Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Меры Хуа на пространстве p -адических матриц и обратные пределы грассманианов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 5, 95–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7996>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:13:26

УДК 512.625.5+512.741.5+512.816.4

Ю. А. Неретин

Меры Хуа на пространстве p -адических матриц и обратные пределы грассманианов

Построены p -адические аналоги мер Хуа, обратные пределы p -адических грассманианов и описаны естественные группы симметрий этих мер.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: грассманианы, p -адические числа, квазиинвариантные меры.

DOI: 10.4213/im7996

§ 1. Введение

1.1. Вещественный образец (см. [1], [2, гл. II, § 2, п. 10]). Обозначим через $U(k)$ группу унитарных матриц размера k , через $d\chi^k$ – вероятностную меру Хаара на $U(k)$. Через $U(\infty)$ обозначим индуктивный предел

$$\cdots \longrightarrow U(n) \longrightarrow U(n+1) \longrightarrow \cdots$$

групп $U(n)$.

Представим элемент $g \in U(n+1)$ как блочную матрицу $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $n+1$. Рассмотрим отображение *Лившица* $\Upsilon: U(n+1) \rightarrow U(n)$, заданное формулой

$$\Upsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b(1+d)^{-1}c. \quad (1.1)$$

Это отображение коммутирует с левым и правым действиями $U(n)$,

$$\Upsilon(h_1gh_2) = h_1\Upsilon(g)h_2, \quad h_1, h_2 \in U(n).$$

Поэтому образ меры Хаара $d\chi^{n+1}$ при отображении Υ – это мера Хаара $d\chi^n$. Следовательно, существует обратный предел $\mathfrak{U}(\infty)$ цепочки

$$\cdots \longleftarrow U(n) \longleftarrow U(n+1) \longleftarrow \cdots, \quad (1.2)$$

снабженный вероятностной мерой $d\chi^\infty$. Пространство $\mathfrak{U}(\infty)$ не является группой, но унитарная группа $U(\infty)$ действует на $\mathfrak{U}(\infty)$ левыми и правыми умножениями, поэтому мы получаем действие группы $U(\infty) \times U(\infty)$ на $\mathfrak{U}(\infty)$ преобразованиями, сохраняющими меру.

Существует более общая конструкция. Фиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$ и рассмотрим вероятностную меру

$$\chi_\lambda^n = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(k+\lambda)\Gamma(k+\bar{\lambda})}{\Gamma(k)\Gamma(k+\lambda+\bar{\lambda})} \det(1+g)^\lambda \det(1+\bar{g})^{\bar{\lambda}} d\chi^n(g)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке FWF (грант P22122).

на $U(n)$. Эта система мер также проективна, и мы получаем семейство мер χ_λ^∞ на обратном пределе цепочки (1.2).

Применяя преобразование Кэли к матрицам $g \in U(n)$, мы получаем пространство эрмитовых матриц размера n и меры вида

$$C(\lambda, n) \det(1 + iX)^{-\lambda-n} \det(1 - iX)^{-\bar{\lambda}-n} dX.$$

Полные интегралы от таких мер (для вещественных λ) были впервые вычислены Хуа Ло Кеном [3].

В настоящее время уже существует содержательный гармонический анализ на пространстве $\mathfrak{U}(\infty)$ (см. [4], [5]). Похожие обратные пределы существуют для всех 10 серий компактных симметрических пространств,

$$\cdots \longleftarrow G(n)/K(n) \longleftarrow G(n+1)/K(n+1) \longleftarrow \cdots,$$

группа $G(\infty)$ действует на обратном пределе (см. [1], [6]). В [1] рассматривались групповые пространства $(K \times K)/K$, где $K = \mathrm{SO}(n)$, $U(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$. Отображение Лившица (1.1) переводит симметрические матрицы ($g = g^t$) в симметрические, пространство $U(n)/O(n)$ унитарных симметрических матриц идентифицируется с вещественным лагранжевым грассманианом. Следовательно, мы получаем цепочку лагранжевых грассманианов

$$\cdots \longleftarrow U(n)/O(n) \longleftarrow U(n+1)/O(n+1) \longleftarrow \cdots$$

(см. [2, гл. 3, § 6]). Другие классические симметрические пространства могут быть сведены к групповым пространствам с помощью того же приема (мы выбираем подходящую инволюцию группового многообразия, коммутирующую с отображением Υ).

Существуют похожие обратные пределы для симметрических групп (см. [7]), предельный объект также допускает содержательный гармонический анализ.

Наша цель – получить p -адические аналоги этих конструкций.

1.2. Обозначения. Введем следующие обозначения: $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел; $\mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p -адических чисел; $\mathrm{vol}(\cdot)$ – σ -конечная мера на линейном пространстве $\mathbb{Q}_p^m$, инвариантная относительно параллельных переносов и нормированная условием $\mathrm{vol}(\mathbb{Z}_p^m) = 1$; $|\cdot|$ – нормирование на $\mathbb{Q}_p$; $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$ и $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ – группы обратимых $(n \times n)$ -матриц над $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Z}_p$ соответственно; $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$ и $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{Z}_p)$ – пространства всех матриц размера n над $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Z}_p$; $\mathrm{Symm}(n, \mathbb{Q}_p)$ и $\mathrm{ASymm}(n, \mathbb{Q}_p)$ – пространства симметрических и кососимметрических матриц над $\mathbb{Q}_p$; g^t – транспонированная матрица; Gr_{2n}^n – грассманиан n -мерных подпространств в $\mathbb{Q}_p^{2n}$.

1.3. Меры μ_s^n . Любая матрица $z \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$ может быть представлена в виде

$$z = A \begin{pmatrix} p^{-k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^{-k_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^{-k_n} \end{pmatrix} B,$$

где $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ и $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n \geq -\infty$. Назовем p^{k_j} *сингулярными числами* матрицы z .

Определим функцию $\gamma(z)$ на $\text{Mat}(n, \mathbb{Z}_p)$ по формуле

$$\gamma(z) = \prod_{k_j > 0} p^{k_j}$$

(полагаем, что произведение пустого набора множителей равно 1, т. е. для матриц z с целыми элементами выполнено $\gamma(z) = 1$).

ТЕОРЕМА 1.1. *Имеет место тождество*

$$\int_{\text{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)} \gamma(z)^{-\alpha} d\text{vol}(z) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-\alpha+n-j}}{1 - p^{-\alpha+n+j-1}} =: c(n, \alpha). \quad (1.3)$$

Интеграл сходится при $\alpha > 2n - 1$.

Пусть $s > -1$. Определим меру $d\mu_s^n$ на $\text{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$ по формуле

$$d\mu_s^n(z) := c(n, s + 2n)^{-1} \gamma(z)^{-s-2n} d\text{vol}_n(z).$$

Группа $\text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$ действует на $\text{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$ дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto (a + zc)^{-1}(b + zd), \quad (1.4)$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$ – блочная матрица размера $n + n$.

Заметим, что формула (1.4) соответствует действию группы $\text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$ на грассманиане Gr_{2n}^n . Действительно, рассмотрим график оператора $z: \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p^n$ в $\mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n$, он состоит из векторов $v \oplus vz$, где $v \in \mathbb{Q}_p^n$ – матрица-строка.

Мы получаем карту на грассманиане, дополнение к ней имеет меру нуль. Формула (1.4) проверяется непосредственно (см., например, [2, теорема 2.3.1]).

ТЕОРЕМА 1.2. а) *Для любого $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2n, \mathbb{Q}_p)$ выполнено*

$$d\mu_s^n((a + zc)^{-1}(b + zd)) = |\det(a + zc)|^s d\mu_s^n(z). \quad (1.5)$$

б) *Мера μ_s^n – единственная вероятностная борелевская мера ν на пространстве $\text{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$, удовлетворяющая уравнению*

$$d\nu((a + zc)^{-1}(b + zd)) = |\det(a + zc)|^s d\nu(z) \quad (1.6)$$

для любого $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$.

В частности, при $s = 0$ мы получаем единственную $\text{GL}(2n, \mathbb{Q}_p)$ -инвариантную меру на грассманиане Gr_{2n}^n .

1.4. Проективные пределы. Рассмотрим $((n + 1) \times (n + 1))$ -матрицу

$$z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

и отображение $\Pi: \text{Mat}(n + 1, \mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$, заданное формулой

$$\Pi: \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \mapsto z_{11}. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.3. *Образ меры μ_s^{n+1} при отображении Π совпадает с μ_s^n .*

Таким образом, мы получаем цепочку

$$\dots \longleftarrow (\text{Mat}(n, \mathbb{Q}_p), \mu_s^n) \longleftarrow (\text{Mat}(n+1, \mathbb{Q}_p), \mu_s^{n+1}) \longleftarrow \dots$$

По теореме Колмогорова (см., например, [8, гл. 2, § 3, теорема 3]) обратный предел в категории пространств с мерой корректно определен. Обозначим через μ_s^∞ обратный предел мер μ_s^n , мера μ_s^∞ может рассматриваться как мера на $\text{Mat}(\infty, \mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^{\infty \times \infty}$.

1.5. Симметрии мер μ_s^∞ . Рассмотрим цепочку групп

$$\dots \longrightarrow \text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \text{GL}(2(n+1), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \dots$$

и ее индуктивный предел $\text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$. Другими словами, $\text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ – это группа таких $((\infty + \infty) \times (\infty + \infty))$ -матриц g с целыми элементами, что g^{-1} также имеет целые элементы, а $g - 1$ имеет лишь конечное число ненулевых элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. а) Мера μ_s^∞ квазиинвариантна по отношению к действию $z \mapsto (a + zc)^{-1}(b + zd)$ группы $\text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$. Производная Радона–Никодыма равна $|\det(a + zc)|^s$.

б) В частности, при $s = 0$ мера μ_s^∞ является $\text{GL}(2\infty, \mathbb{Q}_p)$ -инвариантной.

с) Мера μ_s^∞ инвариантна по отношению к подгруппе $P \subset \text{GL}(2\infty, \mathbb{Q}_p)$, состоящей из матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Объясним, что значит выражение $|\det(a + zc)|^s$. Представим $g \in \text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ как блочную матрицу размера $k + \infty + k + \infty$, где k достаточно велико:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представим $z \in \text{Mat}(\infty, \mathbb{Q}_p)$ как блочную матрицу размера $k + \infty$:

$$z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\det(a + zc)| &= \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} + z_{11}c_{11} & 0 \\ z_{12}c_{11} & 1 \end{pmatrix} \right| = |\det(a_{11} + z_{11}c_{11})|, \end{aligned}$$

и мы получаем определитель конечной матрицы.

Теперь определим два пополнения

$$\overline{\overline{\text{GL}}}(2\infty, \mathbb{Z}_p) \supset \overline{\text{GL}}(2\infty, \mathbb{Z}_p) \supset \text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$$

группы $\text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$.

Сначала рассмотрим группу $\overline{\overline{T}}$, состоящую из $((\infty + \infty) \times (\infty + \infty))$ -матриц над $\mathbb{Z}_p$ вида

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots \\ 0 & 0 & \delta_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad (1.9)$$

здесь

$$|\alpha_{11}| = |\alpha_{22}| = \dots = 1, \quad |\delta_{11}| = |\delta_{22}| = \dots = 1. \quad (1.10)$$

Как множество группа $\overline{\overline{T}}$ является прямым произведением счетного числа копий $\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ (соответствующих α_{jj} и δ_{kk}) и счетного числа копий $\mathbb{Z}_p$ (соответствующих остальным α_{ij} , δ_{kl} , а также β_{mn}).

Рассмотрим меньшую группу $\overline{T} \subset \overline{\overline{T}}$, состоящую из матриц вида (1.8), (1.9), но соотношения (1.10) заменены равенствами

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = 1, \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \dots = 1. \quad (1.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Матрицы $h \in \overline{\overline{T}}$ могут быть сделаны верхнетреугольными путем перестановки базиса (первые ∞ базисных элементов должны быть записаны в обратном порядке).

Обозначим через $\overline{\overline{\text{GL}}}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ группу матриц, порожденную $\text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ и $\overline{\overline{T}}$. Она состоит из обратимых матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ над $\mathbb{Z}_p$ таких, что:

- 1°) c имеет лишь конечное число ненулевых элементов;
- 2°) a имеет лишь конечное число ненулевых элементов, находящихся выше диагонали;
- 3°) d имеет лишь конечное число ненулевых элементов, расположенных ниже диагонали;
- 4°) g^{-1} имеет целые элементы.

Обозначим через $\overline{\text{GL}}(2\infty, \mathbb{Z}_p) \subset \overline{\overline{\text{GL}}}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ группу матриц, порожденную $\text{GL}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ и $\overline{T}$. Мы должны заменить 2°) и 3°) на соответственно:

- 2°°) $a - 1$ имеет лишь конечное число ненулевых элементов, расположенных на диагонали и выше диагонали;
- 3°°) $d - 1$ имеет лишь конечное число ненулевых элементов, находящихся на диагонали и ниже диагонали.

ТЕОРЕМА 1.6. *Группа $\overline{\overline{\text{GL}}}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ действует на $\text{Mat}(\infty, \mathbb{Q}_p)$ преобразованиями $z \mapsto (a + zc)^{-1}(b + zd)$, оставляющими меру μ_s^∞ квазиинвариантной. Производная Радона–Никодима равна $|\det(a + zc)|^s$.*

Смысл выражений $(a + zc)^{-1}(b + zd)$ и $|\det(a + zc)|^s$ будет объяснен ниже, в п. 4.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Для любых $g \in \overline{\text{GL}}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ и $z \in \text{Mat}(\infty, \mathbb{Q}_p)$ выражение $\det(a + zc) \in \mathbb{Q}_p$ корректно определено.*

Обозначим через $\mathbb{Q}_p^\times$ и $\mathbb{C}^\times$ мультипликативные группы в $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Пусть χ – гомоморфизм $\mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $|\chi(z)| = 1$. Тогда мы можем определить унитарное представление группы $\overline{\mathrm{GL}}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$ в $L^2(\mathrm{Mat}(\infty, \mathbb{Q}_p), \mu_s^\infty)$ по формуле

$$\rho_{s,\chi} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = f((a+zc)^{-1}(b+zd)) |\det(a+zc)|^{s/2} \chi(a+zc). \quad (1.12)$$

1.6. Несколько замечаний о вещественно- p -адической параллели.

Аналоги некомпактных римановых симметрических пространств над p -адическими числами – это ансамбли Брюа–Титса (здесь имеет место глубокая аналогия; обсуждение и дальнейшие ссылки см. в [2]). Аналоги интегралов Хуа Ло Кена для ансамблей существуют (см. [9]), и они используются в § 2. Однако, по-видимому, они не допускают проективных пределов (отметим, что для римановых некомпактных симметрических пространств обратных пределов не существует [10]).

По-видимому, не существует и естественных p -адических аналогов компактных римановых симметрических пространств.

С другой стороны, классические компактные римановы симметрические пространства являются грассманианами или изотропными грассманианами (см., например, [2, раздел D.1]), обсуждаемая конструкция следует подходу Пикрелля [6].

1.7. Другие обратные пределы грассманианов. Существуют и другие аналогичные конструкции.

а) *Симплектический лагранжев грассманиан.* Пусть $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z}_p)$ – группа, состоящая из целых $((n+n) \times (n+n))$ -матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, сохраняющих кососимметрическую билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в $\mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n$, и рассмотрим грассманиан L_n лагранжеских подпространств в $\mathbb{Q}_p^{2n}$. Почти все элементы L_n могут быть представлены как графики операторов $\mathbb{Q}_p^n \oplus 0 \rightarrow 0 \oplus \mathbb{Q}_p^n$, соответствующие матрицы симметрические (см., например, [2, теорема 3.1.4]). Действие группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z}_p)$ на $\mathrm{Symm}(n, \mathbb{Q}_p)$ задается той же формулой (1.4).

Мы определяем меры

$$d\mu_s^n(z) = c(s, n) \gamma(z)^{-s-n-1} d\mathrm{vol}_n(z) \quad (1.13)$$

на $\mathrm{Symm}(n, \mathbb{Q}_p)$, нормировочные константы $c(s, n)$ выбираем так, чтобы сделать меры вероятностными. Их производные Радона–Никодима по отношению к преобразованиям из $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ имеют вид

$$\frac{d\mu_s^n((a+zc)^{-1}(b+zd))}{d\mu_s^n(z)} = |\det(a+zc)|^s. \quad (1.14)$$

Далее, оказывается, что эти меры образуют проективную систему относительно отображений $\Pi: \mathrm{Symm}(n+1, \mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{Symm}(n, \mathbb{Q}_p)$ (см. (1.7)).

Теперь мы можем рассмотреть обратный предел пространств

$$\cdots \longleftarrow (\mathrm{Symm}(n, \mathbb{Q}_p), d\mu_s^n) \longleftarrow (\mathrm{Symm}(n+1, \mathbb{Q}_p), d\mu_s^{n+1}) \longleftarrow \cdots$$

б) *Ортогональные изотропные грассманианы*. Рассмотрим группу $O(2n, \mathbb{Z}_p)$, состоящую из целых $((n+n) \times (n+n))$ -матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, сохраняющих билинейную форму $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в $\mathbb{Q}_p^n \oplus \mathbb{Q}_p^n$, и рассмотрим ее подгруппу $SO(2n, \mathbb{Z}_p) \subset O(2n, \mathbb{Z}_p)$, состоящую из матриц с определителем 1. Пусть Is_n – грассманиан n -мерных изотропных подпространств в $\mathbb{Q}_p^{2n}$. Группа $SO(2n, \mathbb{Z}_p)$ имеет две орбиты на этом грассманиане, выберем одну из них. А именно, рассмотрим множество Is_n^0 всех n -мерных изотропных подпространств M таких, что $M \cap (0 \oplus \mathbb{Q}_p^n)$ имеет четную размерность (см. [11, предложение 2.2.2, лемма 3.3.1]). Почти все элементы из Is_n^0 являются графиками операторов $z: \mathbb{Q}_p^n \oplus 0 \rightarrow 0 \oplus \mathbb{Q}_p^n$, причем матрицы z кососимметрические ($z = -z^t$).

Определим вероятностные меры

$$d\mu_s^n(z) = a(s, n) \gamma(z)^{-s-n+1} d \operatorname{vol}_n(z) \quad (1.15)$$

на $\operatorname{ASym}(n, \mathbb{Q}_p)$. Их производные Радона–Никодима задаются той же формулой (1.14). Меры μ_s^n образуют проективную систему относительно отображений $\Pi: \operatorname{ASym}(n+1, \mathbb{Q}_p) \rightarrow \operatorname{ASym}(n, \mathbb{Q}_p)$. Теперь также можно рассмотреть проективную цепочку

$$\dots \longleftarrow (\operatorname{ASym}(n, \mathbb{Q}_p), \mu_s^n) \longleftarrow (\operatorname{ASym}(n+1, \mathbb{Q}_p), \mu_s^{n+1}) \longleftarrow \dots$$

В случаях а), б) ситуация похожа на обсуждавшуюся выше.

Автору не известен явный аналог формулы для полной меры (1.3), ее доказательство, приведенное ниже, – это редукция к бета-функции ансамбля Брюа–Титса [9], которая вычислена лишь в случае групп $GL(n, \mathbb{Q}_p)$. Мы можем нормировать меры (1.13), (1.15) лишь в случае, когда они конечны. Очевидно, что меры конечны при $s = 0$, потому что в этом случае мы имеем меры на грассманианах, инвариантные относительно транзитивных действий компактных групп $\operatorname{Sp}(2n, \mathbb{Z}_p)$ и $SO(2n, \mathbb{Z}_p)$. Поскольку $\gamma(z)^{-\alpha}$ – убывающая функция от α , мы получаем, что эти меры определены по крайней мере при $s \geq 0$.

1.8. Замечание о представлениях бесконечномерных классических p -адических групп. Основы теории представлений бесконечномерных классических групп и бесконечных симметрических групп были развиты в 1970–1980-е годы (см. [12]–[14] о симметрических группах и [15]–[18], [11] о классических группах; эти работы имели разнообразные продолжения, например [5], [4], [7] и [19]).

Представления бесконечномерных классических p -адических групп остаются плохо понятыми. Сейчас известны две содержательные конструкции. Первая – представление Вейля бесконечномерной симплектической группы и соответствующей сжимающей полугруппы (см. работы ¹ [21], [22] и частичное изложение в [2, гл. 10, § 7, гл. 11, § 2]). Вторая – умножение двойных классов смежности и p -адический аналог характеристической оператор-функции (см. [19]). О бесконечномерных группах над конечными полями см. работу [23], а также [18], [24].

1.9. Дальнейшая структура статьи. В § 2 вычисляется интеграл (1.3). В § 3 мы доказываем теорему 1.6 о преобразованиях мер μ_s^n . В § 4 доказываются утверждения о мерах μ_s^∞ .

¹Более слабая конструкция содержится в [20].

§ 2. Вычисления интеграла

Здесь мы доказываем теорему 1.1. Далее

$$G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p), \quad K := \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p).$$

Обозначим через $\mathrm{Lat}(n)$ множество всех решеток в $\mathbb{Q}_p^n$ (см., например, [2, гл. 10, § 3]), $\mathrm{Lat}(n) \simeq G/K$.

2.1. Свойства функции γ . Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 2.1. Пусть $z \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$, $\det(z) \neq 0$. Тогда

$$\frac{\gamma(z)}{\gamma(z^{-1})} = |\det(z)|, \quad (2.1)$$

$$\gamma(z) = \mathrm{vol}(z\mathbb{Z}_p^n + \mathbb{Z}_p^n), \quad (2.2)$$

$$\gamma(z^{-1})^{-1} = \mathrm{vol}(z\mathbb{Z}_p^n \cap \mathbb{Z}_p^n). \quad (2.3)$$

Заметим, что

$$|\det(z)| = \mathrm{vol}(z\mathbb{Z}_p^n). \quad (2.4)$$

2.2. Мера Хаара. Согласно [25, гл. V, § 2] мера Хаара на G равна

$$|\det(z)|^{-n} d\mathrm{vol}(z). \quad (2.5)$$

Удобно нормировать ее следующим образом:

$$d\chi(z) = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} |\det(z)|^{-n} d\mathrm{vol}(z);$$

тогда $\chi(K) = 1$.

ЛЕММА 2.2. Выполнено следующее равенство:

$$\mathrm{vol}(K) = \prod_{j=1}^n (1 - p^{-j}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественное отображение из $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{Z}_p)$ в $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}_p)$, где $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ – поле из p элементов. Общее число точек в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}_p)$ равно p^{n^2} . Число элементов $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{F}_p)$ равно $\prod_{j=1}^{n-1} (p^n - p^j)$. Лемма доказана.

2.3. Вычисление интеграла. Имея в виду выражение для меры Хаара, мы преобразуем интеграл (1.3) к виду

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)} \gamma(z)^{-t} d\mathrm{vol}(z) &= \mathrm{vol}(K) \int_G |\det(z)|^n \gamma(z)^{-t} d\chi(z) \\ &= \mathrm{vol}(K) \int_G |\det(z)|^{-t+n} \mathrm{vol}(z\mathbb{Z}_p^n \cap \mathbb{Z}_p^n)^t d\chi(z) \\ &= \mathrm{vol}(K) \int_G \mathrm{vol}(z\mathbb{Z}_p^n)^{-t+n} \mathrm{vol}(z\mathbb{Z}_p^n \cap \mathbb{Z}_p^n)^t d\chi(z). \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение постоянно на каждом классе смежности $zK \subset G$. В силу инвариантности меры Хаара имеем $\chi(zK) = 1$. Поэтому мы приходим к суммированию по $G/K = \text{Lat}(n)$:

$$\text{vol}(K) \sum_{Q \in \text{Lat}(n)} \text{vol}(Q)^{-t+n} \text{vol}(Q \cap \mathbb{Z}_p^n)^t.$$

Последнее выражение – частный случай “бета-функции” ансамбля Брюа–Титса, вычисленной в [9, теорема 2.1]. В обозначениях [9] мы полагаем

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = t, \quad \beta_1 = \dots = \beta_n = -t + n$$

и получаем

$$\text{vol}(K) \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-t+n-j}}{(1 - p^{-t+n+j-1})(1 - p^{-j})} = \prod_{j=1}^n \frac{1 - p^{-t+n-j}}{(1 - p^{-t+n+j-1})}.$$

Тем самым теорема 1.1 доказана.

§ 3. Преобразования мер

Здесь мы доказываем теорему 1.6 для мер μ_s^n .

3.1. Формула для производной Радона–Никодима. 1) Рассмотрим подгруппу $P \subset \text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$, состоящую из матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ и действующую на $\text{Mat}(n, \mathbb{Q}_p)$ преобразованиями

$$z \mapsto a^{-1}(b + zd) = a^{-1}b + a^{-1}zd.$$

Мера $d \text{vol}(z)$ инвариантна относительно таких преобразований. Функция $\gamma(z)^{-s-2n}$ также инвариантна. Поэтому мера μ_s^n является P -инвариантной.

2) Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Соответствующее преобразование имеет вид $z \mapsto z^{-1}$. Мы должны доказать, что

$$\gamma(z^{-1})^{-s-2n} d \text{vol}(z^{-1}) = |\det(z)|^s \gamma(z)^{-s-2n} d \text{vol}(z). \quad (3.1)$$

Во-первых,

$$d \text{vol}(z^{-1}) = |\det(z)|^{-2n} d \text{vol}(z),$$

это эквивалентно формуле (2.5) для меры Хаара. Во-вторых,

$$\gamma(z^{-1})^{-s-2n} = \gamma(z)^{-s-2n} |\det z|^{s+2n},$$

и мы получаем (3.1).

3) Легко показать, что группа $\text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$ порождена подгруппой P и матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим

$$z * g := (a + zc)^{-1}(b + zd). \quad (3.2)$$

Производная Радона–Никодима

$$c(g, z) := \frac{d\mu_s^n(z * g)}{d\mu_s^n(z)}$$

удовлетворяет цепному правилу

$$c(g_1 g_2, z) = c(g_1, z) c(g_2, z * g_1). \quad (3.3)$$

С другой стороны, выражение $\tilde{c}(g, z) := |\det(a + zc)|^s$ удовлетворяет тому же правилу. Поскольку выражения $c(h, z)$ и $\tilde{c}(h, z)$ равны для образующих G , они совпадают везде.

Теорема 1.6 для мер μ_s^n доказана.

3.2. Единственность меры. Предположим, что мера ν удовлетворяет уравнению (1.6). Рассматривая матрицы $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мы получаем, что ν инвариантна относительно сдвигов

$$z \mapsto z + b, \quad b \in \text{Mat}(n, \mathbb{Z}_p).$$

Следовательно, ν имеет вид

$$d\nu(z) = f(z) d\mu_s^n(z),$$

где $f(z)$ – локально постоянная функция. Очевидно, что $f(z)$ является $\text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$ -инвариантной. Поскольку действие $\text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p)$ на грассманиане транзитивно, мы получаем, что функция $f(z)$ постоянна.

§ 4. Проективные пределы

4.1. Доказательство теоремы 1.3. Достаточно показать, что образ ν меры μ_s^{n+1} при отображении Π удовлетворяет условию квазиинвариантности (1.6). Достаточно проверить это для образующих группы $\text{GL}(2n, \mathbb{Z}_p^n)$

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим соответствующие элементы группы $\text{GL}(2(n+1), \mathbb{Z}_p)$

$$\tilde{g}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(размеры матриц равны $n+1+n+1$). Мы имеем

$$\tilde{g}_1: \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} z_{11} d & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\tilde{g}_2: \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + z_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_3: \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} &\mapsto \\ &\mapsto \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Мы получаем

$$\Pi(z * \tilde{g}_j) = (\Pi z) * g_j.$$

В (4.1), (4.2) производная Радона–Никодима равна 1, в (4.3) она равна $|\det z_{11}|^s$. Итак,

$$\frac{d\mu_s^{n+1}(z * \tilde{g}_j)}{d\mu_s^{n+1}(z)} = \frac{d\mu_s^n((\Pi z) * g_j)}{d\mu_s^n(\Pi z)}.$$

Отсюда следует теорема 1.3.

4.2. Абстрактная лемма. Пусть (Ω_j, μ_j) – последовательность пространств Лебега с вероятностной мерой. Пусть $\Pi_k^j: \Omega_j \rightarrow \Omega_k$, $k < j$, – отображения такие, что $\Pi_l^k \Pi_k^j = \Pi_l^j$ и Π_k^j -образ μ_j равен μ_k . Обозначим через $(\Omega_\infty, \mu_\infty)$ проективный предел цепочки

$$\cdots \longleftarrow \Omega_k \longleftarrow \Omega_{k+1} \longleftarrow \cdots.$$

Пусть G – группа и для любого $g \in G$ существует j такое, что для всех $k \geq j$ имеет место преобразование $g_{[k]}: \Omega_k \rightarrow \Omega_k$, оставляющее меру μ_j квазиинвариантной, и для любых $l > k > j$ выполнено (п. в.)

$$\Pi_k^l(g_{[l]}(\omega)) = g_{[k]}(\Pi_k^l(\omega)), \quad \omega \in \Omega_l, \quad (4.4)$$

и (п. в.)

$$(g_{[k]})'(\Pi_k^l \omega) = (g_{[l]})'(\omega), \quad \omega \in \Omega_l. \quad (4.5)$$

Пусть также для любых $g, h \in G$ при достаточно больших m выполнено

$$(gh)_{[m]} = g_{[m]}h_{[m]}.$$

ЛЕММА 4.1. В приведенных условиях существует действие группы G на Ω_∞ преобразованиями $g_{[\infty]}$, оставляющими меру μ_∞ квазиинвариантной. Эти преобразования определяются из свойств

$$\begin{aligned} \Pi_k^\infty(g_{[\infty]}(\omega)) &= g_{[k]}(\Pi_k^\infty(\omega)), & \omega \in \Omega_\infty, \\ (g_{[k]})'(\Pi_k^\infty \omega) &= (g_{[\infty]})'(\omega), & \omega \in \Omega_\infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 1.4 следует из леммы 4.1.

4.3. Действие $\overline{\text{GL}}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$. Сведем теорему 1.6 к лемме 4.1. Теперь $\Omega_k := \text{Mat}(k, \mathbb{Q}_p)$, проекции $\Omega_l \rightarrow \Omega_k$ – это вырезание левого верхнего уголка матрицы размера l . Мы должны построить преобразования $g_{[k]}: \text{Mat}(k, \mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{Mat}(k, \mathbb{Q}_p)$.

Фиксируем $g \in \overline{\text{GL}}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$. Возьмем достаточно большое k и представим матрицу $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в виде

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & 0 & 0 & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & 0 & b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} \\ c_{11}^{(k)} & 0 & d_{11}^{(k)} & d_{12}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & d_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

(ниже мы иногда не будем записывать верхний индекс (k)). Формально вычисляем:

$$\begin{aligned}
 (a + zc)^{-1}(b + zd) &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &\quad \times \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} (a_{11} + z_{11}c_{11})^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} + z_{11}d_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a_{11}^{(k)} + z_{11}^{(k)}c_{11}^{(k)})^{-1} & (b_{11}^{(k)} + z_{11}^{(k)}d_{11}^{(k)}) \\ * & * \end{pmatrix}. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Получаем, что для достаточно больших k левый верхний уголок размера $k \times k$ матрицы $(a + zc)^{-1}(b + zd)$ зависит лишь от $z_{11}^{(k)}$. Теперь мы определим преобразования

$$g_{[k]}: u \mapsto (a_{11}^{(k)} + uc_{11}^{(k)})^{-1}(b_{11}^{(k)} + ud_{11}^{(k)})$$

пространства $\text{Mat}(k, \mathbb{Q}_p)$. То же самое вычисление доказывает свойство совместности (4.4).

Далее, выпишем формально производную Радона–Никодима преобразования (4.6):

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_{11} + z_{11}c_{11} & 0 \\ a_{21} + z_{21}c_{11} & a_{22} \end{pmatrix} \right|^s = |\det(a_{11} + z_{11}c_{11})|^s |\det a_{22}|^s. \tag{4.7}$$

Матрица a_{22} является нижнетреугольной, и мы полагаем $|\det a_{22}| = 1$.

Заметим, что выражение (4.7) совпадает с производной Радона–Никодима $g_{[k]}$ и не меняется при переходе $k \rightarrow k+1$. Следовательно, мы получаем свойство совместности (4.4).

4.4. Доказательство предложения 1.7. Фиксируем элемент $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \overline{\text{GL}}(2n, \mathbb{Q}_p)$. Выражение

$$f(z) = \det \begin{pmatrix} a_{11} + z_{11}c_{11} & 0 \\ a_{21} + z_{21}c_{11} & a_{22} \end{pmatrix} := \det(a_{11} + z_{11}c_{11})$$

является корректно определенной функцией на $\text{Mat}(\infty, \mathbb{Q}_p)$.

Заметим, что эта функция удовлетворяет цепному правилу (3.3). Следовательно, формула (1.12) задает представление группы $\overline{\text{GL}}(2\infty, \mathbb{Z})$.

Список литературы

1. Yu. A. Neretin, “Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups”, *Duke Math. J.*, **114**:2 (2002), 239–266.
2. Yu. A. Neretin, *Lectures on Gaussian integral operators and classical groups*, EMS Ser. Lect. Math., European Math. Soc., Zürich, 2011.
3. Хуа Ло Кен, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, ИЛ, М., 1959; пер. с кит., англ. пер: L. K. Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

4. G. Olshanski, "The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group", *J. Funct. Anal.*, **205**:2 (2003), 464–524.
5. A. Borodin, G. Olshanski, "Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes", *Ann. of Math.* (2), **161**:3 (2005), 1319–1422.
6. D. Pickrell, "Measures on infinite dimensional Grassmann manifolds", *J. Funct. Anal.*, **70**:2 (1987), 323–356.
7. S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, "Harmonic analysis on the infinite symmetric group", *Invent. Math.*, **158**:3 (2004), 551–642.
8. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996.
9. Ю. А. Неретин, "Бета-функция ансамбля Брюа–Титса и деформация пространства l^2 на множестве p -адических решеток", *Матем. сб.*, **194**:12 (2003), 31–62; англ. пер.: Yu. A. Neretin, "Beta functions of Bruhat-Tits buildings and deformation of l^2 on the set of p -adic lattices", *Sb. Math.*, **194**:12 (2003), 1775–1805.
10. B. Ørsted, "A model for an interacting quantum field", *J. Funct. Anal.*, **36**:1 (1980), 53–71.
11. Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, УРСС, М., 1998; англ. пер.: Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **16**, Clarendon Press, Oxford, 1996.
12. А. М. Вершик, С. В. Керов, "Характеры и факторпредставления бесконечной симметрической группы", *Докл. АН СССР*, **257**:5 (1981), 1037–1040; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, "Characters and factor representations of the infinite symmetric group.", *Soviet Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 389–392.
13. А. М. Вершик, С. В. Керов, "Асимптотическая теория характеров симметрической группы", *Функц. анализ и его прил.*, **15**:4 (1981), 15–27; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, "Asymptotic theory of characters of the symmetric group", *Functional Anal. Appl.*, **15**:4 (1981), 246–255.
14. Г. И. Олшанский, "Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ ", *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 178–209; англ. пер.: G. I. Ol'shanskij, "Unitary representations of (G, K) -pairs connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$ ", *Leningrad Math. J.*, **1**:4 (1990), 983–1014.
15. Г. И. Олшанский, "Унитарные представления бесконечномерных пар (G, K) и формализм Хая", *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1983), 33–36; англ. пер.: G. I. Ol'shanskij, "Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe", *Soviet Math. Dokl.*, **27**:2 (1982), 290–294.
16. G. I. Olshanski, "Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe", *Representation of Lie groups and related topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, Gordon and Breach, New York, 1990, 269–463.
17. D. Pickrell, "Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces", *J. Funct. Anal.*, **90**:1 (1990), 1–26.
18. G. I. Olshanski, "On semigroups related to infinite-dimensional groups", *Topics in representation theory*, Adv. Soviet Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1991, 67–101.
19. Yu. A. Neretin, *Infinite-dimensional p -adic groups, semigroups of double cosets, and inner functions on Bruhat–Tits buildings*, arXiv:1108.4873.
20. Е. И. Зеленов, " p -адическая бесконечномерная симплектическая группа", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:6 (1993), 29–51; англ. пер.: E. I. Zelenov, "The infinite-dimensional p -adic symplectic group", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **43**:3 (1994), 421–441.

21. M. Nazarov, Yu. Neretin, G. Olshanskii, “Semi-groupes engendres par la representation de Weil du groupe symplectique de dimension infinie”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, **309**:7 (1989), 443–446.
22. M. Nazarov, “Oscillator semigroup over a non-Archimedean field”, *J. Funct. Anal.*, **128**:2 (1995), 384–438.
23. A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Four drafts on the representation theory of the group of infinite matrices over a finite field”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XV*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **344**, ПОМИ, СПб., 2007, 5–36; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Four drafts on the representation theory of the group of infinite matrices over a finite field”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **147**:6 (2007), 7129–7144.
24. A. В. Дудко, “Ручные представления группы $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ ”, *Алгебра и анализ*, **18**:2 (2006), 57–79; англ. пер.: A. V. Dudko, “Tame representations of the group $GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ ”, *St. Petersburg Math. J.*, **18**:2 (2007), 223–239.
25. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, New York, 1996.

Ю. А. НЕРЕТИН (YU. A. NERETIN)

University of Vienna, Austria;

Институт теоретической

и экспериментальной физики

им. А. И. Алиханова, г. Москва;

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: neretin@mccme.ru

Поступило в редакцию

10.05.2012

25.06.2012