 0, & \text{если } e_{n+j-1} = -\varepsilon_j, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } e_{n+j-1} = 0, \end{cases}$$

то $0 \leq E_n \leq \frac{1}{2}$ в случае, когда хотя бы одно из чисел Δ_{n+j} , $j = 0, 1, \dots, s-1$, обращается в нуль. Как было отмечено по ходу доказательства леммы 9, общее число таких номеров n не превосходит (7). Для оставшихся n имеем $E_n = 1$ или $E_n = 0$, в зависимости от того, выполнены или не выполнены условия (3). Следовательно,

$$\mu(\mathbf{e}) = \sum_n E_n + \frac{\theta}{2} \frac{1.1c_2 s M}{\sqrt{\ln L}}.$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \sum_n E_n &= 2^{-s} \sum_n (1 + \varepsilon_1 e_n) \dots (1 + \varepsilon_s e_{n+s-1}) \\ &= 2^{-s} \sum_n \left(1 + (\varepsilon_1 e_n + \dots + \varepsilon_s e_{n+s-1}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k \leq s} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k} e_{n+i_1} \dots e_{n+i_k} + \dots + \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s e_n \dots e_{n+s-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{-s} \left(\sum_n 1 + \left(\varepsilon_1 \sum_n e_n + \cdots + \varepsilon_s \sum_n e_{n+s-1} \right) + \cdots \right. \\
&\quad \cdots + \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_k \leq s} \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k} \sum_n e_{n+i_1} \cdots e_{n+i_k} + \cdots \\
&\quad \left. \cdots + \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s \sum_n e_n \cdots e_{n+s-1} \right).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 9 общий вклад сумм, отвечающих произведениям нечетного числа сомножителей e_{n+i} , оценивается по модулю величиной

$$2^{-s} \sum_{1 \leq k \leq (s+1)/2} \binom{s}{2k-1} R = 0.5R, \quad R = \frac{4c_0 c_2 s^2 M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}.$$

Согласно той же лемме вклад сумм, отвечающих произведениям четного числа сомножителей, представляется в виде $2^{-s} M(1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \cdots)$, где

$$\sigma_2 = \sum_{0 < i < j \leq s} \varepsilon_i \varepsilon_j, \quad \sigma_4 = \sum_{0 < i < j < k < r \leq s} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_r, \quad \dots$$

– элементарные симметрические функции величин $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$.

Положим

$$f(x) = (x - \varepsilon_1) \cdots (x - \varepsilon_s) = x^s - \sigma_1 x^{s-1} + \sigma_2 x^{s-2} - \cdots + (-1)^s \sigma_s.$$

Несложно проверить, что сумма $\sigma = 1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \cdots$ совпадает с суммой коэффициентов многочлена

$$g(x) = \frac{1}{2} (f(x) + (-1)^s f(-x)),$$

так что $\sigma = g(1)$. Пусть теперь l и m обозначают количества положительных и отрицательных чисел в наборе $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$, так что $l + m = s$. Тогда

$$f(x) = (x-1)^l (x+1)^m, \quad g(x) = \frac{1}{2} ((x-1)^l (x+1)^m + (x-1)^m (x+1)^l).$$

Очевидно, $g(1) = 0$ при любых l и m , отличных от нуля (что отвечает наборам $\mathbf{e}$, содержащим числа разных знаков). Если же $m = 0$ или $l = 0$ (что соответствует наборам $\mathbf{e}^+$, $\mathbf{e}^-$), то $g(1) = \frac{1}{2} \cdot 2^s = 2^{s-1}$.

Собирая вместе полученные результаты, находим

$$\begin{aligned}
\sum_n E_n &= \kappa \frac{M}{2} + \theta_1 R, \\
\mu(\mathbf{e}) &= \kappa \frac{M}{2} + \theta_2 \left(R + \frac{0.55 c_2 s M}{\sqrt{\ln L}} \right) = \kappa \frac{M}{2} + \theta_3 \frac{5c_0 c_2 s^2 M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 2. Распределение значений произведений $\Delta_n \Delta_{n+1} \cdots \Delta_{n+s-1}$

Основная цель настоящего параграфа состоит в доказательстве следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s \geq 2$ – фиксированное целое число, E – любое из множеств E_s^+ , E_s^- . Тогда при любом $x > 0$ число $E(x)$ номеров n , $N < n \leq N+M$, принадлежащих E и отвечающих условию

$$0 < |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}| \leq (\pi^{-1} \sqrt{x \ln \ln N})^s,$$

выражается формулой

$$E(x) = \frac{M}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-1/2} e^{-u} du + O((\ln \ln L)^{-0.5}) \right).$$

Доказательство теоремы 2 использует метод работы А. Гоша [6] и основано на приближении характеристической функции, отвечающей распределению случайной величины $(|\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|)^{1/s}$, $n \in E$, с последующим использованием неравенства Берри–Эссеена. Необходимое для этой цели вычисление моментов, т. е. сумм

$$\sum_{n \in E} |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|^{k/s}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и, в частности, учет ограничения $n \in E$ требуют большого числа вспомогательных утверждений (леммы 10–24).

Положим $k_0 = [0.1(\ln(1/\varepsilon))^{-1} \ln L]$, $\delta_n = \pi \Delta_n \sqrt{2/L}$, $\varepsilon_n(i, j) = \delta_{n+j} - \delta_{n+i}$, так что $\varepsilon_n(i, j) = \pi r_n(i, j) \sqrt{2/L}$. Вместо $\varepsilon_n(0, j)$ в ряде случаев будем записывать $\varepsilon_n(j)$. Далее, для $a \geq 0$ положим

$$\varkappa(a) = \frac{2^a}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Тогда при целом $k \geq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \varkappa(k) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2u)^k e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} (v\sqrt{2})^k e^{-v^2/2} dv, \\ \varkappa(2k) &= \frac{(2k)!}{k!}, \quad \varkappa(2k+1) = \frac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}} k! \end{aligned} \quad (8)$$

и оценки

$$\frac{6}{5} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} < \varkappa(k) < \frac{3}{2} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}. \quad (9)$$

ЛЕММА 10. При целом r , $1 \leq r \leq \sqrt{L}$, имеют место соотношения

$$\sum_n \delta_n^{2r} = \varkappa(2r) \frac{M}{2^r} \left(1 + \frac{1.1\theta c_3^r}{\sqrt{L}}\right), \quad \left| \sum_n \delta_n^{2r-1} \right| < \frac{45}{c_3} \left(\frac{c_3^2 r}{150}\right)^r \frac{M}{\sqrt{L}}, \quad (10)$$

где $c_3 = 0.27c_2$. Кроме того, при $1 \leq r \leq k_0$ справедливо неравенство

$$\sum_n \delta_n^{2r} < 1.6M \left(\frac{2r}{e}\right)^r. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (10) являются следствиями теорем 4, 5 из [4]. Применяя оценку сверху из (9), получим

$$\sum_n \delta_n^{2r} < M \left(1.5 \left(\frac{2r}{e} \right)^r + \frac{1.7}{\sqrt{L}} \left(\frac{4Ar}{e} \right)^r \right), \quad A = e^{21} \varepsilon^{-1.5}. \quad (12)$$

Замечая, что

$$(2A)^r \leq \exp \left\{ r \left(21 + \ln 2 + 1.5 \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right\} < \exp \{ 0.45 \ln L \} < 0.05 \sqrt{L}$$

при $1 \leq r \leq k_0$, из (12) получим соотношение (11). Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $0 \leq i < j \leq s$. Тогда при любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n |\varepsilon_n(i, j)|^\kappa \leq 2c_1 \left(\frac{4.5c_0 \kappa s}{\sqrt{L}} \right)^\kappa M. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 4.

ЛЕММА 12. Пусть i, j, k, l, r, s и t – целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leq i < j \leq s$, $1 \leq t < s$, $0 \leq l \leq s$, $1 \leq r \leq k_0$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_n |\delta_{n+l}|^r |\varepsilon_n(i, j)|^t \leq 1.8 \sqrt{c_1} \left(\frac{2r}{e} \right)^{r/2} \left(\frac{9c_0 s^2}{\sqrt{L}} \right)^t M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь оценками (10), (11), (13) наряду с неравенством Коши, получим

$$\begin{aligned} \sum_n |\delta_{n+l}|^r |\varepsilon_n(i, j)|^t &\leq \left(\sum_{N < n \leq N+M+s} \delta_n^{2r} \right)^{1/2} \left(\sum_n \varepsilon_n^{2t}(i, j) \right)^{1/2} \\ &< \left(1.6 \left(\frac{2r}{e} \right)^r (M+s) \cdot 2c_1 \left(\frac{9c_0 \kappa s^2}{\sqrt{L}} \right)^{2t} M \right)^{1/2} \leq 1.8 \sqrt{c_1} \left(\frac{2r}{e} \right)^{r/2} \left(\frac{9c_0 s^2}{\sqrt{L}} \right)^t M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть t – произвольное целое число с условием $1 \leq t < s$. Положим

$$\xi_n(t) = \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)|,$$

где суммирование ведется по всем $\binom{s-1}{t}$ упорядоченным наборам $(i_1, \dots, i_t)$ натуральных чисел, меньших s .

ЛЕММА 13. Пусть k – целое число, $2 \leq k \leq k_0$, $l = \min(k, s)$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n \sum_{t=1}^{l-1} |\delta_n|^{h-t} \xi_n(t) < 18c_0 \sqrt{c_1} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2},$$

где h – любое из чисел k, s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует, что исходная сумма не превосходит величины

$$\sum_{t=1}^{s-1} \frac{1}{t} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} \sum_n |\delta_n|^{h-t} (|\varepsilon_n(i_1)|^t + \dots + |\varepsilon_n(i_t)|^t),$$

которая в силу леммы 12 ограничена сверху суммой

$$1.8\sqrt{c_1}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \sum_{t=1}^{s-1} \binom{s-1}{t} x^t, \quad x = \frac{9c_0s^2}{\sqrt{L}}.$$

Из формулы конечных приращений Лагранжа заключаем, что сумма по t не превосходит

$$(1+x)^{s-1} - 1 \leq (s-1)x(1+x)^{s-2} < \frac{10c_0s^3}{\sqrt{L}}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 14. Пусть k, t – целые числа, $k \geq 1, 1 \leq t < s$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n \xi_n^{2k}(t) \leq 2c_1M\left(\frac{9c_0ks^3}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, а также из неравенства Гёльдера заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_n \xi_n^{2k}(t) &\leq \sum_n \left(t^{-1} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} (|\varepsilon_n(i_1)|^t + \dots + |\varepsilon_n(i_t)|^t) \right)^{2k} \\ &\leq \sum_n t^{-1} \binom{s-1}{t}^{2k-1} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} (|\varepsilon_n(i_1)|^{2kt} + \dots + |\varepsilon_n(i_t)|^{2kt}). \end{aligned} \quad (14)$$

Меняя порядок суммирования и пользуясь оценкой (13), убеждаемся в том, что правая часть (14) не превосходит

$$t^{-1} \binom{s-1}{t}^{2k} t \cdot 2c_1 \left(\frac{9c_0kts}{\sqrt{L}} \right)^{2kt} M < 2c_1M \left(\frac{9c_0ks^3}{\sqrt{L}} \right)^{2kt}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть k, t – целые числа, $1 \leq t < s, 1 \leq k \leq k_0$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n |\delta_n|^{k(s-t)/s} (\xi_n(t))^{k/s} < 1.6\sqrt[4]{c_1}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_0\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right)^{kt/s}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим сумму из (15) через C_t . Согласно неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} C_t &\leq \left(\sum_n \delta_n^{2k} \right)^{1/2-t/(2s)} \left(\sum_n (\xi_n(t))^{2k/(s+t)} \right)^{1/2+t/(2s)} \\ &\leq \left(\sum_n \delta_n^{2k} \right)^{1/2-t/(2s)} \left(\sum_n \xi_n^{2k}(t) \right)^{1/(2s)} M^{(s+t-1)/(2s)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценивая правую часть (16) с помощью лемм 10, 14, находим

$$\begin{aligned} C_t &\leq \left(1.6M\left(\frac{2k}{e}\right)^k\right)^{1/2-t/(2s)} \left(2c_1M\left(\frac{9c_0ks^3}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}\right)^{1/(2s)} M^{(s+t-1)/(2s)} \\ &< \sqrt{1.6}\sqrt[4]{2c_1}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_0\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right)^{kt/s}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы.

Положим

$$\eta_n = \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t} \xi_n(t).$$

ЛЕММА 16. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq k_0$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n \eta_n^{k/s} < 1.7\sqrt[4]{c_1}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_0\sqrt{k}s^4}{\sqrt{L}}\right)^{k/s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Гёльдера и очевидного соотношения $(a + b + \dots + c)^{1/s} \leq a^{1/s} + b^{1/s} + \dots + c^{1/s}$, где $a, b, \dots, c \geq 0$, заключаем, что

$$\eta_n^k \leq (s-1)^{k-1} \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{k(s-t)} \xi_n^k(t), \quad \eta_n^{k/s} \leq s^{k/s} \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{k(s-t)/s} (\xi_n(t))^{k/s}.$$

Воспользовавшись оценкой леммы 15, получим

$$\begin{aligned} \sum_n \eta_n^{k/s} &\leq s^{k/s} \sum_{t=1}^{s-1} 1.6\sqrt[4]{c_1}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_0\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right)^{kt/s} \\ &< 1.7\sqrt[4]{c_1}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} s^{k/s} \left(\frac{10.5c_0\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right)^{k/s}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 17. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq k_0$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n |\delta_n|^{k-1} \eta_n^{1/s} < 21\sqrt{c_0}\sqrt[4]{c_1} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} ML^{-1/(2s)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство Коши и используя оценки из лемм 10, 16, в случае $k \geq 2$ получим

$$\begin{aligned} \sum_n |\delta_n|^{k-1} \eta_n^{1/s} &\leq \left(\sum_n \delta_n^{2(k-1)}\right)^{1/2} \left(\sum_n \eta_n^{2/s}\right)^{1/2} \\ &\leq \left(1.6\left(\frac{2(k-1)}{e}\right)^{k-1} M\right)^{1/2} \left(1.7\sqrt[4]{c_1} \cdot \frac{4M}{e} \left(\frac{10.5\sqrt{2}c_0s^4}{\sqrt{L}}\right)^{2/s}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\left(\frac{2(k-1)}{e}\right)^{k-1} < \frac{1}{2} \left(\frac{2k}{e}\right)^k, \quad (10.5\sqrt{2}c_0s^4)^{1/s} < 15.5\sqrt{c_0}, \quad \sqrt[4]{c_1} < 0.05\sqrt[4]{c_1},$$

получим требуемое. В случае $k = 1$ искомая оценка следует из леммы 16.

ЛЕММА 18. *Справедливо равенство $\delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} = \delta_n^s + \theta \eta_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения величин $\varepsilon_n(i)$ имеем

$$\begin{aligned} \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} &= \delta_n (\delta_n + \varepsilon_n(1)) (\delta_n + \varepsilon_n(2)) \cdots (\delta_n + \varepsilon_n(s-1)) \\ &= \delta_n^s + \sum_{t=1}^{s-1} \delta_n^{s-t} \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_t < s} \varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t) = \delta_n^s + \theta \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t} \xi_n(t) \\ &= \delta_n^s + \theta \eta_n. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $\kappa_n = |\delta_n \cdots \delta_{n+s-1}|^{1/s}$.

ЛЕММА 19. *Пусть E – любое из множеств E_s^+ , E_s^- . Тогда для целого k с условием $1 \leq k \leq k_0$ справедливо равенство*

$$\sum_{n \in E} \kappa_n^k = \sum_{n \in E} |\delta_n|^k + 22\theta k \sqrt{c_0} \sqrt[4]{c_1} \left(\frac{8k}{e} \right)^{k/2} M L^{-1/(2s)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 18 имеем

$$\kappa_n = |\delta_n^s + \theta_1 \eta_n|^{1/s} = |\delta_n| + \theta_2 \eta_n^{1/s}.$$

Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа наряду с неравенством Гёльдера, находим

$$\kappa_n^k = |\delta_n|^k + \theta_3 k \eta_n^{1/s} (|\delta_n| + \eta_n^{1/s})^{k-1} = |\delta_n|^k + \theta_4 k \cdot 2^{k-1} (|\delta_n|^{k-1} \eta_n^{1/s} + \eta_n^{k/s}).$$

Просуммируем обе части последнего равенства по $n \in E$, применяя оценки лемм 16, 17; получим

$$\sum_{n \in E} \kappa_n^k = \sum_{n \in E} |\delta_n|^k + \theta_5 k \cdot 2^{k-1} (\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_n |\delta_n|^{k-1} \eta_n^{1/s} < 21 \sqrt{c_0} \sqrt[4]{c_1} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} M L^{-1/(2s)}, \\ \Sigma_2 &= \sum_n \eta_n^{k/s} < 1.7 \sqrt[4]{c_1} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} M \delta, \quad \delta = \left(\frac{10.5 c_0 \sqrt{k} s^4}{\sqrt{L}} \right)^{k/s}. \end{aligned}$$

Если $k \geq 2$, то множитель δ не превосходит величины

$$(10.5 c_0 \sqrt{k_0} s^4 L^{-1/2})^{k/s} < (L^{-2/5})^{2/s} < L^{-1/(2s)},$$

а если $k = 1$, то величины

$$(10.5 c_0 s^4)^{1/s} L^{-1/(2s)} < 13 \sqrt{c_0} L^{-1/(2s)}.$$

Таким образом,

$$\Sigma_2 < 23\sqrt{c_0}\sqrt[4]{c_1}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} ML^{-1/(2s)},$$

$$k \cdot 2^{k-1}(\Sigma_1 + \Sigma_2) < 22k\sqrt{c_0}\sqrt[4]{c_1}\left(\frac{8k}{e}\right)^{k/2} ML^{-1/(2s)}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$D_n = \frac{1}{2}(|\delta_n| + \delta_n), \quad d_n = \frac{1}{2}(|\delta_n| - \delta_n).$$

ЛЕММА 20. Пусть k – целое число, $s \leq k \leq k_0$. Тогда справедливы соотношения

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \quad \sum_{n \in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R, \quad (17)$$

где

$$R = 36c_0\sqrt{c_1}s^3 \frac{M}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 18 имеем $\delta_n^s = \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} - \theta_1 \eta_n$, откуда

$$\delta_n^k = \delta_n^{k-s} \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} + \theta_2 |\delta_n|^{k-s} \eta_n. \quad (18)$$

Чтобы доказать первое из соотношений (17), положим $D(n) = D_n \cdots D_{n+s-1}$. Поскольку

$$D(n) = \begin{cases} \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1}, & \text{если } n \in E_s^+, \\ 0, & \text{если } n \notin E_s^+, \end{cases}$$

то ввиду (18) получаем

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_{n \in E_s^+} (\delta_n^{k-s} D(n) + \theta_2 |\delta_n|^{k-s} \eta_n) = \sum_n \delta_n^{k-s} D(n) + \theta_3 \sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n. \quad (19)$$

Далее, несложно заметить, что

$$\begin{aligned} D_{n+j} &= \frac{1}{2}(|\delta_n + \varepsilon_n(j)| + (\delta_n + \varepsilon_n(j))) = \frac{1}{2}(|\delta_n| + \theta_4 |\varepsilon_n(j)|) + \frac{1}{2}(\delta_n + \varepsilon_n(j)) \\ &= D_n + \theta_5 |\varepsilon_n(j)|. \end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D(n) &= D_n(D_n + \theta' |\varepsilon_n(1)|)(D_n + \theta'' |\varepsilon_n(2)|) \cdots (D_n + \theta^{(s-1)} |\varepsilon_n(s-1)|) \\ &= D_n^s + \sum_{t=1}^{s-1} D_n^{s-t} \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_t < s} \theta^{(i_1)} \cdots \theta^{(i_t)} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| \\ &= D_n^s + \theta_6 \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t} \xi_n(t) = D_n^s + \theta_6 \eta_n. \end{aligned}$$

Возвращаясь к равенству (19), получаем

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n \delta_n^{k-s} (D_n^s + \theta_6 \eta_n) + \theta_3 \sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n = \sum_n \delta_n^{k-s} D_n^s + 2\theta_7 \sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n.$$

Оценивая последнюю сумму с помощью леммы 13, находим

$$\sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n = \sum_{t=1}^{s-1} \sum_n |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) < 18c_0 \sqrt{c_1} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}.$$

Замечая, наконец, что $\delta_n^{k-s} D_n^s = D_n^k$, приходим к первому равенству из (17). Второе равенство в (17) доказывается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 21. Пусть $1 \leq k < s$. Тогда справедливы соотношения

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \quad \sum_{n \in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R, \quad (21)$$

где

$$R = \frac{1.5\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[4]{\ln L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое соотношение в (21) (второе получается аналогично). Пусть A – множество тех n , $N < n \leq N + M$, для которых $\delta_{n+k} \cdots \delta_{n+s-1} \neq 0$. Для $n \in A$ положим

$$D(n) = D_n D_{n+1} \cdots D_{n+k-1} \frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}} \cdots \frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}},$$

так что

$$D(n) = \begin{cases} \delta_n \cdots \delta_{n+k-1}, & \text{если } n \in E_s^+, \\ 0, & \text{если } n \in A \setminus E_s^+. \end{cases}$$

Если $k = 1$, то, очевидно, имеем

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n = \sum_{n \in A} D(n). \quad (22)$$

В случае $k \geq 2$, пользуясь леммой 18, приходим к равенству

$$\delta_n \cdots \delta_{n+k-1} = \delta_n^k + \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t),$$

из которого при $n \in E_s^+$ заключаем, что

$$D(n) = \delta_n^k + \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t).$$

Применяя оценку леммы 13, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k &= \sum_{n \in E_s^+} \left(D(n) - \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \right) \\ &= \sum_{n \in A} D(n) + 18\theta_2 c_0 \sqrt{c_1} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнивая (22) и (23), убеждаемся в том, что формула (23) верна и в случае $k = 1$ (при $\theta_2 = 0$).

Чтобы заменить сумму по $n \in A$ суммой по всем n , $N < n \leq N + M$, покажем сначала, что при любых $n, r \geq 1$ имеет место равенство

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} \cdots \frac{D_{n+r}}{\delta_{n+r}} = D_n + \theta \sum_{i=1}^r |\varepsilon_n(i-1, i)|. \quad (24)$$

Действительно, пусть сначала $r = 1$. Если $\delta_{n+1} > 0$, то

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = D_n; \quad (25)$$

если же $\delta_{n+1} < 0$, то из равенства (20) следует, что

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = 0 = D_{n+1} = D_n + \theta |\varepsilon_n(0, 1)|. \quad (26)$$

Допустим теперь, что равенство (24) доказано для $r = 1, \dots, j$, и проверим его справедливость в случае $r = j + 1$. Пользуясь предположением индукции, получаем

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} \cdots \frac{D_{n+j}}{\delta_{n+j}} \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}} = \left(D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^j |\varepsilon_n(i-1, i)| \right) \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}}. \quad (27)$$

Если $\delta_{n+j+1} > 0$, то правая часть (27) совпадает с

$$D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^j |\varepsilon_n(i-1, i)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\varepsilon_n(i-1, i)|, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \theta_1.$$

Если же $\delta_{n+j+1} < 0$, то $D_{n+j+1} = 0$ и правая часть (27) совпадает с

$$D_{n+j+1} = D_n + \theta_1 |\varepsilon_n(0, j+1)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\varepsilon_n(i-1, i)|.$$

Формула (24) доказана.

Предположим, что $k \geq 2$. Полагая $r = s - 1$ и заменяя n на $n + k - 1$ в равенстве (24), получим

$$\begin{aligned} D(n) &= D_n \cdots D_{n+k-2} \cdot D_{n+k-1} \frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}} \cdots \frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}} \\ &= D_n \cdots D_{n+k-2} \left(D_{n+k-1} + \theta_3 \sum_{i=1}^{s-k} |\varepsilon_{n+k-1}(i-1, i)| \right) \\ &= D_n \cdots D_{n+k-1} + \theta_4 |\delta_n \cdots \delta_{n+k-2}| \sum_{i=k}^{s-1} |\varepsilon_n(i-1, i)|. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$|\delta_n \cdots \delta_{n+k-2}| \leq \frac{1}{k-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1}, \quad D_n \cdots D_{n+k-1} = D_n^k + \theta_5 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t),$$

окончательно находим

$$D(n) = D_n^k + \theta_6 \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=k}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1} |\varepsilon_n(i-1, i)| + \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \right). \quad (28)$$

Если же $k = 1$, то в силу (25), (26) имеем

$$D(n) = D_n + \theta_7 |\varepsilon_n(0, 1)|. \quad (29)$$

Суммируя обе части (28), (29) по $n \in A$ и пользуясь оценками лемм 11–13, получим

$$\sum_{n \in A} D(n) = \sum_{n \in A} D_n^k + \theta_8 R(k), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} R(1) &\leq \sum_n |\varepsilon_n(0, 1)| \leq \frac{9c_0 c_1 s M}{\sqrt{L}}, \\ R(k) &\leq \frac{1}{k-1} \sum_{i=k}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-2} 1.8 \sqrt{c_1} \left(\frac{2(k-1)}{e} \right)^{(k-1)/2} \frac{9c_0 s^2 M}{\sqrt{L}} + 18c_0 \sqrt{c_1} \frac{M s^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \\ &< 41c_0 \sqrt{c_1} \frac{M s^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} < \frac{10.5c_0 c_1 s^3 M}{\sqrt{\ln L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}, \end{aligned}$$

если $k \geq 2$ (впрочем, последняя оценка остается справедливой и в случае $k = 1$).

Определим множество B как дополнение к A до множества всех целых чисел промежутка $N < n \leq N + M$. Ясно, что B совпадает со множеством всех номеров n этого промежутка, для которых $\delta_{n+k} \cdots \delta_{n+s-1} = 0$. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 9, заключаем, что число элементов B не превосходит правой части (7). Воспользовавшись оценкой леммы 10, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n \in B} D_n^k &\leq \sum_{n \in B} |\delta_n|^k \leq \left(\sum_n \delta_n^{2k} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in B} 1 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(1.6M \left(\frac{2k}{e} \right)^k \frac{1.1c_2 s M}{\sqrt{\ln L}} \right)^{1/2} < \frac{1.4\sqrt{c_2 s M}}{\sqrt[4]{\ln L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}. \quad (31) \end{aligned}$$

Итак, замена условия $n \in A$ в правой части (30) условием $N < n \leq N + M$ приводит к ошибке, не превосходящей по абсолютной величине правой части (31). Таким образом, находим

$$\begin{aligned} \sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k &= \sum_n D_n^k + \theta_9 M \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \left(\frac{1.4\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[4]{\ln L}} + \frac{10.5c_0 c_1 s^3}{\sqrt{L}} \right) \\ &= \sum_n D_n^k + \theta_{10} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{1.5M\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[4]{\ln L}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $k_1 = (\ln L)(c_2^2 \ln \ln L)^{-1}$.

ЛЕММА 22. Пусть r – целое число, $1 \leq r \leq k_1$. Тогда имеет место равенство

$$\sum_n |\delta_n|^r = \frac{\varkappa(r)}{2^{r/2}} \left(1 + \frac{2^{15} \theta \sqrt{c_2}}{\sqrt{\ln L}} \right) M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [4, теорема 6].

ЛЕММА 23. Пусть r – четное число с условием $2 \leq r \leq k_1$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_n \delta_n^{r-1} |\delta_n| \right| < \left(\frac{2r}{e} \right)^{r/2} \frac{c_2 M}{\sqrt{\ln L}}. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda = c_2^{-1} \sqrt{\ln L}$, $K = [12e\lambda^2] + 1$. Суммируя по n левую и правую части тождества

$$\delta_n^{r-1} |\delta_n| = \frac{2}{\pi} \delta_n^{r-1} \left(\int_0^\lambda + \int_\lambda^{+\infty} \right) \left(\frac{\sin \delta_n u}{u} \right)^2 du = \frac{2}{\pi} \delta_n^{r-1} \left(\int_0^\lambda \left(\frac{\sin \delta_n u}{u} \right)^2 du + \frac{\theta_1}{\lambda} \right),$$

представим сумму из (32) в виде $R_1 + \theta_2(R_2 + R_3)$, где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^K \frac{(-1)^{\nu-1} 2^{2\nu-1}}{(2\nu)!} \frac{\lambda^{2\nu-1}}{2\nu-1} R_1(2\nu+r-1), \\ R_2 &= \frac{2}{\pi} \frac{2^{2K+1}}{(2K+2)!} \frac{\lambda^{2K+1}}{2K+1} R_2(2K+r+1), \quad R_3 = \frac{2}{\pi\lambda} R_2(r-1), \\ R_1(j) &= \sum_n \delta_n^j, \quad R_2(j) = \sum_n |\delta_n|^j. \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 10, последовательно получим

$$\begin{aligned} |R_1(2\nu+r-1)| &< \left(\frac{c_3^2}{150} \left(\nu + \frac{r}{2} \right) \right)^{\nu+r/2} \frac{M}{\sqrt{L}} \\ &< (c_3^2 K)^{r/2} \left(\frac{c_3^2 \nu}{3} \right)^\nu \left(\left(1 + \frac{r}{2\nu} \right)^{2\nu/r} \right)^{r/2} \frac{M}{\sqrt{L}} \\ &< (c_3^2 e K)^{r/2} \left(\frac{c_3^2 \nu}{3} \right)^\nu \frac{M}{\sqrt{L}} < K^r \left(\frac{c_3^2}{3} \right)^\nu \left(\frac{e}{4} \right)^\nu \frac{(2\nu)!}{\nu!} \frac{M}{\sqrt{L}}, \quad 1 \leq \nu \leq K, \\ |R_1| &< \frac{MK^r}{\lambda\sqrt{L}} \sum_{\nu=1}^K \frac{(c_3^2 \lambda)^\nu}{\nu!} < \frac{MK^r}{\lambda\sqrt{L}} e^{(c_3 \lambda)^2} < \frac{ML^{-0.4}}{\lambda}, \\ R_2(2K+r+1) &\leq \left(M \sum_n \delta_n^{2(2K+r+1)} \right)^{1/2} < 1.3M \left(\frac{6K}{e} \right)^{K+(r+1)/2}, \\ R_2 &< \frac{M\lambda}{K^3} \left(\frac{6K}{e} \right)^{r/2} \left(\frac{6e\lambda^2}{K} \right)^K < \frac{M\lambda}{K^3} K^r 2^{-K} < \frac{ML^{-\alpha}}{\lambda^5}, \quad \alpha = 21c_2^{-2}, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$R_3 \leq \frac{2}{\pi\lambda} \left(M \sum_n \delta_n^{2(r-1)} \right)^{1/2} < \frac{0.6M}{\lambda} \left(\frac{2r}{e} \right)^{r/2}.$$

Сложив полученные оценки, приходим к утверждению леммы.

ЛЕММА 24. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq k_1$ и E – любое из множеств E_s^+ , E_s^- , и пусть $|E|$ – число элементов E , отвечающих условию $N < n \leq N + M$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{n \in E} \kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| + \theta R, \quad R = \frac{2\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[4]{\ln L}} \varkappa(k) M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лишь случай $E = E_s^+$ (для $E = E_s^-$ доказательство проводится аналогично). Прежде всего, согласно лемме 19 имеем

$$\sum_{n \in E_s^+} \kappa_n^k = \sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k + \theta_1 R_1, \quad R_1 = 22k \sqrt{c_0} \sqrt[4]{c_1} \left(\frac{8k}{e} \right)^{k/2} M L^{-1/(2s)}. \quad (33)$$

Далее, из лемм 20, 21 следует равенство

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = S + \theta_2 R_2, \quad (34)$$

в котором

$$S = \sum_n D_n^k, \quad R_2 = \frac{2\sqrt{c_2} M}{\sqrt[4]{\ln L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}. \quad (35)$$

Воспользовавшись тождеством $D_n^k = \frac{1}{2}(\delta_n^k + |\delta_n| \delta_n^{k-1})$, получим

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2), \quad S_1 = \sum_n \delta_n^k, \quad S_2 = \sum_n |\delta_n| \delta_n^{k-1}.$$

Предположим сначала, что k – четное число, $k = 2r$. Тогда в силу леммы 10 имеем

$$S_1 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M + \theta_3 R_3, \\ R_3 \leq \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{1.1 M c_3^{k/2}}{\sqrt{L}} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{M}{\sqrt{L}} \left(\frac{c_3}{2} \right)^{k/2} < \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{M}{\sqrt{L}} L^{0.01}.$$

Далее, из леммы 23 следует оценка

$$|S_2| < \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{c_2 M}{\sqrt{\ln L}}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{M}{2} + \theta_4 R_4, \quad R_4 = \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{2c_2 M}{\sqrt{\ln L}}. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь случай нечетного k , $k = 2r - 1$. Из лемм 10, 22 заключаем, что

$$|S_1| \leq \frac{45}{c_3} \left(\frac{c_3^2 r}{150} \right)^r \frac{M}{\sqrt{L}} \leq k (c_3^2 k)^{k/2} \frac{M}{\sqrt{L}} < \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{M}{\sqrt{L}} L^{0.01}, \\ S_2 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M + \theta_5 R_5, \quad R_5 = \frac{3}{2} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{2^{15} \sqrt{c_2} M}{\sqrt{\ln L}}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{M}{2} + \theta_6 R_6, \\ R_6 < \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \frac{M}{\sqrt{L}} L^{0.01} + \frac{3}{2} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \frac{2^{15} \sqrt{c_2} M}{\sqrt{\ln L}} < \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \frac{2^{16} \sqrt{c_2} M}{\sqrt{\ln L}}. \quad (37)$$

Сравнивая (36) и (37) и замечая, что $2^{16} < \sqrt{c_2}$, убеждаемся в том, что равенство

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{M}{2} + \theta_7 R_7, \quad R_7 = \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \frac{2c_2 M}{\sqrt{\ln L}}, \quad (38)$$

имеет место как при четных, так и при нечетных k . Пользуясь теоремой 1 и заменяя в (38) величину $M/2$ суммой

$$|E| + \theta_{cs} \frac{M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}},$$

с помощью неравенств (9) находим

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| + \theta_8 R_8, \quad R_8 \leq R_7 + \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{csM \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}} < 2cs \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \frac{M \ln \ln L}{\sqrt{\ln L}}. \quad (39)$$

Возвращаясь к сумме из условия леммы и учитывая (9) и соотношения (33)–(35), (39) наряду с неравенством $22k\sqrt{c_0} \sqrt[4]{c_1} 2^k L^{-1/(2s)} < (\ln L)^{-1}$, получим

$$\sum_{n \in E_s^+} \kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| + \theta_9 R_9, \\ R_9 \leq 22k\sqrt{c_0} \sqrt[4]{c_1} \left(\frac{8k}{e}\right)^{k/2} M L^{-1/(2s)} + \frac{1.5\sqrt{c_2 s} M}{\sqrt[4]{\ln L}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \\ + \frac{2csM}{\sqrt{\ln L}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \ln \ln L < \varkappa(k) \frac{2\sqrt{c_2 s} M}{\sqrt[4]{\ln L}}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Будем следовать работе А. Гоша [6]. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция дискретной случайной величины со значениями κ_n , $n \in E$. Тогда, полагая $\lambda = \sqrt{\frac{1}{8} \ln \ln L}$, $K = \lceil e^3 \lambda^2 \rceil + 1$, получим

$$\varphi(t) = |E|^{-1} \sum_{n \in E} e^{it\kappa_n} = |E|^{-1} \sum_{n \in E} \left(1 + \sum_{k=1}^K \frac{(it\kappa_n)^k}{k!} + \frac{2\theta_1 (|t|\kappa_n)^{K+1}}{(K+1)!}\right). \quad (40)$$

Меняя в (40) порядок суммирования и пользуясь леммой 24, находим $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t)$, где

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!} \left(\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^k \varkappa(k),$$

$$|\varphi_2(t)| \leq \frac{4\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[4]{\ln L}} M|E|^{-1} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{|t|^k}{k!} \varkappa(k) < \frac{9\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[4]{\ln L}} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{|t|^k}{k!} \varkappa(k),$$

$$|\varphi_3(t)| \leq \frac{2|t|^{K+1}}{(K+1)!} M|E|^{-1} \frac{\varkappa(K+1)}{2^{(K+1)/2}} < \frac{3}{2} \left(\frac{e}{K}\right)^{K/2} |t|^{K+1}.$$

Используя первую из формул (8), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2/2} \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!} \left(\frac{it}{\sqrt{2}} v \sqrt{2} \right)^k dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2/2} \left(e^{itv} + \frac{2\theta_3(|t|v)^{K+1}}{(K+1)!} \right) dv = \psi(t) + \varphi_4(t), \end{aligned}$$

где

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2/2+itv} dv$$

– характеристическая функция, отвечающая распределению $G(x)$ с плотностью

$$g(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq 0, \\ \sqrt{2/\pi} e^{-u^2/2}, & \text{если } u > 0, \end{cases}$$

$$|\varphi_4(t)| \leq \frac{2|t|^{K+1}}{(K+1)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} v^{K+1} e^{-v^2/2} dv < \frac{2}{K} \left(\frac{e}{K}\right)^{K/2} |t|^{K+1}.$$

Положим

$$I(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{|\varphi(t) - \psi(t)|}{|t|} dt.$$

Тогда из найденных выше оценок заключаем, что

$$I(\lambda) \leq \sum_{j=2}^4 \int_{-\lambda}^{\lambda} \left| \frac{\varphi_j(t)}{t} \right| dt < \frac{18\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[4]{\ln L}} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{\lambda^k}{k!} \varkappa(k) + \frac{8\lambda}{K^2} \left(\frac{e\lambda^2}{K}\right)^{K/2}.$$

Из равенств (8) следует, что сумма по k не превосходит

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \left(\sum_{k=1}^{K+1} \frac{\lambda^k}{k!} (2v)^k \right) dv \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2+2v\lambda} dv = 2e^{\lambda^2}.$$

Таким образом,

$$I(\lambda) < \frac{36\sqrt{c_2 s} e^{\lambda^2}}{\sqrt[4]{\ln L}} + \frac{8\lambda}{K^2} \left(\frac{e\lambda^2}{K}\right)^{K/2} < \frac{36\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[8]{\ln L}} + (\ln L)^{-5/2} < \frac{40\sqrt{c_2 s}}{\sqrt[8]{\ln L}}.$$

Обозначив через $F(x)$ функцию распределения, отвечающую характеристической функции $\varphi(t)$, из неравенства Берри–Эссеена получим

$$|F(x) - G(x)| \ll \lambda^{-1} + I(\lambda) \ll (\ln \ln L)^{-0.5}.$$

Из последнего соотношения легко следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все утверждения настоящей статьи сохраняют силу и в случае, когда параметр s неограниченно возрастает вместе с N , но не быстрее, чем $c(\ln L)(\ln \ln L)^{-1}$, где $c > 0$ – достаточно малая постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждения теорем 1, 2 остаются в силе, если вместо величин $\Delta_n \Delta_{n+1} \cdots \Delta_{n+s-1}$ рассматривать произведения $\Delta_{n+i_1} \Delta_{n+i_2} \cdots \Delta_{n+i_s}$, где $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ – произвольный фиксированный набор целых чисел.

Список литературы

1. A. Selberg, “The zeta-function and the Riemann hypothesis”, *C. R. Dixieme Congrès Math. Scandinaves* 1946, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200.
2. A. Selberg, *Collected papers*, v. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
3. М. А. Королёв, “Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83–118; англ. пер.: М. А. Korolev, “Gram’s law and Selberg’s conjecture on the distribution of zeros of the Riemann zeta function”, *Izv. Math.*, **74**:4 (2010), 743–780.
4. М. А. Королёв, “О законе Грама в теории дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:2 (2012), 67–102; англ. пер.: М. А. Korolev, “On Gram’s law in the theory of the Riemann zeta-function”, *Izv. Math.*, **76**:2 (2012), 275–309.
5. М. А. Королёв, “О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:2 (2008), 91–104; англ. пер.: М. А. Korolev, “On large distances between consecutive zeros of the Riemann zeta-function”, *Izv. Math.*, **72**:2 (2008), 291–304.
6. A. Ghosh, “On the Riemann zeta-function – mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$ ”, *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.

М. А. КОРОЛЁВ (M. A. KOROLEV)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
 Национальный исследовательский ядерный
 университет “МИФИ”
E-mail: korolev@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 12.04.2012