Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, Полугруппы накрытий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 3, 163–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7997>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 02:23:35

УДК 512.53+512.544+512.772.5

Вик. С. Куликов, В. М. Харламов

Полугруппы накрытий

Вводится и изучается структура полугруппы на множестве неприводимых компонент пространства Гурвица отмеченных накрытий комплексной проективной кривой с заданной группой Галуа накрытий и фиксированным типом ветвлений. В качестве приложений даны новые условия для типа ветвлений, которые достаточны для неприводимости пространств Гурвица. Получены оценки числа неприводимых компонент при некоторых более общих условиях и показано, что число неприводимых компонент совпадает с числом топологических классов накрытий при условии, что число точек ветвления накрытий достаточно велико.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: неприводимые компоненты пространства Гурвица конечнолистных накрытий проективных кривых, полугруппы над группами.

DOI: 10.4213/im7997

И. Р. Шафаревичу к 90-летию

Введение

Пусть $f: E \rightarrow F$ – конечный морфизм между комплексными неособыми неприводимыми проективными кривыми. Обозначим через $\mathbb{C}(E)$ и $\mathbb{C}(F)$ поля рациональных функций соответственно на E и F . Морфизм f определяет конечное расширение $f^*: \mathbb{C}(F) \hookrightarrow \mathbb{C}(E)$ поля $\mathbb{C}(F)$ (обратно, расширение поля определяет накрытие f однозначно с точностью до изоморфизмов накрытий с фиксированной базой). Обозначим через G группу Галуа замыкания Галуа этого расширения полей и назовем ее *группой Галуа накрытия f* .

Зафиксируем точку $q \in F$, не являющуюся точкой ветвления накрытия f , и упорядочим точки из E , лежащие над q . Морфизм f с фиксированным порядком точек из $f^{-1}(q)$ будем называть *отмеченным накрытием*.

Рассмотрим фундаментальную группу $\pi_1(F \setminus B, q)$ дополнения к множеству точек ветвления $B \subset F$ отмеченного накрытия f степени $d = \deg f$. Упорядочение точек из $f^{-1}(q)$ определяет гомоморфизм $f_*: \pi_1(F \setminus B, q) \rightarrow \mathcal{S}_d$ из $\pi_1(F \setminus B, q)$

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00185), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-4713.2010.1) и Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ по гранту Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0023). Работа второго автора поддержана Французским национальным агентством научных исследований (грант ANR-09-BLAN-0039-01) и Американским фондом исследовательской группы “Зеркальная симметрия и тропическая геометрия” (грант № 0854989).

в симметрическую группу S_d . Из неприводимости кривой E следует, что образ $\text{im } f_* \subset S_d$ действует транзитивно на $f^{-1}(q)$ и изоморфен группе G , т. е. мы можем отождествить образ $\text{im } f_*$ с группой G и таким образом зафиксировать вложение $G \hookrightarrow S_d$.

Движение вдоль стандартной простой петли γ вокруг точки ветвления $b \in B$ определяет *локальную монодромию* $f_*(\gamma) \in G$ накрытия f в точке b . По точке b гомотопический класс этой стандартной петли в $\pi_1(F \setminus B, q)$ и, следовательно, локальная монодромия в G определяются только с точностью до сопряжения. Обозначим через $O \subset G$ объединение классов сопряженности всех локальных монодромий накрытия f и назовем пару (G, O) *оснащенной группой Галуа* накрытия f . Набор $\tau = (\tau_1 C_1, \dots, \tau_m C_m)$, где $C_1, \dots, C_m$ – список всех классов сопряженности, входящих в O , и τ_i – число точек ветвления накрытия f с локальными монодромиями, принадлежащими классу C_i , называется *типом монодромии* накрытия f .

Отмеченные накрытия кривой F степени d с группой Галуа $G \subset S_d$, локальными монодромиями из O и n точками ветвления образуют так называемое пространство Гурвица $\text{HUR}_{(G,O),n}(F, q)$ (точные определения см. в п. 2.7, где кривая обозначается через $\overline{F}$), в то время как такие же накрытия, но с фиксированным типом монодромии τ и $\sum \tau_i = n$ образуют в нем подпространство $\text{HUR}_{d,G,\tau}(F)$, которое состоит из нескольких компонент связности предыдущего и называется *пространством Гурвица накрытий кривой F степени d , имеющих тип ветвления τ* .

В случае, когда $F = \mathbb{P}^1$, $G = S_d$ и O – множество транспозиций, знаменитая теорема Клебша–Гурвица (см. [1], [2]) утверждает, что $\text{HUR}_{d,S_d,\tau}(\mathbb{P}^1)$ состоит из единственной неприводимой компоненты, если $\tau = (nO)$ с четным $n \geq 2(d-1)$, и является пустым множеством при остальных n . Некоторые обобщения теоремы Клебша–Гурвица были получены в [3]–[8]. В частности, теорема Клебша–Гурвица была распространена на следующие случаи: в [3], когда все, за исключением одной, локальные монодромии являются транспозициями¹; в [4], когда все, за исключением двух, локальные монодромии являются транспозициями; в [5], когда все локальные монодромии являются либо транспозициями, либо циклическими перестановками длины три; и в [7], когда среди локальных монодромий имеется по крайней мере $3(d-1)$ транспозиций.

В [10] доказано, что для оснащенной группы (S_d, O) такой, что первый класс сопряженности C_1 из O содержит нечетную перестановку, оставляющую неподвижными по крайней мере два элемента, пространство Гурвица $\text{HUR}_{d,S_d,\tau}(\mathbb{P}^1)$ является неприводимым, если τ_1 является достаточно большим числом. С другой стороны, пример в [4] показывает, что $\text{HUR}_{8,S_8,\tau}(\mathbb{P}^1)$ состоит по крайней мере из двух неприводимых компонент, если $\tau = (1C_1, 1C_2, 1C_3)$, где C_1 – класс сопряженности перестановки $(1, 2)(3, 4, 5)$, C_2 – класс сопряженности перестановки $(1, 2, 3)(4, 5, 6, 7)$ и C_3 – класс сопряженности перестановки $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Статьи [6] и [8] посвящены некоторым обобщениям теоремы Клебша–Гурвица в случае произвольной группы G . В частности, в [8] было

¹Добавлено при корректуре. В том же 1984 г. такой же результат был анонсирован С. М. Натанзоном в [9].

доказано, что для фиксированной оснащенной группы (G, O) число неприводимых компонент пространства $\text{HUR}_{d,G,\tau}(\mathbb{P}^1)$ (если оно не пусто) не зависит от типа τ при условии, что все τ_i являются достаточно большими числами.

В случае положительного рода неприводимость пространства $\text{HUR}_{d,S_d,\tau}(F)$ доказана в [11] при выполнении следующих условий: $n \geq 2d$ и все локальные монодромии являются транспозициями. Затем этот результат был усилен, во-первых, в [12], где первое условие $n \geq 2d$ было заменено на $n \geq 2d - 2$, и в [13], где второе условие было заменено на условие, что все, за исключением одной, локальные монодромии являются транспозициями. Отметим, что неприводимость факторпространства пространства $\text{HUR}_{d,S_d,\tau}(F)$ по действию группы классов гомеоморфизмов кривой F (рассматриваемой как вещественная поверхность) была доказана в [3] при более слабом условии $n > \frac{d}{2}$. Кроме того, упомянутый выше результат статьи [7] был обобщен в [14] на накрытиях кривых произвольного рода.

Одна из целей авторов настоящей статьи – распространить результаты статей [7], [8], [10] со случая $F = \mathbb{P}^1$ на случай, когда F – кривая произвольного рода. Примененный в [7], [8], [10] подход для вычисления числа неприводимых компонент пространства $\text{HUR}_{d,G,\tau}(\mathbb{P}^1)$ основан на систематическом исследовании полугрупп над группами; в частности, полугруппы разложений на множители $S(G, O)$ с множителями, принадлежащими оснащению O (см. пп. 1.1, 1.2), играют центральную роль в этом исследовании ввиду того, что множество элементов подполугруппы $S(G, O)_1^G \subset S(G, O)$, имеющих тип τ , находится во взаимно однозначном соответствии с множеством неприводимых компонент пространства Гурвица $\text{HUR}_{d,G,\tau}(\mathbb{P}^1)$.

В настоящей статье, чтобы исследовать накрытия проективных кривых (или, что то же самое, накрытия вещественных поверхностей) произвольного рода, мы обобщаем понятие полугрупп разложений на множители до понятия полугрупп отмеченных накрытий. Накрытия можно рассматривать с точностью до разных отношений эквивалентности, и поэтому мы определяем соответственно различные виды полугрупп отмеченных накрытий. Отношение эквивалентности, которое наиболее подходит к конструкции пространств Гурвица, вытекает из возможности двигать точки ветвления, в то время как наиболее подходящая эквивалентность накрытий при топологической классификации накрытий (например, подобной той, которая рассматривалась в [3]) включает дополнительно действие всей группы классов гомеоморфизмов на базе накрытий. В частности, чтобы изучать накрытия с точностью до деформаций точек ветвления, мы определяем полугруппу $GS_d(G, O)$ отмеченных накрытий степени d с группой Галуа G и множеством локальных монодромий из $O \subset G$. Если мы хотим рассматривать накрытия с точностью до действия модулярной группы, то мы получаем другую полугруппу, которую обозначаем через $GWS_d(G, O)$. Эти полугруппы связаны естественным эпиморфизмом $\Phi: GS_d(G, O) \rightarrow GWS_d(G, O)$ полугрупп. Аналогично случаю накрытий кривой рода нуль некоторые специальные подполугруппы этих двух полугрупп находятся соответственно в каноническом взаимно однозначном соответствии с множеством неприводимых компонент пространства Гурвица $\text{HUR}_{d,G}(F)$ и

множеством топологических классов отмеченных накрытий поверхности F степени d с группой Галуа G .

По определению *тип монодромии* элемента $s = (f: E \rightarrow F)$, принадлежащего этим полугруппам, является набором $\tau(s) = (\tau_1 C_1, \dots, \tau_m C_m)$ локальных монодромий накрытия f . Тип монодромии ведет себя аддитивно, т. е. задает гомоморфизм из полугрупп накрытий в полугруппу $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$. Поэтому для константы $T \in \mathbb{N}$ корректно определены подполугруппы

$$\begin{aligned} G\mathbb{S}_{d,T}(G, O) &= \{s \in G\mathbb{S}_d(G, O) \mid \tau_i(s) \geq T, i = 1, \dots, m\}, \\ GWS_{d,T}(G, O) &= \{s \in GWS_d(G, O) \mid \tau_i(s) \geq T, i = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой оснащенной конечной группы (G, O) такой, что элементы из O порождают всю группу G , существует константа $T \in \mathbb{N}$ такая, что ограничение гомоморфизма Φ на $G\mathbb{S}_{d,T}(G, O)$ является изоморфизмом полугрупп $G\mathbb{S}_{d,T}(G, O)$ и $GWS_{d,T}(G, O)$.*

В [8] для каждой оснащенной конечной группы (G, O) был определен индекс неоднозначности $a_{(G,O)}$ (см. п. 1.3).

ТЕОРЕМА 2. *Для каждой оснащенной конечной группы (G, O) , $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$, такой, что элементы из O порождают всю группу G , существует константа T такая, что для любой проективной неприводимой неособой кривой F число неприводимых компонент каждого непустого пространства Гурвица $\text{HUR}_{d,G,\tau}(F)$ равно индексу неоднозначности $a_{(G,O)}$ при условии, что $\tau_i \geq T$ для всех $i = 1, \dots, m$.*

Если для некоторого $k < m$ элементы из $O_k = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$ порождают всю группу G , то существует константа T' такая, что число неприводимых компонент пространства $\text{HUR}_{d,G,\tau}^m(F)$ не превосходит индекса неоднозначности $a_{(G,O_k)}$ при условии $\tau_i \geq T'$ для всех $i = 1, \dots, k$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть C – класс сопряженности нечетной перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_d$ такой, что σ оставляет неподвижными по крайней мере два элемента. Тогда существует константа N_C такая, что для любой проективной неприводимой неособой кривой F пространство Гурвица $\text{HUR}_{d,\mathcal{S}_d,\tau}(F)$ является неприводимым, если C входит в тип τ с кратностью не менее N_C .*

Статья состоит из двух параграфов. В § 1 приведены алгебраические части доказательств теорем 1–3. В пп. 1.1–1.3 мы вводим обозначения и напоминаем необходимые определения и результаты из [7], [8], [10]. В п. 1.4 мы вводим понятие допустимых подгрупп групп автоморфизмов свободных групп, которое в следующем пункте используется при определении алгебраических полугрупп накрытий. Оставшиеся пункты из § 1 содержат доказательство алгебраической части основных результатов. В двух первых пунктах в § 2 мы вводим вспомогательные понятия такие, как кодировка монодромии разветвленных накрытий и скелеты поверхностей. В пп. 2.3–2.6 мы определяем ряд геометрических полугрупп накрытий и доказываем утверждения, в которых сравниваются понятия алгебраических и геометрических полугрупп накрытий. В заключительных

пунктах из § 2 мы сопоставляем элементам геометрических полугрупп накрытий неприводимые компоненты пространства Гурвица и завершаем доказательство основных теорем.

§ 1. Полугруппы над группами

1.1. Определение полугрупп над группами. Напомним сначала основные определения и некоторые свойства полугрупп над группами, уделяя особое внимание полугруппам разложений на множители (более детальное изложение см. в [7], [8], [10], [15]).

Набор (S, G, α_G, ρ_G) , где S – полугруппа, G – группа и $\alpha = \alpha_G: S \rightarrow G$, $\rho = \rho_G: G \rightarrow \text{Aut}(S)$ – гомоморфизмы, называется *полугруппой S над группой G* , если для любых $s_1, s_2 \in S$ имеем

$$s_1 \cdot s_2 = \rho(\alpha(s_1))(s_2) \cdot s_1 = s_2 \cdot \lambda(\alpha(s_2))(s_1), \quad (1)$$

где $\lambda(g) = \rho(g^{-1})$.

Пусть $(S_1, G_1, \alpha_1, \rho_1)$ и $(S_2, G_2, \alpha_2, \rho_2)$ – две полугруппы соответственно над группами G_1 и G_2 . Пара (h_1, h_2) гомоморфизмов $h_1: S_1 \rightarrow S_2$ и $h_2: G_1 \rightarrow G_2$ называется *гомоморфизмом полугрупп над группами*, если:

- (i) $h_2 \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ h_1$;
- (ii) $\rho_2(h_2(g))(\alpha_2(h_1(s))) = \alpha_2(h_1(\rho_1(g)(s)))$ для всех $s \in S_1$ и $g \in G_1$.

В частности, если $G_1 = G_2 = G$, то говорят, что гомоморфизм полугрупп $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ *определен над G* , если $\alpha_1(s) = \alpha_2(\varphi(s))$ и $\rho_2(g)(\varphi(s)) = \varphi(\rho_1(g)(s))$ для всех $s \in S_1$ и $g \in G$.

1.2. Полугруппы разложений на множители. Одним из главных признаков полугрупп над группами являются так называемые полугруппы разложений на множители. Чтобы определить их, рассмотрим *оснащенную группу* (G, O) , где G – некоторая группа и O – подмножество в G , инвариантное относительно внутренних автоморфизмов. Здесь и далее мы предполагаем, что:

- (i) $1 \notin O$;
- (ii) множество O состоит из конечного числа классов сопряженности C_i в группе G , $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$;
- (iii) фиксирована нумерация этих классов сопряженности.

Под *гомоморфизмами оснащенных групп* (G_1, O_1) и (G_2, O_2) мы понимаем гомоморфизмы $f: G_1 \rightarrow G_2$ такие, что $f(O_1) \subset O_2$.

По определению *полугруппа разложений на множители с множителями из O* – это полугруппа $S(G, O)$, порожденная элементами алфавита $\mathcal{X}_O = \{x_g \mid g \in O\}$, которые связаны соотношениями

$$x_{g_1} \cdot x_{g_2} = x_{g_2} \cdot x_{g_1^{g_2}}, \quad g_1, g_2 \in O, \quad (2)$$

где $g_1^{g_2} = g_2^{-1}g_1g_2$. Гомоморфизм $\alpha: S(G, O) \rightarrow G$, заданный формулой $\alpha(x_g) = g$ для каждого $x_g \in \mathcal{X}_O$, называется *гомоморфизмом произведения*. *Одновременное сопряжение*

$$x_a \in \mathcal{X}_O \mapsto x_{gag^{-1}} \in \mathcal{X}_O$$

определяет гомоморфизм $G \rightarrow \text{Aut}(S(G, O))$, который мы обозначаем через ρ . Легко видеть, что $(S(G, O), G, \alpha, \rho)$ является полугруппой над группой G .

Отметим, что корректно определен гомоморфизм длины

$$l: S(G, O) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\},$$

заданный формулой $l(x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n}) = n$.

Положим $\rho_S = \rho \circ \alpha$ и $\lambda_S = \lambda \circ \alpha$, где, как и выше, $\lambda(g) = \rho(g^{-1})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [16]. Для всех $s_1, s_2 \in S(G, O)$ имеем

$$s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot \lambda_S(s_2)(s_1) = \rho_S(s_1)(s_2) \cdot s_1.$$

Сопоставим каждому элементу $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \in S(G, O)$ подгруппу G_s группы G , порожденную образами $\alpha(x_{g_1}) = g_1, \dots, \alpha(x_{g_n}) = g_n$ множителей $x_{g_1}, \dots, x_{g_n}$, и обозначим через G_O подгруппу группы G , порожденную элементами из O .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [7]. Подгруппа G_s группы G корректно определена, т. е. не зависит от представления элемента s в виде произведения порождающих элементов $x_{g_i} \in \mathcal{X}_O$.

Для подгрупп H и K группы G положим

$$S(G, O)^H = \{s \in S(G, O) \mid G_s = H\}, \quad S(G, O)_K = \{s \in S(G, O) \mid \alpha(s) \in K\}$$

и $S(G, O)_K^H = S(G, O)_K \cap S(G, O)^H$. Легко видеть, что полугруппа $S(G, O)^H$ (соответственно, $S(G, O)_K^H$) изоморфна полугруппе $S(H, H \cap O)^H$ (соответственно, полугруппе $S(H, H \cap O)_{K \cap H}^H$) и изоморфизм индуцирован вложением $(H, H \cap O) \hookrightarrow (G, O)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [7]. Пусть (G, O) – оснащенная группа, и пусть $s \in S(G, O)$. Имеем:

- 1) $\ker \rho$ совпадает с централизатором C_O группы G_O в группе G ;
- 2) если $\alpha(s)$ принадлежит центру $Z(G_s)$ группы G_s , то для каждого элемента $g \in G_s$ действие $\rho(g)$ оставляет неподвижным элемент $s \in S(G, O)$;
- 3) если $\alpha(s \cdot x_g)$ принадлежит центру $Z(G_{s \cdot x_g})$ группы $G_{s \cdot x_g}$, то $s \cdot x_g = x_g \cdot s$;
- 4) если $\alpha(s) = 1$, то $s \cdot s' = s' \cdot s$ для любого $s' \in S(G, O)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 [7]. Для любой оснащенной группы (G, O) полугруппа $S(G, O)_1$ содержится в центре полугруппы $S(G, O)$ и, в частности, является коммутативной полугруппой.

Отметим, что если $g \in O$ является элементом порядка n , то $x_g^n \in S(G, O)_1$.

ЛЕММА 1 [7]. Пусть $s \in S(G, O)_{Z(G_O)}$ и $s_1 \in S(G, O)^{G_O}$, где $Z(G_O)$ – центр группы G_O . Тогда

$$s \cdot s_1 = \rho(g)(s) \cdot s_1 \tag{3}$$

для всех $g \in G_O$.

В частности, если $s \in S(G, O)^G$, а $C \subset O$ – некоторый класс сопряженности группы G и для некоторого $g_1 \in C$ элемент g_1^n принадлежит центру $Z(G)$

группы G , то для любого элемента $g_2 \in C$ имеем

$$x_{g_1}^n \cdot s = x_{g_2}^n \cdot s. \quad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [7]. Элементы полугруппы $S(G, O)_1^G$ неподвижны при действии группы G одновременными сопряжениями.

1.3. Полугруппы разложений на множители над эквивалентными оснащенными группами. Далее мы будем предполагать, что для оснащения O оснащенной группы (G, O) выполнено следующее предположение:

(iv) элементы из O порождают всю группу G .

В [8] каждой оснащенной группе был сопоставлен C -граф. По определению C -граф $\Gamma_{(G, O)}$ оснащенной группы (G, O) – это направленный меченный граф. Метками вершин являются элементы из O , причем эти метки задают взаимно однозначное соответствие между множеством O и множеством вершин $V = \{v_g \mid g \in O\}$ графа $\Gamma_{(G, O)}$. Каждое ребро графа $\Gamma_{(G, O)}$ также помечено некоторым элементом из O . А именно, две вершины v_{g_1} и v_{g_2} , $g_1, g_2 \in O$, соединены ребром $e_{v_{g_1}, v_{g_2}, g}$ с меткой $g \in O$ и направлением от v_{g_1} к v_{g_2} тогда и только тогда, когда $g^{-1}g_1g = g_2$. (C -граф может содержать петли, а также несколько ребер могут соединять одну и ту же пару вершин в одном и том же направлении, однако эти ребра имеют разные метки.)

Очевидно, классы сопряженности $C_i \subset O$, $1 \leq i \leq m$, находятся во взаимно однозначном соответствии с компонентами связности Γ_i C -графа $\Gamma_{(G, O)}$; более точно, $v_g \in \Gamma_i$ тогда и только тогда, когда $g \in C_i$.

Две оснащенные группы (G_1, O_1) и (G_2, O_2) называются *эквивалентными*, если их C -графы $\Gamma_{(G_1, O_1)}$ и $\Gamma_{(G_2, O_2)}$ изоморфны как C -графы, другими словами, если существует биекция $O_1 \rightarrow O_2$, индуцирующая изоморфизм C -графов $\Gamma_{(G_1, O_1)}$ и $\Gamma_{(G_2, O_2)}$.

Каждому C -графу $\Gamma = \Gamma_{(G, O)}$ можно сопоставить C -группу $G_\Gamma = (\tilde{G}, \tilde{O})$, эквивалентную оснащенной группе (G, O) . Обозначив через $g \mapsto \tilde{g}$ биекцию $O \rightarrow \tilde{O}$, мы можем описать группу $\tilde{G}$ как группу, порожденную элементами $\tilde{g} \in \tilde{O}$, связанными соотношениями

$$\{\tilde{g}_3^{-1}\tilde{g}_1\tilde{g}_3 = \tilde{g}_2 \text{ тогда и только тогда, когда существует ребро } e_{v_{g_1}, v_{g_2}, g_3} \in \Gamma\}$$

(или, эквивалентно, $\tilde{g}_3^{-1}\tilde{g}_1\tilde{g}_3 = \tilde{g}_2$ тогда и только тогда, когда имеет место соотношение $g_3^{-1}g_1g_3 = g_2$ в группе G). Эти порождающие называются *C -порождающими*. Они находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами графа Γ , определенном композицией биекций: $\tilde{g} \mapsto g \mapsto v_g$. Кроме того, два C -порождающих элемента $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ принадлежат одной и той же компоненте связности графа $\Gamma_{(G, O)}$ тогда и только тогда, когда они сопряжены. Множество $\tilde{O}$ C -порождающих элементов C -группы $\tilde{G}$ является объединением классов сопряженности, удовлетворяющих предположениям (i)–(iv).

Взаимно однозначное отображение $\beta_{(G, O)}: \tilde{O} \rightarrow O$, определенное формулой $\beta_{(G, O)}(\tilde{g}) = g$, задает эпиморфизм $\beta = \beta_{(G, O)}: (\tilde{G}, \tilde{O}) \rightarrow (G, O)$ оснащенных групп и изоморфизм $\beta_*: S(\tilde{G}, \tilde{O}) \rightarrow S(G, O)$ полугрупп. Согласно [8, утверждение 8] ядро $\ker \beta$ является подгруппой центра $Z(\tilde{G})$ C -группы $\tilde{G}$.

Добавив соотношения коммутирования, легко видеть, что группа $H_1(\tilde{G}, \mathbb{Z}) = \tilde{G}/[\tilde{G}, \tilde{G}]$ изоморфна группе $\mathbb{Z}^m$. Более того, благодаря фиксированной нумерации классов сопряженности $\{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m\}$ эта группа имеет естественный базис, в котором в терминах гомоморфизма абелианизации $ab: \tilde{G} \rightarrow H_1(\tilde{G}, \mathbb{Z})$ его i -й элемент – это $ab(\tilde{g})$, где $g \in C_i$, $1 \leq i \leq m$.

Гомоморфизм $\tau = ab \circ \beta_*^{-1}: S(G, O) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ называется *гомоморфизмом типа*, образ $\tau(s) = (\tau_1(s), \dots, \tau_m(s)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ называется *типом* элемента $s \in S(G, O)$, а i -я координата $\tau_i(s)$ образа $\tau(s)$ называется i -м *типом* элемента s .

C -группа $\tilde{G}$ называется *C -конечной*, если число вершин графа $\Gamma(\tilde{G}, \bar{O})$ конечно. Согласно [8, предложение 3] коммутант $[\tilde{G}, \tilde{G}]$ любой C -конечной группы $\tilde{G}$ является конечной группой. Порядок $a_{(G, O)} = |\ker \beta \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]|$ группы $\ker \beta \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]$ называется *индексом неоднозначности* оснащенной конечной группы (G, O) . Если $O' \subset O$ – два оснащения конечной группы G таких, что элементы из O' порождают группу G , то согласно [8, следствие 2] мы имеем неравенство $a_{(G, O)} \leq a_{(G, O')}$.

В [8] были доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (G, O) , $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$, – оснащенная конечная группа и $(\tilde{G}, \bar{O}) = G_\Gamma$, $\Gamma = \Gamma_{(G, O)}$, – C -группа, эквивалентная группе (G, O) . Тогда существует константа $T \in \mathbb{N}$ такая, что для любого элемента $s_1 \in S(G, O)^G$ с $\tau_i(s_1) \geq T$ для всех $i = 1, \dots, m$ существует $a_{(G, O)}$ элементов $s_1, \dots, s_{a_{(G, O)}} \in S(G, O)^G$ таких, что:

- 1) $s_i \neq s_j$ при $1 \leq i < j \leq a_{(G, O)}$;
- 2) $\tau(s_i) = \tau(s_1)$ при $1 \leq i \leq a_{(G, O)}$;
- 3) $\alpha_G(s_i) = \alpha_G(s_1)$ при $1 \leq i \leq a_{(G, O)}$;
- 4) если элемент $s \in S(G, O)^G$ таков, что $\tau(s) = \tau(s_1)$ и $\alpha_G(s) = \alpha_G(s_1)$, то $s = s_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq a_{(G, O)}$;
- 5) если $s \in S(G, O)^G$ и $\alpha_{\tilde{G}}(s) = \alpha_{\tilde{G}}(s_1)$, то $s = s_1$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – конечная группа и $O' \subset O$ – такие два ее оснащения, что элементы из $O' = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$ порождают всю группу G . Тогда существует константа $T = T_{O'}$ такая, что если для элемента $s_1 \in S(G, O)^G$ его i -й тип $\tau_i(s_1) \geq T$ для всех $i = 1, \dots, k$, то существует не более $a_{(G, O')}$ элементов $s_1, \dots, s_n \in S(G, O)^G$ таких, что:

- (i) $s_i \neq s_j$ при $1 \leq i < j \leq n$,
- (ii) $\tau(s_i) = \tau(s_1)$ при $1 \leq i \leq n$,
- (iii) $\alpha_G(s_i) = \alpha_G(s_1)$ при $1 \leq i \leq n$,

где $a_{(G, O')}$ – индекс неоднозначности оснащенной группы (G, O') .

Теорема 5 – это в точности теорема 7 из [8]. Часть теоремы 4 (пп. 1)–4)) – это теорема 6 из [8], а п. 5) является прямым следствием теорем 5, 6 из [8] и следующего замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Элементы $s_1, \dots, s_{a_{(G, O)}} \in S(G, O)^G$, существование которых утверждается в теореме 4, различаются своими значениями $\alpha_{\tilde{G}}(s_i) \in \tilde{G}$.

А именно, при $i \neq j$ элемент $\alpha_{\tilde{G}}(s_i)\alpha_{\tilde{G}}(s_j)^{-1}$ является нетривиальным элементом группы $\ker \beta_{(G,O)} \cap [\tilde{G}, \tilde{G}]$.

1.4. Допустимые подгруппы группы $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$. В этом пункте для того, чтобы ввести понятие алгебраических полугрупп накрытий, мы выделим некоторый класс подгрупп в группах автоморфизмов свободных групп, а группы, входящие в этот класс, будем называть *допустимыми группами автоморфизмов*.

Пусть $\mathbb{F}^{n+2p}$ – свободная группа, свободно порожденная $n + 2p$ элементами. Пусть $\mathcal{G} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subset \mathbb{F}^{n+2p}$, $\mathcal{L} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{F}^{n+2p}$ и $\mathcal{M} = \{\mu_1, \dots, \mu_p\} \subset \mathbb{F}^{n+2p}$ – такие три упорядоченных множества, что элементы из $\mathcal{B} = \mathcal{G} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ порождают группу $\mathbb{F}^{n+2p}$.

Пусть $\bar{n} = (n_1, \dots, n_{p+1})$ – упорядоченное неотрицательное разбиение числа n , т.е. упорядоченный набор, состоящий из $p + 1$ неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n :

$$n = n_1 + \dots + n_{p+1}, \quad n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Положим $k_i = \sum_{j=1}^i n_j$. Каждое разбиение $\bar{n}$ определяет свой собственный порядок на множестве $\mathcal{B}$:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{k_1}, \lambda_1, \mu_1, \dots, \gamma_{k_{i-1}+1}, \dots, \gamma_{k_i}, \lambda_i, \mu_i, \gamma_{k_i+1}, \dots, \\ \dots, \gamma_{k_{i+1}}, \dots, \lambda_p, \mu_p, \gamma_{k_p+1}, \dots, \gamma_n$$

(здесь множество $\{\gamma_{k_{i-1}+1}, \dots, \gamma_{k_i}\}$ пусто, если $n_i = 0$). Обозначим через $\mathcal{B}_{\bar{n}}$ множество $\mathcal{B}$ с порядком, определяемым разбиением $\bar{n}$, и назовем его *репером* группы $\mathbb{F}^{n+2p}$. В частности, $\mathcal{B}_{(n,0,\dots,0)} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p\}$. Элемент $\partial \mathcal{B}_{\bar{n}} = \gamma_1 \dots \gamma_{k_1} [\lambda_1, \mu_1] \dots \gamma_{k_{i-1}+1} \dots \gamma_{k_i} [\lambda_i, \mu_i] \gamma_{k_i+1} \dots \gamma_{k_{i+1}} \dots [\lambda_p, \mu_p] \gamma_{k_p+1} \dots \gamma_n$ группы $\mathbb{F}^{n+2p}$ называется *границей репера $\mathcal{B}_{\bar{n}}$* .

Для заданного, как и выше, множества $\mathcal{B}' = \mathcal{G}' \cup \mathcal{L}' \cup \mathcal{M}'$ и двух соседних разбиений $\bar{n}' = (\dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, n_{i+2}, \dots)$ и $\bar{n}'' = (\dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1} + 1, n_{i+2}, \dots)$ определим *элементарную замену репера $h_{\bar{n}', \bar{n}''}$* , в результате которой меняется не только множество порождающих элементов свободной группы, но и упорядочение его элементов. А именно, положим

$$h_{\bar{n}', \bar{n}''}(\mathcal{B}'_{\bar{n}'}) = \mathcal{B}''_{\bar{n}''},$$

где $\mathcal{B}'' = \mathcal{G}'' \cup \mathcal{L}'' \cup \mathcal{M}''$ при $\lambda_j'' = \lambda_j'$ и $\mu_j'' = \mu_j'$ для всех $j = 1, \dots, p$, а $\gamma_j'' = \gamma_j'$ при $j \neq k_i = n_1 + \dots + n_i$ и $\gamma_{k_i}'' = ([\lambda_i', \mu_i'])^{-1} \gamma_{k_i}' [\lambda_i', \mu_i']$. Обратная замена $h_{\bar{n}', \bar{n}''}^{-1} = h_{\bar{n}'', \bar{n}'}$ также называется элементарной заменой репера. Скажем, что два репера группы $\mathbb{F}^{n+2p}$ *строго эквивалентны*, если один из них может быть получен из другого в результате конечной последовательности элементарных замен реперов. Композиция элементарных замен, преобразующая репер $\mathcal{B}'_{\bar{n}'}$ в $\mathcal{B}''_{\bar{n}''}$, также будет обозначаться через $h_{\bar{n}', \bar{n}''}$. Очевидно, имеют место следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть реперы $\mathcal{B}'_{\bar{n}}$ и $\mathcal{B}''_{\bar{n}}$ строго эквивалентны реперу $\mathcal{B}_{(n,0,\dots,0)}$. Тогда $\mathcal{B}'_{\bar{n}} = \mathcal{B}''_{\bar{n}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{B}'_{\bar{n}'}$ и $\mathcal{B}''_{\bar{n}''}$ – строго эквивалентные реперы. Тогда $\partial\mathcal{B}'_{\bar{n}'} = \partial\mathcal{B}''_{\bar{n}''}$.

Группа $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$ естественным образом действует на множестве реперов. Это действие не меняет разбиение. Для заданных автоморфизма $h \in \text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$ и репера $\mathcal{B}_{\bar{n}}$ положим $\mathcal{B}' = h(\mathcal{B})$ и $h(\mathcal{B}_{\bar{n}}) = \mathcal{B}'_{\bar{n}'}$. Как обычно, орбита репера $\mathcal{B}_{\bar{n}}$ при действии подгруппы H группы $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$ будет обозначаться через $H\mathcal{B}_{\bar{n}}$. Очевидно, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть H – подгруппа группы $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$ и $\mathcal{B}'_{\bar{n}'}, \mathcal{B}''_{\bar{n}''}$ – два строго эквивалентных репера. Тогда:

- (i) для любого $h \in H$ реперы $h(\mathcal{B}'_{\bar{n}'})$ и $h(\mathcal{B}''_{\bar{n}''})$ строго эквивалентны и $h(\mathcal{B}'_{\bar{n}'}) = h_{\bar{n}', \bar{n}''}^{-1}(h(\mathcal{B}''_{\bar{n}''}))$;
- (ii) отображение $h_{\bar{n}', \bar{n}''} : H\mathcal{B}'_{\bar{n}'} \rightarrow H\mathcal{B}''_{\bar{n}''}$ является взаимно однозначным.

Зафиксируем репер $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{(n, 0, \dots, 0)} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p\}$ и для каждого i такого, что $2 \leq i \leq p+1$, положим $\mathcal{B}_i = h_{\bar{n}, \bar{n}'}\mathcal{B}_1$, где $\bar{n} = (n, 0, \dots, 0)$ и $\bar{n}' = (n-1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с 1, стоящей на i -м месте.

Выделим некоторые автоморфизмы группы $\mathbb{F}^{n+2p}$.

Аutomорфизм σ_i , $i = 1, \dots, n-1$, определяется своим действием на репере $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{aligned} \sigma_i(\lambda_j) &= \lambda_j & \text{при } j &= 1, \dots, p, \\ \sigma_i(\mu_j) &= \mu_j & \text{при } j &= 1, \dots, p, \\ \sigma_i(\gamma_j) &= \gamma_j & \text{при } j &\neq i, i+1, \\ \sigma_i(\gamma_i) &= \gamma_{i+1}, \\ \sigma_i(\gamma_{i+1}) &= \gamma_i^{\gamma_{i+1}}. \end{aligned}$$

Аutomорфизм $\xi_{i, \lambda}$, $i = 1, \dots, p$, определяется своим действием на репере $\mathcal{B}_i$:

$$\begin{aligned} \xi_{i, \lambda}(\lambda_{j, i}) &= \lambda_{j, i} & \text{при } j &\neq i, \\ \xi_{i, \lambda}(\mu_{j, i}) &= \mu_{j, i} & \text{при } j &= 1, \dots, p, \\ \xi_{i, \lambda}(\gamma_{j, i}) &= \gamma_{j, i} & \text{при } j &\neq n, \\ \xi_{i, \lambda}(\gamma_{n, i}) &= \gamma_{n, i}^{c_{1, i}}, & \text{где } c_{1, i} &= \lambda_{i, i} \mu_{i, i}^{-1} \lambda_{i, i}^{-1} \gamma_{n, i}^{-1}, \\ \xi_{i, \lambda}(\lambda_{i, i}) &= \gamma_{n, i} \lambda_{i, i}. \end{aligned}$$

Аutomорфизм $\xi_{i, \mu}$, $i = 1, \dots, p$, определяется своим действием на репере $\mathcal{B}_i$:

$$\begin{aligned} \xi_{i, \mu}(\mu_{j, i}) &= \mu_{j, i} & \text{при } j &\neq i, \\ \xi_{i, \mu}(\lambda_{j, i}) &= \lambda_{j, i} & \text{при } j &= 1, \dots, p, \\ \xi_{i, \mu}(\gamma_{j, i}) &= \gamma_{j, i} & \text{при } j &\neq n, \\ \xi_{i, \mu}(\gamma_{n, i}) &= \gamma_{n, i}^{c_{2, i}}, & \text{где } c_{2, i} &= \mu_{i, i} \lambda_{i, i}^{-1} \mu_{i, i}^{-1} \gamma_{n, i}, \\ \xi_{i, \mu}(\mu_{i, i}) &= \gamma_{n, i}^{-1} \mu_{i, i}. \end{aligned}$$

Автоморфизм ζ_i , $i = 1, \dots, p$, определяется своим действием на репере $\mathcal{B}_i$:

$$\begin{aligned}\zeta_i(\lambda_{j,i}) &= \lambda_{j,i} && \text{при } j \neq i, \\ \zeta_i(\mu_{j,i}) &= \mu_{j,i} && \text{при } j \neq i, \\ \zeta_i(\gamma_{j,i}) &= \gamma_{j,i} && \text{при } j \neq n, \\ \zeta_i(\gamma_{n,i}) &= c_{3,i}, && \text{где } c_{3,i} = \gamma_{n,i}^{[\lambda_{i,i}, \mu_{i,i}]}, \\ \zeta_i(\lambda_{i,i}) &= \lambda_{i,i}^{c_{3,i}}, \\ \zeta_i(\mu_{i,i}) &= \mu_{i,i}^{c_{3,i}},\end{aligned}$$

Для $0 \leq p_1 \leq p$ обозначим через Br_{n,p_1} подгруппу группы $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$, порожденную элементами $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \xi_{1,\lambda}, \dots, \xi_{p_1,\lambda}, \xi_{1,\mu}, \dots, \xi_{p_1,\mu}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_1}$. Очевидно, при $p_1 \leq p$ группа Br_{n,p_1} является подгруппой группы $\text{Br}_{n,p}$ и подгруппы $\text{Br}_{n,p_1} \subset \text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p_1})$ и $\text{Br}_{n,p_1} \subset \text{Br}_{n,p} \subset \text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$ естественным образом изоморфны. Назовем группы $\text{Br}_{n,p}$ *алгебраическими группами кос*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Граница $\partial\mathcal{B}_1 = \gamma_1 \dots \gamma_n[\lambda_1, \mu_1] \dots [\lambda_p, \mu_p] \in \mathbb{F}^{n+2p}$ неподвижна при действии группы $\text{Br}_{n,p}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, граница $\partial\mathcal{B}_1$ неподвижна при действиях автоморфизмов σ_i при $i = 1, \dots, n-1$ и действиях автоморфизмов $\xi_{1,\lambda}, \xi_{1,\mu}$ и ζ_1 , а также граница $\partial\mathcal{B}_i$ при $i \geq 2$ неподвижна при действиях автоморфизмов $\xi_{i,\lambda}, \xi_{i,\mu}$ и ζ_i . Поэтому доказательство следует из утверждения 5.

Пусть $(\dots, \gamma'_i, \gamma'_{i+1}, \dots)$ – часть репера $\mathcal{B}'_{\bar{n}}$, о котором мы предположим, что он строго эквивалентен реперу $\mathcal{B}_1$. Обозначим через $\sigma_{i,\bar{n}}$ автоморфизм группы $\mathbb{F}^{n+2p}$ такой, что $\sigma_{i,\bar{n}}(\gamma'_i) = \gamma'_{i+1}$, $\sigma_{i,\bar{n}}(\gamma'_{i+1}) = (\gamma'_i)^{\gamma'_{i+1}}$ и $\sigma_{i,\bar{n}}$ оставляет неподвижными все остальные элементы репера $\mathcal{B}'_{\bar{n}}$. Аналогично, если $(\dots, \gamma'_j, \lambda'_i, \mu'_i, \dots)$ – часть репера $\mathcal{B}'_{\bar{n}}$, то обозначим через $\xi_{i,\bar{n},\lambda}$, $\xi_{i,\bar{n},\mu}$ и $\zeta_{\bar{n},i}$ автоморфизмы группы $\mathbb{F}^{n+2p}$, которые оставляют на месте все элементы репера $\mathcal{B}'_{\bar{n}}$, за исключением γ'_j , λ'_i , μ'_i , и действуют на γ'_j , λ'_i , μ'_i по тем же формулам, по которым $\xi_{i,\lambda}$, $\xi_{i,\mu}$ и $\zeta_{\bar{n},i}$ действуют на элементах γ_n , λ_i и μ_i репера $\mathcal{B}_i$ (надо только заменить n на j).

ЛЕММА 3. *Пусть репер $\mathcal{B}'_{\bar{n}}$ строго эквивалентен реперу $\mathcal{B}_1$. Тогда автоморфизмы $\sigma_{i,\bar{n}}$, $\xi_{i,\bar{n},\lambda}$, $\xi_{i,\bar{n},\mu}$ и $\zeta_{\bar{n},i}$ группы $\mathbb{F}^{n+2p}$ принадлежат группе $\text{Br}_{n,p}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 5 и леммы 2 с помощью индукции по p .

Скажем, что подгруппа $H_{n,p}$ группы $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$ является *допустимой*, если:

- 1) $\text{Br}_{n,p} \subseteq H_{n,p}$;
- 2) для каждого $h \in H_{n,p}$ существует перестановка $\sigma_h \in \mathcal{S}_n$ такая, что элемент $h(\gamma_i)$ сопряжен элементу $\gamma_{\sigma_h(i)}$;
- 3) для каждого $h \in H_{n,p}$ выполнено соотношение

$$h(\gamma_1 \dots \gamma_n[\lambda_1, \mu_1] \dots [\lambda_p, \mu_p]) = \gamma_1 \dots \gamma_n[\lambda_1, \mu_1] \dots [\lambda_p, \mu_p]$$

(здесь $\gamma_1 \dots \gamma_n = \mathbf{1}$, если $n = 0$).

Зафиксируем репер $\mathcal{B}_1 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p\}$ группы $\mathbb{F}^{n+2p}$, и пусть $f: \mathbb{F}^{n+2p} \rightarrow G$ – гомоморфизм в оснащенную группу (G, O) такой, что $f(\gamma_i) \in O$ (назовем такой гомоморфизм f *оснащенным гомоморфизмом* в (G, O)). Положим $g_i = f(\gamma_i)$ при $1 \leq i \leq n$ и $a_j = f(\lambda_j)$, $b_j = f(\mu_j)$ при $1 \leq j \leq p$.

Сопоставим каждому реперу $\mathcal{B}_{\bar{n}}$, строго эквивалентному реперу $\mathcal{B}_1$, слово $W_{f, \mathcal{B}_{\bar{n}}}$ в алфавите $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{(G, O)} = \mathcal{X}_O \cup \mathcal{Y}_G$, где $\mathcal{X}_O = \{x_g \mid g \in O\}$ – уже использовавшийся в п. 1.2 алфавит и $\mathcal{Y}_G = \{y_{a,b} \mid (a,b) \in G^2\}$. Положим

$$W_{f, \mathcal{B}_1} = x_{g_1} \dots x_{g_n} y_{a_1, b_1} \dots y_{a_p, b_p}$$

и затем построим слова $W_{f, \mathcal{B}_{\bar{n}}}$ с помощью повторений *элементарных замен*, т. е. в обозначениях, использовавшихся в определении элементарных замен реперов $h_{\bar{n}', \bar{n}''}(\mathcal{B}'_{\bar{n}'}) = \mathcal{B}''_{\bar{n}''}$, где $\bar{n}' = (\dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, n_{i+2}, \dots)$ и $\bar{n}'' = (\dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1} + 1, n_{i+2}, \dots)$ – два соседних разбиения, элементарная замена $W_{f, \mathcal{B}'_{\bar{n}'}} \mapsto W_{f, \mathcal{B}''_{\bar{n}''}}$ состоит в замене двух соседних букв $x_{g'_{k_i}} y_{a'_i, b'_i}$ в слове $W_{f, \mathcal{B}'_{\bar{n}'}}$ на буквы $y_{a'_i, b'_i} x_{[a_i, b_i]^{-1} g'_{k_i} [a'_i, b'_i]}$ (как и в определении элементарных замен реперов, здесь $k_i = n_1 + \dots + n_i$).

Обозначим через $\bar{W}_f(G, O)$ множество слов, которые могут быть получены из слова $W_{f, \mathcal{B}_1}$ в результате конечных последовательностей элементарных замен, и положим $\bar{W}_{n,p}(G, O) = \bigcup_f \bar{W}_f(G, O)$, где объединение взято по всем оснащенным гомоморфизмам $f: \mathbb{F}^{n+2p} \rightarrow (G, O)$. Скажем, что два слова qf -эквивалентны, если они принадлежат одному и тому же множеству $\bar{W}_f(G, O)$.

Каждая допустимая группа $H_{n,p}$ действует на множестве $\bar{W}_{n,p}(G, O)$. А именно, положим

$$h(W_{f, \mathcal{B}_{\bar{n}}}) = W_{f, \mathcal{B}'_{\bar{n}}}, \quad \mathcal{B}'_{\bar{n}} = h(\mathcal{B}_{\bar{n}}).$$

В частности, если слово $W_{f, \mathcal{B}_{\bar{n}}}$ получено из $W_{f, \mathcal{B}_1}$ в результате конечной последовательности элементарных замен, то слово $h(W_{f, \mathcal{B}_{\bar{n}}})$ получено из $h(W_{f, \mathcal{B}_1})$ в результате той же самой последовательности элементарных замен.

Пусть h – некоторый элемент допустимой группы $H_{n,p}$. Имеем $h(\gamma_i) = \gamma_{\sigma_h(i)}^{w_i}$, $h(\lambda_i) = u_i$ и $h(\mu_i) = v_i$, где w_i , u_i и v_i – некоторые элементы группы $\mathbb{F}^{n+2p}$. Обозначим теми же самыми буквами слова $w_i = w_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p)$, $u_i = u_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p)$ и $v_i = v_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p)$ от порождающих элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p$ и обратных к ним, представляющие эти элементы в $\mathbb{F}^{n+2p}$. Рассмотрим элементы $g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ оснащенной группы (G, O) , где $g_1, \dots, g_n \in O$, подставим g_j вместо γ_j , a_j вместо λ_j и b_j вместо μ_j в слова w_i , u_i и v_i и обозначим полученные элементы группы G соответственно через $\bar{w}_i = w_i(g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p)$, $\bar{u}_i = u_i(g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p)$ и $\bar{v}_i = v_i(g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p)$. Обозначим через $\langle g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \rangle$ подгруппу группы G , порожденную элементами $g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \in G$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. В обозначениях и предположениях, использовавшихся выше, имеем

$$\langle g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \rangle = \langle g_{\sigma_h(1)}^{\bar{w}_1}, \dots, g_{\sigma_h(n)}^{\bar{w}_n}, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \dots, \bar{u}_p, \bar{v}_p \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что подгруппа $\langle g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \rangle$ группы G является образом в G группы $\mathbb{F}^{n+2p}$ при гомоморфизме $f: \mathbb{F}^{n+2p} \rightarrow G$, заданном на порождающих: $f(\gamma_i) = g_i$, $f(\lambda_j) = a_j$ и $f(\mu_j) = b_j$.

1.5. Определение полугрупп накрытий. Пусть (G, O) – оснащенная группа. Обозначим через $F\mathbb{S}(G, O)$ свободную полугруппу над алфавитом $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{(G, O)} = \mathcal{X}_O \cup \mathcal{Y}_G$, определенным в п. 1.4, и назовем $F\mathbb{S}(G, O)$ *свободной полугруппой накрытий над оснащенной группой* (G, O) .

Все полугруппы накрытий, которые будут рассмотрены далее, являются факторполугруппами полугруппы $F\mathbb{S}(G, O)$. В частности, первая из них, $qF\mathbb{S}(G, O)$, которую мы будем называть *квазисвободной алгебраической полугруппой накрытий*, определяется как полугруппа, порожденная алфавитом $\mathcal{Z}$, элементы которого связаны следующими соотношениями:

$$x_g \cdot y_{a,b} = y_{a,b} \cdot x_{g[a,b]}, \quad g \in O, \quad a, b \in G \quad (5)$$

(другими словами, элементы полугруппы $qF\mathbb{S}(G, O)$ – это множества qf -эквивалентных слов (см. п. 1.4)).

Мы используем обозначения из п. 1.4. Пусть $\mathcal{H} = \{H_{n,p}\}_{\{n \geq 0, p \geq 0\}}$ – набор групп автоморфизмов, удовлетворяющих условиям 2) и 3) из определения допустимых групп автоморфизмов. Сопоставим каждому $h \in H_{n,p}$ множество R_h соотношений

$$x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \cdot y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_p, b_p} = x_{g_{\sigma_h(1)}}^{\overline{w_1}} \cdot \dots \cdot x_{g_{\sigma_h(n)}}^{\overline{w_n}} \cdot y_{\overline{u_1}, \overline{v_1}} \cdot \dots \cdot y_{\overline{u_p}, \overline{v_p}}, \quad (6)$$

где $(g_1, \dots, g_n) \in O^n$ и $(a_1, b_1, \dots, a_p, b_p) \in G^{2p}$. Обозначим

$$\mathcal{R}_{\mathcal{H}} = \bigcup_{n,p} \left(\bigcup_{h \in H_{n,p}} R_h \right)$$

и рассмотрим факторполугруппу $qF\mathbb{S}(G, O)/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$. В частности, полугруппа

$$\mathbb{S}(G, O) = qF\mathbb{S}(G, O)/\{\mathcal{R}_{\mathcal{B}}\}$$

называется *строгой полугруппой накрытий*, где $\mathcal{B} = \{\text{Br}_{n,p}\}_{\{n \geq 0, p \geq 0\}}$. Для произвольного набора $\mathcal{H} = \{H_{n,p}\}_{\{n \geq 0, p \geq 0\}}$ допустимых групп автоморфизмов обозначим полугруппу $qF\mathbb{S}(G, O)/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$ через $\mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O)$ и назовем ее *допустимой полугруппой накрытий*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Строгая полугруппа накрытий $\mathbb{S}(G, O)$ изоморфна полугруппе, порожденной алфавитом $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{(G, O)} = \mathcal{X}_O \cup \mathcal{Y}_G$, элементы которого связаны соотношением

$$x_{g_1} \cdot x_{g_2} = x_{g_2} \cdot x_{g_1^{g_2}} \quad (7)$$

для любых $x_{g_1}, x_{g_2} \in \mathcal{X}_O$ и соотношениями

$$x_g \cdot y_{a,b} = y_{a,b} \cdot x_{g[a,b]}, \quad (8)$$

$$x_g \cdot y_{a,b} = x_{g^{c_1}} \cdot y_{ga,b}, \quad c_1 = ab^{-1}a^{-1}g^{-1}, \quad (9)$$

$$y_{a,b} \cdot x_g = y_{a, g^{-1}b} \cdot x_{g^{c_2}}, \quad c_2 = ba^{-1}b^{-1}g, \quad (10)$$

$$x_g \cdot y_{a,b} = x_{g[a,b]} \cdot y_{ag^{[a,b]}, bg^{[a,b]}} \quad (11)$$

для любых $x_g \in \mathcal{X}_O$ и любых $y_{a,b} \in \mathcal{Y}_G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 5, 6 и лемм 2, 3.

Поскольку каждая допустимая группа автоморфизмов $H_{n,p}$ содержит группу $\text{Br}_{n,p}$, для любого набора $\mathcal{H}$ допустимых групп автоморфизмов существует естественный эпиморфизм $r_{\mathcal{H}\text{-equiv}}: \mathbb{S}(G, O) \rightarrow \mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O)$ полугрупп.

Полугруппа $\mathbb{S}(\mathcal{S}_d, \mathcal{S}_d \setminus \{1\})$, которую мы обозначаем через $V\mathbb{S}_d$, называется *строгой алгебраической степени d версальной полугруппой накрытий*. Отметим, что вложение $i: G \hookrightarrow \mathcal{S}_d$ группы G в $\mathcal{S}_d$ индуцирует вложение полугрупп $\mathbb{S}(G, O) \hookrightarrow V\mathbb{S}_d$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Отображение $\alpha: Z \rightarrow G$, заданное формулами $\alpha(x_g) = g$ для $x_g \in X_O$ и $\alpha(y_{a,b}) = [a, b]$ для $y_{a,b} \in Y_G$, определяет гомоморфизм $\mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O) \rightarrow G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая проверка соотношений (5) и (6) показывает, что для каждого из этих соотношений произведение образов множителей, стоящих слева, равно в группе G произведению образов множителей, стоящих справа.

В дальнейшем гомоморфизм $\mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O) \rightarrow G$ будет обозначаться через $\alpha_{G, \mathcal{H}\text{-equiv}}$, или просто α_G , и будет называться *гомоморфизмом произведения*.

Действие ρ группы G на множестве $\mathcal{Z}$, заданное формулами

$$\begin{aligned} x_{g_1} \in X_O &\mapsto \rho(g)(x_{g_1}) = x_{gg_1g^{-1}} \in X_O, \\ y_{a,b} \in Y_G &\mapsto \rho(g)(y_{a,b}) = y_{gag^{-1}, bgg^{-1}} \in Y_G, \end{aligned}$$

определяет гомоморфизм $\rho_{\mathbb{S}}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{S}(G, O))$ и гомоморфизмы $\rho_{\mathcal{H}\text{-equiv}}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O))$. Очевидно, эти действия совместимы с гомоморфизмом $r_{\mathcal{H}\text{-equiv}}$.

Если это не приводит к недоразумению, мы заменяем обозначение полугруппы $\mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O)$ на $\bar{\mathbb{S}}(G, O)$ и затем обозначаем оба гомоморфизма $\rho_{\mathbb{S}}$ и $\rho_{\mathcal{H}\text{-equiv}}$ просто через ρ . Действие $\rho(g)$ на полугруппе $\bar{\mathbb{S}}(G, O)$ называется *одновременным сопряжением* на элемент $g \in G$. Положим $\lambda(g) = \rho(g^{-1})$ и $\lambda_{\bar{\mathbb{S}}} = \lambda \circ \alpha_G$, $\rho_{\bar{\mathbb{S}}} = \rho \circ \alpha_G$.

Для любой допустимой полугруппы накрытий $\mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O) = \bar{\mathbb{S}}(G, O)$ набор $(\bar{\mathbb{S}}(G, O), G, \alpha_G, \rho)$ является полугруппой над группой G и вложение $i: X_O \hookrightarrow Z$ определяет вложение $i_*: \mathbb{S}(G, O) \hookrightarrow \bar{\mathbb{S}}(G, O)$, которое является гомоморфизмом полугрупп над группой G . Отметим также, что эпиморфизмы $r_{\mathcal{H}\text{-equiv}}: \mathbb{S}(G, O) \rightarrow \mathbb{S}_{\mathcal{H}\text{-equiv}}(G, O)$ также являются гомоморфизмами над группой G .

Используя соотношения (7)–(11), любой элемент $s \in \bar{\mathbb{S}}(G, O)$ можно записать в так называемой *приведенной* форме: $s = s_1 \cdot s_2$, где $s_1 \in \mathbb{S}(G, O)$ и $s_2 = y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_p, b_p}$ для некоторых элементов $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \in G$.

Положим $\tau(s) = \tau(s_1)$ и $g(s) = p$ и назовем их *типом элемента s* и его *родом* соответственно. Легко видеть, что тип и род элемента $s \in \bar{\mathbb{S}}(G, O)$ корректно определены, т. е. $\tau(s)$ и $g(s)$ не зависят от приведения s к его приведенной форме, $s = s_1 \cdot s_2$.

Пусть $s_1 \cdot s_2$, где $s_1 = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n}$ и $s_2 = y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k}$, – приведенная форма элемента s , $s = s_1 \cdot s_2 \in \bar{\mathbb{S}}(G, O)$, $s_1 \in S(G, O)$. Из утверждения 7 следует, что подгруппа в G , порожденная элементами $g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$, не зависит от выбора приведенной формы элемента s . Ниже эта подгруппа будет обозначаться через G_s .

Как и в случае полугрупп разложений на множители для подгрупп H_1 и H_2 группы G , положим

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{S}}(G, O)^{H_1} &= \{s \in \bar{\mathbb{S}}(G, O) \mid G_s = H_1\}, \\ \bar{\mathbb{S}}(G, O)_{H_2} &= \{s \in \bar{\mathbb{S}}(G, O) \mid \alpha(s) \in H_2\}\end{aligned}$$

$$\text{и } \bar{\mathbb{S}}(G, O)_{H_1}^{H_2} = \bar{\mathbb{S}}(G, O)_{H_2} \cap \bar{\mathbb{S}}(G, O)^{H_1}.$$

Пусть $G_\Gamma = (\tilde{G}, \tilde{O})$ – C -группа, эквивалентная оснащенной группе (G, O) (см. п. 1.3). Для любого множества $\mathcal{R}_H$ допустимых соотношений эпиморфизм $\beta = \beta_{(G, O)}: (\tilde{G}, \tilde{O}) \rightarrow (G, O)$ оснащенных групп определяет эпиморфизм $\beta_* = \beta_{(G, O)*}: \bar{\mathbb{S}}(\tilde{G}, \tilde{O}) = \mathbb{S}_{H\text{-equiv}}(\tilde{G}, \tilde{O}) \rightarrow \bar{\mathbb{S}}(G, O) = \mathbb{S}_{H\text{-equiv}}(G, O)$ над группами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Ограничение гомоморфизма β_* на подполугруппу $S(\tilde{G}, \tilde{O}) \subset \bar{\mathbb{S}}(\tilde{G}, \tilde{O})$ совпадает с определенным в п. 1.3 изоморфизмом полугрупп $S(\tilde{G}, \tilde{O})$ и $S(G, O) \subset \bar{\mathbb{S}}(G, O)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

1.6. Разрешимость некоторых уравнений в строгих полугруппах накрытий. В этом пункте, добавив единицу в $\mathbb{S}(G, O)$, мы будем предполагать, что в полугруппе $\mathbb{S}(G, O)$ существует единица, $1 \in \mathbb{S}(G, O)$.

Пусть $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{S}(G, O)$. Скажем, что уравнение

$$s_1 = s_2 \cdot z \cdot s_3 \tag{12}$$

разрешимо в $S(G, O) \subset \mathbb{S}(G, O)$, если существует элемент $s \in S(G, O)$ такой, что $s_1 = s_2 \cdot s \cdot s_3$.

Отметим, что s является решением уравнения (12) тогда и только тогда, когда при представлении элементов s, s_1, s_2 и s_3 в виде произведений порождающих элементов полугруппы $\mathbb{S}(G, O)$ существует конечная последовательность элементарных замен, преобразующая разложение на множители элемента s_1 в разложение на множители элемента $s_2 \cdot s \cdot s_3$; здесь под *элементарной заменой* мы понимаем замену пары соседних множителей в другую пару в соответствии с одним из соотношений (7)–(11) (читаемых либо слева направо, либо справа налево).

Рассмотрим четыре элемента $s_1, \dots, s_4$ полугруппы $\mathbb{S}(G, O)$ и зафиксируем их представления в виде произведений порождающих элементов полугруппы $\mathbb{S}(G, O)$. Пусть S – подмножество в $S(G, O)$, все элементы которого имеют фиксированный тип. Скажем, что уравнения

$$s_1 \cdot s \cdot s_2 = s_3 \cdot z \cdot s_4, \tag{13}$$

где $s \in S$, являются *универсально разрешимыми*, если для любого $s \in S(G, O)$ существуют, во-первых, решение $\bar{s} \in S$ уравнения (13), а во-вторых, последовательность элементарных преобразований, обладающая следующим свойством:

для любого разложения элемента s в произведение порождающих элементов существует представление решения $\bar{s}$ в виде произведения порождающих элементов такое, что эта последовательность элементарных преобразований трансформирует разложение на множители элемента $s_1 \cdot s \cdot s_2$ в разложение на множители элемента $s_3 \cdot \bar{s} \cdot s_4$. Элемент $\bar{s}$ вместе со своим, упомянутым выше, разложением на множители будем называть *универсальным решением* уравнения (13) (для s и его разложения на множители).

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Для любого элемента $s \in S(G, O)$ фиксированного типа и произвольных $a, b \in G$ каждое из уравнений*

$$s \cdot y_{a,b} = z \cdot y_{\alpha(s)a,b}, \quad (14)$$

$$y_{a,b} \cdot s = y_{a,(\alpha(s))^{-1}b} \cdot z, \quad (15)$$

$$s \cdot y_{a,b} = z \cdot y_{a,(\alpha(s)^{-1})[a,b]b} \quad (16)$$

универсально разрешимо в $S(G, O)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n}$. Если $n = 1$, то универсальная разрешимость уравнения (14) следует из соотношения (9). Предположим, что уравнение (14) универсально разрешимо для всех s длины $n - 1$. Запишем элемент s длины n в виде $s = s_1 \cdot x_{g_n}$. Имеем

$$s \cdot y_{a,b} = s_1 \cdot x_{g_n} \cdot y_{a,b} = s_1 \cdot z_1 \cdot y_{g_n a,b} = \rho_S(s_1)(z_1) \cdot s_1 \cdot y_{g_n a,b},$$

где z_1 – универсальное решение уравнения $x_{g_n} \cdot y_{a,b} = z \cdot y_{g_n a,b}$. По предположению для некоторого z_2 имеем $s_1 \cdot y_{g_n a,b} = z_2 \cdot y_{\alpha(s_1)g_n a,b}$. Следовательно,

$$s \cdot y_{a,b} = \rho_S(s_1)(z_1) \cdot s_1 \cdot y_{g_n a,b} = \rho_S(s_1)(z_1) \cdot z_2 \cdot y_{\alpha(s_1)g_n a,b} = (\rho_S(s_1)(z_1) \cdot z_2) \cdot y_{\alpha(s)a,b},$$

т. е. уравнение (14) является универсально разрешимым всегда.

Доказательство универсальной разрешимости уравнения (15) аналогично доказательству универсальной разрешимости уравнения (14). Мы только должны использовать соотношение (10) вместо соотношения (9).

Чтобы доказать универсальную разрешимость уравнения (16), заметим, что $\alpha(\lambda([a,b])(s)) = (\alpha(s))^{[a,b]}$. Следовательно, применив соотношение (8), имеем

$$s \cdot y_{a,b} = y_{a,b} \cdot \lambda([a,b])(s) = y_{a,(\alpha(s)^{-1})[a,b]b} \cdot z_1,$$

где z_1 – универсальное решение уравнения $y_{a,b} \cdot \lambda([a,b])(s) = y_{a,(\alpha(s)^{-1})[a,b]b} \cdot z$. Теперь для доказательства универсальной разрешимости уравнения (16) достаточно несколько раз использовать соотношение (8).

Следующее предложение является обобщением основной леммы 2.1 в [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $O \subset G$ является конечным множеством. Тогда для любого элемента $h \in \langle g_1, \dots, g_n, a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \rangle$ и любого элемента $s_{g^{-1}} \in S(G, O)$ такого, что $\alpha(s_{g^{-1}}) = g^{-1}$, уравнение*

$$x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \cdot x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot y_{a_1,b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k,b_k} = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \cdot x_{g^h} \cdot z \cdot y_{a_1,b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k,b_k}$$

разрешимо в $S(G, O)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $s_1, s_2 \in \mathbb{S}(G, O)$ обозначим через $G(s_1, s_2)$ подмножество в G такое, что $h \in G(s_1, s_2)$ тогда и только тогда, когда уравнения

$$s_1 \cdot x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot s_2 = s_1 \cdot x_{g^h} \cdot z \cdot s_2 \quad (17)$$

универсально разрешимы в $S(G, O)$ для каждого $g \in O \subset G$ и любого элемента $s_{g^{-1}} \in S(G, O)$ фиксированного типа и такого, что $\alpha(s_{g^{-1}}) = g^{-1}$. Отметим, что если z_1 является решением уравнения (17), то $\alpha(z_1) = (g^h)^{-1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Пусть $O \subset G$ – конечное множество. Тогда для любых $s_1, s_2 \in \mathbb{S}(G, O)$ множество $G(s_1, s_2)$ является подгруппой в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если $h \in G(s_1, s_2)$, то $h_1 = h^{-1} \in G(s_1, s_2)$. Пусть z_1 является универсальным решением уравнения (17). Применив обратную последовательность к универсальной последовательности элементарных преобразований, дающей универсальную разрешимость уравнения (17), легко видеть, что $s_{g^{-1}}$ является универсальным решением уравнения

$$s_1 \cdot x_{g_1} \cdot z_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot x_{g_1^{h_1}} \cdot z \cdot s_2,$$

где $g_1 = g^h$. Для любого $h \in G$ сопряжение элементов из $S(G, O)$ на h является биекцией, а также для каждого $g \in G$ множество различных разложений на множители элементов $s \in S(G, O)$ фиксированного типа и таких, что $\alpha(s) = g^{-1}$, является конечным. Следовательно, $h^{-1} \in G(s_1, s_2)$, если $h \in G(s_1, s_2)$.

Покажем, что если $h_1, h_2 \in G(s_1, s_2)$, то $h_1 h_2 \in G(s_1, s_2)$. Легко видеть, что если z_1 является универсальным решением уравнения

$$s_1 \cdot x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot s_2 = s_1 \cdot x_{g^{h_1}} \cdot z \cdot s_2,$$

а z_2 – универсальное решение уравнения

$$s_1 \cdot x_{g^{h_1}} \cdot z_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot x_{(g^{h_1})^{h_2}} \cdot z \cdot s_2,$$

то z_2 является универсальным решением уравнения

$$s_1 \cdot x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot s_2 = s_1 \cdot x_{g^{h_1 h_2}} \cdot z \cdot s_2.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Для любых $s_1 = s'_1 \cdot s''_1, s_2 = s'_2 \cdot s''_2 \in \mathbb{S}(G, O)$ имеем $G(s''_1, s'_2) \subset G(s_1, s_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Для любых $h_1, \dots, h_n \in O$ имеем

$$\langle h_1, \dots, h_n \rangle \subset G(x_{h_1} \cdot \dots \cdot x_{h_n}, \mathbf{1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из утверждения 11 и следующих равенств:

$$x_h \cdot x_g \cdot s_{g^{-1}} = x_{g(h^{-1})} \cdot \rho(h)(s_{g^{-1}}) \cdot x_h = x_h \cdot x_{g(h^{-1})} \cdot \rho(h)(s_{g^{-1}}),$$

так как $x_{g(h^{-1})} \cdot \rho(h)(s_{g^{-1}}) \cdot x_h = \rho_{\mathbb{S}}(x_{g(h^{-1})} \cdot \rho(h)(s_{g^{-1}}))(x_h) \cdot x_{g(h^{-1})} \cdot \rho(h)(s_{g^{-1}})$ и $\alpha(x_{g(h^{-1})} \cdot \rho(h)(s_{g^{-1}})) = \mathbf{1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Для любых $a, b \in G$ имеем $ab^{-1}a^{-1} \in G(\mathbf{1}, y_{a,b})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 10 имеем

$$x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot y_{a,b} = x_g \cdot z_1 \cdot y_{g^{-1}a,b} = \rho(g)(z_1) \cdot x_g \cdot y_{g^{-1}a,b},$$

где z_1 – универсальное решение уравнения $s_{g^{-1}} \cdot y_{a,b} = z \cdot y_{g^{-1}a,b}$. Согласно соотношению (9) имеем

$$x_g \cdot y_{g^{-1}a,b} = x_{gg^{-1}aba^{-1}ggg^{-1}ab^{-1}a^{-1}} \cdot y_{a,b} = x_{g^{aba^{-1}a^{-1}}} \cdot y_{a,b}.$$

Следовательно,

$$x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot y_{a,b} = \rho(g)(z_1) \cdot x_g \cdot y_{g^{-1}a,b} = \rho(g)(z_1) \cdot x_{g^{aba^{-1}a^{-1}}} \cdot y_{a,b},$$

т. е. $ab^{-1}a^{-1} \in G(\mathbf{1}, y_{a,b})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Для любых $a, b \in G$ имеем $aba^{-1}b^{-1}a^{-1} \in G(\mathbf{1}, y_{a,b})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив $l(x_g \cdot s_{g^{-1}})$ раз соотношение (8) и после этого применив $l(s_{g^{-1}})$ раз соотношение (7), имеем

$$x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot y_{a,b} = y_{a,b} \cdot x_{g^{[a,b]}} \cdot z_1 = y_{a,b} \cdot z_2 \cdot x_{g^{[a,b]}},$$

где $z_1 = \lambda([a,b])(s_{g^{-1}})$ и $z_2 = \rho(g^{[a,b]})(z_1)$. Легко видеть, что $\alpha(z_2) = (g^{[a,b]})^{-1}$. Согласно утверждению 10 и соотношению (10) имеем

$$y_{a,b} \cdot z_2 \cdot x_{g^{[a,b]}} = z_3 \cdot y_{a,g^{[a,b]}b} \cdot x_{g^{[a,b]}} = z_3 \cdot y_{a,b} \cdot x_{g^{[a,b]ba^{-1}b^{-1}}},$$

где z_3 – универсальное решение уравнения $y_{a,b} \cdot z_2 = z \cdot y_{a,g^{[a,b]}b}$.

Применив соотношение (8), получим

$$z_3 \cdot y_{a,b} \cdot x_{g^{[a,b]ba^{-1}b^{-1}}} = z_3 \cdot x_{g^{[a,b]ba^{-1}b^{-1}[b,a]}} \cdot y_{a,b} = z_3 \cdot x_{g^{aba^{-1}b^{-1}a^{-1}}} \cdot y_{a,b},$$

и для завершения доказательства достаточно применить соотношение

$$z_3 \cdot x_{g^{aba^{-1}b^{-1}a^{-1}}} = x_{g^{aba^{-1}b^{-1}a^{-1}}} \cdot \lambda(g^{aba^{-1}b^{-1}a^{-1}})(z_3).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Для любых $a, b \in G$ имеем $a, b \in G(\mathbf{1}, y_{a,b})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждениям 14, 15 элементы $ab^{-1}a^{-1}$ и $aba^{-1}b^{-1}a^{-1}$ принадлежат группе $G(\mathbf{1}, y_{a,b})$. Из утверждения 11 следует, что

$$(ab^{-1}a^{-1})(aba^{-1}b^{-1}a^{-1}) = (ab)^{-1} \in G(\mathbf{1}, y_{a,b}),$$

поэтому $ab \in G(\mathbf{1}, y_{a,b})$ и, следовательно, $a = (ab^{-1}a^{-1})(ab) \in G(\mathbf{1}, y_{a,b})$. Применив еще раз утверждение 11 к a и ab , получим, что $b \in G(\mathbf{1}, y_{a,b})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. Для любых $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in G$ имеем

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \rangle \subset G(\mathbf{1}, y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по k . Случай $k = 1$ – это утверждение 16. Предположим, что для некоторого $k - 1$ утверждение верно. Следовательно, согласно утверждению 12 имеем

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_{k-1}, b_{k-1} \rangle \subset G(\mathbf{1}, y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k}).$$

Обозначим $u_t = [a_1, b_1] \dots [a_t, b_t]$. Имеем

$$\begin{aligned} x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_{k-1}, b_{k-1}} \cdot y_{a_k, b_k} \\ = y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_{k-1}, b_{k-1}} \cdot x_{g^{u_{k-1}}} \cdot \lambda(u_{k-1})(s_{g^{-1}}) \cdot y_{a_k, b_k}. \end{aligned}$$

Обозначим $z_1 = \lambda(u_{k-1})(s_{g^{-1}})$, и пусть z_c (см. утверждение 16) является универсальным решением уравнения $x_{g^{u_{k-1}}} \cdot z_1 \cdot y_{a_k, b_k} = x_{g^{u_{k-1}c}} \cdot z_c \cdot y_{a_k, b_k}$, где $c = a_k$ или $c = b_k$. Имеем

$$\begin{aligned} x_g \cdot s_{g^{-1}} \cdot y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k} &= y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_{k-1}, b_{k-1}} \cdot x_{g^{u_{k-1}c}} \cdot z_c \cdot y_{a_k, b_k} \\ &= x_{g^{c_1}} \cdot \rho(u_{k-1})(z_c) \cdot y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_{k-1}, b_{k-1}} \cdot y_{a_k, b_k}, \end{aligned}$$

где $c_1 = u_{k-1}cu_{k-1}^{-1}$.

Теперь, так как по предположению $u_{k-1} \in G(\mathbf{1}, y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k})$, мы получим, что $c \in G(\mathbf{1}, y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k})$.

Предложение 4 непосредственно вытекает из утверждений 11–17.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть (G, O) – оснащенная конечная группа такая, что элементы из $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$ порождают всю группу G . Обозначим через n_i число элементов, принадлежащих классу сопряженности C_i , и через p_i – их порядок. Пусть $s_1 \in S(G, O)$ – такой элемент, i -й тип которого $\tau_i(s_1)$ больше $n_i p_i$ для всех i , $1 \leq i \leq m$, а $s_2 = y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k}$ – такой элемент, что $s_1 \cdot s_2 \in \mathbb{S}(G, O)^G$. Тогда уравнение

$$s_1 \cdot s_2 = z \cdot (y_{1,1})^k$$

разрешимо в полугруппе $S(G, O)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1 = g_1^{-1} \dots g_n^{-1}$, где $g_1, \dots, g_n \in O$, и пусть $s_1 = x_{h_1} \cdot \dots \cdot x_{h_N}$. Пусть $g_1 \in C_i$. Поскольку $\tau_i(s_1) > n_i p_i$, то среди множителей $x_{h_1}, \dots, x_{h_N}$ найдется по крайней мере $p_i + 1$ множителей с одним и тем же $h_j \in C_i$. Передвинув p_i из этих множителей направо (применив соотношение (7)), мы получим

$$s_1 \cdot s_2 = s'_1 \cdot x_{h_j} \cdot (x_{h_j})^{p_i-1} \cdot s_2$$

для некоторого $s'_1 \in S(G, O)$ такого, что $s'_1 \cdot s_2 \in \mathbb{S}(G, O)^G$.

Применив предложение 4, имеем

$$s'_1 \cdot x_{h_j} \cdot (x_{h_j})^{p_i-1} \cdot s_2 = s'_1 \cdot s' \cdot x_{g_1} \cdot s_2$$

для некоторого $s' \in S(G, O)$ такого, что $\tau(s') = \tau((x_{h_j})^{p_i-1})$ и $\alpha(s') = g_1^{-1}$.

Применив соотношение (9), получим

$$s'_1 \cdot s' \cdot x_{g_1} \cdot s_2 = s'_1 \cdot s' \cdot x_{g_1} \cdot y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k} = s'_1 \cdot s' \cdot x_{g'_1} \cdot y_{a'_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k},$$

где g'_1 – элемент, сопряженный элементу g_1 , и $a'_1 = g_2^{-1} \dots g_n^{-1}$.

Заметим, что элементы $\tilde{s}_1 = s'_1 \cdot s' \cdot x_{g'_1}$ и $\tilde{s}_2 = y_{a'_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k}$ удовлетворяют всем условиям из предложения. Следовательно, применив индукцию по n , получим

$$s_1 \cdot s_2 = \bar{s}_1 \cdot (y_{1, b_1} \cdot y_{a_2, b_2} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k})$$

для некоторого $\bar{s}_1$, который вместе с $\bar{s}_2 = y_{1, b_1} \cdot y_{a_2, b_2} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k}$ удовлетворяет всем условиям предложения.

Те же самые аргументы (только вместо соотношения (9) надо использовать соотношения (10)) показывают, что

$$s_1 \cdot s_2 = \tilde{s}_1 \cdot (y_{1, 1} \cdot y_{a_2, b_2} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k})$$

для некоторого $\tilde{s}_1$, который вместе с $\tilde{s}_2 = y_{a_2, b_2} \cdot \dots \cdot y_{a_k, b_k}$ удовлетворяет всем условиям предложения.

Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что элемент $y_{1, 1}$ коммутирует с любым элементом $s \in S(G, O)$ (следует из соотношения (8)), и использовать индукцию по k .

1.7. О числе решений уравнения $\alpha(z) = g$. Пусть (G, O) – такая оснащенная группа, что элементы из O порождают всю группу G , $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$ – разложение в дизъюнктное объединение классов сопряженности группы G . В этом пункте мы исследуем следующую проблему: для фиксированного типа $\bar{t} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, фиксированного рода p и заданного элемента $h \in G$ оценить число решений в допустимой полугруппе накрытий $\bar{S}(G, O)^G$ уравнения $\alpha_G(z) = h$ при ограничениях $\tau(z) = \bar{t}$ и $g(z) = p$.

В [8] эта проблема была решена в случае при $p = 0$ и $\bar{t} = (t_1, \dots, t_m)$ таком, что все t_i являются достаточно большими числами (см. теоремы 4, 5). В этом пункте мы обобщаем эти теоремы на случай произвольного рода, а именно доказываем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\bar{S}(G, O) = \mathbb{S}_{H\text{-equiv}}(G, O)$ – допустимая полугруппа накрытий над оснащенной конечной группой (G, O) , $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$. Тогда существует константа $T_1 \in \mathbb{N}$ такая, что если для элемента $\bar{s}_1 \in \bar{S}(G, O)^G$ его i -е типы $\tau_i(s_1)$ не меньше T_1 для всех $i = 1, \dots, m$, то существует $a_{(G, O)}$ элементов $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{a_{(G, O)}} \in \bar{S}(G, O)^G$ таких, что:

- 1) $\bar{s}_i \neq \bar{s}_j$ при $1 \leq i < j \leq a_{(G, O)}$;
- 2) $\tau(\bar{s}_i) = \tau(\bar{s}_1)$ при $1 \leq i \leq a_{(G, O)}$;
- 3) $g(\bar{s}_i) = g(\bar{s}_1)$ при $1 \leq i \leq a_{(G, O)}$;
- 4) $\alpha_G(\bar{s}_i) = \alpha_G(\bar{s}_1)$ при $1 \leq i \leq a_{(G, O)}$;
- 5) если элемент $\bar{s} \in \bar{S}(G, O)^G$ таков, что $\tau(\bar{s}) = \tau(\bar{s}_1)$, $g(\bar{s}) = g(\bar{s}_1)$ и $\alpha_G(\bar{s}) = \alpha_G(\bar{s}_1)$, то $\bar{s} = \bar{s}_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq a_{(G, O)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – род элемента $\bar{s}_1$ и T – константа, существование которой утверждается в теореме 4. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $T > \max_{1 \leq i \leq m} n_i p_i$, где n_i – число элементов, принадлежащих классу сопряженности C_i и p_i – порядок этих элементов C_i . Согласно предложению 5 (и так как $r_{H\text{-equiv}}$ является эпиморфизмом) элемент $\bar{s}_1$ может быть записан в виде $\bar{s}_1 = s_1 \cdot (y_{1, 1})^p$. Согласно теореме 4 существует ровно

$a_{(G,O)}$ различных элементов $s_1, \dots, s_{a_{(G,O)}} \in S(G, O)^G$, удовлетворяющих условиям 1)–4) теоремы.

Рассмотрим элементы $\bar{s}_i = s_i \cdot (y_{1,1})^p$, $1 \leq i \leq a_{(G,O)}$. Из предложения 5 и теоремы 4 следует, что эти элементы удовлетворяют условиям 2)–5). Покажем, что они удовлетворяют также и условию 1) теоремы. Предположим, что для некоторых $i \neq j$ имеем $\bar{s}_i = \bar{s}_j$, т.е. если мы запишем элементы s_i и s_j в виде произведений порождающих элементов x_g , $g \in O$, то найдется конечная последовательность Tr элементарных замен (см. п. 1.6), преобразующая разложение на множители элемента $\bar{s}_i$ в разложение на множители элемента $\bar{s}_j$. Согласно утверждению 9 выбранные разложения на множители позволяют поднять элемент $\bar{s}_i$ в $\bar{\mathbb{S}}(\tilde{G}, \tilde{O}) = \mathbb{S}_{H\text{-equiv}}(\tilde{G}, \tilde{O})$ (т.е. рассмотреть элемент $\tilde{s}_i \in \bar{\mathbb{S}}(\tilde{G}, \tilde{O})$ с тем же самым разложением на множители, как и у элемента $\bar{s}_i$), где $G_\Gamma = (\tilde{G}, \tilde{O})$ – C -группа, эквивалентная оснащенной группе (G, O) . Применим ту же самую последовательность Tr элементарных замен к элементу $\tilde{s}_i$. В результате получим элемент $\tilde{s}_j = s_j \cdot (y_{a_1, b_1} \cdot \dots \cdot y_{a_p, b_p}) = \tilde{s}_i$ такой, что $a_l, b_l \in \ker \beta_{(G,O)} \subset Z(\tilde{G})$ при $1 \leq l \leq p$. Однако это невозможно, так как в этом случае имеем $\alpha_{\tilde{G}}(y_{a_l, b_l}) = 1$ при $1 \leq l \leq p$, следовательно, согласно замечанию 1 мы должны иметь $\alpha_{\tilde{G}}(\tilde{s}_i) \neq \alpha_{\tilde{G}}(\tilde{s}_j)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – конечная группа и $O' \subset O$ – два ее оснащения такие, что элементы из $O' = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_k$ порождают всю группу G . Тогда существует константа $T = T_{O'}$ такая, что если для элемента $\bar{s}_1 \in \bar{\mathbb{S}}(G, O)^G$ его i -й тип $\tau_i(\bar{s}_1)$ не меньше T для всех $i = 1, \dots, k$, то существует не более $a_{(G, O')}$ элементов $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n \in \bar{\mathbb{S}}(G, O)^G$ таких, что для $1 \leq i < j \leq n$ имеем:

- (i) $\bar{s}_i \neq \bar{s}_j$,
- (ii) $\tau(\bar{s}_i) = \tau(\bar{s}_1)$,
- (iii) $\alpha_G(\bar{s}_i) = \alpha_G(\bar{s}_1)$,
- (iv) $g(\bar{s}_i) = g(\bar{s}_1)$,

где $a_{(G, O')}$ – индекс неоднозначности оснащенной группы (G, O') .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 6.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть C_1 – класс сопряженности нечетной перестановки $\sigma_1 \in \mathcal{S}_d$ такой, что σ_1 оставляет на месте по крайней мере два элемента. Тогда если класс C_1 содержится в оснащении $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$ группы $\mathcal{S}_d$, то существует константа $T = T_{C_1}$ такая, что для любого $\sigma \in \mathcal{S}_d$, каждого фиксированного $p \geq 0$ и любого $\bar{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ такого, что $t_1 \geq T$, уравнение

$$\alpha_{\mathcal{S}_d}(z) = \sigma \quad (18)$$

имеет в каждой допустимой полугруппе накрытий $\bar{\mathbb{S}}(\mathcal{S}_d, O)$ не более одного решения $\bar{s}$, удовлетворяющего условиям $g(\bar{s}) = p$ и $\tau(\bar{s}) = \bar{t}$. При предположении $t_1 \geq T$ существование решения уравнения (18) не зависит от p , а зависит только от $\bar{t}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 7 и основного результата статьи [10].

Пусть $\bar{\mathbb{S}}(G, O)$ – допустимая полугруппа накрытий над оснащенной группой (G, O) , $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$, и пусть $T = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Обозначим через

$$\bar{\mathbb{S}}(G, O)_{\geq T} = \{\bar{s} \in \bar{\mathbb{S}}(G, O) \mid \tau_i(\bar{s}) \geq t_i\}$$

подполугруппу полугруппы $\bar{\mathbb{S}}(G, O)$. Согласно теореме 6 имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой оснащенной группы (G, O) , $O = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$, существует константа $T = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такая, что ограничение $r_{H\text{-equiv}}: \mathbb{S}(G, O)_{\geq T}^G \rightarrow \mathbb{S}_{H\text{-equiv}}(G, O)_{\geq T}^G$ эпиморфизма $r_{H\text{-equiv}}: \mathbb{S}(G, O) \rightarrow \mathbb{S}_{H\text{-equiv}}(G, O)$ на подполугруппу $\mathbb{S}(G, O)_{\geq T}^G$ является изоморфизмом для любого множества $\mathcal{R}_H$ допустимых соотношений.

§ 2. Геометрические полугруппы накрытий

2.1. Кодировка монодромии разветвленных накрытий. Для того чтобы описать разветвленные накрытия заданного связного многообразия M (в большинстве случаев многообразием M будет связная компактная ориентированная поверхность с одной дырой и базисной точкой, лежащей на крае), мы используем традиционную кодировку монодромии неразветвленных накрытий и однозначность пополнения многообразий до разветвленных накрытий.

А именно, для заданного неразветвленного, возможно, несвязного степени d накрытия $f: \tilde{M} \rightarrow M$ над связным многообразием M с базисной точкой $q \in M$ подъем петли с базисной точкой q состоит из d путей в $\tilde{M}$, каждый из которых начинается в одной из точек прообраза $f^{-1}(q)$, и, таким образом, эти пути задают перестановку точек множества $f^{-1}(q)$. Эта перестановка зависит только от гомотопического типа петли, и мы получаем кодировку накрытия с помощью гомоморфизма из $\pi_1(M, q)$ в группу перестановок точек множества $f^{-1}(q)$. В частности, если накрытие f оснащено нумерацией $\nu: I_d = [1, \dots, d] \rightarrow f^{-1}(q)$ точек прообраза точки q , то эта нумерация задает однозначно определенный гомоморфизм $\pi_1(M, q) \rightarrow \mathcal{S}_d$.

Следующее предложение является хорошо известным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Два неразветвленных накрытия над одной и той же базой (M, q) изоморфны как отмеченные накрытия тогда и только тогда, когда они определяют один и тот же гомоморфизм $\pi_1(M, q) \rightarrow \mathcal{S}_d$. Если существует изоморфизм накрытий, то он единствен. Иначе говоря, отмеченные накрытия не имеют нетривиальных автоморфизмов.

Каждый гомоморфизм $\pi_1(M, q) \rightarrow \mathcal{S}_d$ соответствует некоторому неразветвленному отмеченному степени d накрытию многообразия M . Накрывающее пространство связно, если и только если действие группы $\pi_1(M, q)$ на $\pi^{-1}(q)$ является транзитивным. Орбиты этого действия канонически соответствуют связным компонентам накрывающего пространства.

Пополнения базы и накрывающего пространства неразветвленного накрытия до разветвленного накрытия наиболее прозрачны в малых размерностях. Следующее предложение хорошо известно, например его можно найти в [17].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть (M, q) – двумерное многообразие и $B = \{P_1, \dots, P_n\}$ – конечное подмножество в M , не имеющее пересечения с q и краем ∂M . Тогда каждое неразветвленное отмеченное накрытие многообразия (U, q) , где $U = M \setminus B$, имеет единственное разветвленное пополнение $\widetilde{M} \rightarrow M$.

2.2. Поверхности с дырой и их скелеты. Нашими основными строительными блоками являются компактные ориентированные поверхности (двумерные многообразия) с одной дырой и отмеченной точкой, лежащей на крае. Дополнительно, мы оснащаем их либо *полускелетами*, либо *скелетами*, либо *хвостатыми скелетами*.

По определению полускелет связной ориентируемой компактной поверхности (с одной дырой) – это несвязное объединение вложенных в поверхность букетов, состоящих из двух ориентированных окружностей таких, что дополнение к этому объединению гомеоморфно диску с несколькими проколами. Очевидно, что число связных компонент полускелета равно роду поверхности. Мы будем различать две окружности, образующие букет, представляющий связную компоненту полускелета, с помощью индекса пересечения, а именно будем говорить о λ - и μ -окружностях в букете $C_\lambda \vee C_\mu$, если $C_\lambda \cdot C_\mu = -1$ (а не равно 1).

Каждую такую тройку (F, q, S^∞) , где S^∞ – полускелет поверхности F с отмеченной точкой $q \in \partial F$, мы будем представлять ее *глазастой плоской диаграммой*, т.е. рисовать диск с отмеченной точкой на его крае и $p = g(F)$ дырами внутри и чертить на крае каждой дыры стандартную четырехстороннюю схему отождествлений (рис. 1, а), ориентация на поверхности F индуцируется ориентацией против часовой стрелки на диске. В некоторых случаях нам будет более удобно использовать эквивалентное представление поверхности, в котором мы будем изображать поверхность F в виде диска с несколькими *пенсне*, т.е. p парами дыр, соединенных *дужками* (рис. 1, б, где λ -окружности – это a и c , а b и d – это μ -окружности).

Рис. 1. Плоские диаграммы поверхности рода 2

Глазастые плоские диаграммы заданной тройки (F, q, S^∞) определены с точностью до сохраняющих ориентацию (стратифицированных) гомеоморфизмов диска, которые дополнительно сохраняют отмеченную точку и ориентацию граничных страт. Обратное также верно, глазастая плоская диаграмма определяет тройку (F, q, S^∞) с точностью до сохраняющего ориентацию гомеоморфизма (троек). Аналогичное утверждение верно и для диаграмм с пенсне, но как и в предыдущем случае, надо также принимать во внимание возможность для каждой ручки заменять ее λ -пенсне на μ -пенсне, и наоборот.

По определению *скелет* связной компактной ориентированной поверхности рода p с одной дырой – это полускелет с присоединенной к нему системой путей, соединяющих отмеченную точку $q \in \partial F$ с компонентами связности полускелета. Эти p путей (в дальнейшем называемые *струнами*) пересекаются только в точке q и выбраны таким образом, что в дисковой модели с p дырами конец каждой из струн совпадает с той вершиной на границе дыры, из которой выходят одновременно λ -ребро и μ -ребро.

Теперь предположим, что на поверхности F выделено конечное подмножество $B \subset F \setminus \partial F$ (ниже такие подмножества B появятся как множества точек ветвления конечных накрытий). В этом случае под *хвостатым скелетом* мы понимаем тройку (F, q, S^{cdt}) , где S^{cdt} – скелет, не пересекающийся с B , дополненный системой *хвостов*, т.е. набором из $n = |B|$ простых путей, пересекающихся со скелетом и друг с другом только в точке q и соединяющих точки из B с точкой q . В частности, S^{cdt} гомеоморфен $\vee$ -сумме скелета с n интервалами.

Расширим определенное выше понятие глазастой плоской диаграммы до диаграмм троек (F, q, S) , где S – либо скелет, либо хвостатый скелет поверхности F . Эти диаграммы состоят из диска с либо $p = g(F)$ дырами, либо p пенсне и, кроме того, отмеченной точки, лежащей на границе диска, и системы струн, дополненных системой хвостов в случае хвостатых скелетов (рис. 2).

Рис. 2. Плоские диаграммы хвостатого скелета поверхности рода 2

Глазастые плоские диаграммы поверхностей со скелетами либо, соответственно, с хвостатыми скелетами определены однозначно с точностью до изотопий;

обратно, тройка (F, q, S) определяется своей глазастой плоской диаграммой однозначно с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов троек.

В случае скелетов для заданного рода p с точностью до изотопии существует одна и только одна глазастая диаграмма. Обозначим эту диаграмму через Δ_p и через (Π_p, q, Σ_p) обозначим тройку, которую определяет эта диаграмма.

Если $p = 0$, то $\Delta_0 = \Pi_0$ – это просто стандартный диск и Σ_0 – точка q (отмеченная точка, лежащая на границе диска).

Если $p > 0$, то скелет Σ_p содержит нетривиальный полускелет, который мы обозначаем через Σ_p^∞ . Выбор скелета индуцирует естественный порядок на множестве компонент связности полускелета. А именно, мы фиксируем порядок, индуцированный на струнах скелета обходом против часовой стрелки (рис. 3), и обозначим струны скелета Σ_p через $T_1, \dots, T_p$ в соответствии с этим порядком. Отметим, что выбор порядка на компонентах связности полускелета Σ_p^∞ эквивалентен с точностью до изотопии выбору скелета.

Рис. 3. Порядок на струнах, определенный обходом против часовой стрелки

Отметим также, что задание скелета S определяет канонический выбор свободных геометрических порождающих $\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p$ фундаментальной группы $\pi_1(F, q)$, где λ_i (соответственно, μ_i), $1 \leq i \leq p$, представлены петлями $T_i \star C_{\lambda, i} \star T_i^{-1}$ (соответственно, петлями $T_i \star C_{\mu, i} \star T_i^{-1}$); нумерация задана определенным выше порядком на струнах.

Для заданных рода $p \geq 1$ и числа $n \geq 1$ хвостов число изотопических классов плоских диаграмм поверхностей с хвостатыми скелетами больше единицы и равно биномиальному коэффициенту C_{p+n}^n . Действительно, как и в случае скелетов, выбор хвостатого скелета определяет порядок на множестве хвостов и струн (или, эквивалентно, на множестве, состоящем из точек множества B и связанных компонент полускелета), заданный обходом против часовой стрелки. Обратно, этот порядок на множестве хвостов и струн, заданный обходом против часовой стрелки, определяет диаграмму однозначно с точностью до изотопии.

Таким образом, если задан хвостатый скелет S^{cdt} , то он не только канонически определяет свободные геометрические порождающие $\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p$ фундаментальной группы $\pi_1(F, q)$, но также позволяет расширить их до множества

свободных геометрических порождающих группы $\pi_1(F \setminus B, q)$, если добавить к ним последовательность $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, представленную петлями $\Gamma_i \star C_i \star \Gamma_i^{-1}$, где через C_i обозначена маленькая петля вокруг точки b_i из множества B , а Γ_i – часть хвоста с концом в точке b_i . Отметим, что все это множество свободных порождающих группы $\pi_1(F \setminus B, q)$ имеет естественный порядок, определяемый обходом против часовой стрелки.

2.3. Свободные полугруппы отмеченных накрытий. Как и выше, F – связная компактная ориентированная поверхность с одной дырой и отмеченной точкой $q \in \partial F$, и в этом пункте мы начинаем изучение ее разветвленных накрытий $f: E \rightarrow F$ конечной степени. Напомним, что мы *допускаем несвязность накрывающих поверхностей, но запрещаем точкам ветвления лежать на границе поверхности F* . Нашей ближайшей целью является определение структуры полугруппы на множестве таких накрытий фиксированной степени d .

Для достижения этой цели мы рассматриваем каждое такое накрытие как отмеченное, т. е. оснащаем точки его слоя $f^{-1}(q)$ нумерацией ν числами $1, \dots, d$ и, кроме того, рассматриваем накрытия с точностью до некоторых естественных отношений эквивалентности. Выбор разных отношений эквивалентности приводит к различным полугруппам.

Сначала определим *свободную геометрическую полугруппу накрытий степени d* , которую обозначим через $\text{GF}\mathbb{S}_d$. Для построения этой полугруппы оснастим базу F каждого накрытия $(f: E \rightarrow F, \nu, q)$ хвостатым скелетом S^{cdt} , концы хвостов которого – точки ветвления накрытия. Элементами полугруппы $\text{GF}\mathbb{S}_d$ являются тройки $(f: E \rightarrow F, \nu, S^{\text{cdt}})$, рассматриваемые с точностью до гомеоморфизмов, сохраняющих все ингредиенты; более точно, две тройки $(f_1: E_1 \rightarrow F_1, \nu_1, S_1^{\text{cdt}})$ и $(f_2: E_2 \rightarrow F_2, \nu_2, S_2^{\text{cdt}})$ являются эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $\phi: E_1 \rightarrow E_2$ и $\psi: F_1 \rightarrow F_2$ такие, что $f_2 \circ \phi = \psi \circ f_1$, $\phi \circ \nu_1 = \nu_2$ и $\psi(S_1^{\text{cdt}}) = S_2^{\text{cdt}}$.

Полугрупповая структура на множестве $\text{GF}\mathbb{S}_d$ определяется аналогично тому, как она была определена в [7] в случае рода нуль. А именно, произведение $h = f \cdot g$ двух элементов из $\text{GF}\mathbb{S}_d$, представленных отмеченными разветвленными накрытиями $(f: E_1 \rightarrow F_1, \nu_1, S_1^{\text{cdt}})$ и $(g: E_2 \rightarrow F_2, \nu_2, S_2^{\text{cdt}})$ (для упрощения мы обозначаем одинаково как элементы из $\text{GF}\mathbb{S}_d$, так и соответствующие им накрытия), представляется отмеченным разветвленным накрытием $(h: E \rightarrow F, \nu, S^{\text{cdt}})$, где F и $h: E \rightarrow F$ получены, во-первых, склейкой поверхности F_1 с F_2 вдоль части границы ∂F_2 , выходящей из точки q_2 в направлении против часовой стрелки, и части границы ∂F_1 , выходящей из точки q_1 в направлении по часовой стрелке (рис. 4), а во-вторых, склейкой накрытий f и g , сохраняющей нумерацию точек прообраза точки $q = q_1 = q_2$. Очевидно, эта операция не зависит (с точностью до эквивалентности) от выбора представителей из классов эквивалентных накрытий.

Для полугруппы $\text{GF}\mathbb{S}_d$ определено отображение $\alpha: \text{GF}\mathbb{S}_d \rightarrow \mathbb{S}_d$, которое сопоставляет каждому накрытию его граничную монодромию (взятую в направлении граничной ориентации). Из определения операции склейки накрытий следует, что это отображение является гомоморфизмом. Кроме того, пе-

Рис. 4. Плоская диаграмма произведения в полугруппе

ренумерация точек слоя $f^{-1}(q)$ задает естественное действие симметрической группы $\mathcal{S}_d$ на $\text{GF } \mathcal{S}_d$. Тем самым, полугруппа $\text{GF } \mathcal{S}_d$ канонически превращается в полугруппу над группой $\mathcal{S}_d$.

Для каждой перестановки $g \in \mathcal{S}_d$ обозначим через $X_g \in \text{GF } \mathcal{S}_d$ элемент, представленный разветвленным накрытием $f: E \rightarrow \Pi_0$ с одной точкой ветвления, для которого монодромия $\alpha(X_g)$, действующая в слое над отмеченной точкой $q \in \partial \Pi_0$, равна g . Такой элемент определен однозначно, как это следует, например, из предложения 7.

Кроме того, рассмотрим тор Π_1 с дырой, отмеченной точкой $q \in \partial \Pi_1$ и скелетом Σ_1 , включающим в себя полускелет Σ_1^∞ и струну T_1 . Для пары перестановок $a, b \in \mathcal{S}_d$ обозначим через $Y_{a,b} \in \text{GF } \mathcal{S}_d$ элемент, представленный неразветвленным накрытием $f: E \rightarrow \Pi_1$, монодромия которого вдоль петли $T_1 \star C_\lambda \star T_1^{-1}$ равна a , а монодромия вдоль петли $T_1 \star C_\mu \star T_1^{-1}$ равна b . Такой элемент также определен однозначно, как это следует, например, из предложения 6. Отметим, что $\alpha(Y_{a,b}) = aba^{-1}b^{-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Полугруппа $\text{GF } \mathcal{S}_d$ является свободной полугруппой над группой $\mathcal{S}_d$, множество ее порождающих элементов состоит из X_g , $g \in \mathcal{S}_d \setminus \{1\}$, и $Y_{a,b}$, $a, b \in \mathcal{S}_d$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что для поверхности с заданным хвостатым скелетом глазастая плоская диаграмма $(\Sigma_p^{\text{cdt}}, q) \subset (\Delta_p, q)$ ее хвостатого скелета единственна с точностью до изотопий в (Δ_p, q) .

Как множество полугруппа $\text{GF } \mathcal{S}_d$ распадается в несвязное объединение подмножеств $(\text{GF } \mathcal{S}_d)_{n,p}$, которые соответствуют накрытиям с фиксированным числом n точек ветвления поверхностей заданного рода p , или, иначе говоря, соответствуют словам, содержащим n букв вида X_g и p букв вида $Y_{a,b}$.

2.4. Очень строгая полугруппа отмеченных накрытий. На следующем шаге построения полугруппы накрытий мы заменяем хвостатые скелеты на скелеты, т.е. забываем о хвостах, идущих в точки ветвления накрытий, т.е. при построении другой полугруппы над группой $\mathcal{S}_d$ мы заменяем всюду хвостатые скелеты на скелеты в описанном выше построении полугруппы $\text{GF } \mathcal{S}_d$. Называем эту новую полугруппу *очень строгой полугруппой отмеченных накрытий степени d* и обозначаем ее через $\text{GV } \mathcal{S}_d$. Забывающий гомоморфизм

$\mathrm{GF} \mathbb{S}_d \rightarrow \mathrm{GV} \mathbb{S}_d$, состоящий в замене хвостатых скелетов на скелеты, является корректно определенным гомоморфизмом полугрупп над группой $\mathcal{S}_d$. Обозначим также через $X_g, Y_{a,b}$ образы в $\mathrm{GV} \mathbb{S}_d$ определенных выше порождающих элементов $X_g, Y_{a,b} \in \mathrm{GF} \mathbb{S}_d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Элементы $X_g, g \in \mathcal{S}_d \setminus \{1\}$, и $Y_{a,b}, a, b \in \mathcal{S}_d$, порождают полугруппу $\mathrm{GV} \mathbb{S}_d$. Они удовлетворяют соотношениям*

$$X_g \cdot Y_{a,b} = Y_{a,b} \cdot X_{g[a,b]}, \quad (19)$$

$$X_{g_1} \cdot X_{g_2} = X_{g_2} \cdot X_{g_1^{g_2}} \quad (20)$$

для всех $g_1, g_2, a, b \in \mathcal{S}_d$. Эти соотношения являются определяющими соотношениями полугруппы $\mathrm{GV} \mathbb{S}_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для поверхности с заданными скелетом и точками ветвления замена ее глазастой плоской диаграммы $(\Sigma_p, q) \subset (\Delta_p, q)$ скелета на глазастую плоскую диаграмму $(\Sigma_p^{\mathrm{cdt}}, q) \subset (\Delta_p, q)$ хвостатого скелета с заданным порядком на множестве струн и хвостов единственна с точностью до изотопий множества $(\Sigma_p \cup B, q)$ в (Δ_p, q) . Соотношение (19) соответствует элементарной замене порядка (рис. 5), а соотношение (20) – это стандартный полуповорот Артина–Гурвица двух точек, принадлежащих B , в $\Delta_p \setminus \Sigma_p$ (ср. [8]).

Рис. 5. Элементарная замена порядка в плоской диаграмме

Аналогично полугруппе $\mathrm{GF} \mathbb{S}_d$ полугруппа $\mathrm{GV} \mathbb{S}_d$ распадается в несвязное объединение подмножеств $(\mathrm{GV} \mathbb{S}_d)_{n,p}$, которые соответствуют накрытиям с фиксированным числом n точек ветвления над поверхностями заданного рода p .

2.5. Строгие версальные геометрические полугруппы накрытий.

Эти полугруппы наиболее близки к классической теории пространств Гурвица.

Мы оснащаем базу каждого накрытия скелетом и рассматриваем тройки $(f_1: E_1 \rightarrow F_1, \nu_1, S_1)$ и $(f_2: E_2 \rightarrow F_2, \nu_2, S_2)$, где S_1 и S_2 – скелеты на поверхностях F_1 и F_2 , с точностью до эквивалентности, порожденной следующими двумя бинарными отношениями: во-первых, с точностью до изотопии отмеченных накрытий с фиксированной базой, на которой фиксированы скелет и отмеченная точка, но позволено двигать точки ветвления (которые могут двигаться, в частности, через скелет); во-вторых, с точностью до гомеоморфизмов, уважающих все дополнительные структуры, т. е. гомеоморфизмов $\phi: E_1 \rightarrow E_2$

и $\psi: F_1 \rightarrow F_2$ таких, что $f_2 \circ \phi = \psi \circ f_1$, $\phi \circ \nu_1 = \nu_2$ и $\psi(S_1^\infty) = S_2^\infty$. Единственным, но основным отличием по сравнению с очень строгой полугруппой накрытий является то, что мы позволяем точкам ветвления пересекать скелет.

Учитывая это дополнительное отношение эквивалентности, мы получаем новую полугруппу над группой S_d , которую мы обозначаем через $\mathbf{GS}_d$ и называем *строгой версальной геометрической полугруппой накрытий степени d* . Отображение факторизации $\mathbf{GV}\mathbf{S}_d \rightarrow \mathbf{GS}_d$ является гомоморфизмом полугрупп над группой S_d , и теоретико-множественно он распадается на отображения $(\mathbf{GV}\mathbf{S}_d)_{n,p} \rightarrow (\mathbf{GS}_d)_{n,p}$.

Для каждого n и p фиксируем на поверхности F (рода p) скелет S и выберем множество точек ветвления B (состоящее из n точек) вне скелета S . Тогда группа кос $\mathbf{Br}_n(F, \partial F)$, элементами которой являются классы изотопий гомеоморфизмов пары (F, B) в себя, сохраняющих ориентацию и тождественных вблизи границы, естественным образом действует на $(\mathbf{GV}\mathbf{S}_d)_{n,p}$ и, как это непосредственно следует из определения, слои упомянутого выше отображения $(\mathbf{GV}\mathbf{S}_d)_{n,p} \rightarrow (\mathbf{GS}_d)_{n,p}$ являются орбитами этого действия.

С другой стороны, мы можем канонически отождествить группу $\mathbf{Br}_n(F, \partial F)$ с фундаментальной группой $\pi_1(F^{(n)} \setminus \Delta)$, где $F^{(n)}$ – симметрическое произведение n копий поверхности F и Δ – дискриминантное множество, т.е. множество тех наборов из n точек, в которых содержатся совпадающие точки. Более точно, мы фиксируем множество $B = \{P_1, \dots, P_n\} \subset F \setminus \partial F$, состоящее из n различных точек, и рассматриваем $\mathbf{Br}_n(F, \partial F)$ как группу гомотопических классов геометрических кос, где, как обычно, *геометрическая коса* на поверхности F с базой B – это набор $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, состоящий из n нитей, т.е. путей $\psi_i: [0, 1] \rightarrow F \setminus \partial F$ таких, что:

1) $\psi_i(0) = P_i$ и $\psi_i(1) \in B$ для каждого $i = 1, \dots, n$;

2) $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ являются различными точками из $F \setminus \partial F$ при всех $t \in [0, 1]$, и умножение кос – это последовательное соединение путей.

Назовем λ -*перемещением* (соответственно, μ -*перемещением*) геометрическую косу, которая оставляет на месте все точки из B , кроме одной точки b , причем b движется вдоль пути $I \star C_\lambda \star I^{-1}$ (соответственно, пути $I \star C_\mu \star I^{-1}$), где I – простой путь, лежащий в дополнении к $S \cup B \setminus \{b\}$ и соединяющий точку $b \in B$ с вершиной букета $C_\lambda \vee C_\mu \subset S$ (рис. 6). Стандартные геометрические косы Артина–Гурвица (полуповороты), меняющие местами две точки из B , будем называть H -*перемещениями*.

Следующее предложение является хорошо известным. Фактически, доказательство этого предложения легко следует, например, из точных последовательностей

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \pi_1(F \setminus B) \rightarrow P\mathbf{Br}_n(F, \partial F) \rightarrow P\mathbf{Br}_{n-1}(F, \partial F) \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow P\mathbf{Br}_n(F, \partial F) \rightarrow \mathbf{Br}_n(F, \partial F) \rightarrow \mathcal{S}_n \rightarrow 1, \end{aligned}$$

где $B' = B \setminus \{P_1\}$ и вторая точная последовательность – это по существу определение группы чистых кос $P\mathbf{Br}_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10 [18], [19]. *Группа кос $\mathbf{Br}_n(F, \partial F)$ порождается H -, λ - и μ -перемещениями.*

Рис. 6. Простой путь, соединяющий точку ветвления с вершиной букета

Следующее утверждение является непосредственным следствием предложения 10.

СЛЕДСТВИЕ 3. Соотношения, налагаемые отображениями $(GV\mathbb{S}_d)_{2,0} \rightarrow (G\mathbb{S}_d)_{2,0}$ и $(GV\mathbb{S}_d)_{1,1} \rightarrow (G\mathbb{S}_d)_{1,1}$, влекут все другие соотношения, налагаемые факторотображением $GV\mathbb{S}_d \rightarrow G\mathbb{S}_d$.

Чтобы описать полугруппу $G\mathbb{S}_d$ в терминах порождающих элементов и определяющих соотношений, обозначим так же через X_g , $Y_{a,b}$ образы в $G\mathbb{S}_d$ элементов $X_g, Y_{a,b} \in GV\mathbb{S}_d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Элементы X_g , $g \in \mathcal{S}_d \setminus \{1\}$, и $Y_{a,b}$, $a, b \in \mathcal{S}_d$, порождают полугруппу $G\mathbb{S}_d$. Они удовлетворяют соотношению

$$X_{g_1} \cdot X_{g_2} = X_{g_2} \cdot X_{g_1^{g_2}} \quad (21)$$

для всех $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_d$ и соотношениям

$$X_g \cdot Y_{a,b} = Y_{a,b} \cdot X_{g^{[a,b]}}, \quad (22)$$

$$X_g \cdot Y_{a,b} = X_{g^{c_1}} \cdot Y_{ga,b}, \quad c_1 = ab^{-1}a^{-1}g^{-1}, \quad (23)$$

$$Y_{a,b} \cdot X_g = Y_{a,g^{-1}b} \cdot X_{g^{c_2}}, \quad c_2 = ba^{-1}b^{-1}g, \quad (24)$$

для всех $g, a, b \in \mathcal{S}_d$. Эти соотношения являются определяющими для полугруппы $G\mathbb{S}_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 9, 10 и следствия 3 вытекает, что новыми по сравнению с предложением 9 соотношениями являются соотношения в $(GV\mathbb{S}_d)_{1,1}$, полученные как результат λ - и μ -перемещений.

При протаскивании точки ветвления через λ - или μ -разрезы, как это изображено на рис. 7, 8, мы получаем соотношения (23) и (24). В частности, элементы g' , появляющиеся в соотношениях $X_g \cdot Y_{a,b} = X_{g'} \cdot Y_{ga,b}$ и, соответственно, в $Y_{a,b} \cdot X_g = Y_{a,g^{-1}b} \cdot X_{g'}$ (см. рис. 7, 8), могут быть найдены, например, из тождеств, выражающих неизменность монодромии обхода вокруг дыры: $gaba^{-1}b^{-1} = g'a'b(a')^{-1}b^{-1}$, $a' = ga$ при перемещении через λ -разрез, как это

 Рис. 7. Движение точки ветвления через λ -разрез в XY -произведении

показано на рис. 7, и $gaba^{-1}b^{-1} = g'ab'a^{-1}(b')^{-1}$, $b' = g^{-1}b$ при перемещении через μ -разрез, как это изображено на рис. 8.

 Рис. 8. Движение точки ветвления через μ -разрез в YX -произведении

СЛЕДСТВИЕ 4. Элементы X_g , $g \in \mathcal{S}_d \setminus \{1\}$, и $Y_{a,b}$, $a, b \in \mathcal{S}_d$, удовлетворяют соотношению

$$X_g \cdot Y_{a,b} = X_{g[a,b]} \cdot Y_{ag[a,b],bg[a,b]}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (25) следует из соотношений (22)–(24). Оно получается в результате перемещения точки ветвления вокруг ручки (т. е. вокруг дыры в глазастой плоской диаграмме).

Благодаря предложению 11 и следствию 4 мы имеем канонический морфизм $\varrho_d: \mathbf{GS}_d \rightarrow \mathcal{S}_d$, который отображает порождающие элементы X_g в x_g , а $Y_{a,b}$ в $y_{a,b}$ (см. п. 1.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Морфизм $\varrho_d: \mathbf{GS}_d \rightarrow \mathcal{S}_d$ является изоморфизмом полугрупп над группой $\mathcal{S}_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм ϱ_d побуквенно переводит списки порождающих элементов и определяющих соотношений в полугруппе $\mathbf{GS}_d$, приведенные в предложении 11 и дополненные соотношениями (25), в списки порождающих элементов и определяющих соотношений в $\mathcal{S}_d$, приведенные в предложении 3.

2.6. Допустимые геометрические полугруппы накрытий. Чтобы определить другие геометрические полугруппы накрытий, мы берем очень строгую полугруппу $\mathbf{GV}\mathcal{S}_d$ отмеченных накрытий степени d и добавляем дополнительные соотношения между тройками $(f: E \rightarrow F, \nu, S^{\text{cdt}})$, представляющими

элементы полугруппы $GV\mathbb{S}_d$. Для этой цели удобно ввести некоторую вспомогательную категорию $\mathcal{F}$. Объектами категории $\mathcal{F}$ являются тройки (F, q, S^{cdt}) , где F – связная компактная ориентированная поверхность с одной дырой, q – фиксированная точка, лежащая на границе поверхности F , и S^{cdt} – хвостатый скелет поверхности F ; множество концов хвостов скелета S^{cdt} будем обозначать через B , через p – род поверхности F и $n = |B|$. Морфизмы² в категории $\mathcal{F}$ – это сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы троек (F, q, B) .

Мы обозначаем через Номео множество морфизмов категории $\mathcal{F}$, через $\text{Номео}_{n,p}$ подмножество в Номео , состоящее из морфизмов между тройками (F, q, S^{cdt}) с фиксированными $n = |B|$ и $p = g(F)$, и пусть $H(F, q, S^{\text{cdt}})$ – это группа³, состоящая из автогомеоморфизмов $(F, q, B) \rightarrow (F, q, B)$. Скажем, что набор подмножеств $\tilde{H}_{n,p} \subset \text{Номео}_{n,p}$, $n \geq 0$, $p \geq 0$, является *геометрически допустимым*, если для каждого n и p он содержит все изотопии множества B в пространстве $F \setminus \partial F$ и для любых двух троек $(F_1, q_1, S_1^{\text{cdt}})$ и $(F_2, q_2, S_2^{\text{cdt}})$ с одинаковыми n и p найдется морфизм $(F_1, q_1, S_1^{\text{cdt}}) \rightarrow (F_2, q_2, S_2^{\text{cdt}})$, принадлежащий $\tilde{H}_{n,p}$.

Для каждого n и p зафиксируем (F, q, S^{cdt}) . Хвостатый скелет S^{cdt} определяет репер в свободной группе $\pi_1(F \setminus B, q)$, а каждый элемент $\psi \in H(F, q, S^{\text{cdt}})$ определяет автоморфизм этой свободной группы $\mathbb{F}^{n+2p} = \pi_1(F \setminus B, q)$. Обозначим через $H_{n,p}$ подгруппу в $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$, где $\mathbb{F}^{n+2p} = \pi_1(F \setminus B, q)$, представляющую группу $\tilde{H}_{n,p} \cap H(F, q, S^{\text{cdt}})$.

Как непосредственно следует из определений, $H_{n,p}$ является допустимой подгруппой в $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$, если набор $\tilde{H}_{n,p} \subset \text{Номео}_{n,p}$ геометрически допустим. Например, геометрически допустимыми наборами являются наборы гомеоморфизмов, сохраняющих λ -окружности (соответственно, μ -окружности) с точностью до изотопии; геометрически допустимыми являются и сами множества $\tilde{H}_{n,p} = \text{Номео}_{n,p}$. Фактически можно построить геометрические наборы гомеоморфизмов, взяв наборы допустимых подгрупп $H_{n,p}$ в группах $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$ и рассмотрев геометрически допустимые наборы гомеоморфизмов $\tilde{H}_{n,p}$ таких, что $\tilde{H}_{n,p} \cap H(F, q, S^{\text{cdt}})$ состоит из всех таких элементов группы $H(F, q, S^{\text{cdt}})$, которые действуют на группе $\mathbb{F}^{n+2p} = \pi_1(F \setminus B, q)$ как элементы из $H_{n,p}$ (относительно репера, определенного хвостатым скелетом S^{cdt}).

Пусть $\tilde{\mathcal{H}} = \{\tilde{H}_{n,p}\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ – геометрически допустимый набор. Предположим дополнительно, что этот набор гомеоморфизмов замкнут относительно операции произведения троек (F, q, B) (см. определение произведения в полугруппе $GV\mathbb{S}_d$). Скажем, что две тройки $(f_1: E_1 \rightarrow F_1, \nu_1, S_1^{\text{cdt}})$ и $(f_2: E_2 \rightarrow F_2, \nu_2, S_2^{\text{cdt}})$ являются *$\tilde{\mathcal{H}}$ -эквивалентными*, если найдутся гомеоморфизмы $\phi: E_1 \rightarrow E_2$ и $\psi: (F_1, q_1, B_1) \rightarrow (F_2, q_2, B_2)$ такие, что $f_2 \circ \phi = \psi \circ f_1$, $\phi \circ \nu_1 = \nu_2$ и $\psi \in \tilde{H}_{n,p}$. С помощью таких дополнительных соотношений эквивалентности мы получаем полугруппу над группой $\mathcal{S}_d$, переходя к факторполугруппе $G\mathbb{S}_{d, \tilde{\mathcal{H}}\text{-equiv}} = GV\mathbb{S}_d / \{f_1 \tilde{\mathcal{H}} f_2\}$. Назовем полугруппы, полученные таким образом, *допустимыми версальными геометрическими полугруппами накрытий степени d* . В частности, если $\tilde{H}_{n,p} = \text{Номео}_{n,p}$ для всех n и p , то полугруппа

²Отметим, что морфизмы в $\mathcal{F}$ не обязаны переводить скелеты в скелеты.

³Отметим, что группа $H(F, q, S^{\text{cdt}})$ состоит из морфизмов тройки (F, q, S^{cdt}) в себя.

$\mathcal{GS}_{d,\tilde{\mathcal{H}}-\text{equiv}}$ называется *слабой версальной геометрической полугруппой накрытий степени d* и обозначается через $\text{GW}\mathcal{S}_d$.

Пусть G – подгруппа в $\mathcal{S}_d$ и $O \subset G$ – некоторое ее оснащение. Подполугруппа $\mathcal{GS}_{d,\tilde{\mathcal{H}}-\text{equiv}}(G, O)$ полугруппы $\mathcal{GS}_{d,\tilde{\mathcal{H}}-\text{equiv}}$, порожденная элементами X_g , $g \in O$, и $Y_{a,b}$, $a, b \in G$, является полугруппой над группой G . Ее элементами являются классы $\mathcal{H}$ -эквивалентных накрытий степени d , локальные монодромии которых содержатся в O , а группы Галуа содержатся в G . Назовем такие полугруппы *допустимыми геометрическими полугруппами накрытий степени d с локальными монодромиями из O и группами Галуа в группе G* .

Непосредственная проверка приводит к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Каждая допустимая геометрическая полугруппа накрытий $\mathcal{GS}_{d,\tilde{\mathcal{H}}-\text{equiv}}(G, O)$ изоморфна над группой G допустимой алгебраической полугруппе накрытий $\mathcal{S}_{\mathcal{H}-\text{equiv}}(G, O)$, где $\mathcal{H} = \{H_{n,p}\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ – набор подгрупп, представляющих $\tilde{\mathcal{H}} = \{\tilde{H}_{n,p}\}_{n \geq 0, p \geq 0}$ в группах $\text{Aut}(\mathbb{F}^{n+2p})$.*

2.7. Конструкция пространств Гурвица отмеченных накрытий. В этом пункте мы приспособляем конструкцию Фултона построения пространств Гурвица (см. [20]) к случаю отмеченных накрытий.

Пусть $D \subset \bar{F}$ – открытый диск в проективной неприводимой неособой алгебраической кривой $\bar{F}$. Положим $F = \bar{F} \setminus D$, выберем точку $q \in \partial F$ и зафиксируем подмножество $B \subset F \setminus \partial F$, состоящее из n точек.

Напомним, что для любой поверхности F ее группа кос $\text{Br}_n(F, \partial F)$ из n нитей может быть рассмотрена как фундаментальная группа $\pi_1(F^{(n)} \setminus \Delta)$, где $F^{(n)}$ – симметрическое произведение n копий поверхности F и Δ – дискриминантное множество.

Ввиду наших предположений фундаментальная группа $\pi_1(F \setminus B, q)$ изоморфна свободной группе $\mathbb{F}^{n+2p}$, где p – род поверхности F , и, таким образом, группа кос $\text{Br}_n(F, \partial F)$, которая естественным образом действует на $\pi_1(F \setminus B, q) \simeq \mathbb{F}^{n+2p}$ (действие справа), антиизоморфна алгебраической группе кос $\text{Br}_{n,p}$, определенной в п. 1.4 (этот результат обычно называется *теоремой Артина о представлении* и следует из сравнения действия порождающих элементов этих групп на группе $\mathbb{F}^{n+2p} \simeq \pi_1(F \setminus B, q)$).

Чтобы более детально описать эту идентификацию, выберем хвостатый скелет S^{cdt} на поверхности F , множество концов хвостов которого есть B . В обозначениях из п. 2.2 выбор хвостатого скелета S^{cdt} определяет множество $\{\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p\}$ свободных порождающих группы $\pi_1(F, q)$ и петли γ_i вокруг точек из B такие, что $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p$ являются свободными порождающими группы $\pi_1(F \setminus B, q) \simeq \mathbb{F}^{n+2p}$, причем $\gamma_1 \dots \gamma_n [\lambda_1, \mu_1] \dots [\lambda_p, \mu_p] = \partial F$ в группе $\pi_1(F \setminus B, q)$ (как обычно, граничная петля ∂F направлена против часовой стрелки).

Множество $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_p, \mu_p\}$ является репером свободной группы $\pi_1(F \setminus B, q) \simeq \mathbb{F}^{n+2p}$, который согласно п. 1.4 мы обозначаем через B_1 . Порождающие элементы

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \xi_{1,\lambda}, \dots, \xi_{p,\lambda}, \xi_{1,\mu}, \dots, \xi_{p,\mu}, \zeta_1, \dots, \zeta_p$$

алгебраической группы кос $\mathrm{Br}_{n,p}$ в терминах геометрической группы кос $\mathrm{Br}_n(F, \partial F)$ превращаются в H -, λ - и μ -перемещения и обходы вокруг ручек (см. п. 2.5).

Антиизоморфизм $\mathrm{Br}_n(F, \partial F) \rightarrow \mathrm{Br}_{n,p}$ определяет действие справа группы кос $\mathrm{Br}_n(F, \partial F)$ на множестве слов $W_{\mathcal{B}_1}(G, O) = \bigcup_f W_{f, \mathcal{B}_1}$, где объединение взято по всем оснащенным гомоморфизмам $f: \mathbb{F}^{n+2p} \rightarrow (G, O)$ в оснащенную группу (G, O) . Очевидно, подмножество $W_{\mathcal{B}_1, 1}^G(G, O)$ слов из $W_{\mathcal{B}_1}(G, O)$, представляющих элементы полугруппы $\mathbb{S}(G, O)_1^G$, инвариантно относительно этого действия группы $\mathrm{Br}_n(F, \partial F)$, поэтому данное действие определяет гомоморфизмы $\omega = \omega_{n,p,(G,O)}: \pi_1(F^{(n)} \setminus \Delta) = \mathrm{Br}_n(F, \partial F) \rightarrow \mathcal{S}_{|W_{\mathcal{B}_1}(G,O)|}$ и $\omega_1^G: \pi_1(F^{(n)} \setminus \Delta) = \mathrm{Br}_n(F, \partial F) \rightarrow \mathcal{S}_{|W_{\mathcal{B}_1, 1}^G(G,O)|}$ в симметрические группы $\mathcal{S}_{|W_{\mathcal{B}_1}(G,O)|}$ и $\mathcal{S}_{|W_{\mathcal{B}_1, 1}^G(G,O)|}$, действующие соответственно на множествах $W_{\mathcal{B}_1}(G, O)$ и $W_{\mathcal{B}_1, 1}^G(G, O)$.

Положим $F_0 = F \setminus \partial F$. Из предложения 6 следует, что гомоморфизмы ω и ω_1^G определяют соответственно $|W_{\mathcal{B}_1}(G, O)|$ -листное неразветвленное накрытие

$$\theta_n = \theta_n(G, O): \widetilde{\mathrm{HUR}}_{(G,O),n}(F) \rightarrow F_0^{(n)} \setminus \Delta$$

и $|W_{\mathcal{B}_1, 1}^G(G, O)|$ -листное неразветвленное накрытие

$$\theta_n^G = \theta_n(G, O)_1^G: \mathrm{HUR}_{(G,O),n}(F) \rightarrow F_0^{(n)} \setminus \Delta.$$

Кроме того, имеем каноническое вложение $j: \mathrm{HUR}_{(G,O),n}(F) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{HUR}}_{(G,O),n}(F)$ такое, что $\theta_n^G = \theta_n \circ j$. Более того, оба накрытия являются отмеченными (словами из $W_{\mathcal{B}_1}(G, O)$ и $W_{\mathcal{B}_1, 1}^G(G, O)$ соответственно) над точкой в $F_0^{(n)} \setminus \Delta$, соответствующей множеству B , и вложение j уважает эти метки.

В соответствии с обычной конструкцией накрывающих пространств с помощью группоида гомотопических классов путей пространство $\mathrm{HUR}_{(G,O),n}(F)$ как множество является множеством пар (B', f') , где $B' \in F_0^{(n)} \setminus \Delta$, а $f': \pi_1(F \setminus B', q) \rightarrow G$ — эпиморфизмы такие, что классы сопряженности значений петель вокруг точек из B' принадлежат оснащению O и, кроме того, выполнено $f'(\partial F) = 1$.

Назовем пространство $\widetilde{\mathrm{HUR}}_{(G,O),n}(F)$ *пространством Гурвица отмеченных накрытий поверхности F , разветвленных в n точках, с оснащенной группой Галуа (G, O)* . Эта конструкция является функториальной, поэтому вложение $i: G \hookrightarrow \mathcal{S}_d$ задает вложение пространства $\widetilde{\mathrm{HUR}}_{(G,O),n}(F)$ в $\widetilde{\mathrm{HUR}}_{d,n} = \widetilde{\mathrm{HUR}}_{(\mathcal{S}_d, \mathcal{S}_d \setminus \{1\}),n}(F)$, которое мы называем *пространством Гурвица отмеченных накрытий поверхности F степени d , разветвленных в n точках*.

Преимущество рассмотрения отмеченных накрытий состоит в том, что пространство Гурвица $\widetilde{\mathrm{HUR}}_{d,n}$ позволяет построить универсальное семейство накрытий $\mathcal{F}_{d,n} \rightarrow \widetilde{\mathrm{HUR}}_{d,n}$. Такое семейство можно получить как пополнение (см. п. 2.1) неразветвленного накрытия пространства $U = \{(p, B'): p \notin B'\} \subset F \times (F_0^{(n)} \setminus \Delta)$, определяемого гомоморфизмом $\pi_1(U, (q, B)) \rightarrow \mathcal{S}_{I_d \times W_{\mathcal{B}_1}(G,O)}$, где $G = \mathcal{S}_d$ и $O = \mathcal{S}_d \setminus \{1\}$, отображающим образы элементов $\varsigma \in \pi_1(F \setminus B, q)$ в перестановки $(x, w) \mapsto (\alpha(\varsigma)x, w)$, а образы элементов $\chi \in \pi_1(F^{(n)} \setminus \Delta)$ в перестановки $(k, w) \mapsto (k, \omega(\chi)w)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. Связные компоненты пространства $\widetilde{\text{HUR}}_{(G,O),n}(F)$ и пространства $\text{HUR}_{(G,O),n}(F)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами строгой полугруппы накрытий $\mathbb{S}(G, O)$ и ее подполугруппой $\mathbb{S}(G, O)_1^G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 6 и в силу существования универсальных семейств накрытий следует, что связные компоненты пространства $\widetilde{\text{HUR}}_{(G,O),n}(F)$ (соответственно, $\text{HUR}_{(G,O),n}(F)$) находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами действия группы $\text{Br}_n(F)$ на множестве $W_{\mathcal{B}_1}(G, O)$ (соответственно, на $W_{\mathcal{B}_1,1}^G(G, O)$). Ввиду антиизоморфизма $\text{Br}_n(F) \rightarrow \text{Br}_{n,p}$ из определения строгих полугрупп накрытий следует, что эти орбиты совпадают с элементами из $\mathbb{S}(G, O)$.

Пусть $F = \overline{F} \setminus D$ и $F' = \overline{F'} \setminus D'$, где $D' \subset D$ – открытые диски на замкнутой рода p ориентированной поверхности $\overline{F}$ без границы такие, что отмеченная точка q принадлежит $\partial D \cap \partial D'$. В этом случае имеется естественное вложение $j_{F,F'}: \text{HUR}_{(G,O),n}(F) \hookrightarrow \text{HUR}_{(G,O),n}(F')$, которое совместимо с накрывающими отображениями и вложением $j_{F,F'}: F_0^{(n)} \setminus \Delta \hookrightarrow F_0'^{(n)} \setminus \Delta$. Пусть $i: G \hookrightarrow \mathcal{S}_d$ – вложение группы G такое, что ее образ действует транзитивно на I_d . Если слово w_{f*} представляет элемент из $\mathbb{S}(G, O)_1^G$, то, во-первых, накрывающее пространство E d -листного отмеченного накрытия $f: E \rightarrow F$ является связным, а во-вторых, накрытие f может быть однозначно продолжено до d -листного отмеченного (над точкой $q \in \overline{F}$) накрытия $f: \overline{E} \rightarrow \overline{F}$, неразветвленного над D . Вложения $\text{HUR}_{(G,O),n}(\overline{F} \setminus D_i) \hookrightarrow \text{HUR}_{(G,O),n}(\overline{F} \setminus D_{i+1})$, соответствующие бесконечной последовательности вложений открытых дисков

$$\cdots \subset D_{i+1} \subset D_i \subset \cdots \subset D_1$$

такой, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset$ и $q \in \partial D_i$ для всех i , определяют неразветвленное накрытие $\theta_n(G, O)_1^G: \text{HUR}_{(G,O),n}(\overline{F}, q) \rightarrow (\overline{F} \setminus q)^{(n)} \setminus \Delta$, накрывающее пространство которого называется *пространством Гурвица* отмеченных (в точке $q \in \overline{F}$), разветвленных в n точках накрытий проективной алгебраической кривой $\overline{F}$ с оснащенной группой Галуа (G, O) .

2.8. Доказательство теорем 1, 2, 3. Согласно предложению 12 теорема 1 вытекает из следствия 2; теорема 2 следует из утверждения 19 и теорем 6, 7; теорема 3 вытекает из утверждения 19 и следствия 1.

Список литературы

1. A. Clebsch, “Zur Theorie der Riemann’schen Fläche”, *Math. Ann.*, **6:2** (1873), 216–230.
2. A. Hurwitz, “Ueber Riemann’sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten”, *Math. Ann.*, **39:1** (1891), 1–61.
3. I. Berstein, A.L. Edmonds, “On the classification of generic branched coverings of surfaces”, *Illinois J. Math.*, **28:1** (1984), 64–82.
4. B. Wajnryb, “Orbits of Hurwitz action for coverings of a sphere with two special fibers”, *Indag. Math. (N.S.)*, **7:4** (1996), 549–558.

5. А. Н. Протопопов, “Топологическая классификация разветвленных накрытий двумерной сферы”, Записки науч. сем. ЛОМИ, **167**, Наука, Л., 1988, 135–156; англ. пер.: A. N. Protopopov, “Topological classification of branched coverings of the two-dimensional sphere”, *J. Soviet Math.*, **52**:1 (1990), 2832–2846.
6. M. D. Fried, H. Völklein, “The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces”, *Math. Ann.*, **290**:1 (1991), 771–800.
7. Вик. С. Куликов, “Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Грувица”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 49–90; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Factorization semigroups and irreducible components of the Hurwitz space”, *Izv. Math.*, **75**:4 (2011), 711–748.
8. Вик. С. Куликов, “Разложения на множители в конечных группах”, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 87–116; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Factorizations in finite groups”, *Sb. Math.*, **204**:2 (2013), 237–263.
9. С. М. Натанзон, “Пространства вещественных мероморфных функций на вещественных алгебраических кривых”, *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 803–805; англ. пер.: S. M. Natanzon, “Spaces of real meromorphic functions on real algebraic curves”, *Soviet Math. Dokl.*, **30**:3 (1984), 724–726.
10. Вик. С. Куликов, “Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:2 (2012), 151–160; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Factorization semigroups and irreducible components of the Hurwitz space. II”, *Izv. Math.*, **76**:2 (2012), 356–364.
11. T. Graber, J. Harris, J. Starr, *A note on Hurwitz schemes of covers of a positive genus curve*, arXiv:math/0205056.
12. V. Kanev, Irreducibility of Hurwitz spaces, arXiv:math/0509154.
13. F. Vetro, “Irreducibility of Hurwitz spaces of coverings with one special fiber”, *Indag. Math. (N.S.)*, **17**:1 (2006), 115–127.
14. Ф. Ветро, “О накрытиях со специальными слоями и группой монодромии S_d ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:6 (2012), 39–44; англ. пер.: F. Vetro, “A note on coverings with special fibres and monodromy group S_d ”, *Izv. Math.*, **76**:6 (2012), 1110–1115.
15. Вик. С. Куликов, “Кривые Гурвица”, *УМН*, **62**:6 (2007), 3–86; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Hurwitz curves”, *Russian Math. Surveys*, **62**:6 (2007), 1043–1119.
16. Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, “О брэйд-монодромных разложениях на множители”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 79–118; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, V. M. Kharlamov, “On braid monodromy factorizations”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 499–534.
17. R. H. Fox, “Covering spaces with singularities”, *Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957, 243–257.
18. E. Fadell, L. Neuwirth, “Configuration spaces”, *Math. Scand.*, **10** (1962), 111–118.
19. R. H. Fox, L. Neuwirth, “The braid groups”, *Math. Scand.*, **10** (1962), 119–126.
20. W. Fulton, “Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves”, *Ann. of Math. (2)*, **90**:3 (1969), 542–575.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 10.05.2012

В. М. Харламов (V. M. Kharlamov)
 Université de Strasbourg, France
E-mail: kharlam@math.u-strasbg.fr