Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Гармонический анализ Фурье–Якоби и приближение функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 117–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7998>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:14:11

УДК 517.518.8

С. С. Платонов

Гармонический анализ Фурье–Якоби и приближение функций

С помощью методов гармонического анализа Фурье–Якоби изучаются задачи теории приближений функций в весовых функциональных пространствах на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами. Доказаны аналоги прямых теорем Джексона для модуля гладкости произвольного порядка, построенного на основе обобщенного сдвига Якоби. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K -функционала, построенного по пространству соболевского типа. Определены пространства Никольского–Бесова, построенные на основе обобщенных сдвигов Якоби, и получено их описание в терминах наилучших приближений, а также доказаны аналоги некоторых обратных теорем Стечкина.

Библиография: 46 наименований.

Ключевые слова: гармонический анализ Фурье–Якоби, приближение функций, обобщенные сдвиги, многочлены Якоби, функциональные пространства.

DOI: 10.4213/im7998

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

В классической теории приближений периодических функций (или, эквивалентно, функций на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) тригонометрическими полиномами центральную роль играют операторы сдвига $f(x) \mapsto f(x + y)$, $x, y \in \mathbb{T}$. Так, инфинитезимальным оператором сдвига является оператор дифференцирования, тригонометрические полиномы представляют собой линейные комбинации собственных функций операторов сдвига, операторы сдвига используются для построения модулей непрерывности и гладкости, которые являются основными элементами прямых и обратных теорем теории приближения.

Различные обобщения и аналоги операторов сдвига (операторы обобщенного сдвига) позволяют формулировать естественные аналоги задач классической теории приближения. Построенные на основе обобщенных сдвигов обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными и аппроксимативными свойствами функций в весовых функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости. Некоторые результаты о приближении функций с использованием операторов обобщенного сдвига можно найти в [1]–[7] (см. также цитированную в этих работах литературу). Одним из наиболее важных обобщенных сдвигов является обобщенный сдвиг Якоби. Различные применения обобщенных сдвигов Якоби в задачах теории приближения рассматривались в работах [8]–[14].

В настоящей работе с помощью обобщенных сдвигов Якоби изучаются задачи теории приближений функций в весовых функциональных пространствах на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами. Доказаны аналоги прямых теорем Джексона для модуля гладкости произвольного порядка, построенного на основе обобщенного сдвига Якоби. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K -функционала, построенного по пространству соболевского типа. Получено описание весовых аналогов функциональных пространств Никольского–Бесова в терминах наилучших приближений и доказаны некоторые аналоги обратных теорем Стечкина. Основным средством для решения этих задач является гармонический анализ Фурье–Якоби.

Перейдем к более подробному изложению результатов. Всюду далее α и β – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ и $\alpha \neq -1/2$. Пусть $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Мы будем рассматривать задачи теории приближений функций в банаховых пространствах $L_p([-1, 1], w(x) dx)$, $1 \leq p < \infty$, или $C[-1, 1]$ алгебраическими полиномами (все функциональные пространства состоят из комплекснозначных функций). Отметим, что различные вопросы приближения функций алгебраическими полиномами в банаховых пространствах $L_p([-1, 1], w(x) dx)$ для ультрасферического случая $\alpha = \beta$ рассматривались в работах [15]–[18].

Пусть $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ – ортогональные многочлены Якоби, $n \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ (см. [19] или [20]). В гильбертовом пространстве $L_2([-1, 1], w(x) dx)$ многочлены $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, образуют полную ортогональную систему.

Известно (см. [19, гл. IV]), что

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| = P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)}. \quad (1.1)$$

Многочлены

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(x) := \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(1)} \quad (1.2)$$

называются *нормированными многочленами Якоби*.

В дальнейшем удобно сделать замену переменной $x = \cos t$, $t \in I := [0, \pi]$. Будем использовать обозначения

$$\rho(t) := w(\cos t) \sin t = 2^{\alpha+\beta+1} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2\beta+1}, \quad (1.3)$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_n^{(\alpha, \beta)}(t) := R_n^{(\alpha, \beta)}(\cos t), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.4)$$

При $1 \leq p < \infty$ обозначим через $L_p^{(\alpha, \beta)}$ банахово пространство, состоящее из всех измеримых функций $f(t)$ на отрезке I (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), с конечной нормой

$$\|f\|_p := \left(\int_0^\pi |f(t)|^p \rho(t) dt \right)^{1/p}. \quad (1.5)$$

При $p = \infty$ будем считать, что банахово пространство $L_\infty^{(\alpha, \beta)} = C(I)$ состоит из всех непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций $f(t)$ и снабжается нормой

$$\|f\|_\infty := \max_{0 \leq t \leq \pi} |f(t)|. \quad (1.6)$$

Отображение $\Lambda: g(x) \mapsto f(t) = g(\cos t)$ задает изоморфизм банахова пространства $L_p([-1, 1], w(x) dx)$ на банахово пространство $L_p^{(\alpha, \beta)}$ при $1 \leq p < \infty$ и изоморфизм банахова пространства $C[-1, 1]$ на банахово пространство $L_\infty^{(\alpha, \beta)}$. При отображении Λ алгебраические многочлены переходят в четные тригонометрические полиномы.

Мы будем рассматривать функции $f(t)$ на отрезке $I = [0, \pi]$, при этом удобно считать, что функции продолжены на всю числовую прямую $\mathbb{R}$ так, чтобы получилась четная 2π -периодическая функция, или, эквивалентно, можно считать, что $f(t)$ – четная функция на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{T})$ – множество всех бесконечно дифференцируемых 2π -периодических функций на $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{T})$ – подмножество четных функций в $\mathcal{E}$. Множество $\mathcal{E}$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством с обычной топологией (топология равномерной сходимости на $\mathbb{T}$ вместе со всеми производными). Подмножество $\mathcal{E}_+$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{E}$ и снабжается индуцированной из $\mathcal{E}$ топологией. Пусть $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{T})$ – множество обобщенных функций на $\mathbb{T}$ (т. е. множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{E}$), $\mathcal{E}'_+ = \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$ – множество четных обобщенных функций на $\mathbb{T}$ (т. е. множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{E}_+$). Множества $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}'_+$ снабжаются слабыми топологиями и становятся полными локально выпуклыми топологическими векторными пространствами. Значение функционала $f \in \mathcal{E}'$ (или $f \in \mathcal{E}'_+$) на функции $\varphi \in \mathcal{E}$ (соответственно, $\varphi \in \mathcal{E}_+$) будем обозначать $\langle f, \varphi \rangle$. Пространства $L_p^{(\alpha, \beta)}$ вкладываются в пространство $\mathcal{E}'_+$, если для $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и $\varphi \in \mathcal{E}_+$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_0^\pi f(t) \varphi(t) \rho(t) dt. \quad (1.7)$$

Как и в классической теории обобщенных функций, будем называть обобщенные функции, построенные по функциям из класса $L_1^{(\alpha, \beta)}$, *регулярными обобщенными функциями*. При этом мы всегда будем отождествлять обычную функцию $f \in L_1^{(\alpha, \beta)}$ и соответствующую ей регулярную обобщенную функцию $f \in \mathcal{E}'_+$, определенную по формуле (1.7).

Дифференциальным оператором Якоби называется дифференциальный оператор

$$\mathcal{B} := \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} + \left(\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \frac{d}{dt}. \quad (1.8)$$

Легко видеть, что оператор $\mathcal{B}$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{E}_+$ (см. § 2). Действие оператора $\mathcal{B}$ можно распространить на обобщенные функции из $\mathcal{E}'_+$, полагая

$$\langle \mathcal{B}f, \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{B}\varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{E}'_+, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+. \quad (1.9)$$

В частности, действие оператора $\mathcal{B}$ определено и для функций $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, но при этом $\mathcal{B}f$, вообще говоря, является обобщенной функцией.

Известно, что при $0 < t, s, \theta < \pi$, $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$\varphi_n^{(\alpha, \beta)}(t) \varphi_n^{(\alpha, \beta)}(s) = \int_0^\pi \varphi_n^{(\alpha, \beta)}(\theta) K(t, s, \theta) \rho(\theta) d\theta, \quad (1.10)$$

где $K(t, s, \theta)$ – некоторая функция (см. [21], [22]). Здесь нам не потребуется явный вид функции $K(t, s, \theta)$. Отметим только следующие свойства функции $K(t, s, \theta)$, которые будут использоваться в дальнейшем (всюду $0 < t, s, \theta < \pi$):

$$K(t, s, \theta) \geq 0, \quad (1.11)$$

$$\int_0^\pi K(t, s, \theta) \rho(t) d\theta = 1, \quad (1.12)$$

$$K(t, s, \theta) = K(s, t, \theta) = K(\theta, s, t). \quad (1.13)$$

Обобщенный сдвиг Якоби определяется формулой

$$T^s f(t) := \int_0^\pi f(\theta) K(t, s, \theta) \rho(\theta) d\theta, \quad 0 < t, s < \pi. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.14) легко получить, что T^s является линейным непрерывным оператором в банаховом пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Для любой функции $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ разности ${}^*\Delta_h^k f$ порядка k , $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, с шагом h , $0 < h < \pi$, и модуль гладкости $\omega_k^{(\alpha, \beta)}(f, \delta)_p$ определяются формулами

$$\begin{aligned} {}^*\Delta_h^1 f(t) &= {}^*\Delta_h f(t) := f(t) - T^h f(t), \\ {}^*\Delta_h^k f(t) &:= {}^*\Delta_h({}^*\Delta_h^{k-1} f(t)), \quad k > 1, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\omega_k^{(\alpha, \beta)}(f, \delta)_p = \omega_k(f, \delta)_p := \sup_{0 < h \leq \delta} \|{}^*\Delta_h^k f\|_p, \quad \delta > 0. \quad (1.16)$$

Пусть $\mathcal{T}_\nu^+ = \mathcal{T}_\nu^+(\mathbb{T})$ – множество четных тригонометрических полиномов степени ν , $\nu \in \mathbb{Z}_+$, или, эквивалентно, $\mathcal{T}_\nu^+$ – линейная оболочка функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\nu$. Пусть

$$\mathcal{T}^+ := \bigcup_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{T}_\nu^+$$

– множество всех четных тригонометрических полиномов. Функции из $\mathcal{T}^+$ будут служить средством приближения. *Наилучшим приближением* функции $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ функциями из $\mathcal{T}_\nu^+$ называется число

$$E_\nu^{(\alpha, \beta)}(f)_p = E_\nu(f)_p := \inf\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{T}_\nu^+\}. \quad (1.17)$$

Следующая теорема является аналогом прямой теоремы Джексона в классической теории приближений функций.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть функции $f, \mathcal{B}f, \dots, \mathcal{B}^m f$, $m \in \mathbb{Z}_+$, принадлежат пространству $L_p^{(\alpha, \beta)}$, где $\mathcal{B}$ – оператор Якоби, $1 \leq p \leq \infty$, k – произвольное натуральное число. Тогда для любого $\nu = 1, 2, 3, \dots$ справедливо неравенство

$$E_\nu^{(\alpha, \beta)}(f)_p \leq \frac{c}{\nu^{2m}} \omega_k^{(\alpha, \beta)}\left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu}\right)_p, \quad (1.18)$$

где $c = c(k, m, \alpha, \beta)$ – некоторая положительная постоянная.

Пусть $W_p^{m(\alpha, \beta)}$ – пространство Соболева порядка $m \in \mathbb{N}$, построенное по дифференциальному оператору $\mathcal{B}$, т. е.

$$W_p^{m(\alpha, \beta)} := \{f \in L_p^{(\alpha, \beta)} : \mathcal{B}^j f \in L_p^{(\alpha, \beta)}, j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1.19)$$

Отметим, что запись $\mathcal{B}^j f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ означает, что обобщенная функция $\mathcal{B}^j f$ является регулярной обобщенной функцией и соответствует обычной функции из класса $L_p^{(\alpha, \beta)}$.

Определим K -функционал, построенный по пространствам $L_p^{(\alpha, \beta)}$ и $W_p^{m(\alpha, \beta)}$:

$$K(f, \delta; L_p^{(\alpha, \beta)}, W_p^{m(\alpha, \beta)}) := \inf \{\|f - g\|_p + \delta \|\mathcal{B}^m g\|_p : g \in W_p^{m(\alpha, \beta)}\}, \quad (1.20)$$

где $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $\delta > 0$.

В следующей теореме устанавливается эквивалентность модуля гладкости и K -функционала. Эта теорема является аналогом теоремы об эквивалентности модуля гладкости и K -функционала в классической теории приближения, имеющей многочисленные приложения в различных задачах теории приближения (см. [23], [24]).

ТЕОРЕМА 1.2. *Существуют положительные постоянные $c_1 = c_1(\alpha, \beta, m)$ и $c_2 = c_2(\alpha, \beta, m)$ такие, что*

$$c_1 \omega_m^{(\alpha, \beta)}(f, \delta)_p \leq K(f, \delta^{2m}; L_p^{(\alpha, \beta)}, W_p^{m(\alpha, \beta)}) \leq c_2 \omega_m^{(\alpha, \beta)}(f, \delta)_p,$$

где $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $\delta > 0$.

Доказательство теорем 1.1, 1.2 является основной целью настоящей работы. Частный случай теоремы 1.1 для $k = 1$ доказан ранее М. К. Поталовым в [10]. В работе [8] авторы рассмотрели другой модуль гладкости на основе обобщенного сдвига Якоби:

$$\omega_m^*(f, \delta)_p := \sup \{\|\Delta_{h_1}^* \Delta_{h_2}^* \dots \Delta_{h_m}^* f\|_p : 0 < h_j \leq \delta, j = 1, 2, \dots, m\},$$

и доказали его эквивалентность K -функционалу $K(f, \delta^{2m}; L_p^{(\alpha, \beta)}, W_p^{m(\alpha, \beta)})$. В частности, из этого результата вытекает теорема 1.2 для случая $m = 1$.

При специальных значениях параметров α и β гармонический анализ Фурье–Якоби тесно связан с гармоническим анализом на компактных римановых симметрических пространствах ранга 1 (КРОСП по терминологии из книги [25]). КРОСП образуют важный класс однородных римановых многообразий, которые активно используются в различных разделах математики (см., например, [25]–[30]). В частности, на КРОСП изучаются различные задачи теории приближений функций (см. [31] и цитированную в этой работе литературу).

Хорошо известна полная классификация КРОСП (см., например, [26]). Их всего четыре серии (индекс n всюду означает размерность многообразия): сферы $\mathbb{S}^n$, $n = 1, 2, \dots$, вещественные $P^n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3, \dots$, комплексные $P^n(\mathbb{C})$, $n = 4, 6, \dots$, и кватернионные $P^n(\mathbb{H})$, $n = 8, 12, \dots$, проективные пространства и одно особое пространство – эллиптическая плоскость Кэли $P^{16}(\text{Ca})$, $n = 16$. Известно, что на любом КРОСП M все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину. Если нормировать риманову метрику на M так, чтобы длины

замкнутых геодезических были равны 2π , то функции $\varphi_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ совпадут с зональными сферическими функциями на многообразии M , где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{n-2}{2}, \quad \beta = \frac{n-2}{2} && \text{при } M = \mathbb{S}^n; \\ \alpha &= \frac{n-2}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2} && \text{при } M = P^n(\mathbb{R}); \\ \alpha &= \frac{n-2}{2}, \quad \beta = 0 && \text{при } M = P^n(\mathbb{C}); \\ \alpha &= \frac{n-2}{2}, \quad \beta = 1 && \text{при } M = P^n(\mathbb{H}); \\ \alpha &= 7, \quad \beta = 3 && \text{при } M = P^{16}(\text{CaY}). \end{aligned}$$

Будем называть эти значения параметров α и β *геометрическими значениями параметров*. Пусть o – фиксированная точка многообразия M , $d(x, y)$ – риманово расстояние между точками $x, y \in M$. Функция $f(x)$ на многообразии M называется *зональной*, если она зависит только от расстояния $t = d(x, o)$. Для зональных функций действие дифференциального оператора Лапласа–Бельтрами на M совпадает с действием дифференциального оператора $\mathcal{B}$, а оператор обобщенного сдвига T^s совпадает с оператором сферического усреднения на M (см. [31]). Теоремы 1.1, 1.2 настоящей работы можно рассматривать как “аналитические продолжения” теорем 1.1, 1.2 из работы [31]: для геометрических значений параметров (α, β) и для зональных функций на КРОСП эти теоремы совпадают.

В § 2 рассматриваются вспомогательные результаты из гармонического анализа Фурье–Якоби в удобной для дальнейшего использования форме. В центральном § 3 приведены доказательства теорем 1.1, 1.2. Основным средством доказательств является гармонический анализ Фурье–Якоби и некоторые оценки для функций $\varphi_n^{(\alpha,\beta)}(t)$, а также функций $\varphi_s^{(\alpha,\beta)}(t)$, получаемых аналитическим продолжением функций $\varphi_n^{(\alpha,\beta)}(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, на произвольные действительные значения $s > 0$. Последний § 4 содержит применения результатов из § 3 для изучения некоторых задач теории приближений функций, связанных с гармоническим анализом Фурье–Якоби. В этом параграфе определяются пространства Никольского–Бесова, построенные на основе обобщенных сдвигов Якоби, и получено их описание в терминах наилучших приближений, а также доказываются аналоги некоторых обратных теорем Стечкина.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Гармонический анализ Фурье–Якоби

Гармонический анализ Фурье–Якоби является основным инструментом для доказательства теорем 1.1, 1.2. Элементы гармонического анализа Фурье–Якоби, которые будут использоваться в дальнейшем, включают в себя дискретное преобразование Фурье–Якоби обычных и обобщенных функций, обобщенные сдвиги Якоби и свертки Якоби. Различные аспекты гармонического анализа

Фурье–Якоби рассматриваются во многих работах, из которых отметим [19], [21], [22], [32]–[34]. В этом параграфе приводятся необходимые сведения и вспомогательные результаты из гармонического анализа Фурье–Якоби в удобной для дальнейшего использования форме.

Всюду далее $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, вообще говоря, разные в различных местах, которые могут зависеть от α и β , а также от некоторых других параметров, которые обычно указываются. Если не оговорено противное, то через I обозначается отрезок $[0, \pi]$, а через I_0 – интервал $(0, \pi)$.

Напомним (см. § 1), что $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{T})$ – множество всех четных бесконечно дифференцируемых 2π -периодических функций на $\mathbb{R}$. Множество $\mathcal{E}_+$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством с топологией равномерной сходимости на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными. Поскольку функции из $\mathcal{E}_+$ четные и 2π -периодические, топологию в пространстве $\mathcal{E}_+$ можно задать системой полунорм

$$N_k(f) := \sum_{j=0}^k \sup_{t \in I} |\partial_t^j f(t)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.1)$$

где $f \in \mathcal{E}_+$, ∂_t – оператор дифференцирования по переменной t . Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}_+$ другую систему полунорм

$$\tilde{N}_k(f) := \sum_{j=0}^k \sup_{t \in I} |\mathcal{B}_t^j f(t)|, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор Якоби.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ существуют положительные числа $c_1 = c_1(k)$ и $c_2 = c_2(k)$ такие, что для всех функций $f \in \mathcal{E}_+$ справедливы неравенства*

$$\tilde{N}_k(f) \leq c_1 N_{2k}(f), \quad (2.3)$$

$$N_k(f) \leq c_2 \tilde{N}_k(f). \quad (2.4)$$

Доказательство предложения 2.1 будет приведено позже, после доказательства вспомогательных утверждений. Отметим, что из предложения 2.1 сразу вытекают следующие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Системы полунорм $\{N_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ и $\{\tilde{N}_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задают одинаковую топологию на векторном пространстве $\mathcal{E}_+$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Дифференциальный оператор Якоби $\mathcal{B}$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{E}_+$.*

ЛЕММА 2.1. *Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ существует число $c_3 = c_3(k) > 0$ такое, что для всех $f \in \mathcal{E}_+$ выполняется неравенство*

$$\sup_{t \in I} |\partial_t^k (\mathcal{B}f)(t)| \leq c_3 N_{k+2}(f). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\partial_t^k(\mathcal{B}f)(t) = \partial_t^{k+2}f(t) + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\partial_t^k\left(\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)f'(t)\right) - \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\partial_t^k\left(\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)f'(t)\right),$$

можно выписать неравенство

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} |\partial_t^k(\mathcal{B}f)(t)| &\leq \sup_{t \in I} |\partial_t^{k+2}f(t)| \\ &+ \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \sup_{t \in I} \left| \partial_t^k \left(\left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) f'(t) \right) \right| + \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \sup_{t \in I} \left| \partial_t^k \left(\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) f'(t) \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (2.6). Очевидно, что

$$\sup_{t \in I} |\partial_t^{k+2}f(t)| \leq N_{k+2}(f). \quad (2.7)$$

Поскольку $f'(0) = 0$ (функция $f'(t)$ нечетная), то $f'(t)$ можно представить в виде

$$f'(t) = \int_0^t f''(s) ds = t \int_0^1 f''(tu) du.$$

Тогда

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)f'(t) = t \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right) \int_0^1 f''(tu) du. \quad (2.8)$$

Временно обозначим

$$a(t) := \begin{cases} t \operatorname{ctg} \frac{t}{2} & \text{при } t \in (0, \pi], \\ 2 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $a(t) \in C^\infty[0, \pi]$. Пусть

$$A_j = \max_{t \in I} |\partial_t^j a(t)|,$$

из (2.8) вытекает, что

$$\partial_t^k \left(\left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) f'(t) \right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\partial_t^{k-j} a(t)) \left(\int_0^1 f^{(j+2)}(tu) u^j du \right), \quad (2.9)$$

где $\binom{k}{j}$ – биномиальный коэффициент. Очевидно, что

$$\left| \int_0^1 f^{(j+2)}(tu) u^j du \right| \leq \sup_{t \in I} |f^{(j+2)}(t)| \leq N_{k+2}(f).$$

Тогда из (2.9) вытекает

$$\left| \partial_t^k \left(\left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right) f'(t) \right) \right| \leq c_4 N_{k+2}(f), \quad (2.10)$$

где $c_4 = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A_{k-j}$.

Далее, заметим, что функция $f'(t)$ нечетная и 2π -периодическая, поэтому $f'(-\pi) = -f'(\pi)$ и $f'(-\pi) = f'(\pi)$, следовательно, $f'(\pi) = 0$. Функцию $f'(t)$ можно представить в виде

$$f'(t) = - \int_t^\pi f''(s) ds = (\pi - t) \int_0^1 f''(\pi + (t - \pi)u) du. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right) f'(t) = b(t) \int_0^1 f''(\pi + (t - \pi)u) du, \quad (2.12)$$

где

$$b(t) := \begin{cases} (\pi - t) \operatorname{tg} \frac{t}{2} & \text{при } t \in [0, \pi), \\ 2 & \text{при } t = \pi. \end{cases}$$

Очевидно, что $b(t) \in C^\infty[0, \pi]$.

Используя равенство (2.12) и рассуждая аналогично доказательству неравенства (2.10), получим

$$\left| \partial_t^k \left(\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) f'(t) \right) \right| \leq c_5 N_{k+2}(f), \quad (2.13)$$

где $c_5 = c_5(k)$ – некоторая постоянная.

Окончательно, из (2.6), (2.7), (2.10) и (2.13) следует неравенство (2.5). Лемма доказана.

Из леммы 2.1 и определения полунормы N_k вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in \mathcal{E}_+$ справедливо неравенство

$$N_k(\mathcal{B}f) \leq c_6 N_{k+2}(f), \quad (2.14)$$

где $c_6 = c_6(k)$ – некоторая постоянная.

ЛЕММА 2.2. Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ существует число $c_7 = c_7(k) > 0$ такое, что для всех $f \in \mathcal{E}_+$ выполняется неравенство

$$\sup_{t \in I} |\mathcal{B}^k f(t)| \leq c_7 N_{2k}(f). \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие 2.3, получим

$$\sup_{t \in I} |\mathcal{B}^k f(t)| = N_0(\mathcal{B}^k f) \leq c_6(0) N_2(\mathcal{B}^{k-1} f) \leq \dots \leq c_6(0) c_6(2) \dots c_6(k-2) N_{2k}(f),$$

что доказывает неравенство (2.15), где $c_7 = \prod_{j=0}^{k-1} c_6(2j)$.

ЛЕММА 2.3. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует число $c_8 = c_8(k) > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\sup_{t \in I} |\partial_t^k f(t)| \leq c_8 N_{k-1}(\mathcal{B}f), \quad f \in \mathcal{E}_+. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\sup_{t \in I} |\partial_t^k f(t)| \leq \sup_{t \in [0, \pi/2]} |\partial_t^k f(t)| + \sup_{t \in [\pi/2, \pi]} |\partial_t^k f(t)|. \quad (2.17)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое из правой части формулы (2.17).

Поскольку $f'(0) = 0$, то $f'(t)$ можно представить в виде

$$f'(t) = \frac{1}{\rho(t)} \int_0^t (\mathcal{B}f)(s) \rho(s) ds = \int_0^1 \frac{t \rho(tu)}{\rho(t)} (\mathcal{B}f)(tu) du, \quad (2.18)$$

где функция $\rho(t)$ определена формулой (1.3). Временно обозначим

$$a(t, u) := \begin{cases} t \frac{\rho(tu)}{\rho(t)} & \text{при } t \in (-\pi, \pi), \quad t \neq 0, \\ 0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Пусть

$$\sigma(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

$$r_{\alpha, \beta}(t, u) := \left(\frac{\sigma(tu/2)}{\sigma(t/2)} \right)^{2\alpha+1} \left(\frac{\cos(tu/2)}{\cos(t/2)} \right)^{2\beta+1}. \quad (2.19)$$

Поскольку $\sigma(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, то $r_{\alpha, \beta}(t, u) \in C^\infty((-\pi, \pi) \times [0, 1])$.

Функцию $a(t, u)$ можно представить в виде

$$a(t, u) = tu^{2\alpha+1} r_{\alpha, \beta}(t, u), \quad (2.20)$$

откуда вытекает, что функция $a(t, u)$ определена на прямоугольнике $(-\pi, \pi) \times [0, 1]$ и бесконечно дифференцируема по переменной t , а для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $\partial_t^k a(t, u)$ непрерывна на прямоугольнике $(-\pi, \pi) \times [0, 1]$.

Для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$\bar{A}_j := \max\{|\partial_t^j a(t, u)| : (t, u) \in [0, \pi/2] \times [0, 1]\}.$$

Из (2.18) вытекает, что

$$f'(t) = \int_0^1 a(t, u) (\mathcal{B}f)(tu) du,$$

откуда имеем

$$\partial_t^k f(t) = \partial_t^{k-1}(f'(t)) = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\partial_t^{k-j-1} a(t, u)) (\mathcal{B}f)^{(j)}(tu) u^j \right) du, \quad (2.21)$$

а из (2.21) следует, что

$$\sup_{t \in [0, \pi/2]} |\partial_t^k f(t)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \bar{A}_{k-j-1} \sup_{t \in [0, \pi/2]} |\partial_t^j (\mathcal{B}f)(t)| \leq c_9 N_{k-1}(\mathcal{B}f), \quad (2.22)$$

где $c_9 = c_9(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \bar{A}_{k-j-1}$.

Для оценки второго слагаемого из правой части формулы (2.17) воспользуемся тем, что $f'(\pi) = 0$, поэтому

$$f'(t) = - \int_t^\pi \frac{\rho(s)}{\rho(t)} (\mathcal{B}f)(s) ds = (t - \pi) \int_0^1 \frac{\rho(\pi + (t - \pi)u)}{\rho(t)} (\mathcal{B}f)(\pi + (t - \pi)u) du. \quad (2.23)$$

Временно обозначим

$$b(t, u) := \begin{cases} (t - \pi) \frac{\rho(\pi + (t - \pi)u)}{\rho(t)} & \text{при } t \in (0, 2\pi), \quad t \neq \pi, \\ 0 & \text{при } t = \pi. \end{cases}$$

Функцию $b(t, u)$ можно представить в виде

$$b(t, u) = (t - \pi) u^{2\beta+1} r_{\beta, \alpha}(\pi - t, u), \quad (2.24)$$

где $r_{\beta, \alpha}(t, u)$ — функция (2.19), в которой переставлены параметры α и β . Из (2.24) легко видеть, что функция $b(t, u)$ определена на прямоугольнике $(0, 2\pi) \times [0, 1]$, бесконечно дифференцируема по переменной t и для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $\partial_t^k b(t, u)$ непрерывна на прямоугольнике $(0, 2\pi) \times [0, 1]$.

Из (2.23) вытекает, что

$$f'(t) = \int_0^1 b(t, u) (\mathcal{B}f)(\pi + (t - \pi)u) du. \quad (2.25)$$

Используя равенство (2.25) и рассуждая аналогично доказательству неравенства (2.22), получим

$$\sup_{t \in [\pi/2, \pi]} |\partial_t^k f(t)| \leq c_{10} N_{k-1}(\mathcal{B}f), \quad (2.26)$$

где $c_{10} = c_{10}(k)$ — некоторая постоянная.

Из (2.17), (2.22) и (2.26) вытекает неравенство (2.16). Лемма доказана.

Из леммы 2.3 и определения полунормы N_k получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует число $c_{11} = c_{11}(k) > 0$ такое, что

$$N_k(f) \leq c_{11} (N_{k-1}(\mathcal{B}f) + N_{k-1}(f)), \quad f \in \mathcal{E}_+. \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.1. 1) Используя лемму 2.2, получим

$$\tilde{N}_k(f) = \sum_{j=0}^k \sup_{t \in I} |\mathcal{B}^j f(t)| \leq \sum_{j=0}^k c_7(j) N_{2j}(f) \leq \left(\sum_{j=0}^k c_7(j) \right) N_{2k}(f),$$

что доказывает неравенство (2.3) для $c_1 = \sum_{j=0}^k c_7(j)$.

2) Неравенство (2.4) докажем индукцией по k . При $k = 0$ это неравенство выполняется для $c_2(0) = 1$. Если неравенство справедливо для $k - 1$, то, используя (2.27), получим

$$\begin{aligned} N_k(f) &\leq c_{11}(k) (N_{k-1}(\mathcal{B}f) + N_{k-1}(f)) \\ &\leq c_{11}(k) c_2(k-1) (\tilde{N}_{k-1}(\mathcal{B}f) + \tilde{N}_{k-1}(f)) \leq 2c_{11}(k) c_2(k-1) \tilde{N}_k(k), \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (2.4) для $c_2(k) = 2c_{11}(k)c_2(k-1)$. Предложение доказано.

Обозначим через $C(I^2)$ множество всех функций $u(t, s)$, определенных и непрерывных на квадрате $I^2 = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Через $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ обозначим множество всех функций $u(t, s) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, которые по каждой из переменных t и s четные и 2π -периодические. Если функция $u(t, s)$ определена на открытом квадрате $I_0^2 = (0, \pi) \times (0, \pi)$, то будем записывать $u \in C(I^2)$ (или $u \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$) при условии, что функция может быть продолжена до функции из $C(I^2)$ (соответственно, из $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$). Очевидно, что такое продолжение единственное.

Множество $C(I^2)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_{C(I^2)} := \sup_{0 < t, s < \pi} |u(t, s)|, \quad u \in C(I^2). \quad (2.28)$$

Множество $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ является полным локально выпуклым топологическим векторным пространством. Топология в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ задается системой полунорм

$$N_{k,m}(u) := \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} \sup_{0 < t, s < \pi} |\partial_t^i \partial_s^j u(t, s)|, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.29)$$

Пользуясь неравенствами (2.3) и (2.4), получаем, что топологию в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ можно также задать другой системой полунорм:

$$\tilde{N}_{k,m}(u) := \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} \sup_{0 < t, s < \pi} |\mathcal{B}_t^i \mathcal{B}_s^j u(t, s)|, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.30)$$

где $\mathcal{B}_t$ и $\mathcal{B}_s$ – дифференциальные операторы Якоби, примененные по переменным t и s соответственно.

Для любой функции $f(t) \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$, обобщенный сдвиг Якоби $T^s f(t)$, $t, s \in (0, \pi)$, определяется формулой (1.14). Напомним, что $\varphi_n(t) = \varphi_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ – четный тригонометрический полином степени n , определенный формулой (1.4). Из формулы (1.10) следует, что

$$T^s \varphi_n(t) = \varphi_n(t) \varphi_n(s). \quad (2.31)$$

Функция $\varphi_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{B} \varphi_n = -\lambda_n \varphi_n, \quad \lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1), \quad (2.32)$$

где $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор Якоби. Отметим также, что

$$\varphi_n(0) = 1, \quad \varphi_n'(0) = 0. \quad (2.33)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть функция $g(t)$ является четным тригонометрическим полиномом и $v(t, s) := T^s g(t)$. Тогда:

1) функция $v(t, s)$ принадлежит пространству $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ (тем более, пространству $C(\mathbb{T}^2)$);

2) справедливо равенство

$$\mathcal{B}_s v(t, s) = \mathcal{B}_t v(t, s) = T^s((\mathcal{B}g)(t)). \quad (2.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $g(t)$ является линейной комбинацией функций $\varphi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, достаточно доказать лемму для случая $g(t) = \varphi_n(t)$. Если $g(t) = \varphi_n(t)$, то из равенства (2.31) вытекает, что $v(t, s) = T^s \varphi_n(t) = \varphi_n(t) \varphi_n(s) \in \mathcal{E}_+(I^2)$. Равенство (2.34) выполняется, так как $\mathcal{B} \varphi_n(t) = -\lambda_n \varphi_n(t)$ (см. (2.32)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. (i) Если $f(t) \in C(I)$, то $u(t, s) := T^s f(t) \in C(I^2)$. Отображение $f(t) \mapsto T^s f(t)$ является непрерывным отображением из банахова пространства $C(I)$ в банахово пространство $C(I^2)$.

(ii) Если $f(t) \in \mathcal{E}_+$, то $u(t, s) = T^s f(t) \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$. Отображение $f(t) \mapsto T^s f(t)$ является непрерывным отображением из пространства $\mathcal{E}_+$ в пространство $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f(t) \in C(I)$. Из определения обобщенного сдвига $T^s f(t)$ (см. (1.14)) и свойств (1.11), (1.12) функции $K(t, s, \theta)$ вытекает неравенство

$$|T^s f(t)| \leq \|f\|_\infty \quad \forall t, s \in (0, \pi). \quad (2.35)$$

Согласно теореме Вейерштрасса можно построить последовательность функций $g_n(t) \in \mathcal{T}_+$ (где $\mathcal{T}_+$ – множество всех четных тригонометрических полиномов) такую, что $g_n \rightarrow f$ в пространстве $C(I)$, т. е. $\|f - g_n\|_\infty \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $u(t, s) = T^s f(t)$, $u_n(t, s) = T^s g_n(t)$. По лемме 2.4 функции $u_n(t, s)$ принадлежат пространству $C(I^2)$. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ из (2.35) вытекает, что

$$\|u_n - u_m\|_{C(I^2)} \leq \|g_n - g_m\|_\infty,$$

поэтому последовательность u_n , $n \in \mathbb{N}$, является фундаментальной последовательностью в банаховом пространстве $C(I^2)$. Из полноты пространства $C(I^2)$ следует, что последовательность $u_n(t, s)$ сходится в пространстве $C(I^2)$ к некоторой функции $\tilde{u}(t, s) \in C(I^2)$. С другой стороны, из неравенства (2.35) вытекает, что

$$|u(t, s) - u_n(t, s)| \leq \|f - g_n\|_\infty \quad \forall t, s \in (0, \pi), \quad (2.36)$$

поэтому $\tilde{u}(t, s) = u(t, s)$ на открытом квадрате I_0^2 . Следовательно, функция $u(t, s)$ принадлежит пространству $C(I^2)$.

Если $f_1, f_2 \in C(I)$, то из неравенства (2.35) следует, что

$$\|T^s f_1(t) - T^s f_2(t)\|_{C(I^2)} \leq \|f_1 - f_2\|_\infty,$$

откуда вытекает, что отображение $f(t) \mapsto T^s f(t)$ является непрерывным отображением из банахова пространства $C(I)$ в банахово пространство $C(I^2)$.

2) Пусть $f(t) \in \mathcal{E}_+$. Возьмем любую последовательность функций $g_n(t) \in \mathcal{T}^+$ такую, что $g_n(t) \rightarrow f(t)$ в топологическом векторном пространстве $\mathcal{E}_+$. В качестве такой последовательности можно взять, например, последовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f(t)$. Пусть $u(t, s) = T^s f(t)$, $u_n(t, s) = T^s g_n(t)$. По лемме 2.4 функции $u_n(t, s)$ принадлежат пространству $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$. Проверим, что последовательность $u_n(t, s)$ является фундаментальной последовательностью в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$. Поскольку топология в пространстве

$\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ задается системой полунорм $\tilde{N}_{k,l}(\cdot)$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$ (см. (2.30)), для этого достаточно показать, что при любых $k, l \in \mathbb{Z}_+$

$$\tilde{N}_{k,l}(u_n(t, s) - u_m(t, s)) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (2.37)$$

Пусть $g(t)$ – произвольный четный тригонометрический полином, $v(t, s) := T^s g(t)$. Из леммы 2.4 и неравенства (2.35) следует, что

$$|\mathcal{B}_t^k \mathcal{B}_s^l v(t, s)| = |T^s(\mathcal{B}^{k+l} g)(t)| \leq \|\mathcal{B}^{k+l} g\|_\infty,$$

откуда вытекает неравенство

$$\tilde{N}_{k,l}(v(t, s)) \leq c \tilde{N}_{k+l}(g), \quad k, l \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.38)$$

где $\tilde{N}_k(\cdot)$ – полунорма на пространстве $\mathcal{E}_+$ (см. (2.2)), $c = c(k, l)$ – некоторая положительная постоянная (пусть $c = kl$).

Из (2.38) вытекает, что

$$\tilde{N}_{k,l}(u_n(t, s) - u_m(t, s)) \leq c \tilde{N}_{k+l}(g_n - g_m),$$

откуда следует (2.37), т.е. последовательность $u_n(t, s)$ является фундаментальной последовательностью в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$. Поскольку пространство $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ полное, последовательность $u_n(t, s)$ сходится в этом пространстве к некоторой функции $\tilde{u}(t, s) \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$, а из неравенства (2.36) следует, что на открытом квадрате I_0^2 эта функция совпадает с функцией $u(t, s)$. Следовательно, $u(t, s) \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$.

Пусть $f(t) \in \mathcal{E}_+$, функции $g_n(t) \in \mathcal{T}^+$ определены так же, как и выше, $u(t, s) = T^s f(t)$, $u_n(t, s) = T^s g_n(t)$. Из (2.38) следует, что

$$\tilde{N}_{k,l}(u_n) \leq c \tilde{N}_{k+l}(g_n). \quad (2.39)$$

Поскольку $g_n \rightarrow f$ в пространстве $\mathcal{E}_+$, а $\tilde{N}_{k+l}(\cdot)$ – полунорма на пространстве $\mathcal{E}_+$, то $\tilde{N}_{k+l}(g_n) \rightarrow \tilde{N}_{k+l}(f)$ при $n \rightarrow \infty$. По доказанному выше $u_m \rightarrow u$ в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$, а так как $\tilde{N}_{k,l}(\cdot)$ – полунорма на этом пространстве, то $\tilde{N}_{k,l}(u_n) \rightarrow \tilde{N}_{k,l}(u)$ при $n \rightarrow \infty$. Переходя в (2.39) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что справедливо неравенство

$$\tilde{N}_{k,l}(T^s f(t)) \leq c \tilde{N}_{k+l}(f), \quad f \in \mathcal{E}_+, \quad (2.40)$$

где $c = c(k, l)$ – некоторое положительное число, не зависящее от f .

Если $f_1, f_2 \in \mathcal{E}_+$, то из (2.40) следует, что

$$\tilde{N}_{k,l}(T^s f_1(t) - T^s f_2(t)) \leq c \tilde{N}_{k+l}(f_1 - f_2),$$

откуда легко получить, что отображение $f(t) \mapsto T^s f(t)$ из пространства $\mathcal{E}_+$ в пространство $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ непрерывно. Предложение доказано.

Если $f(t) \in C(I)$, то по предложению 2.2 функция $u(t, s) := T^s f(t)$, определенная на открытом квадрате $I_0^2 = (0, \pi) \times (0, \pi)$, единственным образом продолжается до непрерывной функции $\tilde{u}(t, s)$ на замкнутом квадрате I^2 и даже

на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, если считать, что функция $\tilde{u}(t, s)$ четная и 2π -периодическая по каждой из переменных t и s . С помощью продолженной функции мы расширим обобщенный сдвиг Якоби $T^s f(t)$ на произвольные действительные значения параметров t и s , полагая по определению

$$T^s f(t) := \tilde{u}(t, s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Если не возникает двусмысленности, то продолженную функцию $\tilde{u}(t, s)$ будем обозначать просто $u(t, s)$. Из предложения 2.2, в частности, вытекает, что для любого $s \in \mathbb{R}$ оператор T^s является линейным непрерывным оператором в банаховом пространстве $C(I)$, а также линейным непрерывным оператором в топологическом векторном пространстве $\mathcal{E}_+$.

Проверим, что для любой функции $f \in C(I)$ справедливо равенство

$$T^0 f(t) = f(t). \quad (2.41)$$

Действительно, равенство (2.41) справедливо для случая, когда $f(t) = \varphi_n(t)$, так как $\varphi_n(0) = 1$ и $T^0 \varphi_n(t) = \varphi_n(0)\varphi_n(t) = \varphi_n(t)$. Далее, так как любой четный тригонометрический полином является линейной комбинацией функций $\varphi_n(t)$, то равенство (2.41) справедливо для случая, когда $f \in \mathcal{T}^+$. Наконец, так как $\mathcal{T}^+$ является всюду плотным подмножеством в банаховом пространстве $C(I)$ и оператор T^0 непрерывен в этом пространстве, то равенство (2.41) справедливо и для любой функции из $C(I)$.

Пусть $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p < \infty$. В этом случае оператор обобщенного сдвига Якоби $T^s f$ определяется при $s \in (0, \pi)$ формулой (1.14). Используя свойства (1.11), (1.12) функции $K(t, s, \theta)$, а также неравенство Гёльдера, получим, что при любом $1 < p < \infty$

$$|T^s f(t)| = \left| \int_0^\pi f(\theta) K(t, s, \theta) \rho(\theta) d\theta \right| \leq \left(\int_0^\pi |f(\theta)|^p K(t, s, \theta) \rho(\theta) d\theta \right)^{1/p},$$

откуда вытекает неравенство

$$|T^s f(t)|^p \leq T^s(|f(t)|^p), \quad 0 < t, s < \pi. \quad (2.42)$$

Очевидно, что равенство (2.42) справедливо и при $p = 1$.

ЛЕММА 2.5. Для любых функций $f \in L_1^{(\alpha, \beta)}$ и $\varphi \in C(I)$ справедлива формула

$$\langle T^s f, \varphi \rangle = \langle f, T^s \varphi \rangle, \quad s \in (0, \pi), \quad (2.43)$$

где билинейная форма $\langle f, \varphi \rangle$ определена формулой (1.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2.43) проверяется прямым вычислением при использовании свойства (1.13) функции $K(t, s, \theta)$.

Отметим, что все пространства $L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$, содержатся в пространстве $L_1^{(\alpha, \beta)}$, поэтому формула (2.43) справедлива для любой функции $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$.

ЛЕММА 2.6. Если $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$, то для любого $s \in (0, \pi)$ справедливо неравенство

$$\|T^s f\|_p \leq \|f\|_p. \quad (2.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ неравенство (2.44) следует из неравенства (2.35). Пусть $1 \leq p < \infty$. Используя неравенство (2.42), свойство (2.43) и очевидное свойство $T^s 1 = 1$, получим

$$\begin{aligned} \|T^s f\|_p^p &= \int_0^\pi |T^s f(t)|^p \rho(t) dt \leq \int_0^\pi T^s(|f(t)|^p) \rho(t) dt \\ &= \langle T^s(|f|^p), 1 \rangle = \langle |f|^p, T^s 1 \rangle = \langle |f|^p, 1 \rangle = \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (2.44). Лемма доказана.

На пространстве $C(I)$ оператор T^s определен не только при $s \in (0, \pi)$, но и для граничных значений $s = 0$ и $s = \pi$. Легко видеть, что операторы T^0 и T^π можно единственным образом продолжить с всюду плотного в $L_p^{(\alpha, \beta)}$ подмножества $C(I)$ до непрерывных операторов на банаховом пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$ (продолженные операторы будем также обозначать T^0 и T^π). При этом T^0 является тождественным оператором в $L_p^{(\alpha, \beta)}$, а для оператора T^π выполняется неравенство

$$\|T^\pi f\|_p \leq \|f\|_p, \quad f \in L_p^{(\alpha, \beta)}. \quad (2.45)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Можно считать, что оператор обобщенного сдвига Якоби T^s в банаховом пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$ определен при $s \in [0, \pi]$ и является непрерывным оператором в этом пространстве. Кроме того, для любой функции $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и для любого $s \in [0, \pi]$ справедливы равенства (2.41), (2.43) и неравенство (2.44).

ЛЕММА 2.7. Для любой функции $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$, отображение $s \mapsto T^s f$ является непрерывным отображением из отрезка $[0, \pi]$ в банахово пространство $L_p^{(\alpha, \beta)}$, т. е.

$$\|T^{s+\delta} f - T^s f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in C(I)$; тогда согласно предложению 2.2 имеем $T^s f(t) \in C(I^2)$, откуда следует свойство (2.46). В общем случае, для $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, соотношение (2.46) легко получить, приближая f по норме $\|\cdot\|_p$ функциями из $C(I)$ и используя неравенство (2.44). Лемма доказана.

На обобщенные функции действие операторов T^s , $s \in [0, \pi]$, распространяется по формуле

$$\langle T^s f, \varphi \rangle := \langle f, T^s \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{E}'_+, \quad \varphi \in \mathcal{E}_+. \quad (2.47)$$

При этом использовано, что если $\varphi \in \mathcal{E}_+$, то $T^s \varphi \in \mathcal{E}_+$ (вытекает из п. (ii) предложения 2.2).

Из леммы 2.4 и замечания 2.1 следует, что для функций из $L_1^{(\alpha, \beta)} \subset \mathcal{E}'_+$ приведенное определение оператора T^s совпадает с введенным ранее определением.

Некоторые свойства обобщенных сдвигов Якоби собраны в следующем предложении. Всюду в нем t и s – произвольные числа из отрезка $[0, \pi]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. (i) При $f \in C(I)$ справедливо равенство

$$T^s f(t) = T^t f(s). \quad (2.48)$$

(ii) Для любой функции $f \in \mathcal{E}_+$ справедливо равенство

$$\mathcal{B}_s(T^s f(t)) = \mathcal{B}_t(T^s f(t)) = T^s((\mathcal{B}f)(t)). \quad (2.49)$$

(iii) Для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'_+$ справедливо равенство

$$\mathcal{B}(T^s f) = T^s(\mathcal{B}f). \quad (2.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку левая и правая части равенства (2.48) непрерывны на замкнутом квадрате $(t, s) \in I^2 = [0, \pi] \times [0, \pi]$, достаточно доказать равенство (2.48) при $(t, s) \in I_0^2 = (0, \pi) \times (0, \pi)$. При этих значениях (t, s) равенство (2.48) вытекает из определения обобщенного сдвига T^s (см. (1.14)) и свойства (1.13) функции $K(t, s, \theta)$.

2) Для случая, когда f – четный тригонометрический полином (т.е. $f \in \mathcal{T}^+$), равенство (2.49) справедливо по лемме 2.4. Пусть $f \in \mathcal{E}_+$. Существует последовательность функций $g_j \in \mathcal{T}^+$ такая, что $g_j \rightarrow f$ в пространстве $\mathcal{E}_+$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда из п. (ii) предложения 2.2 вытекает, что $T^s g_j(t) \rightarrow T^s f(t)$ в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$.

Поскольку справедливо равенство

$$\mathcal{B}_s(T^s g_j(t)) = \mathcal{B}_t(T^s g_j(t)) = T^s(\mathcal{B}g_j(t)), \quad (2.51)$$

а операторы T^s и $\mathcal{B}$ являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{E}_+$ и операторы $\mathcal{B}_s$ и $\mathcal{B}_t$ являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$, то, переходя к пределу в (2.51) при $j \rightarrow \infty$, получим равенство (2.49).

3) Пусть $f \in \mathcal{E}'_+$, $\varphi \in \mathcal{E}_+$. Из определения действия операторов $\mathcal{B}$ и T^s на обобщенные функции и из (2.49) вытекает, что

$$\langle \mathcal{B}(T^s f), \varphi \rangle = \langle f, T^s(\mathcal{B}\varphi) \rangle = \langle f, \mathcal{B}_t(T^s \varphi) \rangle = \langle \mathcal{B}f, T^s \varphi \rangle = \langle T^s(\mathcal{B}f), \varphi \rangle,$$

откуда следует равенство (2.50). Предложение доказано.

Для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'_+$ пусть $\widehat{f}(n) := \langle f, \varphi_n \rangle$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Последовательность комплексных чисел $\{\widehat{f}(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется *дискретным преобразованием Фурье–Якоби* обобщенной функции f . Будем использовать обозначение $\mathcal{F}(f) := \{\widehat{f}(n)\}$ (иногда будем записывать $\mathcal{F}(f)(n)$ вместо $\widehat{f}(n)$). В частности, если $f \in L_1^{(\alpha, \beta)}$, то

$$\widehat{f}(n) = \int_0^\pi f(t) \varphi_n(t) \rho(t) dt. \quad (2.52)$$

Приведем некоторые свойства дискретного преобразования Фурье–Якоби.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. 1) Если $f \in L_1^{(\alpha, \beta)}$, то

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.53)$$

2) При $f \in \mathcal{E}'_+$ справедливы равенства

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}f)(n) = -\lambda_n \widehat{f}(n), \quad \lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1), \quad (2.54)$$

$$\mathcal{F}(T^s f)(n) = \varphi_n(s) \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (2.53) вытекает из (2.52) и того, что $|\varphi_n(t)| \leq 1$. Свойство (2.54) следует из (1.9) и (2.32). Свойство (2.55) следует из соотношений (2.47) и (2.31). Предложение доказано.

Введем обозначение

$$\theta_n := \frac{1}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \left(\int_0^\pi (\varphi_n(t))^2 \rho(t) dt \right)^{-1}. \quad (2.56)$$

Используя известные формулы для интегралов от многочленов Якоби (см., например, [35, п. 7.39]), легко получить, что

$$\theta_n = \frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta+1}(\Gamma(\alpha + 1))^2 n! \Gamma(\beta + n + 1)}.$$

При $n \rightarrow \infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$\theta_n \asymp n^{2\alpha+1}, \quad (2.57)$$

где, как обычно, $A_n \asymp B_n$, если $A_n, B_n > 0$, и $c_1 B_n \leq A_n \leq c_2 B_n$ для некоторых положительных постоянных c_1 и c_2 .

Для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \widehat{f}(n) \varphi_n(t)$$

называется *рядом Фурье–Якоби обобщенной функции f* .

Пусть $z = \{z(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел. Последовательность z называется *быстро убывающей*, если $|z(n)|n^k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $k > 0$. Последовательность z называется *медленно растущей*, если для некоторых положительных чисел k и c справедливо неравенство

$$|z(n)| \leq cn^k \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. 1) Дискретное преобразование Фурье–Якоби $\mathcal{F}: f \mapsto \{\widehat{f}(n)\}$ взаимно однозначно отображает пространство $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$ на множество всех быстро убывающих последовательностей.

2) Любая обобщенная функция $f \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$ есть сумма своего ряда Фурье–Якоби:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \widehat{f}(n) \varphi_n, \quad (2.58)$$

где ряд в правой части сходится в пространстве $\mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$.

3) Дискретное преобразование Фурье–Якоби $\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает пространство $\mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$ на множество всех медленно растущих последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С использованием свойств (2.53) и (2.54) доказательства пунктов 1)–3) проводятся так же, как доказательства соответствующих утверждений для классических рядов Фурье функций из пространств $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$ (см., например, [36, гл. 1]).

Для определения свертки Якоби обобщенных функций понадобится следующая

ЛЕММА 2.8. Пусть $f \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$, $\Psi(t, s) \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$, $\psi(s) := \langle f_t, \Psi(t, s) \rangle$, где через f_t обозначено, что функционал f применяется к функции $\Psi(t, s)$ по переменной t . Тогда:

- 1) $\psi(s) \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T})$;
- 2) $\partial_s^k \psi(s) = \langle f_t, \partial_s^k \Psi(t, s) \rangle$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$;
- 3) отображение $\Psi(t, s) \mapsto \psi(s)$ является непрерывным отображением из пространства $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ в пространство $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$;
- 4) имеет место равенство

$$\int_0^\pi \psi(s) \rho(s) ds = \left\langle f_t, \int_0^\pi \Psi(t, s) \rho(s) ds \right\rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом s функция $\Psi(t, s)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$ как функция от переменной t . Легко видеть, что

$$\frac{1}{u}(\Psi(t, s+u) - \Psi(t, s)) \rightarrow \partial_s \Psi(t, s)$$

при $u \rightarrow 0$ в пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$. Из непрерывности функционала $f \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$ следует, что

$$\frac{1}{u}(\psi(s+u) - \psi(s)) = \left\langle f_t, \frac{1}{u}(\Psi(t, s+u) - \Psi(t, s)) \right\rangle \rightarrow \langle f_t, \partial_s \Psi(t, s) \rangle,$$

откуда легко выводится справедливость утверждений из пп. 1)–3) леммы; п. 4) получается предельным переходом, если рассматривать $\int_0^\pi \Psi(t, s) \rho(s) ds$ как предел интегральных сумм. Лемма доказана.

Для любых $f, g \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$ определим линейный функционал $f * g$ на пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$ формулой

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle f_s, \langle g_t, T^s \varphi(t) \rangle \rangle, \quad \varphi(t) \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T}). \quad (2.59)$$

Поскольку $u(t, s) = T^s \varphi(t) \in \mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ и отображение $\varphi(t) \mapsto T^s \varphi(t)$ является линейным непрерывным отображением из $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$ в $\mathcal{E}_+(\mathbb{T}^2)$ (см. предложение 2.2, (ii)), из леммы 2.8 следует, что $f * g$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$, т. е. $f * g \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$. Обобщенная функция $f * g$ называется *сверткой Якоби* обобщенных функций f и g .

Основные свойства свертки Якоби собраны в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. 1) Справедлива следующая формула для преобразования Фурье–Якоби свертки: если $f, g \in \mathcal{E}'_+$, то

$$\mathcal{F}(f * g)(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.60)$$

2) Если $f, g, h \in \mathcal{E}'_+$, то

$$f * g = g * f, \quad (2.61)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h). \quad (2.62)$$

3) Если $f \in \mathcal{E}'_+$, $g \in \mathcal{E}_+$, то $f * g \in \mathcal{E}_+$ и

$$(f * g)(t) = \langle f_s, T^s g(t) \rangle. \quad (2.63)$$

4) Если $f \in L_1^{(\alpha, \beta)}$, $g \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$, то $f * g \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и справедливо неравенство

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \quad (2.64)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из определений преобразования Фурье–Якоби и свертки Якоби следует

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(n) &= \langle f * g, \varphi_n \rangle = \langle f_s, \langle g_t, T^s \varphi_n(t) \rangle \rangle \\ &= \langle f_s, \langle g_t, \varphi_n(s) \varphi_n(t) \rangle \rangle = \langle f_s, \varphi_n(s) \rangle \langle g_t, \varphi_n(t) \rangle = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n), \end{aligned}$$

что доказывает (2.60). При этом использовано равенство (2.31).

2) Свойства (2.61) и (2.62) сразу вытекают из (2.60).

3) Из п. 1) леммы 2.8 следует, что $\psi(t) := \langle f_s, T^s g(t) \rangle \in \mathcal{E}_+$. Пусть $\varphi \in \mathcal{E}_+$. Поскольку $g \in \mathcal{E}_+$, то

$$\langle g_t, T^s \varphi(t) \rangle = \langle T^s g(t), \varphi(t) \rangle = \int_0^\pi T^s g(t) \varphi(t) \rho(t) dt.$$

Из определения свертки, используя п. 4) леммы 2.8, получим

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \langle f_s, \langle g_t, T^s \varphi(t) \rangle \rangle = \left\langle f_s, \int_0^\pi T^s g(t) \varphi(t) \rho(t) dt \right\rangle \\ &= \int_0^\pi \langle f_s, T^s g(t) \rangle \varphi(t) \rho(t) dt = \langle \psi, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

откуда вытекает $f * g = \psi$.

4) Пусть $f \in L_1^{(\alpha, \beta)}$, $g \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$. Определим функцию

$$\eta(t) := \int_0^\pi f(s) (T^s g(t)) \rho(s) ds.$$

При использовании интегрального неравенства Минковского и неравенства (2.44) легко получить, что $\eta \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и справедливо неравенство

$$\|\eta\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p. \quad (2.65)$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{E}_+$. Используя лемму 2.5, получим $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle$, следовательно, $\eta = f * g$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из приведенного доказательства п. 4) предложения 2.6 вытекает, что при $f, g \in L_1^{(\alpha, \beta)}$ свертку Якоби можно задать формулой

$$f * g(t) = \int_0^\pi f(s) (T^s g(t)) \rho(s) ds. \quad (2.66)$$

Отметим, что различные варианты построения гармонического анализа Фурье-Якоби обобщенных функций (т. е. распространение на обобщенные функции дискретного преобразования Фурье-Якоби, обобщенных сдвигов Якоби и сверток Якоби) рассматривались ранее в работах [37]–[40]. В этих работах разными способами определялись пространства основных и обобщенных функций на отрезке $[-1, 1]$, для которых определяется дискретное преобразование Фурье-Якоби. В настоящей работе используется переход от переменной $x \in [-1, 1]$ к переменной $t \in \mathbb{T}$ ($x = \cos t$), что позволяет отождествить пространства основных и обобщенных функций с классическими пространствами $\mathcal{E}_+(\mathbb{T})$ и $\mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$ и изложить в замкнутой форме все основные элементы гармонического анализа Фурье-Якоби.

§ 3. Доказательства основных теорем

В этом параграфе используются основные обозначения из § 1, 2. В частности: $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор Якоби; T^s – оператор обобщенного сдвига Якоби (если не оговорено противное, то предполагается, что $0 \leq s \leq \pi$); $W_p^{m(\alpha, \beta)}$ – пространство Соболева порядка $m \in \mathbb{N}$, построенное по дифференциальному оператору $\mathcal{B}$ (см. (1.19)); ${}^*\Delta_h f(t) := f(t) - T^h f(t)$ – разность первого порядка с шагом $h > 0$; $\mathcal{F}(f) = \{\hat{f}(n), n \in \mathbb{Z}_+\}$ – дискретное преобразование Фурье-Якоби обычной или обобщенной функции f . Всюду далее $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, которые могут зависеть от α, β, m и некоторых других параметров (обычно эти параметры указываются), вообще говоря, разные в различных местах. Если не оговорено противное, то p – произвольное число из промежутка $[1, +\infty]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любой функции $f \in W_p^{1(\alpha, \beta)}$ и любого $h \in (0, \pi/2)$ выполняется неравенство*

$$\|{}^*\Delta_h f\|_p \leq \frac{1}{2} h^2 \|\mathcal{B}f\|_p. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно докажем справедливость равенства

$${}^*\Delta_h f = -h^2 \int_0^1 \int_0^1 u \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} T^{huv}(\mathcal{B}f) du dv, \quad (3.2)$$

где $\rho(t)$ – функция, определенная формулой (1.3). Интеграл в правой части формулы (3.2) понимается как интеграл Римана от непрерывной вектор-функции со значениями в банаховом пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$ (так как $\mathcal{B}f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, то отображение $s \mapsto T^s(\mathcal{B}f)$ из отрезка $[0, \pi]$ в банахово пространство $L_p^{(\alpha, \beta)}$ непрерывно по лемме 2.7).

Чтобы доказать равенство (3.2), вычислим преобразования Фурье-Якоби левой и правой частей формулы (3.2). Из (2.55) следует, что

$$\mathcal{F}({}^*\Delta_h f)(n) = (1 - \varphi_n(h)) \hat{f}(n). \quad (3.3)$$

Функция $\varphi_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.32) и начальным условиям (2.33). Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$1 - \varphi_n(h) = \lambda_n \int_0^h \frac{1}{\rho(t)} \left(\int_0^t \rho(s) \varphi_n(s) ds \right) dt,$$

откуда, сделав замену $t = hu$ и $s = huv$, получим

$$1 - \varphi_n(h) = \lambda_n h^2 \int_0^1 \int_0^1 u \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} \varphi_n(huv) du dv. \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) вытекает, что

$$\mathcal{F}(*\Delta_h f)(n) = \lambda_n h^2 \left(\int_0^1 \int_0^1 u \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} \varphi_n(huv) du dv \right) \widehat{f}(n). \quad (3.5)$$

Временно обозначим правую часть формулы (3.2) через $g(t)$. Согласно свойствам (2.54) и (2.55) преобразования Фурье–Якоби имеем

$$\mathcal{F}(T^{huv}(\mathcal{B}f))(n) = -\lambda_n \varphi_n(huv) \widehat{f}(n),$$

откуда вытекает, что $\widehat{g}(n)$ совпадает с правой частью формулы (3.5). Следовательно, $\mathcal{F}(*\Delta_h f)(n) = \widehat{g}(n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, откуда вытекает равенство (3.2).

Поскольку функция $\rho(t)$ возрастает на интервале $(0, \pi/2)$ и $u, v \in (0, 1)$, то

$$0 \leq \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} \leq 1.$$

Учитывая эту оценку и свойство (2.44), из (3.2) получаем неравенство

$$\|*\Delta_h f\|_p \leq h^2 \int_0^1 \int_0^1 u \|\mathcal{B}f\|_p du dv = \frac{1}{2} h^2 \|\mathcal{B}f\|_p,$$

что доказывает (3.1). Предложение доказано.

Модуль гладкости k -го порядка $\omega_k(f, \delta)_p$ при $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $\delta \in (0, \pi)$ определен в § 1 (см. (1.15) и (1.16)). Его можно также записать в виде

$$\omega_k(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \|*\Delta_h^k f\|_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \|(I - T^h)^k f\|_p, \quad (3.6)$$

где I – единичный оператор. При $\delta \geq \pi$ будем считать, что по определению

$$\omega_k(f, \delta)_p = \omega_k(f, \pi)_p := \sup_{0 < h < \pi} \|*\Delta_h f\|_p.$$

Основные свойства $\omega_k(f, \delta)_p$ собраны в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для модуля гладкости $\omega_k(f, \delta)_p$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, справедливы следующие свойства:

- 1) по переменной δ функция $\omega_k(f, \delta)_p$ не убывает и $\omega_k(f, \delta)_p = \omega_k(f, \pi)_k$ при $\delta \geq \pi$;
- 2) функция $\omega_k(f, \delta)_p$ непрерывна по δ и $\omega_k(f, \delta)_p \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$;

- 3) $\omega_k(f + g, \delta)_p \leq \omega_k(f, \delta) + \omega_k(g, \delta)_p$, $f, g \in L_p^{(\alpha, \beta)}$;
- 4) $\omega_k(f, \delta)_p \leq 2^k \|f\|_p$;
- 5) если $l \leq k$, то $\omega_k(f, \delta)_p \leq 2^{k-l} \omega_l(f, \delta)_p$;
- 6) если $f \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$, то для любого $k > m$

$$\omega_k(f, \delta)_p \leq c \delta^{2m} \omega_{k-m}(\mathcal{B}^m f, \delta),$$

где c – некоторая постоянная;

- 7) если $f \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$, то

$$\omega_m(f, \delta)_p \leq c_1 \delta^{2m} \|\mathcal{B}^m f\|_p,$$

где c_1 – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 3) следуют из определения модуля гладкости $\omega_k(f, \delta)_p$. Свойство 2) следует из того, что функция $T^h f$ непрерывно зависит от h в пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$ (см. лемму 2.7). Свойства 4) и 5) вытекают из того, что $\|T^h f\|_p \leq \|f\|_p$ при $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ (см. (2.44)).

Если $f \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$, то из неравенства (3.1) и того, что оператор $\mathcal{B}$ перестановочен с оператором $^* \Delta_h$ (следует из (2.50)), получаем

$$\| ^* \Delta_h^k f \|_p \leq \left(\frac{1}{2} \right)^m \| ^* \Delta_h^{k-m} (\mathcal{B}^m f) \|_p. \quad (3.7)$$

Из (3.7) и определения модуля гладкости следует свойство 6). Свойство 7) также вытекает из (3.7). Предложение доказано.

Для оценок функций, представимых в виде рядов из функций $\varphi_n(t) = \varphi_n^{(\alpha, \beta)}(t)$, нам потребуется следующее предложение. Как и ранее, α и β – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ и $\alpha \neq -1/2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $l = [\alpha] + 2$ (где $[\alpha]$ – целая часть числа α), и пусть $\gamma(s, h)$ – комплекснозначная функция, определенная на прямоугольнике $(s, h) \in (0, +\infty) \times (0, h_0) \subset \mathbb{R}^2$, $h_0 > 0$, и удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) по переменной s существуют непрерывные частные производные $\partial_s^k \gamma(s, h) = \frac{\partial^k \gamma}{\partial s^k}(s, h)$ до порядка $l + 1$ включительно;
- 2) для любых чисел $k = 0, 1, \dots, l + 1$ и $r = 0, 1, \dots, l + 2$ существует число $c(k, r) > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$|(hs)^r \partial_s^k \gamma(s, h)| \leq c(k, r) h^k, \quad s \in (0, +\infty), \quad h \in (0, h_0). \quad (3.8)$$

Тогда семейство функций

$$\Phi_h(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(n, h) \theta_n \varphi_n(t) \quad (3.9)$$

ограничено в пространстве $L_1^{(\alpha, \beta)}$, т. е. найдется положительное число $C = C(\gamma, \alpha, \beta, h_0)$ такое, что при любом $h \in (0, h_0)$

$$\|\Phi_h\|_1 \leq C. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [31, предложение 3.1].

Пусть $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – произвольная четная функция, удовлетворяющая условиям $\eta(x) \geq 0$, $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geq 2$. Далее будем считать, что функция $\eta(x)$ фиксирована и не будем уточнять, что постоянные в оценках могут зависеть от η .

Определим семейство операторов P_ν , $\nu > 0$, по формуле

$$P_\nu(f)(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{\nu}\right) \theta_n \widehat{f}(n) \varphi_n(t), \quad f \in \mathcal{E}'_+. \quad (3.11)$$

Пусть

$$\eta_\nu(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{\nu}\right) \theta_n \varphi_n(t). \quad (3.12)$$

Отметим, что ряды в правых частях формул (3.11) и (3.12) содержат только конечное число ненулевых слагаемых. Из свойства (2.60) следует, что оператор P_ν можно записать в виде свертки

$$P_\nu(f) = f * \eta_\nu. \quad (3.13)$$

Напомним, что при $\nu \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{T}_\nu^+$ обозначается множество всех четных тригонометрических полиномов степени ν . Это определение можно распространить на произвольное действительное число $\nu \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, считая, что $\mathcal{T}_\nu^+$ – множество всех четных тригонометрических полиномов степени $\leq \nu$. Соответственно, на все значения $\nu \in \mathbb{R}_+$ можно распространить определение наилучшего приближения $E_\nu(f)_p$, полагая

$$E_\nu(f)_p := \inf \{ \|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{T}_\nu^+ \}, \quad (3.14)$$

где $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$.

Всюду далее будем считать, что $\nu > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) $P_\nu(f) \in \mathcal{T}_{2\nu}^+$ для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'_+$;
- 2) $P_\nu(\Phi) = \Phi$ для любой функции $\Phi \in \mathcal{T}_\nu^+$;
- 3) если $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, то справедливы неравенства

$$\|P_\nu(f)\|_p \leq c_1 \|f\|_p, \quad (3.15)$$

$$\|f - P_\nu(f)\|_p \leq c_2 E_\nu(f)_p, \quad (3.16)$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\eta(n/\nu) = 0$ при $n \geq 2\nu$, то $P_\nu(f) \in \mathcal{T}_{2\nu}^+$. Если $\Phi \in \mathcal{T}_\nu^+$, то $\widehat{\Phi}(n) = 0$ при $n > \nu$, а так как $\eta(n/\nu) = 1$ при $0 \leq n \leq \nu$, то

$$P_\nu(\Phi) = \sum_{0 \leq n \leq \nu} \widehat{\Phi}(n) \theta_n \varphi_n = \Phi.$$

2) Определим функцию $\gamma(s, h)$ формулой

$$\gamma(s, h) := \eta(hs), \quad s > 0, \quad h \in (0, 2).$$

Очевидно, что функция $\gamma(s, h)$ удовлетворяет всем условиям предложения 3.3 при $h_0 = 2$. Тогда из предложения 3.3 следует, что семейство функций

$$\Phi_h(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(n, h) \theta_n \varphi_n(t)$$

ограничено в пространстве $L_1^{(\alpha, \beta)}$, т.е. существует число $c_3 > 0$ такое, что $\|\Phi_h\|_1 \leq c_3$ при $h \in (0, 2)$.

Из определения функции η_ν (см. (3.12)) следует, что $\eta_\nu(t) = \theta_0 + \Phi_{1/\nu}(t)$, поэтому $\|\eta_\nu\|_1 \leq \theta_0 + c_3$ при $\nu > 1/2$. Заметим также, что $\eta_\nu(t) = \eta(0)\theta_0\varphi_0(t) = \theta_0 \leq \theta_0 + c_3$ при $\nu \leq 1/2$. Следовательно,

$$\|\eta_\nu\|_1 \leq c_1 \quad (3.17)$$

при любом $\nu > 0$, где $c_1 = \theta_0 + c_3$.

Если $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, то $\|f * \eta_\nu\|_p \leq \|f\|_p \|\eta_\nu\|_1$ (см. (2.64)), откуда при использовании (3.13) и (3.17) следует неравенство (3.15).

3) Пусть $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$. Возьмем произвольную функцию $\Phi \in \mathcal{T}_\nu^+$ такую, что $\|f - \Phi\|_p \leq 2E_\nu(f)_p$. Используя равенство $P_\nu(\Phi) = \Phi$ и неравенство (3.15), получим

$$\|f - P_\nu(f)\|_p = \|f - \Phi + P_\nu(\Phi - f)\|_p \leq \|f - \Phi\|_p + c_1 \|f - \Phi\|_p \leq 2(1 + c_1)E_\nu(f)_p,$$

откуда следует неравенство (3.16) при $c_2 = 2(1 + c_1)$. Предложение доказано.

Многочлены Якоби можно выразить через гипергеометрическую функцию по формуле (см. [20, т. II])

$$R_n^{(\alpha, \beta)}(z) = F\left(-n, -n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1 - z}{2}\right), \quad (3.18)$$

где $F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция. Правая часть в (3.18) имеет смысл, если вместо n подставить любое действительное (и даже комплексное) число s . Полученную функцию обозначим $R_s^{(\alpha, \beta)}(z)$. Пусть

$$\varphi_s(t) := R_s^{(\alpha, \beta)}(\cos t) = F\left(-s, s + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \sin^2 \frac{t}{2}\right). \quad (3.19)$$

Всюду при рассмотрении функций $\varphi_s(t)$ будем предполагать, что $s \in [0, +\infty)$, $t \in [0, \pi)$.

Приведем некоторые свойства функций $\varphi_s(t)$, которые потребуются в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *функция $w = \varphi_s(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\mathcal{B}w + \lambda_s w = 0, \quad (3.20)$$

где $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор Якоби, $\lambda_s = s(s + \alpha + \beta + 1)$, и начальным условиям

$$w(0) = 1, \quad \frac{dw}{dt}(0) = 0; \quad (3.21)$$

2) при $s > 0$ и $t \in (0, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$|\varphi_s(t)| < 1; \quad (3.22)$$

3) для любого $\varkappa > 0$ существует число $c_1 = c_1(\varkappa, \alpha, \beta) > 0$ такое, что для всех s и t , удовлетворяющих условию $\varkappa \leq st \leq \frac{\pi s}{2}$, выполняется неравенство

$$|\varphi_s(t)| \leq c_1(st)^{-\alpha-1/2}; \quad (3.23)$$

4) для любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, \pi/2]$ выполняется неравенство

$$|\partial_s^k \varphi_s(t)| \leq c_2 t^k; \quad (3.24)$$

5) справедливы оценки

$$1 - \varphi_s(t) \leq c_3 \lambda_s t^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.25)$$

$$1 - \varphi_s(t) \geq c_4 \lambda_s t^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{s + \alpha + \beta + 1}; \quad (3.26)$$

6) для любого $\varkappa > 0$ существует число $c = c(\varkappa, \alpha, \beta)$ такое, что при $st \geq \varkappa$ справедливо неравенство

$$1 - \varphi_s(t) \geq c. \quad (3.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [31, предложения 3.2, 3.3]. Отметим только одно различие в обозначениях: функции $\varphi_s(t)$ в [31] обозначаются $\varphi_s^*(t)$.

Напомним, что разность ${}^*\Delta_h^m f$, $m \in \mathbb{N}$, определяется формулой

$${}^*\Delta_h^m f := (I - T^h)^m f,$$

где I – тождественный оператор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$. Для любого h , удовлетворяющего условию $0 < 2\nu h < 1$, справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq c_1 h^{-2m} \|{}^*\Delta_h^m f\|_p, \quad (3.28)$$

а если $f \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$, то также справедливо неравенство

$$\|{}^*\Delta_h^m(P_\nu(f))\|_p \leq c_2 h^{2m} \|\mathcal{B}^m f\|_p, \quad (3.29)$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные.

Доказательство предложения 3.6 будет приведено после доказательства некоторых вспомогательных утверждений.

Определим функцию

$$\psi(s, h) := \frac{1 - \varphi_s(h)}{h^2 \lambda_s}, \quad s > 0, \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.30)$$

где $\lambda_s = s(s + \alpha + \beta + 1)$. Поскольку функция $\varphi_s(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.20) и начальным условиям (3.21), то, рассуждая, как при выводе формулы (3.4), получим

$$1 - \varphi_s(h) = \lambda_s h^2 \int_0^1 \int_0^1 u \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} \varphi_s(huv) du dv. \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует, что функцию $\psi(s, h)$ можно записать в виде

$$\psi(s, h) = \int_0^1 \int_0^1 u \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} \varphi_s(huv) du dv. \quad (3.32)$$

Используя (3.32), доопределим функцию $\psi(s, h)$ при $s = 0$ и $h = 0$:

$$\psi(s, 0) := \lim_{h \rightarrow 0} \psi(s, h) = \int_0^1 \int_0^1 uv^{2\alpha+1} du dv = (4\alpha + 4)^{-1}, \quad (3.33)$$

$$\psi(0, h) := \lim_{s \rightarrow 0} \psi(s, h) = \int_0^1 \int_0^1 u \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} du dv. \quad (3.34)$$

Таким образом, можно считать, что функция $\psi(s, h)$ определена и непрерывна на замкнутом множестве

$$\mathcal{D}_1 := \left\{ (s, h) : s \geq 0, 0 \leq h \leq \frac{\pi}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Заметим, что $\psi(s, h) > 0$ для любой точки $(s, h) \in \mathcal{D}_1$. Действительно, при $s > 0$ и $h > 0$ это следует из соотношения (3.30) и из свойства 2) предложения 3.5, а при $s = 0$ или $h = 0$ следует из формул (3.33) и (3.34).

Пусть

$$\mathcal{D}_2 := \{(s, h) : s \geq 0, 0 \leq h \leq 1, hs \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

ЛЕММА 3.1. *Существуют постоянные $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ такие, что для любой точки $(s, h) \in \mathcal{D}_2$ справедливы неравенства*

$$A_1 \leq \psi(s, h) \leq A_2. \quad (3.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство в (3.35) следует из (3.25). Из неравенства (3.26) получим, что на множестве

$$\mathcal{D}_3 := \{(s, h) : s \geq 0, h(s + \alpha + \beta + 1) \leq \pi\}$$

справедливо неравенство

$$\psi(s, h) \geq c_1, \quad (3.36)$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Разность $\mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_3$ содержится в множестве

$$\mathcal{D}_4 := \{(s, h) : 0 \leq h \leq 1, hs \leq 2, h(s + \alpha + \beta + 1) \geq \pi\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}_4$ является компактным подмножеством множества $\mathcal{D}_1$, поэтому

$$\psi(s, h) \geq c_2, \quad (h, s) \in \mathcal{D}_4, \quad (3.37)$$

где $c_2 > 0$ – некоторая постоянная. Из (3.36) и (3.37) следует справедливость левого неравенства в (3.35) для $A_1 = \min\{c_1, c_2\}$. Лемма доказана.

Из формулы (3.32) вытекает, что функция $\psi(s, h)$ бесконечно дифференцируема по s .

ЛЕММА 3.2. *Для любой функции $\Lambda(x) \in C^\infty(0, +\infty)$ и любого $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $\tau(s, h) := \Lambda(\psi(s, h))$ удовлетворяет неравенству*

$$|\partial_s^k \tau(s, h)| \leq c(\Lambda, k) h^k, \quad (s, h) \in \mathcal{D}_2, \quad (3.38)$$

где $c(\Lambda, k) > 0$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем, что существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, \pi/2)$ справедливо неравенство

$$|\partial_s^k \psi(s, h)| \leq c_1 h^k. \quad (3.39)$$

Для этого воспользуемся неравенством (3.24), и пусть c_1 – постоянная из этого неравенства. Тогда

$$\begin{aligned} |\partial_s^k \psi(s, h)| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 u \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} \partial_s^k \varphi_s(huv) du dv \right| \\ &\leq c_1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u (huv)^k du dv \leq c_1 h^k. \end{aligned}$$

При этом мы использовали, что $u, v \in (0, 1)$ и $0 \leq \rho(huv)/\rho(hu) \leq 1$.

2) По лемме 3.1 для всех $(s, h) \in \mathcal{D}_2$ выполняется неравенство (3.35). Пусть

$$\Xi(k) := \max\{|\partial_x^k \Lambda(x)| : x \in [A_1, A_2]\}.$$

Очевидно, что производную $\partial_s^k \tau(s, h)$ можно представить как сумму некоторого числа (зависящего от k) слагаемых вида

$$(\partial_x^{k_0} \Lambda)(\psi(s, h)) \partial_s^{k_1} \psi(s, h) \cdots \partial_s^{k_l} \psi(s, h), \quad (3.40)$$

где $k_0, k_1, \dots, k_l$ – некоторые натуральные числа, $k_0 \leq k$, $k_1 + k_2 + \dots + k_l = k$. Из неравенства (3.39) следует, что каждая функция (3.40) при $(s, h) \in \mathcal{D}_2$ допускает оценку

$$|(\partial_x^{k_0} \Lambda)(\psi(s, h)) \partial_s^{k_1} \psi(s, h) \cdots \partial_s^{k_l} \psi(s, h)| \leq \Xi(k_0) (c_1)^l h^k,$$

откуда вытекает неравенство (3.39). Лемма доказана.

Для любых $m \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 1)$ определим функцию

$$\zeta_h^{(m)}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2m} \lambda_n^m \eta(nh)}{(1 - \varphi_n(h))^m} \theta_n \varphi_n(t). \quad (3.41)$$

ЛЕММА 3.3. *Семейство функций $\zeta_h^{(m)}(t)$, $h \in (0, 1)$, ограничено в пространстве $L_1^{(\alpha, \beta)}$, т. е.*

$$\|\zeta_h^{(m)}\|_1 \leq c, \quad h \in (0, 1), \quad (3.42)$$

для некоторой постоянной $c > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию

$$\gamma(s, h) := \frac{h^{2m} \lambda_s^m}{(1 - \varphi_s(h))^m} \eta(hs), \quad (3.43)$$

где $s > 0$, $h \in (0, 1)$. Проверим, что функция $\gamma(s, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.3, тогда из этого предложения будет следовать, что семейство функций

$$\Phi_h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(n, h) \theta_n \varphi_n(t)$$

ограничено в пространстве $L_1^{(\alpha, \beta)}$, что доказывает (3.42).

Поскольку $\varphi_s(h) < 1$ при $h \in (0, 1)$ (см. (3.22)), то $\gamma(s, h) \in C^\infty((0, +\infty) \times (0, 1))$. Так как $\eta(hs) = 0$ при $hs \geq 2$, для проверки условия (3.8) достаточно доказать, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ существует число $c(k) > 0$ такое, что

$$|\partial_s^k \gamma(s, h)| \leq c(k) h^k, \quad h \in (0, 1), \quad s > 0. \quad (3.44)$$

Если определить функцию

$$r(s, h) := \frac{h^{2m} \lambda_s^m}{(1 - \varphi_s(h))^m}, \quad (3.45)$$

то $\gamma(s, h) = r(s, h) \eta(sh)$. Очевидно, что для доказательства неравенства (3.44) достаточно доказать неравенство

$$|\partial_s^k r(s, h)| \leq c_1(k) h^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.46)$$

при $hs \leq 2$, где $c_1(k) > 0$ – некоторое число.

Заметим, что $r(s, h) = (\psi(s, h))^{-m}$, где $\psi(s, h)$ – функция, определенная в (3.30), (3.33) и (3.34). Применяя лемму 3.2 для случая $\Lambda(x) = x^{-m}$, получим неравенство (3.46), что завершает доказательство леммы.

Определим семейство операторов

$$A_{\nu, h}^{(m)} : L_p^{(\alpha, \beta)} \mapsto L_p^{(\alpha, \beta)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

при $\nu > 1/2$, $0 < 2\nu h < 1$, по формуле

$$A_{\nu, h}^{(m)}(g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2m} \lambda_n^m \eta(n/\nu)}{(1 - \varphi_n(h))^m} \theta_n \widehat{g}(n) \varphi_n(t), \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}. \quad (3.47)$$

Поскольку $\eta(n/\nu) = 0$ при $n \geq 2\nu$, то $A_{\nu, h}^{(m)}(g) \in \mathcal{T}_{2\nu}^+$.

ЛЕММА 3.4. *Справедливо неравенство*

$$\|A_{\nu, h}^{(m)}(g)\|_p \leq c \|g\|_p, \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}, \quad (3.48)$$

где c – некоторая постоянная, не зависящая от ν и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Среди слагаемых в правой части (3.47) ненулевые слагаемые могут быть только при $n < 2\nu$. Поскольку $2\nu h < 1$, при этих значениях n имеем $nh < 2\nu h < 1$, поэтому $\eta(nh) = 1$ и (3.47) можно переписать в виде

$$A_{\nu,h}^{(m)}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta(n/\nu)h^{2m}\lambda_n^m\eta(nh)}{(1-\varphi_n(h))^m} \theta_n \widehat{g}(n) \varphi_n(t). \quad (3.49)$$

Пусть $\eta_\nu(t)$ – функция, определенная в (3.12), а $\zeta_h^{(m)}(t)$ – функция, определенная в (3.41). Из свойства (2.60) преобразования Фурье–Якоби следует, что оператор $A_{\nu,h}^{(m)}$ можно записать в виде свертки:

$$A_{\nu,h}^{(m)}(g) = g * \eta_\nu * \zeta_h^{(m)}. \quad (3.50)$$

Из (3.50), используя свойство (2.64), получим неравенство

$$\|A_{\nu,h}^{(m)}\|_p \leq \|\eta_\nu\|_1 \|\zeta_h^{(m)}\|_1 \|g\|_p. \quad (3.51)$$

Ранее было доказано, что $\|\eta_\nu\|_1 \leq c_1$ и $\|\zeta_h^{(m)}\|_1 \leq c_2$ для некоторых постоянных c_1 и c_2 (см. (3.17) и (3.42)), поэтому из (3.51) следует (3.48). Лемма доказана.

Определим еще одну функцию

$$\mathcal{Z}_h^{(m)}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\varphi_n(h)}{h^2\lambda_n} \right)^m \eta(hn) \theta_n \varphi_n(t), \quad (3.52)$$

где $h \in (0, 1)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 3.5. *Справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{Z}_h^{(m)}\|_1 \leq c, \quad h \in (0, 1), \quad (3.53)$$

где c – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функции

$$\tilde{r}(s, h) := \left(\frac{1-\varphi_s(h)}{h^2\lambda_s} \right)^m, \quad s > 0, \quad h \in (0, 1), \quad (3.54)$$

$$\tilde{\gamma}(s, h) := \tilde{r}(s, h) \eta(hs). \quad (3.55)$$

Проверим, что функция $\tilde{\gamma}(s, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.3. Учитывая, что $\eta(sh) = 0$ при $sh \geq 2$, заметим, что для проверки условия (3.5) для функции $\tilde{\gamma}(s, h)$ достаточно доказать справедливость неравенств

$$|\partial_s^k \tilde{r}(s, h)| \leq c(k) h^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < h < 1, \quad sh < 2, \quad (3.56)$$

где $c(k)$ – некоторые постоянные. Функцию $\tilde{r}(s, h)$ можно записать в виде

$$\tilde{r}(s, h) = (\psi(s, h))^m, \quad (3.57)$$

где $\psi(s, h)$ – функция, определенная в (3.30). Неравенства (3.56) вытекают из леммы 3.2, если взять $\Lambda(x) = x^m$.

Поскольку функция $\tilde{\gamma}(s, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.3, семейство функций

$$\Phi_h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\gamma}(n, h) \theta_n \varphi_n(t)$$

ограничено в пространстве $L_1^{(\alpha, \beta)}$, что доказывает неравенство (3.53), так как $\mathcal{Z}_h^{(m)}(t) = \Phi_h(t)$. Лемма доказана.

Определим семейство операторов

$$B_{\nu, h}^{(m)}: L_p^{(\alpha, \beta)} \mapsto L_p^{(\alpha, \beta)}, \quad \nu > \frac{1}{2}, \quad h \in \left(0, \frac{1}{2\nu}\right),$$

по формуле

$$B_{\nu, h}^{(m)}(g) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \varphi_n(h)}{h^2 \lambda_n} \right)^m \eta\left(\frac{n}{\nu}\right) \theta_n \widehat{g}(n) \varphi_n, \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}. \quad (3.58)$$

ЛЕММА 3.6. *Справедливо неравенство*

$$\|B_{\nu, h}^{(m)}(g)\|_p \leq c \|g\|_p, \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}, \quad (3.59)$$

где c – некоторая постоянная, не зависящая от ν и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в сумме (3.58) ненулевые слагаемые могут быть только при $n < 2\nu$ (так как $\eta(n/\nu) = 0$ при $n \geq 2\nu$), а поскольку $2\nu h < 1$, при этих значениях n имеем $nh < 2\nu h < 1$, откуда следует, что $\eta(nh) = 1$. Поэтому (3.58) можно переписать в виде

$$B_{\nu, h}^{(m)}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{\nu}\right) \left(\frac{1 - \varphi_n(h)}{h^2 \lambda_n} \right)^m \eta(nh) \theta_n \widehat{g}(n) \varphi_n, \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}. \quad (3.60)$$

Пусть $\eta_\nu(t)$ – функция, определенная в (3.12), а $\mathcal{Z}_h^{(m)}(t)$ – функция, определенная в (3.52). Из свойства (2.60) преобразования Фурье–Якоби следует, что оператор $B_{\nu, h}^{(m)}$ можно записать в виде свертки:

$$B_{\nu, h}^{(m)}(g) = g * \eta_\nu * \mathcal{Z}_h^{(m)}. \quad (3.61)$$

Из (3.61) получаем, что $\|B_{\nu, h}^{(m)}(g)\|_p \leq \|\eta_\nu\|_1 \|\mathcal{Z}_h^{(m)}\|_1 \|g\|_p$, откуда при использовании неравенств (3.17) и (3.53) получаем (3.59). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.6. 1) Заметим, что при $\nu \leq 1/2$ функция $(P_\nu(f))(t) = \theta_0 \widehat{f}(0)$ является константой, не зависящей от t . Тогда $B^m(P_\nu(f)) = 0$ и $*\Delta_h^m(P_\nu(f)) = 0$, откуда следуют неравенства (3.28) и (3.29). Поэтому далее будем считать, что $\nu > 1/2$.

2) Рассмотрим преобразование Фурье–Якоби от функции $\mathcal{B}^m(P_\nu(f))$. Используя запись оператора P_ν в виде свертки (см. (3.13)) и свойства (2.60) и (2.54) преобразования Фурье–Якоби, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{B}^m(P_\nu(f)))(n) &= (-1)^m \lambda_n^m \eta\left(\frac{n}{\nu}\right) \widehat{f}(n) \\ &= (-1)^m h^{-2m} \frac{h^{2m} \lambda_n^m \eta(n/\nu)}{(1 - \varphi_n(h))^m} (1 - \varphi_n(h))^m \widehat{f}(n).\end{aligned}\quad (3.62)$$

Из равенства (3.62) и определения оператора $A_{\nu,h}^{(m)}$ (см. (3.47)) следует, что

$$\mathcal{B}^m(P_\nu(f)) = (-1)^m h^{2m} A_{\nu,h}^{(m)} (*\Delta_h^m f). \quad (3.63)$$

Используя лемму 3.4, получим, что из (3.63) вытекает неравенство (3.28).

3) Рассмотрим преобразование Фурье–Якоби от функции $*\Delta_h^m(P_\nu(f))$. Из свойств (2.60) и (2.55) преобразования Фурье–Якоби вытекает, что

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(*\Delta_h^m(P_\nu(f)))(n) &= (1 - \varphi_n(h))^m \eta\left(\frac{n}{\nu}\right) \widehat{f}(n) \\ &= (-1)^m h^{2m} \left(\frac{1 - \varphi_n(h)}{h^2 \lambda_n}\right)^m \eta\left(\frac{n}{\nu}\right) (-1)^m \lambda_n^m \widehat{f}(n).\end{aligned}\quad (3.64)$$

Из равенства (3.64) и определения оператора $B_{\nu,h}^{(m)}$ (см. (3.58)) следует, что

$$*\Delta_h^m(P_\nu(f)) = (-1)^m h^{2m} B_{\nu,h}^{(m)}(\mathcal{B}^m f), \quad (3.65)$$

откуда в силу леммы 3.6 вытекает неравенство (3.29), что завершает доказательство предложения.

Если $\Phi(t) \in \mathcal{T}_\nu^+$, то $P_\nu(\Phi) = \Phi$ и из неравенства (3.28) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\Phi(t) \in \mathcal{T}_\nu^+$, $\nu > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого числа $h \in (0, 1/(2\nu))$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m \Phi\|_p \leq ch^{-2m} \|*\Delta_h^m \Phi\|_p, \quad (3.66)$$

где $c = c(\alpha, \beta, m)$ – некоторая постоянная.

Отметим, что неравенство (3.66) является аналогом классического неравенства Никольского–Стечкина (см. [41]–[43]).

Из определения модуля гладкости $\omega_m(f, \delta)_p$ (см. (1.16)) и из неравенства (3.28) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любой функции $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и произвольных чисел $m \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq c\nu^{2m} \omega_m\left(f, \frac{1}{2\nu}\right)_p, \quad (3.67)$$

где c – некоторая постоянная.

Далее будет доказана теорема джексоновского типа, из которой в качестве следствия получим теорему 1.1 из § 1.

ТЕОРЕМА 3.1. Для $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ справедливо неравенство

$$E_\nu(f)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p, \quad (3.68)$$

где $c = c(\alpha, \beta, m)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Проверим, что неравенство (3.68) достаточно доказать для $\nu > 2/\pi$. Для этого заметим, что $E_\nu(f)_p$ не зависит от ν при $\nu \in (0, 1)$, а $\omega_m(f, 1/\nu)_p$ является непрерывной и невозрастающей функцией от ν при $\nu > 0$. Если неравенство (3.68) справедливо при $\nu > 2/\pi$, то в силу непрерывности $\omega_m(f, 1/\nu)_p$ оно справедливо и при $\nu = 2/\pi$, т. е.

$$E_{2/\pi}(f)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{\pi}{2} \right)_p.$$

Тогда при $\nu < 2/\pi$ получим

$$E_\nu(f)_p = E_{2/\pi}(f)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{\pi}{2} \right)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p,$$

т. е. неравенство (3.68) выполняется.

В дальнейших рассуждениях будем считать, что $\nu > 2/\pi$.

2. Поскольку

$$E_\nu(f)_p \leq \|f - P_{\nu/2}(f)\|_p, \quad \|*\Delta_{1/\nu}^m f\|_p \leq \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p,$$

для доказательства неравенства (3.68) достаточно доказать неравенство

$$\|f - P_{\nu/2}(f)\|_p \leq c \|*\Delta_{1/\nu}^m f\|_p. \quad (3.69)$$

Из свойств (2.55) и (2.60) преобразования Фурье–Якоби следует, что преобразования Фурье–Якоби от функций $f - P_{\nu/2}(f)$ и $*\Delta_{1/\nu}^m f$ имеют вид

$$\mathcal{F}(f - P_{\nu/2}(f))(n) = \left(1 - \eta \left(\frac{2n}{\nu} \right) \right) \widehat{f}(n), \quad (3.70)$$

$$\mathcal{F}(*\Delta_{1/\nu}^m f)(n) = \left(1 - \varphi_n \left(\frac{1}{\nu} \right) \right)^m \widehat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.71)$$

Из (3.70) и (3.71) получаем, что при $n \geq 1$

$$\mathcal{F}(f - P_{\nu/2}(f))(n) = \frac{(1 - \eta(2n/\nu))}{(1 - \varphi_n(1/\nu))^m} \mathcal{F}(*\Delta_{1/\nu}^m f)(n). \quad (3.72)$$

Определим семейство операторов R_h , $h \in (0, \pi)$, формулой

$$R_h(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \eta(2hn))}{(1 - \varphi_n(h))^m} \theta_n \widehat{g}(n) \varphi_n, \quad (3.73)$$

где $g \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$. Используя предложение 2.5, покажем, что ряд в правой части формулы (3.73) сходится в пространстве $\mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$. Действительно, если $g \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$, то последовательность $\widehat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, медленно растущая. С другой стороны, при $nh \geq 1$ по свойству 6) предложения 3.5 справедливо $1 - \varphi_n(h) \geq c_1$ для некоторой постоянной c_1 , поэтому последовательность

$$\frac{(1 - \eta(2hn))}{(1 - \varphi_n(h))^m} \widehat{g}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

также медленно растущая, следовательно, ряд в формуле (3.73) сходится в пространстве $\mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$.

Далее будет доказано, что R_h являются линейными ограниченными операторами в банаховом пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$, и справедливо неравенство

$$\|R_h(g)\|_p \leq c \|g\|_p, \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}, \quad (3.74)$$

где c – постоянная, не зависящая от h .

Из (3.72) вытекает, что преобразование Фурье–Якоби функции $f - P_{\nu/2}(f)$ совпадает с преобразованием Фурье–Якоби функции $R_{1/\nu}(*\Delta_{1/\nu}^m f)$, поэтому имеем $f - P_{\nu/2}(f) = R_{1/\nu}(*\Delta_{1/\nu}^m f)$, откуда, используя (3.74), получаем неравенство (3.69).

3. При $|x| < 1$ функцию $(1 - x)^{-m}$ можно разложить в степенной ряд:

$$(1 - x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

где a_k – некоторые коэффициенты. Пусть N – натуральное число,

$$Q_N^{(1)}(x) := \sum_{k=0}^N a_k x^k, \quad Q_N^{(2)}(x) := (1 - x)^{-m} - Q_N^{(1)}(x). \quad (3.75)$$

Определим операторы $R_h^{(1)}$ и $R_h^{(2)}$ формулами

$$R_h^{(j)}(g) := \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \eta(2nh)) Q_N^{(j)}(\varphi_n(h)) \theta_n \widehat{g}(n) \varphi_n, \quad (3.76)$$

где $g \in \mathcal{E}'_+(\mathbb{T})$, $j = 1, 2$. Далее будет показано, что $R_h^{(1)}$ и $R_h^{(2)}$ являются линейными ограниченными операторами в банаховом пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p \leq \infty$, и при некотором N (число N будет указано далее) справедливы неравенства

$$\|R_h^{(1)}(g)\|_p \leq c_1 \|g\|_p, \quad (3.77)$$

$$\|R_h^{(2)}(g)\|_p \leq c_1 \|g\|_p, \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}, \quad (3.78)$$

где $c_1 = c_1(N)$ и $c_2 = c_2(N)$ – некоторые постоянные, не зависящие от h . Поскольку $R_h = R_h^{(1)} + R_h^{(2)}$, из (3.77) и (3.78) будет следовать неравенство (3.74).

4. Из (3.75) и (3.76) вытекает, что действие оператора $R_h^{(1)}$ имеет вид

$$R_h^{(1)}(g) = \sum_{k=0}^N a_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \eta(2nh)) (\varphi_n(h))^k \theta_n \widehat{g}(n) \varphi_n \right).$$

Из свойств (2.55) и (2.60) преобразования Фурье–Якоби следует, что этот оператор можно записать, используя оператор обобщенного сдвига Якоби и оператор свертки, в виде

$$R_h^{(1)}(g) = \sum_{k=0}^N a_k ((T^h)^k g - ((T^h)^k g) * \eta_{1/(2h)}), \quad (3.79)$$

где T^h – обобщенный сдвиг Якоби, $\eta_\nu(t)$ – функция, определенная в соотношении (3.12). Поскольку $\|\eta_\nu\|_1 \leq c_3$ для некоторой постоянной c_3 (см. (3.17)) и $\|T^h g\|_p \leq \|g\|_p$, из (3.79) следует

$$\|R_h^{(1)}(g)\|_p \leq (1 + c_3) \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right) \|g\|_p,$$

откуда вытекает неравенство (3.77).

5. Определим функцию

$$\gamma(s, h) := (1 - \eta(2sh)) Q_N^{(2)}(\varphi_s(h)), \quad (3.80)$$

где $s \in (0, +\infty)$, $h \in (0, \pi/2)$. Докажем, что при достаточно большом N функция $\gamma(s, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.3.

Из определения функции $Q_N^{(2)}(x)$ (см. (3.75)) следует, что ее можно представить в виде

$$Q_N^{(2)}(x) = x^{N+1} T_N(x) (1 - x)^{-m}, \quad (3.81)$$

где $T_N(x)$ – некоторый многочлен. Поскольку $|\varphi_s(h)| < 1$ при $s > 0$, $h \in (0, \pi/2)$ (см. п. 2) предложения 3.5, то $\gamma(s, h) \in C^\infty((0, +\infty) \times (0, \pi/2))$ и, в частности, выполнено условие 1) предложения 3.3. Для проверки условия 2) предложения 3.3 нужно показать, что для любых целых чисел k и r , удовлетворяющих условиям $0 \leq k \leq l + 1$ и $0 \leq r \leq l + 2$, $l = [\alpha] + 2$, выполняется неравенство

$$|(hs)^r \partial_s^k \gamma(s, h)| \leq ch^k, \quad s \in (0, +\infty), \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.82)$$

где $c = c(k, r)$ – постоянная, не зависящая от s и h .

Рассмотрим следующее подмножество в $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{D} := \left\{ (s, h) : s > 0, h \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), 2sh > 1 \right\}.$$

Заметим, что неравенство (3.82) выполняется при $2sh \leq 1$, так как тогда $1 - \eta(2sh) = 0$ и, следовательно, $\gamma(s, h) = 0$ и $\partial_s^k \gamma(s, h) = 0$. Поэтому достаточно доказать неравенство (3.82) при $(s, h) \in \mathcal{D}$. Положим далее, что $(s, h) \in \mathcal{D}$.

Из пп. 3) и 6) предложения 3.5, если взять $\varkappa = 1/2$, вытекает, что при $(s, h) \in \mathcal{D}$ справедливы неравенства

$$|\varphi_s(h)| \leq c_4(sh)^{-\alpha-1/2}, \quad (3.83)$$

$$1 - \varphi_s(h) \geq c_5, \quad (3.84)$$

где c_4 и c_5 – некоторые постоянные. В качестве N возьмем любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)(N - l) > l + 2 \quad (3.85)$$

(можно, например, взять $N = l + 1 + [(l + 2)(\alpha + 1/2)]$).

Представим функцию $\gamma(s, h)$ (см. (3.80) и (3.81)) в виде произведения:

$$\gamma(s, h) = \gamma_1(s, h)\gamma_2(s, h)\gamma_3(s, h),$$

где

$$\gamma_1(s, h) := (1 - \eta(2sh)), \quad (3.86)$$

$$\gamma_2(s, h) := (\varphi_s(h))^{N+1}, \quad (3.87)$$

$$\gamma_3(s, h) := T_N(\varphi_s(h))(1 - \varphi_s(h))^{-m}. \quad (3.88)$$

Очевидно, что при любом $k \in \mathbb{Z}_+$ для некоторой постоянной $c_6 = c_6(k)$ выполняется неравенство

$$|\partial_s^k \gamma_1(s, h)| \leq c_6 h^k \quad (3.89)$$

(можно, например, взять $c_6(k) = 2^k \max\{|\partial_x^k \eta(x)| : x \in \mathbb{R}\}$).

Производную $\partial_s^k \gamma_2(s, h)$ можно представить в виде линейной комбинации функций вида

$$(\varphi_s(h))^{N+1-k_0} (\partial_s^{k_1} \varphi_s)(h) \cdots (\partial_s^{k_d} \varphi_s)(h), \quad (3.90)$$

где $k_0 \leq k$ и $k_1 + k_2 + \cdots + k_d = k$.

Если $k \leq l + 1$, то из (3.85) вытекает, что

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)(N + 1 - k_0) \geq \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)(N - l) > l + 2.$$

Тогда из (3.83) следует, что

$$|(\varphi_s(h))^{N-k_0+1}| \leq c_7(2sh)^{-l-2}, \quad (3.91)$$

а из неравенства (3.24) вытекает оценка

$$|(\partial_s^{k_1} \varphi_s)(h) \cdots (\partial_s^{k_d} \varphi_s)(h)| \leq c_8 h^k, \quad (3.92)$$

где $c_7 = c_7(k)$ и $c_8 = c_8(k)$ – некоторые постоянные. Поскольку $\partial_s^k \gamma_2(s, h)$ является линейной комбинацией функций (3.90), то, используя (3.91) и (3.92), получаем

$$|\partial_s^k \gamma_2(s, h)| \leq c_9 h^k (sh)^{-l-2}, \quad 0 \leq k \leq l + 1, \quad (3.93)$$

где $c_9 = c_9(k)$ – постоянная.

Функцию $\gamma_3(s, h)$ представим в виде

$$\gamma_3(s, h) = \Lambda(\varphi_s(h)),$$

где $\Lambda(u) := T_N(u)(1-u)^{-m}$. Из неравенства (3.84) и того, что $|\varphi_s(h)| < 1$, следует, что $\varphi_s(h) \in [-1, 1 - c_5]$ при $(s, h) \in \mathcal{D}$. Поскольку $c_5 > 0$, функция $\Lambda(u)$ и все ее производные $\partial_u^k \Lambda(u)$ ограничены на отрезке $[-1, 1 - c_5]$. Пусть

$$\sigma(k) := \max\{|\partial_u^k \Lambda(u)| : u \in [-1, 1 - c_5]\}.$$

Производную $\partial_s^k \gamma_3(s, h)$ можно представить в виде суммы конечного числа (зависящего от k) слагаемых вида

$$(\partial_u^{k_0} \Lambda)(\varphi_s(h))(\partial_s^{k_1} \varphi_s)(h) \cdots (\partial_s^{k_d} \varphi_s)(h), \quad (3.94)$$

где $k_0, k_1, \dots, k_d$ – некоторые натуральные числа, $k_0 \leq k$, $k_1 + k_2 + \dots + k_d = k$. Из неравенства (3.24) следует, что каждая функция (3.94) при $(s, h) \in \mathcal{D}$ допускает оценку

$$|\partial_u^{k_0} \Lambda(\varphi_s(h))(\partial_s^{k_1} \varphi_s)(h) \cdots (\partial_s^{k_d} \varphi_s)(h)| \leq c_{10} \sigma(k_0) h^k,$$

где $c_{10} = c_{10}(k)$ – некоторая постоянная. Из этой оценки получаем неравенство

$$|\partial_s^k \gamma_3(s, h)| \leq c_{11} h^k, \quad (s, h) \in \mathcal{D}, \quad (3.95)$$

с некоторой постоянной $c_{11} = c_{11}(k)$.

Заметим, что функция $\partial_s^k \gamma(s, h)$ является суммой слагаемых вида

$$\partial_s^{k_1} \gamma_1(s, h) \partial_s^{k_2} \gamma_2(s, h) \partial_s^{k_3} \gamma_3(s, h),$$

где k_1, k_2, k_3 – неотрицательные целые числа такие, что $k_1 + k_2 + k_3 = k$. Используя оценки (3.89), (3.93) и (3.95), получаем

$$|\partial_s^k \gamma(s, h)| \leq c_{12} h^k (sh)^{-l-2}, \quad 0 \leq k \leq l+1, \quad (s, h) \in \mathcal{D}, \quad (3.96)$$

где $c_{12} = c_{12}(k, N)$ – постоянная.

Из (3.96) следует неравенство (3.82), что завершает доказательство того, что функция $\gamma(s, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.3.

6. Поскольку функция $\gamma(s, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.3, для функции

$$\Phi_h(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(n, h) \theta_n \varphi_n(t)$$

справедливо неравенство

$$\|\Phi_h\|_1 \leq c, \quad (3.97)$$

где c – некоторая постоянная. Из свойства (2.60) преобразования Фурье–Якоби следует, что оператор $R_h^{(2)}$ (см. (3.76), (3.75) и (3.81)) можно записать в виде свертки:

$$R_h^{(2)}(g) = g * \Phi_h, \quad g \in L_p^{(\alpha, \beta)}, \quad (3.98)$$

а тогда из (3.97) следует, что

$$\|R_h^{(2)}(g)\|_p \leq \|g\|_p \|\Phi_h\|_1 \leq c\|g\|_p,$$

откуда вытекает неравенство (3.78).

Из неравенств (3.77) и (3.78) следует неравенство (3.74), что завершает доказательство теоремы (см. п. 2 доказательства).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $f \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, k – произвольное натуральное число. Взяв в теореме 3.1 вместо числа m число $k + m$, получим неравенство

$$E_\nu(f)_p \leq c_1 \omega_{k+m} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (3.99)$$

где $c_1 = c_1(k, m, \alpha, \beta)$ – некоторая постоянная. Из свойств модуля гладкости (см. предложение 3.2, 6)) следует, что

$$\omega_{k+m} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \leq c_2 \nu^{-2m} \omega_k \left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu} \right)_p \quad (3.100)$$

с некоторой постоянной $c_2 = c_2(k, m, \alpha, \beta)$. Из неравенств (3.99) и (3.100) вытекает неравенство (1.18), что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Теорема 1.1 останется справедливой, если вместо $\nu \in \mathbb{N}$ считать, что ν – произвольное положительное действительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. 1. Пусть $K(f, \delta; L_p^{(\alpha, \beta)}; W_p^{m(\alpha, \beta)})$ – K -функционал, построенный по пространствам $L_p^{(\alpha, \beta)}$ и $W_p^{m(\alpha, \beta)}$ (см. (1.20)), где $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $\delta > 0$. Для краткости обозначим

$$K_m(f, \delta)_p := K(f, \delta^{2m}; L_p^{(\alpha, \beta)}, W_p^{m(\alpha, \beta)}). \quad (3.101)$$

С учетом обозначения (3.101) необходимо показать, что для некоторых постоянных c_1 и c_2 (напомним, что постоянные $c, c_1, c_2, \dots$ могут зависеть от m, α, β) справедливо неравенство

$$c_1 \omega_m(f, \delta)_p \leq K_m(f, \delta)_p \leq c_2 \omega_m(f, \delta)_p. \quad (3.102)$$

2. Для доказательства левого неравенства в (3.102) достаточно показать, что

$$\omega_m(f, \delta)_p \leq c K_m(f, \delta)_p. \quad (3.103)$$

Пусть $g \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$. Используя свойства модуля гладкости (см. предложение 3.2), получим

$$\begin{aligned} \omega_m(f, \delta)_p &\leq \omega_m(f - g, \delta)_p + \omega(g, \delta)_p \\ &\leq 2^m \|f - g\|_p + c_3 \delta^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_p \leq c_4 (\|f - g\|_p + \delta^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_p), \end{aligned}$$

где $c_4 = \max\{2^m, c_3\}$. Взяв нижнюю грань по всем $g \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$, мы получаем неравенство (3.103).

3. Докажем правое неравенство в (3.102). Если взять $g = P_\nu(f)$ (оператор P_ν определен в (3.11)), $\nu > 0$, то из определения $K_m(f, \delta)_p$ следует, что

$$K_m(f, \delta)_p \leq \|f - P_\nu(f)\|_p + \delta^{2m} \|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p. \quad (3.104)$$

Согласно п. 3) предложения 3.4 справедливо неравенство

$$\|f - P_\nu(f)\|_p \leq c_5 E_\nu(f)_p. \quad (3.105)$$

Используя следствие 3.2 и монотонность функции $\omega_m(f, \delta)_p$ по δ , получим

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq c_6 \nu^{2m} \omega_m\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p. \quad (3.106)$$

Из (3.104)–(3.106) и теоремы 3.1 следует, что

$$K_m(f, \delta)_p \leq c_7 (1 + (\delta\nu)^{2m}) \omega_m\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p, \quad (3.107)$$

где $c_7 = \max\{c_5, c_6\}$. Неравенство (3.107) справедливо для всех $\delta > 0$ и $\nu > 0$, в частности при $\nu = 1/\delta$. Подставляя $\nu = 1/\delta$ в (3.107), получим

$$K_m(f, \delta)_p \leq 2c_7 \omega_m(f, \delta)_p,$$

что доказывает правое неравенство в (3.102). Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы 1.2 получим еще одно свойство модуля гладкости $\omega_m(f, \delta)_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Существует постоянная $c = c(m, \alpha, \beta)$ такая, что при $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, $s > 0$, $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$\omega_m(f, s\delta)_p \leq c \max\{1, s^{2m}\} \omega_m(f, \delta)_p. \quad (3.108)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения K -функционала легко вывести неравенство

$$K_m(f, s\delta)_p \leq \max\{1, s^{2m}\} K_m(f, \delta)_p,$$

из которого в силу (3.102) получим (3.108).

§ 4. Аппроксимационное описание пространств Никольского–Бесова и аналоги обратных теорем Стечкина

В этом параграфе в весовых функциональных пространствах $L_p^{(\alpha, \beta)}$ рассматриваются аналоги некоторых классических задач теории приближений функций. Основными результатами являются описание естественных аналогов функциональных пространств Никольского–Бесова в терминах наилучших приближений, а также доказательства аналогов обратных теорем Стечкина.

Пусть $r > 0$ – действительное число, k и m – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2m > 0$. Через $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ обозначим множество всех функций $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ таких, что $\mathcal{B}f, \mathcal{B}^2f, \dots, \mathcal{B}^m f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и для некоторого числа $A_f > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_p \leq A_f \delta^{r-2m}, \quad \delta > 0. \quad (4.1)$$

Для $f \in H_p^{r(\alpha, \beta)}$ определим полунорму

$$h_p^r(f) := \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_p}{\delta^{r-2m}}. \quad (4.2)$$

Множество $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H_p^{r(\alpha, \beta)}} := \|f\|_p + h_p^r(f). \quad (4.3)$$

Пространства $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ являются естественными аналогами классических пространств Никольского H_p^r (см. [44]) для гармонического анализа Фурье–Якоби. В следующей теореме дается описание пространства $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ через наилучшие приближения функциями из $\mathcal{T}_\nu^+$; в частности, из нее следует, что пространства $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ не зависят от чисел k и m .

ТЕОРЕМА 4.1. *Если $f \in H_p^{r(\alpha, \beta)}$, то при $\nu \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_p \leq c_1 \frac{h_p^r(f)}{\nu^r}, \quad (4.4)$$

где $c_1 = c_1(p, r)$ – некоторая постоянная. Обратно, если $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и при $\nu \in \mathbb{N}$

$$E_\nu(f)_p \leq \frac{A}{\nu^r}, \quad (4.5)$$

где A – не зависящая от ν (но зависящая от f) постоянная, то $f \in H_p^{r(\alpha, \beta)}$ и выполнено неравенство

$$\|f\|_{H_p^{r(\alpha, \beta)}} \leq c_2(\|f\|_p + A), \quad (4.6)$$

где $c_2 = c_2(p, r)$ – не зависящая от f постоянная.

Пусть $1 \leq q \leq \infty$, $r > 0$, k и m – неотрицательные целые числа такие, что $2k > r - 2m > 0$. Аналогично [44], функция f принадлежит классу Никольского–Бесова $B_{p,q}^{r(\alpha, \beta)}$, если $f, \mathcal{B}f, \dots, \mathcal{B}^m f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и конечна полунорма

$$b_{p,q}^r(f) := \begin{cases} \left(\int_0^\infty \frac{(\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_p)^q}{\delta^{(r-2m)q}} \frac{d\delta}{\delta} \right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \sup_{\delta > 0} \frac{\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_p}{\delta^{r-2m}} & \text{при } q = \infty. \end{cases}$$

Класс $B_{p,q}^{r(\alpha, \beta)}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{B_{p,q}^{r(\alpha, \beta)}} := \|f\|_p + b_{p,q}^r(f). \quad (4.7)$$

Отметим, что $B_{p,\infty}^{r(\alpha, \beta)} = H_p^{r(\alpha, \beta)}$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $a > 1$ – произвольное число (например, $a = 2$). Для того чтобы функция $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ принадлежала классу $B_{p,q}^{r(\alpha, \beta)}$, необходимо и достаточно, чтобы была конечна полунорма

$$\tilde{b}_{p,q}^r(f) := \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{nrq} (E_{a^n}(f)_p)^q \right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} a^{nr} E_{a^n}(f)_p & \text{при } q = \infty. \end{cases}$$

При этом норма (4.7) в $B_{p,q}^{r(\alpha, \beta)}$ эквивалентна норме

$$\|f\|_p + \tilde{b}_{p,q}^r(f). \quad (4.8)$$

Основным вспомогательным средством для доказательства теорем 4.1, 4.2, а также для доказательства различных обратных теорем теории приближения являются аналоги неравенства Бернштейна. В следующей лемме доказываются два неравенства такого типа.

ЛЕММА 4.1. Для любой функции $\Phi \in \mathcal{T}_\nu^+$, $\nu > 0$, и для любых $m \in \mathbb{Z}_+$, $h > 0$ справедливы неравенства

$$\|\mathcal{B}^m \Phi\|_p \leq c_1 \nu^{2m} \|\Phi\|_p, \quad (4.9)$$

$$\|*\Delta_h^m \Phi\|_p \leq c_2 (\nu h)^{2m} \|\Phi\|_p, \quad (4.10)$$

где $c_1 = c_1(m)$ и $c_2 = c_2(m)$ – некоторые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 3.2 и предложения 3.2, 4) следует, что для любой функции $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq c \nu^{2m} 2^m \|f\|_p, \quad (4.11)$$

где c – постоянная, не зависящая от f и ν , P_ν – определенный в (3.11) оператор. Если $f = \Phi \in \mathcal{T}_\nu^+$, то $P_\nu(\Phi) = \Phi$ (см. предложение 3.4) и из (4.10) вытекает неравенство (4.9).

Если $\Phi \in \mathcal{T}_\nu^+$, то, в частности, $\Phi \in W_p^{m(\alpha, \beta)}$. Из неравенства (3.39) и того, что $P_\nu(\Phi) = \Phi$, следует, что

$$\|*\Delta_h^m \Phi\|_p \leq c_3 h^{2m} \|\mathcal{B}^m \Phi\|_p, \quad (4.12)$$

где $c_3 = c_3(m)$ – некоторая постоянная. Из (4.12) и (4.9) вытекает неравенство (4.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Всюду в доказательстве $c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, которые могут зависеть от параметров α, β, r, m, p .

Если $f \in H_p^{r(\alpha, \beta)}$, то

$$\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta) \leq h_p^r(f) \delta^{r-2m}$$

и из теоремы 1.1 следует, что

$$E_\nu(f)_p \leq \frac{c_1}{\nu^{2m}} \omega_k\left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu}\right)_p \leq c_1 \frac{h_p^r(f)}{\nu^r},$$

что доказывает неравенство (4.4).

Для доказательства неравенства (4.6) используется обычная методика, входящая к работе [44]. Пусть выполняется неравенство (4.5). Выберем последовательность функций $\psi_n \in \mathcal{T}_{2^n}^+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, таких, что $\|f - \psi_n\|_p \leq A \cdot 2^{-nr}$. Пусть $\varphi_0 = \psi_0$ и $\varphi_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ при $n \geq 1$. Тогда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n, \quad (4.13)$$

ряд сходится в банаховом пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$ и $\varphi_n \in \mathcal{T}_{2^n}^+$. Оценим сверху нормы слагаемых в (4.13):

$$\|\varphi_0\| = \|\psi_0\|_p = \|\psi_0 - f\|_p = \|f\|_p \leq \|f\|_p + A, \quad (4.14)$$

$$\|\varphi_n\|_p \leq \|f - \psi_n\|_p + \|f - \psi_{n-1}\|_p \leq A(2^{-nr} + 2^{-(n-1)r}) = A(1 + 2^r)2^{-nr}. \quad (4.15)$$

Объединяя неравенства (4.14) и (4.15), получаем

$$\|\varphi_n\|_p \leq c_2 2^{-nr} (\|f\|_p + A), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.16)$$

Пусть l – одно из чисел $1, 2, \dots, m$. Из неравенства Бернштейна (4.9) получаем, что

$$\|\mathcal{B}^l \varphi_n\|_p \leq c_3 (2^n)^{2l} \|\varphi_n\|_p. \quad (4.17)$$

Из неравенств (4.16), (4.17) и того, что $r - 2l > 0$, следует, что в $L_p^{(\alpha, \beta)}$ сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^l \varphi_n$. Поскольку оператор $\mathcal{B}$ непрерывен в $\mathcal{E}'_+$, из (4.13) следует, что в пространстве $\mathcal{E}'_+$ справедливо равенство

$$\mathcal{B}^l f = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}^l \varphi_n,$$

следовательно, $\mathcal{B}^l f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$. В частности, функция $g = \mathcal{B}^m f$ принадлежит пространству $L_p^{(\alpha, \beta)}$.

Пусть $\Phi_n := \mathcal{B}^m \varphi_n$; тогда

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n, \quad \Phi_n \in \mathcal{T}_{2^n}^+, \quad \|\Phi_n\| \leq c_4 2^{-n(r-2m)} (\|f\|_p + A). \quad (4.18)$$

Возьмем произвольное число $h > 0$. Из непрерывности в $L_p^{(\alpha, \beta)}$ разностного оператора ${}^* \Delta_h^m$ следует, что в пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$ справедливо равенство

$${}^* \Delta_h^m g = \sum_{n=0}^{\infty} {}^* \Delta_h^m \Phi_n.$$

Выберем целое неотрицательное число N такое, что

$$2^{-N} \leq h < 2^{-(N-1)} \quad (4.19)$$

(если $h \geq 1$, то в (4.19) оставляем только левое неравенство). Тогда

$${}^* \Delta_h^m g = \sum_{n=0}^{N-1} {}^* \Delta_h^m \Phi_n + \sum_{n=N}^{\infty} {}^* \Delta_h^m \Phi_n \quad (4.20)$$

(при $N = 0$ в (4.20) остается только вторая сумма). Оценим слагаемые в равенстве (4.20). При $n \leq N - 1$, используя неравенства (4.10), (4.18) и (4.19), получим

$$\|*\Delta_h^m \Phi_n\| \leq c_5(2^n h)^{2m} \|\Phi_n\|_p \leq c_6(\|f\|_p + A) 2^{n(2m+2k-r)} 2^{-2(N-1)k}.$$

Тогда, снова используя (4.19), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} *\Delta_h^m \Phi_n \right\|_p &\leq \frac{c_6(\|f\|_p + A)}{2^{2k(N-1)}} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{(2m+2k-r)n} \\ &= \frac{c_6(\|f\|_p + A)}{2^{2k(N-1)}} \frac{2^{(2m+2k-1)N} - 1}{2^{2m+2k-1} - 1} \leq c_7(\|f\|_p + A) h^{r-2m}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

При $n \geq N$ воспользуемся очевидным неравенством $\|*\Delta_h^k \Phi_n\| \leq 2^k \|\Phi_n\|_p$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} *\Delta_h^m \Phi_n \right\|_p &\leq 2^k c_7(\|f\|_p + A) \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-(r-2m)n} \\ &= 2^k c_7(\|f\|_p + A) 2^{-N(r-2m)} (1 - 2^{(2m-r)})^{-1} \leq c_8(\|f\|_p + A) h^{r-2m}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Из (4.21) и (4.22) следует, что $\|*\Delta_h^m g\|_p \leq c_9 h^{r-2m} (\|f\|_p + A)$, откуда

$$\omega_k(g, \delta)_p \leq c_9(\|f\|_p + A) \delta^{r-2m}, \quad \delta > 0, \quad h_p^r(f) \leq c_9(\|f\|_p + A).$$

В результате получаем, что $f \in H_p^{r(\alpha, \beta)}$ и выполняется неравенство (4.6). Теорема доказана.

Пусть

$$\tilde{h}_p^r(f) := \sup_{\nu \geq 1} \nu^r E_\nu(f)_p.$$

Из теоремы 4.1 следует, что пространство $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ состоит из тех и только тех функций $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$, для которых $\tilde{h}_p^r(f) < \infty$. При этом норма в $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ эквивалентна норме

$$\|f\|_{H_p^{r(\alpha, \beta)}} := \|f\|_p + \tilde{h}_p^r(f).$$

В частности, при различных k и m таких, что $2k > r - 2m > 0$, пространства $H_p^{r(\alpha, \beta)}$ совпадают и их нормы эквивалентны.

В следующей теореме будут получены различные эквивалентные нормировки пространств Никольского–Бесова $B_{p,q}^{r(\alpha, \beta)}$; в частности, из нее будет следовать теорема 4.2. Как и в §1, пусть $r > 0$ и $a > 1$ – действительные числа, k и m – произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2m > 0$. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит пространству ${}^j B_{p,q}^{r(\alpha, \beta)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, если $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и конечна полунорма ${}^j b_{p,q}^r(f)$, где

$$\begin{aligned} {}^1 b_{p,q}^r(f) &:= b_{p,q}^r(f); \\ {}^2 b_{p,q}^r(f) &:= \begin{cases} \int_0^a \frac{(\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_p)^q}{\delta^{(r-2m)q}} \frac{d\delta}{\delta} & \text{при } q < \infty, \\ \sup_{0 < \delta \leq a} \delta^{-(r-2m)} \omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_p & \text{при } q = \infty; \end{cases} \end{aligned}$$

$${}^3b_{p,q}^r(f) := \tilde{b}_{p,q}^r(f);$$

$${}^4b_{p,q}^r(f) := \begin{cases} \inf \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{jrq} \|Q_{a^j}\|_p^q \right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \inf \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|Q_{a^j}\|_p \right) & \text{при } q = \infty \end{cases}$$

(полунорма $b_{p,q}^r(f)$ определена ранее, а полунорма $\tilde{b}_{p,q}^r(f)$ определена в теореме 4.2). Нижняя грань берется по всем представлениям f в виде сходящегося в $L_p^{(\alpha,\beta)}$ ряда

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_{a^j}(t), \quad Q_{a^j}(t) \in \mathcal{T}_{a^j}^+.$$

Пространства ${}^jB_{p,q}^{r(\alpha,\beta)}$ являются банаховыми пространствами относительно норм

$$\|f\|_{{}^jB_{p,q}^{r(\alpha,\beta)}} := \|f\|_p + {}^j b_{p,q}^r(f). \quad (4.23)$$

ТЕОРЕМА 4.3. *Пространства ${}^jB_{p,q}^{r(\alpha,\beta)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, совпадают, и их нормы (4.23) эквивалентны (т.е. банаховы пространства ${}^jB_{p,q}^{r(\alpha,\beta)}$ эквивалентные).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости будем использовать обозначения ${}^jB := {}^jB_{p,q}^{r(\alpha,\beta)}$. Выражение $V_1 \hookrightarrow V_2$ будет означать, что банахово пространство V_1 вложено в банахово пространство V_2 и это вложение непрерывное. Доказательство теоремы сводится к доказательству цепочки вложений

$${}^1B \hookrightarrow {}^2B \hookrightarrow {}^3B \hookrightarrow {}^4B \hookrightarrow {}^1B.$$

Вложение ${}^1B \hookrightarrow {}^2B$ очевидно. Используя теорему 1.1 и неравенства Бернштейна (4.9) и (4.10), доказательства остальных вложений проводим так же, как доказательства аналогичных вложений в [44, п. 5.6]. Теорема доказана.

В частности, из эквивалентности банаховых пространств ${}^1B_{p,q}^{r(\alpha,\beta)}$ и ${}^3B_{p,q}^{r(\alpha,\beta)}$ следует теорема 4.2.

Следующие теоремы являются аналогами классических обратных теорем теории приближения, принадлежащих С.Б. Стечкину для случая $p = \infty$ и А.Ф. Тиману, М.Ф. Тиману для случая $1 \leq p < \infty$ (см. [45], [46] или [43]). Всюду $k, m \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Для любой функции $f \in L_p^{(\alpha,\beta)}$ и для любого натурального числа n справедливо неравенство*

$$\omega_k \left(f, \frac{1}{n} \right)_p \leq \frac{c}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{2k-1} E_{\nu}(f)_p, \quad (4.24)$$

где $c = c(k, \alpha, \beta)$ – некоторая положительная постоянная.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$ и справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{2m-1} E_{\nu}(f)_p < \infty. \quad (4.25)$$

Тогда функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^{m(\alpha, \beta)}$ и для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\omega_k\left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{n}\right)_p \leq c \left(\frac{1}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{2k+2m-1} E_{\nu}(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2m-1} E_{\nu}(f)_p \right), \quad (4.26)$$

где $c = c(k, m, \alpha, \beta)$ – некоторая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4. Будем следовать общей схеме доказательства аналогичной теоремы в классическом случае (см. [43, гл. 6]). Пусть $c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, которые могут зависеть от k, α и β .

Для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через Φ_{ν} элемент наилучшего приближения для функции f из пространства $\mathcal{T}_{\nu}^+$, т. е. $\Phi_{\nu} \in \mathcal{T}_{\nu}^+$ и $\|f - \Phi_{\nu}\|_p = E_{\nu}(f)_p$.

Используя свойства модуля гладкости (см. пп. 3), 4) предложения 3.2), для любых $\delta > 0$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ можно выписать неравенства

$$\begin{aligned} \omega_k(f, \delta)_p &\leq \omega_k(f - \Phi_{2^{m+1}}, \delta)_p + \omega_k(\Phi_{2^{m+1}}, \delta)_p \\ &\leq 2^k \|f - \Phi_{2^{m+1}}\|_p + \omega_k(\Phi_{2^{m+1}}, \delta)_p \leq 2^k E_{2^{m+1}}(f)_p + \omega_k(\Phi_{2^{m+1}}, \delta)_p. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Из свойства 7) предложения 3.2 вытекает, что

$$\omega_k(\Phi_{2^{m+1}}, \delta)_p \leq c_1 \delta^{2k} \|\mathcal{B}^k \Phi_{2^{m+1}}\|_p. \quad (4.28)$$

Заметим, что

$$\|\mathcal{B}^k \Phi_{2^{m+1}}\|_p \leq \|\mathcal{B}^k \Phi_1\|_p + \sum_{\nu=0}^m \|\mathcal{B}^k \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^k \Phi_{2^{\nu}}\|_p. \quad (4.29)$$

Оценим слагаемые в (4.29), используя неравенство Бернштейна (4.9):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}^k \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^k \Phi_{2^{\nu}}\|_p &\leq c_2 2^{2k(\nu+1)} \|\Phi_{2^{\nu+1}} - \Phi_{2^{\nu}}\|_p \\ &= c_2 2^{2k(\nu+1)} \|(f - \Phi_{2^{\nu}}) - (f - \Phi_{2^{\nu+1}})\|_p \leq c_2 2^{2k(\nu+1)+1} E_{2^{\nu}}(f)_p. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Поскольку функция $\Phi_0(t)$ постоянная, то $\mathcal{B}^k \Phi_0 = 0$ и можно написать, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}^k \Phi_1\|_p &= \|\mathcal{B}^k \Phi_1 - \mathcal{B}^k \Phi_0\|_{p, \alpha} \leq c_2 \|\Phi_1 - \Phi_0\|_{p, \alpha} \\ &\leq 2c_2 E_0(f)_p \leq c_2 2^{4k+1} E_0(f)_p. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Заметим, что при $\nu \geq 1$

$$\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^{\nu}} \mu^{2k-1} \geq (2^{\nu-1})^{2k-1} 2^{\nu-1} = 2^{2k(\nu-1)}. \quad (4.32)$$

Используя (4.3) и монотонное убывание $E_\mu(f)_p$ по μ , при $\nu \geq 1$ получим неравенство

$$2^{2k(\nu-1)} E_{2^\nu}(f)_p \leq \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2k-1} E_\mu(f)_p. \quad (4.33)$$

Из неравенств (4.28)–(4.31), учитывая (4.33), получим оценку

$$\begin{aligned} \omega_k(\Phi_{2^{m+1}}, \delta)_p &\leq c_1 \delta^{2k} \|\mathcal{B}^k \Phi_{2^{m+1}}\|_p \\ &\leq c_1 c_2 \delta^{2k} \left(\sum_{\nu=0}^m 2^{2k(\nu+1)+1} E_{2^\nu}(f)_p + 2^{4k+1} E_0(f)_p \right) \\ &\leq c_1 c_2 \delta^{2k} 2^{4k+1} \left(E_0(f)_p + E_1(f)_p + \sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2k-1} E_\mu(f)_p \right) \\ &\leq c_3 \delta^{2k} \left(\sum_{\nu=0}^{2^m} (\nu+1)^{2k-1} E_\nu(f)_p \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Пусть n – произвольное натуральное число. Выберем число $m \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Подставляя $\delta = 1/2^m$ в (4.27) и используя неравенства (4.34) и $E_{2^{m+1}}(f)_p \leq E_n(f)_p$, получаем неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leq 2^k E_n(f)_p + \frac{c_3}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{2k-1} E_\nu(f)_p. \quad (4.35)$$

Заметим, что

$$\sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{2k-1} \geq \sum_{\nu \geq n/2-1} (\nu+1)^{2k-1} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{2k-1} \frac{n}{2} = 2^{-2k} n^{2k},$$

поэтому

$$2^{k+1} E_n(f)_p \leq \frac{c_4}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1)^{2k-1} E_\nu(f)_p, \quad (4.36)$$

а из (4.35) и (4.36) вытекает неравенство (4.24), что завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.5. Далее будем считать, что $c_1, c_2, \dots$ – некоторые положительные постоянные, которые могут зависеть только от k, m, α и β . При доказательстве теоремы 4.5 мы будем следовать общей схеме доказательства аналогичной теоремы из [43, гл. 6] и использовать обозначения из доказательства теоремы 4.4.

Для любого натурального числа r , удовлетворяющего неравенству $r \leq m$, рассмотрим ряд

$$\mathcal{B}^r \Phi_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathcal{B}^r \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r \Phi_{2^\nu}). \quad (4.37)$$

Для отдельных слагаемых из ряда (4.37) справедлива оценка (см. (4.30))

$$\|\mathcal{B}^r \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r \Phi_{2^\nu}\|_p \leq c_1 2^{2r(\nu+1)+1} E_{2^\nu}(f)_p. \quad (4.38)$$

Отметим, что при всех $\nu \geq 1$ справедливо неравенство (см. (4.33))

$$2^{2r(\nu-1)} E_{2^\nu}(f)_p \leq \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2r-1} E_\mu(f)_p. \quad (4.39)$$

Из неравенств (4.38) и (4.39) вытекает сходимость ряда (4.37) по норме пространства $L_p^{(\alpha, \beta)}$, так как

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \|\mathcal{B}^r \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r \Phi_{2^\nu}\|_p &\leq c_1 2^{4r+1} E_1(f)_p + c_1 2^{4r+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2r-1} E_\mu(f)_p \\ &\leq c_1 2^{4r+1} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{2r-1} E_\nu(f)_p \right) < \infty. \end{aligned}$$

При этом использовано условие (4.25).

Заметим, что

$$f = \Phi_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\Phi_{2^{\nu+1}} - \Phi_{2^\nu}), \quad (4.40)$$

причем ряд (4.40) сходится в пространстве $L_p^{(\alpha, \beta)}$ и, тем более, в пространстве $\mathcal{E}'_+$ обобщенных функций. Поскольку оператор $\mathcal{B}$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{E}'_+$, то в пространстве $\mathcal{E}'_+$ справедливо равенство

$$\mathcal{B}^r f = \mathcal{B}^r \Phi_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathcal{B}^r \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r \Phi_{2^\nu}). \quad (4.41)$$

Из того, что правая часть в формуле (4.41) принадлежит пространству $L_p^{(\alpha, \beta)}$ при $r \leq m$, следует, что функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^{m(\alpha, \beta)}$, в частности $\mathcal{B}^m f \in L_p^{(\alpha, \beta)}$.

Для любых чисел $s \in \mathbb{Z}_+$ и $\delta > 0$ можно выписать неравенство

$$\omega_k(\mathcal{B}^m f, \delta)_p \leq \omega_k(\mathcal{B}^m f - \mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \delta)_p + \omega_k(\mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \delta)_p. \quad (4.42)$$

Далее, используя свойства модуля гладкости из предложения 2.2, неравенства (4.38), (4.39) и формулу (4.41), получим

$$\begin{aligned} \omega_k(\mathcal{B}^m f - \mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \delta)_p &\leq 2^k \|\mathcal{B}^m f - \mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}\|_p \\ &\leq 2^k \sum_{\nu=s+1}^{\infty} \|\mathcal{B}^m \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^m \Phi_{2^\nu}\|_p \leq 2^k \sum_{\nu=s+1}^{\infty} c_1 2^{2m(\nu+1)+1} E_{2^\nu}(f)_p \\ &\leq c_1 2^{k+4m+1} \sum_{\mu=2^{s+1}}^{\infty} \mu^{2m-1} E_\mu(f)_p. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Используя свойство 7) модуля гладкости из предложения 3.2, получим

$$\begin{aligned} \omega_k(\mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \delta)_p &\leq \omega_k(\mathcal{B}^m \Phi_1, \delta)_p + \sum_{\nu=0}^s \omega_k(\mathcal{B}^m \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^m \Phi_{2^\nu}, \delta)_p \\ &\leq c_2 \delta^{2k} \|\mathcal{B}^{m+k} \Phi_1\|_p + c_2 \delta^{2k} \sum_{\nu=0}^s \|\mathcal{B}^{m+k} \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^{m+k} \Phi_{2^\nu}\|_p. \end{aligned}$$

Далее, используя неравенства (4.30), (4.31) и (2.32), получим неравенство

$$\omega_k(B^m \Phi_{2^{s+1}}, \delta)_p \leq c_3 \delta^{2k} \sum_{\nu=0}^{2^s} (\nu+1)^{2k+2m-1} E_\nu(f)_p. \quad (4.44)$$

Пусть n – произвольное натуральное число. Выберем число $s \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы $2^s \leq n < 2^{s+1}$; тогда из (4.42)–(4.44) следует неравенство (4.26), что завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. J. Löfström, J. Peetre, “Approximation theorems connected with generalized translations”, *Math. Ann.*, **181** (1969), 255–268.
2. Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer Ser. Comput. Math., **9**, Springer-Verlag, New York, 1987.
3. М. К. Потапов, “О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **3** (1998), 38–48; англ. пер.: М. К. Potapov, “On the application of a generalized translation operator in the approximation theory”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **53**:3 (1998), 37–47.
4. М. К. Потапов, “О свойствах и о применении в теории приближений одного семейства операторов обобщенного сдвига”, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 412–426; англ. пер.: М. К. Potapov, “Properties of a family of operators of generalized translation with application to approximation theory”, *Math. Notes*, **69**:3 (2001), 373–386.
5. С. С. Платонов, “Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:5 (2007), 149–196; англ. пер.: S. S. Platonov, “Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line”, *Izv. Math.*, **71**:5 (2007), 1001–1048.
6. С. С. Платонов, “Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций на полупрямой”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:1 (2009), 154–174; англ. пер.: S. S. Platonov, “Bessel generalized translations and some problems of approximation theory for functions on the half-line”, *Siberian Math. J.*, **50**:1 (2009), 123–140.
7. Ёнг Пинг Ли, Чун Мей Су, В. И. Иванов, “Некоторые задачи теории приближений в пространствах L_p на прямой со степенным весом”, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 362–383; англ. пер.: Iong Ping Li, Chun Mei Su, V. I. Ivanov, “Some problems of approximation theory in the spaces L_p on the line with power weight”, *Math. Notes*, **90**:3 (2011), 344–364.
8. P. L. Butzer, R. L. Stens, M. Wehrens, “Higher order moduli of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation”, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2**:2 (1980), 83–88.
9. P. L. Butzer, S. Jansche, R. L. Stens, “Functional analytic methods in the solution of the fundamental theorems on best-weighted algebraic approximation”, *Approximation theory* (Memphis, TN, 1991), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **138**, Dekker, New York, 1992, 151–205.
10. М. К. Потапов, “О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **4** (1983), 43–52; англ. пер.: М. К. Potapov, “Approximation by algebraic polynomials in an integral metric with Jacobi weight”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **38**:4 (1983), 48–57.
11. Z. Ditzian, M. Felten, “Averages using translation induced by Laguerre and Jacobi expansions”, *Constr. Approx.*, **16**:1 (2000), 115–143.

12. А. Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина для L^2 -приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 27–52; англ. пер.: A. G. Babenko, “An exact Jackson–Stechkin inequality for L^2 -approximation on the interval with the Jacobi weight and on projective spaces”, *Izv. Math.*, **62**:6 (1998), 1095–1119.
13. А. С. Джафаров, “Усредненные модули непрерывности и некоторые их связи с наилучшими приближениями”, *Докл. АН СССР*, **236**:2 (1977), 288–291; англ. пер.: A. F. Dzhabarov, “Averaged moduli of continuity and some of their connections with best approximations”, *Soviet Math. Dokl.*, **18**:2 (1978), 1205–1209.
14. S. Rafalson, “An extremal relation of the theory of approximation of functions by algebraic polynomials”, *J. Approx. Theory*, **110**:2 (2001), 146–170.
15. Г. К. Лебедь, “Некоторые вопросы приближения функций одной переменной алгебраическими многочленами”, *Докл. АН СССР*, **118**:2 (1958), 239–242.
16. М. К. Потапов, “О приближении функций алгебраическими полиномами в метрике L_p ”, *Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций*, ГИФМЛ, М., 1961, 64–69.
17. Г. В. Жидков, “Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций”, *Докл. АН СССР*, **169**:5 (1966), 1002–1005; англ. пер.: G. V. Zhidkov, “Constructive characterization of a class of nonperiodic functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 1036–1040.
18. С. З. Рафальсон, “О приближении функций суммами Фурье–Якоби”, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, № 4, 54–62.
19. Г. Серё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
20. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
21. R. Askey, S. Wainger, “A convolution structure for Jacobi series”, *Amer. J. Math.*, **91** (1969), 463–485.
22. G. Gasper, “Positivity and the convolution structure for Jacobi series”, *Ann. of Math.* (2), **93**:1 (1971), 112–118.
23. H. Johnen, K. Scherer, “On the equivalence of the K -functional and moduli of continuity and some applications”, *Constructive theory of functions of several variables* (Oberwolfach, 1976), Lect. Notes Math., **571**, 1977, 119–140.
24. R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
25. А. Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **93**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978.
26. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал, М., 2005; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
27. С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
28. S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Math. Surveys Monogr., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
29. A. V. Shchepetilov, *Calculus and mechanics on two-point homogeneous Riemannian spaces*, Lecture Notes in Phys., **707**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

30. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2009.
31. С. С. Платонов, “О некоторых задачах теории приближения функций на компактных однородных многообразиях”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 67–108; англ. пер.: S. S. Platonov, “Some problems in the theory of approximation of functions on compact homogeneous manifolds”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 845–885.
32. R. Askey, *Orthogonal polynomials and special functions*, SIAM, Philadelphia, PA, 1975.
33. G. Gasper, “Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel”, *Ann. of Math.* (2), **95** (1972), 261–280.
34. H. Bavinck, “A special class of Jacobi series and some applications”, *J. Math. Anal. Appl.*, **37** (1972), 767–797.
35. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 5-е изд., Наука, М., 1971; англ. пер. 4-го изд.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York–London–Toronto, ON, 1980.
36. В. П. Хавин, “Методы и структура коммутативного гармонического анализа”, *Коммутативный гармонический анализ – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **15**, ВИНТИ, М., 1987, 6–133; англ. пер.: V. P. Khavin, “Methods and structure of commutative harmonic analysis”, *Commutative harmonic analysis I. General survey. Classical aspects*, *Encycl. Math. Sci.*, **15**, Springer, Berlin, 1991, 1–111.
37. А. Г. Земанян, *Интегральные преобразования обобщенных функций*, Наука, М., 1974; пер. с англ.: A. H. Zemanian, *Generalized integral transformations*, Wiley, New York, 1968.
38. H.-J. Glaeske, Th. Runst, “The discrete Jacobi transform of generalized functions”, *Math. Nachr.*, **132** (1987), 239–251.
39. R. S. Pathak, S. R. Verma, “Jacobi convolution of distributions”, *Math. Student*, **76**:1–4 (2007), 17–28.
40. J. D. Betancor, J. J. Betancor, J. M. R. Mendez-Pérez, “Generalized convolution for the discrete Jacobi transformation”, *Acta Math. Hungar.*, **96**:1–2 (2002), 1–19.
41. С. М. Никольский, “Обобщение одного из неравенств С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60**:9 (1948), 1507–1510.
42. С. Б. Стечкин, “Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60**:9 (1948), 1511–1514.
43. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Pergamon Press, New York, 1963.
44. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol'skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
45. С. Б. Стечкин, “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:3 (1951), 219–242.
46. А. Ф. Тиман, М. Ф. Тиман, “Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем”, *Докл. АН СССР*, **71**:1 (1950), 17–20.

СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ ПЛАТОНОВ

(SERGEI S. PLATONOV)

Петрозаводский государственный университет

им. О. В. Куусинена

E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступило в редакцию

10.05.2012

10.11.2012