Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие полные пересечения квадрик и кубик, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 4, 161–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/im7999>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:46:24

УДК 512.7

А. В. Пухликов

Бирационально жесткие полные пересечения квадрик и кубик

Доказана бирациональная сверхжесткость общих полных пересечений Фано V типа $2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^{2k_1+3k_2}$ при условии, что $k_2 \geq 2$ и $k_1 + 2k_2 = \dim V \geq 12$, и нескольких семейств полных пересечений Фано размерностей 10 и 11.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: многообразие Фано, полное пересечение, бирациональная жесткость, максимальная особенность, кратность.

DOI: 10.4213/im7999

К 90-летию со дня рождения И. Р. Шафаревича

Введение

0.1. Формулировка основного результата. Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$ – пара неотрицательных целых чисел, $k_1 + 2k_2 \geq 4$. Полным пересечением Фано типа $2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$ будем называть гладкое $(k_1 + 2k_2)$ -мерное полное пересечение

$$V = F_1 \cap \dots \cap F_{k_1+k_2} \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^{2k_1+3k_2}$$

коразмерности $k = k_1 + k_2$ в проективном пространстве $\mathbb{P}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, где $F_i \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхности степени 2 при $i = 1, \dots, k_1$ и степени 3 при $i = k_1 + 1, \dots, k$, $k = k_1 + k_2$. Положим $M = k_1 + 2k_2 = \dim V$. Очевидно, V есть многообразие Фано индекса 1, $\text{Pic } V = \mathbb{Z}H$ и $K_V = -H$, где H – класс гиперплоского сечения.

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 0.1. *Предположим, что $k_2 \geq 2$ и либо $M = k_1 + 2k_2 \geq 12$, либо пара (k_1, k_2) есть одна из пяти пар*

$$(5, 3), (3, 4), (1, 5), (2, 4), (0, 5).$$

Тогда общее (в смысле топологии Зарисского на пространстве коэффициентов многочленов, задающих гиперповерхности $F_1, \dots, F_{k_1+k_2}$) полное пересечение Фано V типа $2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$ является бирационально сверхжестким. В частности:

(i) *не существует рационального доминантного отображения $\gamma: V \dashrightarrow S$ на многообразие S положительной размерности, общий слой $\gamma^{-1}(s)$ которого имеет отрицательную кодировку размерность;*

© А. В. Пухликов, 2013

(ii) любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ на многообразии Фано V' с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями и числом Пикара $\mathrm{rk} \mathrm{Pic} V' = 1$ есть бирегулярный изоморфизм;

(iii) группа бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir} V$ совпадает с группой бирегулярных (проективных) автоморфизмов $\mathrm{Aut} V$ и потому тривиальна.

Свойства (i)–(iii) многообразия V в теореме 0.1 немедленно следуют из бирациональной сверхжесткости (см. [1]). В свою очередь, бирациональная сверхжесткость (понимаемая в смысле совпадения виртуального и реального порогов канонического присоединения,

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma) = n,$$

для любой подвижной линейной системы $\Sigma \subset |-nK_V|$; см. определения в [1]) немедленно следует из каноничности любой пары $(V, \frac{1}{n}\Sigma)$, где $\Sigma \subset |-nK_V|$ – подвижная система, или, что эквивалентно, из отсутствия у линейной системы Σ максимальных особенностей.

До сих пор бирациональная сверхжесткость была известна для полных пересечений Фано $F_1 \cap \dots \cap F_k$ индекса 1 при условии, что хотя бы одна степень $\deg F_i$ удовлетворяет неравенству $\deg F_i \geq 4$ (см. [2], [3]). Теорема 0.1 устанавливает сверхжесткость для полных пересечений V квадрик и кубик при условии, что $\dim V \geq 12$ и имеются хотя бы две кубики, а также для пяти семейств полных пересечений размерностей 10 и 11. Тем самым, вопрос о бирациональной сверхжесткости (общего многообразия) остается открытым для нескольких семейств полных пересечений Фано размерности не более 11 и для трех бесконечных серий

$$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2, \quad 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 3, \quad 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 4$$

в произвольной размерности. Эти многообразия требуют дальнейшего усиления техники доказательства.

В следующем пункте мы придадим точный смысл условию общности положения многообразия V в своем семействе. Основная трудность в доказательстве теоремы 0.1 – установить, что это условие реализуемо, т. е. имеется непустое открытое по Зарисскому подмножество в пространстве параметров, соответствующее многообразиям V , удовлетворяющим этому условию. Само доказательство бирациональной сверхжесткости занимает несколько страниц (см. § 1), почти вся статья посвящена обоснованию условий общности положения.

В п. 0.3 более подробно описаны структура статьи, основная идея доказательства теоремы 0.1 и указано место этой теоремы среди других результатов о бирациональной жесткости.

0.2. Условия общности положения. Как обычно, условия общности положения (или условия регулярности) имеют локальный характер и должны выполняться в каждой точке многообразия V . Пусть $o \in V \subset \mathbb{P}$ – некоторая точка, $\mathbb{C}^{M+k} \subset \mathbb{P}$ – стандартное аффинное множество с координатами $(z_1, \dots, z_{M+k})$, где $o = (0, \dots, 0)$. Пусть

$$f_i = q_{i,1} + q_{i,2}, \quad i = 1, \dots, k,$$

– уравнения квадрик $F_1, \dots, F_{k_1}$ и

$$f_i = q_{i,1} + q_{i,2} + q_{i,3}, \quad i = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2,$$

– уравнения кубик $F_{k_1+1}, \dots, F_k$, разложенные на однородные по z_* компоненты. Касательное пространство $T_o V \subset \mathbb{C}^{M+k}$ задается системой уравнений

$$q_{1,1} = \dots = q_{k,1} = 0.$$

Его проективизацию $\mathbb{P}(T_o V) \cong \mathbb{P}^{M-1}$ обозначим через $\mathbb{T}$. Положим $\bar{q}_{i,j} = q_{i,j}|_{\mathbb{T}}$. Введем следующие множества пар индексов:

$$J_1 = \{(i, 2) \mid 1 \leq i \leq k\}, \quad J_2 = \{(i, 3) \mid k_1 + 1 \leq i \leq k_1 + k_2\}$$

и $J = J_1 \cup J_2$. Первое (традиционное) условие регулярности формулируется следующим образом.

(R1) Система однородных уравнений

$$\{\bar{q}_{i,2} = 0 \mid 1 \leq i \leq k\} \quad (0.1)$$

задает в $\mathbb{T}$ замкнутое подмножество чистой коразмерности k , а система уравнений

$$\{\bar{q}_{i,j} = 0 \mid (i, j) \in J\} \quad (0.2)$$

задает в $\mathbb{T}$ или пустое множество, или конечное множество точек, линейно независимых в $\mathbb{T}$.

Последнее условие (о линейной независимости) добавлено к обычному условию регулярности [2], [3], которое требует лишь конечности множества (0.2). Понятно, что, если в точке o выполнено условие (R1), то на V лежат не более M прямых, проходящих через эту точку.

Второе условие регулярности было введено в [3].

(R2) Ни одна из неприводимых компонент замкнутого алгебраического множества (0.1) не содержится в линейном подпространстве коразмерности 2 в $\mathbb{T}$.

В [3] условие (R2) названо *правильностью в квадратичных членах*.

Формулировка третьего условия регулярности требует дополнительных построений. Предположим, что множество (0.2) непусто, и обозначим его через Δ . Пусть

$$\Sigma_1^{\mathbb{T}} = \langle \bar{q}_{i,2} \mid 1 \leq i \leq k \rangle$$

– линейная система квадрик на $\mathbb{T}$, $\Sigma_2^{\mathbb{T}}$ – линейная система кубик, состоящая из всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^k \bar{s}_i(z) \bar{q}_{i,2} + \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \lambda_i \bar{q}_{i,3},$$

где λ_i – константы, а $\bar{s}_i(z) = s_i(z)|_{\mathbb{T}}$ – линейные многочлены на $\mathbb{T}$. Пусть

$$\mathcal{P} = \underbrace{\Sigma_1^{\mathbb{T}} \times \dots \times \Sigma_1^{\mathbb{T}}}_{k-2} \times \underbrace{\Sigma_2^{\mathbb{T}} \times \dots \times \Sigma_2^{\mathbb{T}}}_{k_2-2}$$

– пространство всевозможных наборов многочленов $(g_1, \dots, g_{M-4})$, где первые $k-2$ многочленов принадлежат пространству $\Sigma_1^{\mathbb{T}}$, а последние k_2-2 – пространству $\Sigma_2^{\mathbb{T}}$.

Сформулирует теперь *третье* (и последнее) *условие регулярности*.

(R3) Для любого неприводимого подмногообразия $R \subset \mathbb{T}$ степени $d_R \geq 1$ коразмерности 3 существует непустое открытое по Зарисскому подмножество $U_R \subset \mathcal{P}$ такое, что для любого набора $(g_1, \dots, g_{M-4}) \in U_R$ справедливо неравенство

$$\sum_{p \in \Delta} \dim \mathcal{O}_{p,R}/(g_1, \dots, g_{M-4}) \leq 2^{k-4} 3^{k_2-1} d_R. \quad (0.3)$$

Отметим, что в силу условия (R1) для общего набора $(g_1, \dots, g_{M-4}) \in \mathcal{P}$ схема

$$(R \circ \{g_1 = 0\} \circ \dots \circ \{g_{M-4} = 0\})$$

нульмерна и потому имеет степень $2^{k-2} 3^{k_2-2} d_R$. Условие (R3) означает, что не более $3/4$ этой полной степени сосредоточено в точках множества Δ . Это очень сильное условие, потому что оно должно быть выполнено для *любого* подмногообразия R проективного пространства $\mathbb{T}$.

Пусть

$$\mathcal{F}_{\text{sm}} \subset \prod_{i=1}^{k_1} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2)) \times \prod_{i=k_1+1}^k H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3))$$

– пространство наборов $(f_1, \dots, f_k)$, задающих гладкое полное пересечение типа $2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$ в $\mathbb{P}$.

ТЕОРЕМА 0.2. *Существует непустое открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}_{\text{sm}}$ наборов $(f_1, \dots, f_k)$, для которых соответствующее полное пересечение $V(f_1, \dots, f_k) = \{f_1 = \dots = f_k = 0\} \subset \mathbb{P}$ удовлетворяет условиям регулярности (R1)–(R3) в каждой точке $o \in V$.*

Теперь можно уточнить основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть V – полное пересечение Фано типа $2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$ в $\mathbb{P}$, удовлетворяющее условиям регулярности (R1)–(R3) в каждой точке $o \in V$, а числа k_1, k_2 удовлетворяют предположениям теоремы 0.1. Тогда многообразие V бирационально сверхжесткое. В частности, справедливы утверждения (i)–(iii) теоремы 0.1.*

Очевидно, теорема 0.1 следует из теорем 0.2, 0.3, которые независимы друг от друга и будут доказаны по отдельности.

0.3. Структура статьи и исторические замечания. Теорема 0.3 доказана в § 1. Ее доказательство занимает несколько страниц и использует технику гиперкасательных линейных систем и $(8n^2)$ -неравенство. Кратко идею доказательства можно объяснить следующим образом. В предшествующих работах (см. [1]–[5] и библиографию в [1]) бирациональная сверхжесткость полных пересечений Фано доказывалась построением (исходя из самопересечения Z подвижной линейной системы Σ на V , обладающей максимальной особенностью) эффективного 1-цикла $Y \subset V$, удовлетворяющего неравенству

$$\text{mult}_o Y > \deg Y, \quad (0.4)$$

что, конечно, невозможно, и поэтому приводит предположение о существовании системы Σ к противоречию и доказывает бирациональную сверхжесткость многообразия V . Для полных пересечений квадрик и кубик эта конструкция напрямую не работает: техника гиперкасательных систем позволяет построить кривую $Y \subset V$, имеющую высокую кратность $\text{mult}_o Y$, которая, однако, не превосходит ее степени $\deg Y$, и такого противоречия не получается.

Несложно показать, что неприводимая кривая $C \subset V$, *отличная от прямой* (т. е. кривая степени $\deg C \geq 2$), удовлетворяет существенно более сильному неравенству, чем неравенство, противоположное (0.4): справедлива оценка

$$\text{mult}_o C \leq \frac{2}{3} \deg C. \quad (0.5)$$

Разбивая эффективный 1-цикл Y на два подцикла:

$$Y = Y_1 + Y_{\geq 2},$$

где Y_1 сосредоточен на прямых, проходящих через точку o , а $Y_{\geq 2}$ – на кривых степени не менее 2, видим, что описанная выше стратегия доказательства приводит к успеху, если подцикл Y_1 *не слишком большой*, т. е. отношение $\deg Y_1 / \deg Y$ достаточно мало. Использование более точной оценки (0.5) для подцикла $Y_{\geq 2}$ позволяет получить противоречие и доказать бирациональную жесткость. Это возможно при условии, что техника гиперкасательных дивизоров, примененная к самопересечению Z линейной системы Σ (или к некоторой неприводимой компоненте этого самопересечения), дает эффективный 1-цикл Y , содержащий “не слишком много прямых”. Доказательство теоремы 0.3, реализующее описанную выше стратегию, дано в § 1.

Основная часть статьи, § 2–5, посвящена оценке количества прямых (с учетом кратностей), возникающих в результате пересечения произвольного неприводимого подмногообразия с гиперкасательными дивизорами. В § 2–4 рассматривается локальная задача: оценивается кратность пересечения общего набора многочленов из заданной линейной системы с произвольным эффективным циклом в фиксированной точке. В § 5 задача глобализуется: оценивается сумма локальных кратностей пересечения по базисным точкам линейной системы и на этой основе доказывается теорема 0.2.

Теория бирациональной жесткости полных пересечений Фано имеет долгую историю, начинающуюся с работы Дж. Фано [6], изучавшего полные пересечения $V_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ квадрики и кубики и полные пересечения трех квадрик $V_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$. Фано дал (как выяснилось позднее, неполное [7]) описание образующих группы бирациональных автоморфизмов $\text{Bir } V_{2,3}$ и сформулировал теорему о нерациональности для обоих классов многообразий. Как обнаружилось позднее [8], его рассуждения содержали многочисленные ошибки и пробелы и не могут рассматриваться даже как первое приближение к строгому доказательству. Вместе с тем, в работах Фано были намечены многие важные идеи и конструкции, впоследствии получившие дальнейшее развитие в бирациональной геометрии (такие, как “двойная проекция” или неравенство Нётера–Фано).

В 1970 г. в пионерской работе В. А. Исковских и Ю. И. Манина [8] было дано первое строгое доказательство бирациональной сверхжесткости (в современной терминологии) для одного класса трехмерных многообразий Фано – гладких трехмерных квартик $V_4 \subset \mathbb{P}^4$. С минимальными изменениями (к тому же относящимися к более легкой части доказательства – исключению или откручиванию максимальных кривых, лежащих на самом многообразии) доказательство В. А. Исковских и Ю. И. Манина было применимо для двойных пространств Фано $V_2 \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^3$ индекса 1 и двойных квадрик $V_4 \xrightarrow{2:1} Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ индекса 1 (см. [7]). Однако доказательство бирациональной жесткости и описание группы бирациональных автоморфизмов многообразия $V_{2,3}$ (анонсированное в [9]) оказалось намного более трудной задачей. *Метод пробного класса*, развитый в [8], успешно применялся лишь к гладким многообразиям степени не выше 4, и уже степень $\deg V_{2,3} = 6$ оказалась серьезным препятствием. Рассуждения из работы [7], использованные для исключения бесконечно близкой максимальной особенности [7, п. 4.8, шаг 3], ошибочны, и этот, наиболее важный, этап доказательства оставался открытой задачей до 1987 г. [10] (полное доказательство теоремы о бирациональной жесткости общего полного пересечения квадрики и кубики размерности 3 см. в [11]). Задача описания структур рационально связного расслоения и группы бирациональных автоморфизмов многообразия $V_{2,2,2}$ до сих пор открыта. (Отметим, что бирациональная геометрия полных пересечений Фано изучалась и трансцендентным методом; таких работ немного; см. [12]–[14].)

Работа по развитию техники, обобщающей конструкцию пробного класса В. А. Исковских и Ю. И. Манина для многообразий произвольной размерности, была начата в [15], [16]. Развитых в [15] идей достаточно для доказательства бирациональной сверхжесткости общих полных пересечений квадрики и квартики $V_{2,4} \subset \mathbb{P}^6$ размерности 4 индекса 1. Этот результат был анонсирован в 1985 г., но полное доказательство не было опубликовано. (Позднее, в [17], бирациональная сверхжесткость полных пересечений квадрики и квартики, не содержащих плоскостей, была доказана с помощью $(8n^2)$ -неравенства, однако известное к тому времени доказательство последнего неравенства оказалось ошибочным и окончательное доказательство было получено позднее; см. историю вопроса в [18].)

Замена метода пробного класса методом подсчета кратностей, введение техники гиперкасательных дивизоров и некоторых других идей [4] позволили доказать бирациональную сверхжесткость гиперповерхностей Фано индекса 1, а затем и общих полных пересечений $V_{d_1, \dots, d_k} \subset \mathbb{P}^{M+k}$ индекса 1 при $M \geq 2k+1$, $\dim V \geq 4$ [2]. Следующим шагом в развитии этой проблематики было систематическое использование принципа связности Шокурова–Коллара [19] и доказательство $(8n^2)$ -неравенства, на основе которого бирациональная сверхжесткость была доказана для более широкого класса полных пересечений с $M \geq k+3$, $d_k \geq 4$ [3]. Последняя статья является уже непосредственной предшественницей настоящей работы: здесь мы снимаем ограничение $d_k \geq 4$. Как отмечено выше, теперь вопрос о бирациональной жесткости (сверхжесткости) остается открытым для совсем немногих классов полных пересечений

Фано индекса 1. Гипотеза о бирациональной жесткости (сверхжесткости) произвольных гладких полных пересечений Фано индекса 1 неоднократно высказывалась автором (см., например, [20]).

Метод максимальных особенностей позволяет доказывать бирациональную сверхжесткость и многообразий, расслоенных над проективной прямой $\mathbb{P}^1$ на полные пересечения Фано [21], [22], но это уже другая тема.

Работа над задачей, решение которой составляет содержание настоящей статьи, была завершена весной 2012 г. Насколько было известно автору, задача об оценке кратности общего набора многочленов в подмногообразии заданной коразмерности до сих пор не рассматривалась. Однако А. Г. Хованский сообщил автору в июне 2012 г., что другая, но близкая задача об оценке кратности изолированного решения системы n уравнений

$$\phi_1 = \dots = \phi_n = 0$$

от n комплексных переменных для набора $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ в кольце нётеровых функций $K \supset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, конечно порожденном над $\mathbb{C}[z_*]$ и замкнутым относительно дифференцирований, изучалась в [23]. В последней работе оценка была получена в терминах инвариантов кольца K с помощью методов, существенно отличающихся от алгебро-геометрической техники, использованной в § 2–4: редукции к одномерной задаче ограничения многочлена на траекторию полиномиального векторного поля через оценку сложности интегрального многообразия аналитической вектор-функции и использования деформаций. В нашей работе рассмотрена менее общая (и, вообще, несколько другая) задача, но получена значительно более сильная и (что особенно важно для приложений к бирациональной геометрии) эффективная оценка кратности, которая не является следствием оценок, полученных в [23].

Метод решения, предложенный в настоящей работе (т. е. метод доказательства теоремы 0.2), является новым. В упрощенном варианте (для системы N полиномиальных уравнений от N переменных без привлечения эффективного цикла R заданной степени) он был опубликован в [24].

Тот факт, что задача оценки кратности (изолированного) решения n уравнений от n переменных возникает в разных контекстах, требует привлечения разных типов техники и имеет различные приложения, является замечательным; автор благодарит А. Г. Хованского за указание на работу [23].

§ 1. Доказательство бирациональной жесткости

В настоящем параграфе доказана теорема 0.3.

1.1. Начало доказательства; $(8n^2)$ -неравенство. Начало доказательства теоремы 0.3 стандартно. Зафиксируем полное пересечение $V \subset \mathbb{P}$, удовлетворяющее предположениям теоремы, и подвижную линейную систему $\Sigma \subset |nH|$ (где, напомним, H – класс гиперплоского сечения многообразия V), обладающую максимальной особенностью [1]. Последнее означает, что для некоторого бирационального морфизма $\varphi: V^\sharp \rightarrow V$, где $V^\sharp$ – неособое проективное многообразие, и исключительного дивизора $E^\sharp \subset V^\sharp$ (максимальной

особенности) справедливо *неравенство Нётера–Фано*

$$\text{ord}_{E^\sharp} \varphi^* \Sigma > na(E^\sharp, V).$$

Неприводимое подмногообразие $B = \varphi(E^\sharp) \subset V$ называется *центром* максимальной особенности $E^\sharp$. Справедливо неравенство $\text{mult}_B \Sigma > n$. Для коразмерности подмногообразия B имеются три возможности:

- (i) $\text{codim } B = 2$,
- (ii) $\text{codim } B = 3$,
- (iii) $\text{codim } B \geq 4$.

Как показано, например, в [2] (это рассуждение можно найти во многих работах по бирациональной жесткости), возможность (i) не реализуется, так как для *численной* группы Чжоу имеем $A^2 V = \mathbb{Z} H^2$. Возможность (ii) исключена, например, в [3]. Поэтому будем предполагать, что $\text{codim } B \geq 4$.

Сначала наши рассуждения почти дословно повторяют доказательство теоремы 3 в [3, § 3]. Предполагаем, что коразмерность подмногообразия B минимальна среди всех центров максимальных особенностей системы Σ ; в частности, B не содержится строго в центре другой максимальной особенности, если таковые существуют. Возьмем точку общего положения $o \in B$. Пусть $\lambda: V^+ \rightarrow V$ – ее раздутие; $E = \lambda^{-1}(o) \cong \mathbb{P}^{M-1}$ – исключительный дивизор; Σ^+ – собственный прообраз подвижной системы Σ на V^+ ; $Z = (D_1 \circ D_2)$ и Z^+ – соответственно самопересечение системы Σ и его собственный прообраз на V^+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 ($(8n^2)$ -неравенство). *Существует линейное подпространство $P \subset E$ коразмерности 2, удовлетворяющее неравенству*

$$\text{mult}_o Z + \text{mult}_P Z^+ > 8n^2.$$

Если $\text{mult}_o Z \leq 8n^2$, то линейное подпространство P однозначно определено системой Σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дано в [18, п. 4.1].

Пусть $\Lambda \supset P$ – общая гиперплоскость в $E \cong \mathbb{P}^{M-1}$, содержащая подпространство P , $L \in |H|$ – общее гиперплоское сечение, содержащее точку o и такое, что $L^+ \cap E = \Lambda$, где L^+ – собственный прообраз дивизора L на V^+ . В силу общности выбора Λ и L ни одна неприводимая компонента цикла Z не содержится в L , так что теоретико-схемное пересечение $Z_L = (Z \circ L)$ корректно определено. Эффективный цикл Z_L коразмерности 3 удовлетворяет неравенствам

$$\text{mult}_o Z_L \geq \text{mult}_o Z + \text{mult}_P Z^+ > 8n^2$$

и равенствам $\deg Z_L = \deg Z = dn^2$, где $d = 2^{k_1} 3^{k_2}$ – степень полного пересечения V . Поэтому существует неприводимое подмногообразие $Q \subset V$ коразмерности 3 (неприводимая компонента цикла Z_L), удовлетворяющее оценке

$$\frac{\text{mult}_o Q}{\deg Q} > \frac{8}{d}. \quad (1.1)$$

Пусть $Q_E = (Q^+ \circ E) = \sum_{i \in I} m_i R_i$ – проективизированный касательный конус к подмногообразию Q в точке o (здесь $Q^+ \subset V^+$ – собственный прообраз подмногообразия Q , подмногообразия $R_i \subset E$ – неприводимые компоненты эффективного цикла Q_E , $m_i \geq 1$; здесь и всюду в настоящей работе конструкции элементарной теории пересечений понимаются в смысле [25]). Применим теперь к подмногообразию $Q \subset V$ технику гиперкасательных дивизоров так, как это было сделано в [3], но с небольшой модификацией. А именно, на каждом шаге при пересечении с касательным (гиперкасательным) дивизором будем отбрасывать лишь возникающие неприводимые компоненты, не содержащие точку o .

1.2. Техника гиперкасательных дивизоров. Пусть

$$\Sigma_1 = \{\lambda_1 q_{1,1}|_V + \dots + \lambda_k q_{k,1}|_V\}$$

– k -мерное пространство уравнений касательных гиперплоскостей в точке o . В силу условия (R1) для любого ненулевого набора $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ соответствующий касательный дивизор

$$T(\lambda_*) = \{\lambda_1 q_{1,1}|_V + \dots + \lambda_k q_{k,1}|_V = 0\}$$

удовлетворяет равенству

$$T^E(\lambda_*) = (T^+(\lambda_*) \circ E) = \{\lambda_1 \bar{q}_{1,2} + \dots + \lambda_k \bar{q}_{k,2} = 0\}.$$

В частности, положим $T_i = \{q_{i,1}|_V = 0\}$. Поскольку никакая неприводимая компонента эффективного цикла $(T_1^E \circ \dots \circ T_k^E)$ коразмерности k в силу условия (R2) не содержится в линейном подпространстве коразмерности 2 в E , имеем равенство

$$\text{codim}_E(T_1^E \cap \dots \cap T_k^E \cap \Lambda) = k + 1. \quad (1.2)$$

Носитель построенного выше цикла Q_E содержится в гиперплоскости Λ . В силу равенства (1.2) для $k - 2$ общих дивизоров $D_{1,1}, \dots, D_{1,k-2}$ в линейной системе Σ_1 справедливо равенство

$$\text{codim}_E(Q_E \cap D_{1,1}^E \cap \dots \cap D_{1,k-2}^E) = k + 1,$$

где $D_{1,i}^E = (D_{1,i}^+ \circ E)$. Следовательно, в окрестности точки o мы также имеем

$$\text{codim}_o(Q \cap D_{1,1} \cap \dots \cap D_{1,k-2}) = k + 1. \quad (1.3)$$

Построим теперь следующую последовательность эффективных циклов Q_i , где $i = 0, 1, \dots, k - 2$:

(i) $Q_0 = Q$,

(ii) Q_{i+1} получается удалением из эффективного цикла $(Q_i \circ D_{1,i+1})$ всех неприводимых компонент, не содержащих точку o .

Эта процедура корректно определена: поскольку все компоненты каждого из циклов Q_i содержат точку o , в силу равенства (1.3) никакая компонента цикла Q_i не содержится в дивизоре $D_{1,i+1}$. В частности, $\text{codim } Q_i = i + 3$ для

$i = 0, \dots, k-2$. Степень $\deg Q_i$ не возрастает (уменьшается, если какие-то компоненты действительно отбрасываются в процессе построения), так что $\deg Q_{k-2} \leq \deg Q$, а для кратности в точке o имеем равенство

$$\text{mult}_o Q_{k-2} = 2^{k-2} \text{mult}_o Q.$$

Рассмотрим теперь гиперкасательную линейную систему

$$\Sigma_2 = \left\{ h(z)|_V = \sum_{i=1}^k s_i(z) q_{i,1}|_V + \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \lambda_i (q_{i,1} + q_{i,2})|_V \right\}.$$

Очевидно, $\Sigma_2^+ \subset |2H - 3E|$: проективизированный касательный конус дивизора $h|_V = 0$ в точке o задается уравнением

$$-\left(\sum_{i=1}^k \bar{s}_i \bar{q}_{i,2} + \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \lambda_i \bar{q}_{i,3} \right) \in \Sigma_2^{\mathbb{T}}.$$

Пусть $(D_{2,1}, \dots, D_{2,k_2-2}) \in \Sigma_2^{\times(k_2-2)}$ — общий набор $k_2 - 2$ гиперкасательных дивизоров. В силу условия (R1) замкнутое множество

$$Q_E \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-2} D_{1,i}^E \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k_2-2} D_{2,i}^E \right)$$

нульмерно, так что замкнутое множество

$$Q \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-2} D_{1,i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k_2-2} D_{2,i} \right)$$

одномерно в окрестности точки o . Продолжим построение цепочки эффективных циклов Q_i , $i = k-2, \dots, M-4$, где Q_{k-2} уже построен, а Q_{i+1} получается удалением из эффективного цикла $(Q_i \circ D_{2,i+3-k})$ всех неприводимых компонент, не содержащих точку o .

Положим $C = Q_{M-4}$. Это эффективный 1-цикл, причем каждая его компонента содержит точку o . Имеем $\deg C \leq 2^{k_2-2} \deg Q$, а для кратности в точке o справедливо равенство

$$\text{mult}_o C = 2^{k-2} 3^{k_2-2} \text{mult}_o Q.$$

Учитывая выбор подмногообразия Q , имеем

$$\frac{\text{mult}_o C}{\deg C} > \frac{2^{k-2} 3^{k_2-2}}{2^{k_2-2}} \frac{8}{d} = \frac{8}{9}.$$

Эта оценка, очевидно, очень сильная, но все же она не позволяет получить противоречие: любая прямая, проходящая через точку o , удовлетворяет этому неравенству. Воспользуемся теперь условием (R3), ограничивающим вклад прямых в эффективный цикл C .

1.3. Эффективный 1-цикл, свободный от прямых. Запишем теперь $C = C_1 + C_{\geq 2}$, где носитель эффективного 1-цикла C_1 состоит из прямых, а носитель эффективного 1-цикла $C_{\geq 2}$ – из кривых степени ≥ 2 . Очевидно, $\text{mult}_o C_1 = \deg C_1$.

ЛЕММА 1.1. *Для любой неприводимой кривой $\Gamma \subset V$ степени $\deg \Gamma \geq 2$ выполнено неравенство*

$$\text{mult}_o \Gamma \leq \frac{2}{3} \deg \Gamma. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (R1) система однородных уравнений в пространстве $\mathbb{C}^{M+k}$

$$q_{*,*}(z) = 0,$$

состоящая из всех неприводимых компонент всех k уравнений f_i , задает либо начало координат $o \in \mathbb{C}^{M+k}$, либо конечное множество прямых, проходящих через точку o . Очевидно, прямая $t(a_1, \dots, a_{M+k})$ лежит на V тогда и только тогда, когда $q_{i,j}(a_*) = 0$ для всех i, j . Предположим, что кривая $\Gamma \ni o$ не является прямой и удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_o \Gamma > \frac{2}{3} \deg \Gamma.$$

Ясно, что Γ содержится в носителе любого касательного дивизора $D \in \Sigma_1$ (т. е. такого дивизора, что $D^+ \in |H - 2E|$) и гиперкасательного дивизора $D \in \Sigma_2$ (т. е. $D^+ \in |2H - 3E|$). Следовательно, на кривой Γ тождественно обращаются в нуль многочлены

$$\begin{aligned} q_{i,1}, \quad i &= 1, \dots, k, \\ q_{i,1} + q_{i,2}, \quad i &= k_1 + 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку $\Gamma \subset V$, на этой кривой тождественно обращаются в нуль многочлены

$$\begin{aligned} f_i &= q_{i,1} + q_{i,2}, \quad i = 1, \dots, k_1, \\ f_i &= q_{i,1} + q_{i,2} + q_{i,3}, \quad i = k_1 + 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Закключаем, что все однородные многочлены $q_{i,j}$ обращаются в нуль на Γ . Тогда Γ – прямая. Противоречие. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Имеет место оценка*

$$\text{mult}_o C_{\geq 2} \leq \frac{2}{3} \deg C_{\geq 2}.$$

Для завершения доказательства теоремы 0.3 осталось оценить сверху вклад прямых в 1-цикл C , т. е. отношение $\deg C_1 / \deg C$.

Рассмотрим общие касательные дивизоры $D_{1,i}$, использованные для построения кривой C . Если

$$(\lambda_{1,i} q_{1,1} + \lambda_{2,i} q_{2,1} + \dots + \lambda_{k,i} q_{k,1})|_V = 0$$

– уравнение дивизора $D_{1,i}$, то, очевидно,

$$g_i := -(\lambda_{1,i}\bar{q}_{1,2} + \lambda_{2,i}\bar{q}_{2,2} + \cdots + \lambda_{k,i}\bar{q}_{k,2}) \in \Sigma_1^{\mathbb{T}}$$

– уравнение его проективизированного касательного конуса. Таким образом, $(g_1, \dots, g_{k-2})$ образуют общий набор, т.е. общий элемент пространства $(\Sigma_1^{\mathbb{T}})^{\times(k-2)}$. Аналогично, проективизированный касательный конус дивизора $D_{2,i}$, $i = 1, \dots, k_2 - 2$, имеет уравнение

$$g_{k-2+i} = \sum_{j=1}^k \bar{s}_j \bar{q}_{j,2} + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} \lambda_j \bar{q}_{j,3} \in \Sigma_2^{\mathbb{T}}$$

(для упрощения записи мы опускаем в правой части равенства у $\bar{s}_j$ и λ_j второй индекс, показывающий зависимость от номера i дивизора $D_{2,i}$), причем $(g_1, \dots, g_{M-4})$ – общий элемент пространства $\mathcal{P}$. Поскольку на каждом шаге построения кривой C пересечение с касательным (гиперкасательным) дивизором $D_{i,j}$ собственное, нульмерный цикл $C_E = (C^+ \circ E)$ есть теоретико-схемное пересечение

$$(Q_E \circ D_{1,1} \circ \cdots \circ D_{1,k-2} \circ D_{2,1} \circ \cdots \circ D_{2,k_2-2}),$$

т.е. имеет место равенство 0-циклов

$$(C_1^+ \circ E) + (C_{\geq 2}^+ \circ E) = \sum_{i \in I} m_i (R_i \circ D_{1,1} \circ \cdots \circ D_{2,k_2-2}),$$

в правой части равенства стоит теоретико-схемное пересечение со всеми $M - 4$ касательными (гиперкасательными) дивизорами $D_{i,j}$, участвовавшими в построении 1-цикла C . Для любой прямой $L \subset V$, проходящей через точку o , в обозначениях п. 0.2 имеем

$$(L^+ \cap E) \in \Delta$$

(множество Δ состоит в точности из касательных направлений всех прямых на V , проходящих через точку o). Следовательно, носитель 0-цикла $(C_1^+ \circ E)$ есть подмножество конечного множества Δ . В силу условия (R3), т.е. оценки (0.3), имеем

$$\sum_{p \in \Delta} \sum_{i \in I} m_i \dim \mathcal{O}_{p, R_i} / (g_1, \dots, g_{M-4}) \leq 2^{k-4} 3^{k_2-1} \text{mult}_o Q,$$

поскольку, очевидно, степень эффективного цикла Q_E коразмерности 3 на E есть в точности $\text{mult}_o Q$. Тем более,

$$\delta = \deg(C_1^+ \circ E) = \deg C_1 \leq 2^{k-4} 3^{k_2-1} \text{mult}_o Q. \quad (1.5)$$

Таким образом, для 1-цикла $C_{\geq 2}$ справедливы равенство

$$\text{mult}_o C_{\geq 2} = 2^{k-2} 3^{k_2-3} \text{mult}_o Q - \delta$$

и неравенство

$$\deg C_{\geq 2} \leq 2^{k_2-2} \deg Q - \delta.$$

Несложными вычислениями из неравенства (1.4) получаем оценку

$$\delta \geq 2^{k-2} 3^{k_2-1} \operatorname{mult}_o Q - 2^{k_2-1} \deg Q.$$

Комбинируя последнее неравенство с (1.5), получаем окончательно

$$2^{k_2-1} \deg Q \geq 2^{k-4} 3^{k_2} \operatorname{mult}_o Q.$$

Учитывая, что $k = k_1 + k_2$ и $d = 2^{k_1} 3^{k_2}$, получаем отсюда неравенство

$$\operatorname{mult}_o Q \leq \frac{8}{d} \deg Q,$$

противоречащее неравенству (1.1). Полученное противоречие исключает третью (последнюю) возможность $\operatorname{codim} B \geq 4$ и завершает доказательство теоремы 0.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Во всех предшествовавших работах (см., например, [1], [4], [5], [20]) техника гиперкасательных дивизоров использовалась несколько иначе: на каждом шаге при пересечении с гиперкасательным дивизором выделялась неприводимая компонента с максимальным отношением $\operatorname{mult}_o / \deg$, остальные компоненты теоретико-схемного пересечения игнорировались. В приведенном выше рассуждении для оценки вклада прямых на последнем шаге необходимо было контролировать весь цикл пересечения, а не только одну из его компонент. Этот тип рассуждений годится и для предшествующих задач: можно не выделять компоненту с максимальным отношением $\operatorname{mult}_o / \deg$, а рассматривать целиком цикл теоретико-схемного пересечения, отбрасывая лишь компоненты, не содержащие точку o (поскольку условия регулярности гарантируют корректность процедуры пересечения с гиперкасательными дивизорами лишь в окрестности этой точки).

§ 2. Локальные кратности. I. Пространства наборов многочленов

В этом параграфе дана точная постановка задачи об оценке локальной кратности: введено пространство наборов многочленов, определены локальные эффективные кратности пересечения и сформулирован основной результат (теорема 2.1). Развиваемая в этом и последующих двух параграфах теория не зависима от построений, приведенных в § 1, и имеет замкнутый характер. Обозначения также не зависят от § 1.

2.1. Наборы многочленов и эффективные кратности. Зафиксируем комплексное координатное пространство $\mathbb{C}_{(z_1, \dots, z_N)}^N$, $N \geq 1$, которое считаем вложенным в проективное пространство $\mathbb{P}_{(x_0: x_1: \dots: x_N)}^N$ в качестве стандартной аффинной карты $\{x_0 \neq 0\}$, т. е. $z_i = x_i / x_0$. Через $\mathcal{P}_{d,N}$ обозначим пространство однородных многочленов степени $d \geq 1$ от переменных z_* . Положим для $e \leq d$

$$\mathcal{P}_{[e,d],N} = \bigoplus_{i=e}^d \mathcal{P}_{i,N},$$

например $\mathcal{P}_{[1,d],N}$ – пространство многочленов степени не выше d без свободного члена. На каждом из этих пространств действует матричная группа $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ линейных замен переменных. Пусть

$$\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)} = \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2} = \prod_{i=1}^{n_1} \mathcal{P}_{[1,2],N} \times \prod_{i=1}^{n_2} \mathcal{P}_{[1,3],N}$$

– пространство наборов $(f_1, \dots, f_{n_1}, f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2})$ многочленов, где первые n_1 многочленов имеют степень не выше 2 и следующие n_2 многочленов имеют степень не выше 3. Все многочлены обращаются в нуль в точке $o = (0, \dots, 0)$. Предполагаем, что выполнено равенство $n_1 + n_2 = N$.

Для эффективного цикла R чистой коразмерности l на $\mathbb{P}^N$ и набора многочленов $(f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ определим *эффективную кратность*

$$\mu_R(f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$$

следующим образом. Если $o \notin \mathrm{Supp} R$, то полагаем $\mu_R(f_*) = 0$. Если замкнутое множество

$$Z_R(f_1, \dots, f_N) = \{f_1 = \dots = f_N = 0\} \cap R$$

имеет в точке o положительную размерность, то положим $\mu_R(f_*) = \infty$. Если ни один из этих двух случаев не реализуется, то $\mu_R(f_*)$ – целое положительное число, для определения которого нужны дополнительные построения. Пусть

$$\Sigma_1(f_*) = \langle f_1, \dots, f_{n_1} \rangle \subset \mathcal{P}_{[1,2],N}$$

– линейная оболочка квадратичных многочленов. Пусть

$$\Sigma_{12}(f_*) = \langle f_1 \mathcal{P}_{[0,1],N}, \dots, f_{n_1} \mathcal{P}_{[0,1],N} \rangle \subset \mathcal{P}_{[1,3],N}$$

– линейное пространство всех линейных комбинаций многочленов $f_1, \dots, f_{n_1}$ с коэффициентами, являющимися многочленами степени не выше 1 от z_* . В частности, имеет место включение $\Sigma_1 \subset \Sigma_{12}$. Пусть

$$\Sigma_{22}(f_*) = \langle f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2} \rangle \subset \mathcal{P}_{[1,3],N}$$

– линейная оболочка кубических многочленов и

$$\Sigma_2(f_*) = \Sigma_{12}(f_*) + \Sigma_{22}(f_*) \subset \mathcal{P}_{[1,3],N}$$

– сумма этих подпространств. Определим *полиномиальную оболочку*

$$[f_1, \dots, f_N] \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$$

набора (f_*) как множество всех таких наборов $(f_1^\sharp, \dots, f_N^\sharp)$, что $f_1^\sharp, \dots, f_{n_1}^\sharp \in \Sigma_1(f_*)$ и $f_{n_1+1}^\sharp, \dots, f_{n_1+n_2}^\sharp \in \Sigma_2(f_*)$. Очевидно, $[f_*]$ – замкнутое неприводимое подмножество пространства $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$.

Теперь для неприводимого подмногообразия $R \subset \mathbb{P}^N$ коразмерности l , $R \ni o$, положим

$$\mu_R(f_1, \dots, f_N) = \dim \mathcal{O}_{o,R} / (f_{l+1}^\sharp, \dots, f_N^\sharp),$$

где $(f_1^\sharp, \dots, f_N^\sharp) \in [f_1, \dots, f_N]$ – общий набор. Для произвольного эффективного цикла $R = \sum_{j \in J} r_j R_j$ чистой коразмерности l определим $\mu_R(f_*)$ по линейности, полагая

$$\mu_R(f_*) = \sum_{j \in J} r_j \mu_{R_j}(f_*).$$

Приведенное определение эквивалентно следующему, применимому для любого эффективного цикла коразмерности l , определению:

$$\mu_R(f_*) = \text{mult}_o(\{f_{l+1}^\sharp = 0\} \circ \dots \circ \{f_N^\sharp = 0\} \circ R),$$

в скобках стоит эффективный нульмерный цикл теоретико-схемного пересечения гиперповерхностей $\{f_i^\sharp = 0\}$, где $i = l + 1, \dots, N$, и цикла R в окрестности точки o .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Образование полиномиальной оболочки $[f_*]$ является необходимым шагом в определении эффективной кратности, так как отдельные компоненты цикла R и проецивизированного касательного конуса к R в точке o могут целиком содержаться в дивизорах $\{f_i = 0\}$. Поэтому числа вида

$$\dim \mathcal{O}_{o,R}/(f_{i_1}, \dots, f_{i_{N-l}})$$

могут оказаться строго бóльшими, чем правильно определенная выше эффективная кратность, даже если R – неприводимое подмногообразие, не содержащееся в гиперповерхностях $\{f_i = 0\}$.

2.2. Многообразия Чжоу и локальные эффективные кратности.

Через $\mathbb{H}_{l,N}(d)$ обозначим многообразие Чжоу, параметризующее эффективные циклы чистой коразмерности l степени d на $\mathbb{P}^N$. Рассмотрим множества

$$\mathcal{X}_{l,N}(m, d) \subset \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2} \times \mathbb{H}_{l,N}(d),$$

состоящие из таких наборов $((f_1, \dots, f_N), R)$, что

$$\mu_R(f_1, \dots, f_N) \geq m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{X}_{l,N}(m, d)$ – замкнутое алгебраическое множество. Обозначая через $\pi_{\mathcal{P}}$ проекцию

$$((f_1, \dots, f_N), R) \mapsto (f_1, \dots, f_N),$$

ввиду проективности многообразий Чжоу получаем, что

$$X_{l,N}(m, d) = \pi_{\mathcal{P}}(\mathcal{X}_{l,N}(m, d)) \subset \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2}$$

– замкнутое алгебраическое множество. В явном виде оно состоит из таких наборов $(f_1, \dots, f_N)$, для которых существует эффективный цикл $R \in \mathbb{H}_{l,N}(d)$, удовлетворяющий неравенству $\mu_R(f_1, \dots, f_N) \geq m$.

Пусть $B \subset \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2}$ – неприводимое подмногообразие. Определим локальную эффективную кратность, полагая

$$\mu_{l,N}^{\text{local}}(B, d) = \mu_{l,N}(B, d) = \max_{m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}} \{m \mid B \subset X_{l,N}(m, d)\}.$$

Явная расшифровка этого определения такова: $\mu_{l,N}(B, d) = m$, если для общего набора $(f_*) \in B$ и любого эффективного цикла $R \in \mathbb{H}_{l,N}(d)$ справедливо неравенство

$$\mu_R(f_1, \dots, f_N) \leq m$$

и для по крайней мере одного цикла $R \in \mathbb{H}_{l,N}(d)$ это неравенство превращается в равенство. Понятно, что если $\mu_{l,N}(B, d) = \infty$, то для общего (и, тем самым, любого) набора $(f_1, \dots, f_N)$ множество его нулей $Z(f_1, \dots, f_N)$ имеет компоненту положительной размерности, проходящую через точку o . Верно и обратное: если имеется такая компонента, в качестве R можно взять такое подмногообразие, что $\dim(R \cap Z(f_*)) \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для любого $d \geq 1$ имеет место равенство*

$$\text{codim } X_{l,N}(\infty, d) = n_1 + 2n_2 + 1.$$

Доказательство предложения 2.1 приведено в § 5.

Поскольку в § 2–4 рассматриваются только локальные кратности, для упрощения записи опускаем указание на локальность: записываем μ вместо μ^{local} или μ_{local} ; в § 5 будут определены глобальные кратности μ_{total} и для локальных кратностей будет использовано обозначение μ^{local} или μ_{local} .

Положим, наконец, $\mu_{l,N}(a, d) = m$ для $a \in \mathbb{Z}_+$, если существует такое неприводимое подмногообразие $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ коразмерности не больше a , что справедливо равенство $\mu_{l,N}(B, d) = m$ и выполнено неравенство

$$\text{codim } X_{l,N}(m+1, d) \geq a+1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу данных выше определений справедливость неравенства $\mu_{l,N}(a, d) \leq m$ означает, что $\text{codim } X_{l,N}(m+1, d) \geq a+1$. В явном виде: множество таких наборов $(f_*) \in \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$, что существует эффективный цикл R коразмерности l степени d , удовлетворяющий неравенству $\mu_R(f_1, \dots, f_N) \geq m+1$, имеет в пространстве $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ коразмерность не меньше, чем $a+1$.

Очевидно, в силу предложения 2.1 для любого $a \geq n_1 + 2n_2 + 1$ имеем $\mu_{l,N}(a, d) = \infty$ и для $a \leq n_1 + 2n_2$ имеем $\mu_{l,N}(a, d) < \infty$. С этого момента предполагаем, что $a \leq n_1 + 2n_2$. (В дальнейшем нас будет интересовать, главным образом, случай $a = n_1 + n_2 = N$.)

По построению множества $X_{l,N}(m, d)$ инвариантны относительно линейных замен координат (группа $\text{GL}_N(\mathbb{C})$). Кроме того, эти множества инвариантны относительно действия другой группы $G(n_1, n_2)$ на пространстве $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$, которое мы сейчас определим. Группа $G(n_1, n_2)$ является расширением

$$\begin{array}{c} 1 \longrightarrow \mathcal{P}_{[0,1],N}^{\times(n_1, n_2)} \longrightarrow G(n_1, n_2) \rightarrow \text{GL}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \text{GL}_{n_2}(\mathbb{C}) \rightarrow 1 \\ \parallel \\ \mathbb{C}^{n_1 n_2 (N+1)} \end{array}$$

Точнее, элементу $g \in G(n_1, n_2)$ соответствует тройка матриц (A_{11}, A_{12}, A_{22}) , где

$$A_{11} \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C}), \quad A_{22} \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C}), \quad A_{12} \in \mathrm{Mat}_{(n_1, n_2)}(\mathcal{P}_{[0,1],N}).$$

Полагая

$$\begin{aligned} A_{11} &= \|\alpha_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq n_1}, & A_{22} &= \|\beta_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq n_2}, \\ A_{12} &= \|\gamma_{ij}(z_1, \dots, z_N)\|_{1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2}, \end{aligned}$$

определим действие

$$g: f = (f_1, \dots, f_N) \mapsto f^g = (f_1^g, \dots, f_N^g) \in \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$$

формулами

$$\begin{aligned} f_i^g &= \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} f_j, & i &= 1, \dots, n_1, \\ f_{n_1+i}^g &= \sum_{j=1}^{n_2} \beta_{ij} f_{n_1+j} + \sum_{i=1}^{n_1} \gamma_{ij}(z_*) f_i, & j &= 1, \dots, n_2. \end{aligned}$$

Замкнутое подмножество $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ назовем *биинвариантным*, если оно инвариантно относительно действия обеих групп, $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ (замены координат) и $G(n_1, n_2)$. В частности, множества $X_{l,N}(m, d)$ биинвариантны (кратности $\mu_R(f_*)$ очевидным образом инвариантны относительно действия обеих групп). Отметим, что группа $G(n_1, n_2)$ содержит подгруппу $\overline{G}(n_1, n_2) \subset \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$, соответствующую наборам матриц (A_{11}, A_{12}, A_{22}) , где

$$A_{12} \in \mathrm{Mat}_{(n_1, n_2)}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_{(n_1, n_2)}(\mathcal{P}_{[0,1],N}).$$

2.3. Приведение к стандартной форме. Для неприводимого подмногообразия $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ определим его *тип*

$$\tau(B) = ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \mathbb{Z}_+^4,$$

полагая $a_1 = \mathrm{codim}(\mathrm{pr}_1(B) \subset \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1})$, где $\mathrm{pr}_1: \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)} \rightarrow \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1}$ — проекция на первые n_1 прямых сомножителей; $a_2 = a - a_1$, где $a = \mathrm{codim}(B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)})$;

$$b_1 = n_1 - \mathrm{rk}(df_1(o), \dots, df_{n_1}(o))$$

для набора общего положения $(f_1, \dots, f_{n_1}) \in \mathrm{pr}_1(B)$; $b_2 = b - b_1$, где

$$b = \varepsilon(B) = N - \mathrm{rk}(df_1(o), \dots, df_N(o))$$

для набора общего положения $(f_1, \dots, f_N) \in B$. Если подмногообразие B является $G(n_1, n_2)$ -инвариантным (или хотя бы $\overline{G}(n_1, n_2)$ -инвариантным), то в общем наборе N многочленов $(f_1, \dots, f_N) \in B$ линейные формы

$$df_1(o), \dots, df_{n_1-b_1}(o), df_{n_1+1}(o), \dots, df_{N-b_2}(o) \quad (2.1)$$

линейно независимы, формы

$$df_{n_1-b_1+1}(o), \dots, df_{n_1}(o)$$

являются линейными комбинациями $df_1(o), \dots, df_{n_1-b_1}(o)$, а формы

$$df_{N-b_2+1}(o), \dots, df_N(o)$$

являются линейными комбинациями форм (2.1). Следовательно, для произвольного $G(n_1, n_2)$ -инвариантного (или $\bar{G}(n_1, n_2)$ -инвариантного) неприводимого подмногообразия B существует непустое открытое по Зарисскому подмногообразие $B^o \subset B$, на котором корректно определено отображение *приведения к стандартной форме*

$$\rho: B^o \rightarrow \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2}, \quad (2.2)$$

переводящее набор общего положения $(f_1, \dots, f_N)$ в набор многочленов

$$(f_1, \dots, f_{n_1-b_1}, f_{n_1-b_1+1}^+, \dots, f_{n_1}^+, f_{n_1+1}, \dots, f_{N-b_2}, f_{N-b_2+1}^+, \dots, f_N^+),$$

где f_i^+ при $i \in \{n_1 - b_1 + 1, \dots, n_1\}$ получены вычитанием из f_i однозначно определенной линейной комбинации многочленов $f_1, \dots, f_{n_1-b_1}$, в результате чего $df_i^+(o) = 0$, а f_i^+ при $i \in \{N - b_2 + 1, \dots, N\}$ получены вычитанием из f_i однозначно определенной линейной комбинации многочленов f_j , $j \in \{1, \dots, n_1 - b_1, n_1 + 1, \dots, N - b_2\}$, так что $df_i^+(o) = 0$. Замыкание образа $\rho(B^o)$ обозначим через $\bar{B}$. Если подмногообразие B инвариантно относительно действия $\bar{G}(n_1, n_2)$, то коэффициенты упомянутых линейных комбинаций могут быть произвольными, и потому

$$\dim B = \dim \bar{B} + b_1(n_1 - b_1) + b_2(N - b_2) = \dim \bar{B} + b(n_1 - b_1) + b_2(n_2 - b_2).$$

С другой стороны, прямое произведение в (2.2) имеет в пространстве $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ коразмерность bN . Следовательно, имеет место равенство

$$\text{codim } \bar{B} = \text{codim } B - b_1(n_2 + b_1) - b_2b. \quad (2.3)$$

В последней формуле коразмерность каждого из подмногообразий подразумевается относительно *своего* объемлющего пространства: для B это $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$, для $\bar{B}$ это прямое произведение в (2.2). С этого момента, если не оговорено противное, коразмерность всегда подразумевается относительно естественного объемлющего пространства. Иногда мы напоминаем, коразмерность относительно какого объемлющего пространства имеется в виду.

Очевидно, каждый слой отображения $\rho: B^o \rightarrow \rho(B^o)$ есть $\mathbb{C}^{(b_1(n_1-b_1)+b_2(N-b))}$.

По построению имеем

$$\mu_{l,N}(a, d) = \max_B \mu_{l,N}(B, d),$$

где максимум берется по всем биинвариантным неприводимым подмногообразиям $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ коразмерности не выше a . Основным методом оценки чисел

$\mu_{l,N}(B, d)$ (и, тем самым, $\mu_{l,N}(a, d)$) является контроль типа $\tau(B)$ этих подмногообразий. Легко видеть, что условия

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}(df_1(o), \dots, df_{n_1}(o)) &\leq n_1 - b_1 \\ \operatorname{rk}(df_1(o), \dots, df_N(o)) &\leq N - b \end{aligned}$$

задают в $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ биинвариантное неприводимое подмногообразие, имеющее тип $((a_1^*, b_1), (a_2^*, b_2))$, где $a_1^* = b_1(N + b_1 - n_1)$ и $a_2^* = b^2 - a_1^*$. Следовательно, необходимым условием существования биинвариантного неприводимого подмногообразия B типа $\tau(B) = ((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ является выполнение неравенств

$$a_1 \geq b_1(N + b_1 - n_1), \quad a = a_1 + a_2 \geq b^2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Предположим, что (биинвариантное) подмногообразие B имеет тип $\tau(B) = ((a_1, 0), (a_2, 0))$, т. е. $b = 0$. Тогда*

$$\mu_{l,N}(B, d) = d$$

для любого $d \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \ni o$ – неприводимое подмногообразие в $\mathbb{P}^N$, $(f_1, \dots, f_N) \in B$ – общий набор многочленов. По предположению имеем

$$\operatorname{rk}(df_1(o), \dots, df_N(o)) = N.$$

Положим $\Pi = \{df_1(o) = \dots = df_{n_1}(o) = 0\} \subset \mathbb{C}^N$, это линейное подпространство коразмерности n_1 . Пусть

$$(f_1^\sharp, \dots, f_N^\sharp) \in [f_1, \dots, f_N] \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$$

– общий элемент полиномиальной оболочки набора (f_*) .

По построению $df_1^\sharp(o), \dots, df_{n_1}^\sharp(o)$ – линейные формы общего положения, обращающиеся в нуль на пространстве Π , а $df_{n_1+1}^\sharp(o), \dots, df_N^\sharp(o)$ – произвольные линейные формы общего положения.

Если $n_1 \leq l$, то для $\mu_R(f_*) = \dim \mathcal{O}_{o,R}/(f_{l+1}^\sharp, \dots, f_N^\sharp)$ справедливо равенство

$$\mu_R(f_*) = \operatorname{mult}_o R,$$

потому что дифференциалы $df_i^\sharp(o)$, $i = l+1, \dots, N$, являются формами общего положения. Если $n_1 > l$, то для первых $n_1 - l$ дифференциалов $df_i^\sharp(o)$, где $i = l+1, \dots, n_1$, имеется (единственное) ограничение

$$df_i^\sharp(o)|_\Pi \equiv 0.$$

Пусть $T_o R \subset \mathbb{C}^N$ – алгебраический касательный конус к R в точке o . Каждая его компонента имеет коразмерность l . Поскольку $\operatorname{codim}(\Pi \subset \mathbb{C}^N) = n_1$, для общего $f_{l+1}^\sharp$ можно предполагать, что линейная форма $df_{l+1}^\sharp$ не обращается в нуль ни на одной компоненте конуса $T_o R$. Поэтому

$$\operatorname{mult}_o(R \circ \{f_{l+1}^\sharp = 0\}) = \operatorname{mult}_o R.$$

Аналогичным образом, для общих $f_{l+1}^\sharp, \dots, f_{n_1}^\sharp$ имеем равенство

$$\text{mult}_o(R \circ \{f_{l+1}^\sharp = 0\} \circ \dots \circ \{f_{n_1}^\sharp = 0\}) = \text{mult}_o R.$$

Теперь равенство $\mu_R(f_*) = \text{mult}_o R$ получается, как и в случае $n_1 \leq l$. Поскольку $\text{mult}_o R \leq \deg R$ и равенство достигается, предложение доказано.

Отметим, что если кратность $\mu_{l,N}(B, d)$ конечна, то выполнены соотношения

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq \begin{cases} 2^{a_1-l} 3^{a_2} d, & \text{если } a_1 \geq l, \\ 3^{a-l} d, & \text{если } a_1 < l. \end{cases} \quad (2.4)$$

Однако эти оценки слишком слабые для наших целей. Ниже будут доказаны следующие ключевые факты.

ТЕОРЕМА 2.1. *Имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} \mu_{l,N}(B, d) &\leq \frac{1}{2\pi b} \left(\frac{2a - b(b-1)}{b^2} e^2 \right)^b d < \frac{1}{2\pi b} \left(\frac{2a}{b^2} e^2 \right)^b d, \\ \mu_{l,N}(a, d) &\leq \frac{e^2}{2\pi[\sqrt{a}]} (2e^2)^{[\sqrt{a}]} d. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.2. *При $a \geq 17$ справедлива оценка*

$$\mu_{l,N}(a, d) \leq \frac{e^2}{2\pi[\sqrt{a}]} \left(\frac{5}{3} e^2 \right)^{[\sqrt{a}]} d.$$

Таким образом, при фиксированном l и $a \rightarrow \infty$ эффективная кратность имеет экспоненциальный рост порядка $\sqrt{a}$, а не порядка a , как в априорных оценках (2.4).

§ 3. Локальные кратности. II. Индуктивный метод оценки

В настоящем параграфе построена основная процедура оценки локальной кратности через локальные кратности укороченных наборов многочленов.

3.1. Отщепление прямого сомножителя. Если $b_2 \geq 1$, то обозначим через π_2 проекцию

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2} \\ \downarrow \\ \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2-1} \end{array}$$

вдоль последнего прямого сомножителя $\mathcal{P}_{[2,3],N}$. Если $b_1 \geq 1$, то через π_1 обозначим аналогичную проекцию вдоль последнего квадратичного прямого сомножителя $\mathcal{P}_{2,N}$ на $\mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1-1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2}$. Для замкнутого

множества $\overline{B}$, построенного выше приведением к стандартной форме, обозначим через $[\overline{B}]_{N-1}^{(i)}$ замыкание множества $\pi_i(\overline{B})$ в соответствующем объемлющем пространстве, $i = 1, 2$. Далее, пусть λ_2 и λ_1 обозначают проекции, дополнительные к π_2 и π_1 , т. е. проекции на последний прямой сомножитель и на последний квадратичный прямой сомножитель соответственно. Иными словами, $\pi_2 \times \lambda_2$ и $\pi_1 \times \lambda_1$ суть тождественные отображения прямого произведения $\mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2}$.

Отметим, что в силу биинвариантности множества B замкнутое множество $\overline{B}$ инвариантно относительно группы $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ замен координат и относительно подгруппы $G(n_1, b_1; n_2, b_2) \subset G(n_1, n_2)$, элементы которой соответствуют таким тройкам матриц (A_{11}, A_{12}, A_{22}) , что $A_{11} \in \mathrm{GL}_{n_1-b_1}(\mathbb{C})$ (и эти матрицы действуют на многочлены $f_1, \dots, f_{n_1-b_1}$, переводя $f_{n_1-b_1+1}, \dots, f_{n_1}$ в себя), $A_{22} \in \mathrm{GL}_{n_2-b_2}(\mathbb{C})$ (эти матрицы действуют на $f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2-b_2}$) и $A_{12} \in \mathrm{Mat}_{(n_1, n_2)}(\mathcal{P}_{[0,1],N})$, где только многочлены γ_{ij} , $j = 1, \dots, n_2 - b_2$, имеют произвольный свободный член, при $j \geq n_2 - b_2 + 1$ эти многочлены однородны: $\gamma_{ij} \in \mathcal{P}_{1,N}$. Это тривиальное замечание используется ниже для оценки параметров многообразия $B_h \subset \mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$ без специальных оговорок.

Для упрощения обозначений предполагаем, что $b_2 \geq 1$, рассматриваем проекцию π_2 и пишем $[\overline{B}]_{N-1}$ вместо $[\overline{B}]_{N-1}^{(2)}$. Необходимые модификации для случая $i = 1$ очевидны, и мы приведем только окончательный результат. В деталях рассмотрим случай $i = 2$.

Для набора общего положения $(f_1, \dots, f_{N-1}) \in [\overline{B}]_{N-1}$ через

$$[\overline{B}]^N = [\overline{B}]^N(f_1, \dots, f_{N-1}) \subset \mathcal{P}_{[2,3],N}$$

обозначим слой проекции $\pi_2|_{\overline{B}}: \overline{B} \rightarrow [\overline{B}]_{N-1}$. Очевидно,

$$\mathrm{codim} \overline{B} = \mathrm{codim} [\overline{B}]_{N-1} + \mathrm{codim} [\overline{B}]^N$$

(напомним: коразмерность подразумевается относительно *своего* объемлющего пространства, например для $[\overline{B}]^N$ это слой проекции π_2 , т. е. $\mathcal{P}_{[2,3],N}$). Положим $\gamma_N = \gamma_N(B) = \mathrm{codim} [\overline{B}]^N$. Поскольку $\mathrm{codim} B \leq a$, получаем (см. (2.3)) оценку

$$\mathrm{codim} [\overline{B}]_{N-1} \leq a - b_1(n_2 + b_1) - b_2b - \gamma_N.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$0 \leq \gamma_N \leq a - b_1(n_2 + b_1) - b_2b. \quad (3.1)$$

Пусть $h(z_*) \in \mathcal{P}_{1,N}$ — ненулевая линейная форма, $H = \{h = 0\} \subset \mathbb{C}^N$ — соответствующая гиперплоскость. Через π_h будем обозначать проекцию всех пространств $\mathcal{P}_{[i,j],N}$ на $\mathcal{P}_{[i,j],N-1}$ и соответствующие проекции для прямых произведений этих пространств, где зафиксирован изоморфизм $H \cong \mathbb{C}^{N-1}$ и $\pi_h: f \mapsto f|_H$ — ограничение многочлена на H .

Пусть $B_h \subset \mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$ — наименьшее биинвариантное (в смысле последнего пространства, т. е. инвариантное относительно действия групп $\mathrm{GL}_{N-1}(\mathbb{C})$ и

$G(n_1, n_2 - 1)$ замкнутое множество, содержащее множество $\pi_h([\overline{B}]_{N-1})$. Очевидно, B_h есть биинвариантное неприводимое подмногообразие. Для общего набора $(f_1, \dots, f_{N-1}) \in [\overline{B}]_{N-1}$ рассмотрим набор линейных форм

$$df_1(o)|_H, \dots, df_{n_1-b_1}(o)|_H, df_{n_1+1}(o)|_H, \dots, df_{N-b_2}(o)|_H.$$

Ранг этого набора есть либо $N - b$, либо $N - b - 1$. Более точно, существует целочисленный вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{(0, 1), (-1, 1), (0, 0)\}$$

такой, что для параметров (b_1^h, b_2^h) многообразия B_h выполнены равенства

$$b_1^h = b_1 - \alpha_1, \quad b_2^h = b_2 - \alpha_2.$$

Пусть $\tau(B_h) = ((a_1^h, b_1^h), (a_2^h, b_2^h))$ – тип подмногообразия B_h . Положим, далее, $b^h = b_1^h + b_2^h$ и $a^h = a_1^h + a_2^h$. Очевидно, a^h есть коразмерность подмногообразия B_h в объемлющем пространстве $\mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$.

Для реализации индуктивной процедуры, построенной ниже в п. 3.3, нам потребуется, кроме B_h , еще одно семейство подмногообразий в пространстве $\mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$, которое мы сейчас определим, опять для случая $i = 2$, с очевидными модификациями в случае $i = 1$. Возьмем произвольный многочлен $f \in \lambda_2(\overline{B}) \subset \mathcal{P}_{[2,3],N}$ и рассмотрим замкнутое множество

$$\overline{B}(f) = \lambda_2^{-1}(f) \cap \overline{B} \subset \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2-1}.$$

Произведение в правой части последнего соотношения будем рассматривать как естественное объемлющее пространство для $\overline{B}(f)$; в частности, коразмерность $\overline{B}(f)$ подразумевается относительно этого пространства. По построению имеем $\overline{B}(f) \neq \emptyset$ и

$$\text{codim } \overline{B} \geq \text{codim } \overline{B}(f) + \text{codim } \lambda_2(\overline{B}),$$

так что получаем оценку

$$\text{codim } \overline{B}(f) \leq a - b_1(n_2 + b_1) - b_2b - \gamma(f) \quad (3.2)$$

для некоторого $\gamma(f) \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma(f) \geq \text{codim } \lambda_2(\overline{B})$. Снова возьмем ненулевую линейную форму $h(z_*) \in \mathcal{P}_{1,N}$, $H = \{h = 0\}$ – соответствующая гиперплоскость, зафиксируем изоморфизм $H \cong \mathbb{C}^{N-1}$. Пусть π_h имеет тот же смысл, что и выше.

Пусть $B_h(f) \subset \mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$ – наименьшее биинвариантное (в смысле последнего пространства, т.е. инвариантное относительно действия групп $\text{GL}_{N-1}(\mathbb{C})$ и $G(n_1, n_2 - 1)$) замкнутое множество, содержащее множество $\pi_h(\overline{B}(f))$. Очевидно, $B_h(f) \subset B_h$ (поскольку $\overline{B}(f) \subset [\overline{B}]_{N-1}$) – биинвариантное замкнутое множество, которое мы без потери общности можем предполагать неприводимым подмногообразием. Обсуждение инвариантов подмногообразий $B_h(f)$ отложим до п. 3.3, где мы будем использовать многочлены f специального вида. Перейдем теперь к более подробному изучению подмногообразия B_h .

3.2. Оценка коразмерности подмногообразия B_h . Изменение типа подмногообразия B при ограничении на гиперплоскость описывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. (i) В случае $\alpha = (0, 1)$ имеют место оценки

$$a_1^h \leq a_1 - b_1, \quad a^h \leq a - (2b - 1) - \gamma_N.$$

(ii) В случае $\alpha = (-1, 1)$ имеют место оценки

$$a_1^h \leq a_1, \quad a^h \leq a - b - \gamma_N.$$

(iii) В случае $\alpha = (0, 0)$ имеют место оценки

$$a_1^h \leq a_1 - b_1, \quad a^h \leq a - b_1 - b - \gamma_N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы разберем во всех подробностях случаи (i) и (ii), в случае (iii) лишь приведем вычисления. Итак, пусть $\alpha = (0, 1)$. Это означает, что формы $df_i(o)$, $i \in \{1, \dots, n_1 - b_1, n_1 + 1, \dots, N - b_2\}$, остаются линейно независимыми при ограничении на H . Имеем оценку

$$\text{codim } \pi_h([\overline{B}]_{N-1}) \leq \text{codim } [\overline{B}]_{N-1} \leq a - b_1(n_2 + b_1) - b_2b - \gamma_N.$$

Коразмерность слева – это коразмерность относительно объемлющего пространства

$$\mathcal{P}_{[1,2],N-1}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N-1}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N-1}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N-1}^{b_2-1}, \quad (3.3)$$

причем для общего набора $(g_1, \dots, g_{N-1}) \in \pi_h([\overline{B}]_{N-1})$ линейные формы $dg_i(o)$, $i \in \{1, \dots, n_1 - b_1, n_1 + 1, \dots, N - b_2\}$, линейно независимы. Теперь применим процедуру, обратную к процедуре приведения к стандартной форме: множество B_h ввиду биинвариантности заведомо содержит все наборы вида $(g_1^+, \dots, g_{N-1}^+)$, где $g_i^+ = g_i$ при $1 \leq i \leq n_1 = b_1$,

$$g_i^+ = g_i + \sum_{j=1}^{n_1-b_1} \lambda_{ij} g_j, \quad i = n_1 - b_1 + 1, \dots, n_1,$$

где коэффициенты λ_{ij} произвольны. Далее, $g_i^+ = g_i$ при $n_1 + 1 \leq i \leq N - b_2$ и

$$g_i^+ = g_i + \sum_{j=1}^{n_1-b_1} \lambda_{ij} g_j + \sum_{j=n_1+1}^{N-b_2} \lambda_{ij} g_j, \quad i = N - b_2 + 1, \dots, N - 1,$$

коэффициенты λ_{ij} произвольны. Поэтому верно неравенство

$$\dim B_h \geq \dim \pi_h([\overline{B}]_{N-1}) + b_1(n_1 - b_1) + (b_2 - 1)(N - b).$$

С другой стороны, размерность пространства $\mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$ выше, чем размерность пространства (3.3), на $(b - 1)(N - 1)$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} a^h &\leq a - b_1(n_2 + b_1) - b_2b - \gamma_N - b_1(n_1 - b_1) - (b_2 - 1)(N - b) + (b - 1)(N - 1) \\ &= a - (2b - 1) - \gamma_N, \end{aligned}$$

как и утверждалось. Оценка для a_1^h получается аналогичными (но более простыми) рассуждениями. Процедура приведения к стандартной форме корректно определена на квадратичных компонентах, так что для проекции $\text{pr}_1([\overline{B}]_{N-1})$ имеем оценку

$$\text{codim pr}_1([\overline{B}]_{N-1}) \leq a_1 - b_1(n_2 + b_1).$$

Отметим, что для этого замкнутого множества объемлющим пространством является произведение $\mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1}$. Теперь, ограничивая на гиперплоскость H и применяя, как выше, процедуру, обратную к процедуре приведения к стандартной форме, получаем требуемую оценку

$$a^h \leq a_1 - b_1(n_2 + b_1) - b_1(n_1 - b_1) + b_1(N - 1) = a_1 - b_1,$$

что и требовалось показать.

В случае (ii) для общего набора $(f_1, \dots, f_{N-1}) \in [\overline{B}]_{N-1}$ ранг системы линейных форм $(df_*(o))$ уменьшается на единицу при ограничении на H , причем формы

$$df_1(o)|_H, \dots, df_{n_1-b_1}(o)|_H$$

уже линейно зависимы. В силу $G(n_1, b_1; n_2, b_2)$ -инвариантности множества $[\overline{B}]_{N-1}$ мы можем считать, что для общего набора $(g_1, \dots, g_{N-1}) \in \pi_h([\overline{B}]_{N-1})$ первые $n_1 - b_1 - 1$ форм $dg_i(o)$, $i = 1, \dots, n_1 - b_1 - 1$, линейно независимы, а $dg_{n_1-b_1}(o)$ есть их линейная комбинация, причем для любых $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1-b_1-1}$

$$\left(g_1, \dots, g_{n_1-b_1-1}, g_{n_1-b_1} + \sum_{i=1}^{n_1-b_1-1} \lambda_i g_i, g_{n_1-b_1+1}, \dots, g_{N-1} \right) \in \pi_h([\overline{B}]_{N-1}).$$

Следовательно, к открытому по Зарисскому подмножеству

$$\text{rk}\langle dg_1(o), \dots, dg_{n_1-b_1-1}(o) \rangle = n_1 - b_1 - 1$$

можно применить отображение приведения к стандартной форме в компоненте $g_{n_1-b_1}$ и, замыкая, получить неприводимое подмножество

$$\overline{\pi_h([\overline{B}]_{N-1})} \subset \mathcal{P}_{[1,2],N-1}^{n_1-b_1-1} \times \mathcal{P}_{2,N-1}^{b_1+1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N-1}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N-1}^{b_2-1}$$

коразмерности

$$\text{codim } \pi_h([\overline{B}]_{N-1}) - N + n_1 - b_1.$$

Теперь можно применить процедуру, обратную к приведению к стандартной форме, так, как это было сделано в случае (i), и получить для коразмерности множества B_h оценку

$$\begin{aligned} \text{codim } B_h &\leq a - b_1(n_2 + b_1) - b_2b - \gamma_N - N + n_1 - b_1 + b(N - 1) \\ &\quad - (b_1 + 1)(n_1 - b_1 - 1) - (b_2 - 1)(N - b - 1) = a - b - \gamma_N, \end{aligned}$$

как и утверждалось. Для a_1^h рассуждения аналогичны, но проще, так как в расчет принимаются только квадратичные многочлены. Снова необходимо

привести общий набор $(g_1, \dots, g_{n_1})$ к стандартной форме в компоненте $g_{n_1-b_1}$ и затем применить к полученному множеству процедуру, обратную процедуре приведения к стандартной форме. В итоге получаем неравенство

$$\begin{aligned} a_1^h &\leq a_1 - b_1(n_2 + b_1) - N + n_1 - b_1 \\ &\quad - (b_1 + 1)(n_1 - b_1 - 1) + (b_1 + 1)(N - 1) = a_1, \end{aligned}$$

как и утверждалось (напомним, что $N = n_1 + n_2$).

Рассмотрим, наконец, случай (iii). Как и в случае (ii), необходимо “допривести” множество $\pi_h([\bar{B}]_{N-1})$ к стандартной форме, но теперь в компоненте g_{N-b_2} , поскольку для общего набора $(g_1, \dots, g_{N-1})$ линейные формы

$$dg_1(o), \dots, dg_{n_1-b_1}(o), dg_{n_1+1}(o), \dots, dg_{N-b_2-1}(o)$$

линейно независимы, а $dg_{N-b_2}(o)$ является их линейной комбинацией. После этого применяется процедура, обратная процедуре приведения к стандартной форме. Получаем неравенство

$$\begin{aligned} a^h &\leq a - b_1(n_2 + b_1) - b_2b - \gamma_N \\ &\quad - (N - 1) + (N - b - 1) \\ &\quad - b_1(n_1 - b_1) - b_2(N - b - 1) + b(N - 1), \end{aligned}$$

где вторая строка соответствует приведению к стандартной форме, а третья – обратной процедуре. Упрощая, получаем оценку

$$a^h \leq a - b_1 - b - \gamma_N,$$

как и утверждалось. Для коразмерности a_1^h в квадратичных компонентах этот случай совсем простой, так как приведения к стандартной форме не требуется. Применяя процедуру, обратную процедуре приведения к стандартной форме, получаем неравенство

$$a_1^h \leq a_1 - b_1(n_2 + b_1) - b_1(n_1 - b_1) + b_1(N - 1) = a_1 - b_1,$$

как и утверждалось. Предложение полностью доказано.

Обратимся теперь к задаче оценки коразмерности при отщеплении квадратичного фактора. Здесь $(b_1^h, b_2^h) = (b_1, b_2) - (\alpha_1, \alpha_2)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ может принимать значения $(1, 0)$, $(1, -1)$ и $(0, 0)$. Неравенства для a^h и a_1^h получаются аналогичными рассуждениями, что и при отщеплении кубического фактора. Мы приведем окончательный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. (i) В случае $\alpha = (1, 0)$ имеют место оценки

$$a_1^h \leq a_1 - n_2 - 2b_1 + 1 - \gamma_N, \quad a^h \leq a - n_2 - 2b_1 - b_2 + 1 - \gamma_N.$$

(ii) В случае $\alpha = (1, -1)$ имеют место оценки

$$a_1^h \leq a_1 - n_2 - 2b_1 + 1 - \gamma_N, \quad a^h \leq a - n_2 - 2b_1 + 1 - \gamma_N.$$

(iii) В случае $\alpha = (0, 0)$ имеют место оценки

$$a_1^h \leq a_1 - n_2 - b_1 - \gamma_N, \quad a^h \leq a - n_2 - b_1 - \gamma_N.$$

В заключение напомним, что при отщеплении квадратичного фактора объемлющим пространством для подмногообразия B_h является $\mathcal{P}_{N-1}^{(n_1-1, n_2)}$ и коразмерность a^h есть коразмерность подмногообразия B_h относительно последнего пространства.

3.3. Основная индуктивная оценка. Вернемся к основной задаче оценки кратностей $\mu_{l,N}(B, d)$ для неприводимого биинвариантного подмногообразия $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ коразмерности $a \geq 1$. Пусть $\tau(B) = ((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ – тип подмногообразия B , где $b = b_1 + b_2 \geq 1$ (иначе оценивать нечего по предложению 2.2). Следующий ключевой факт позволяет оценить кратность $\mu_{l,N}$ сверху в терминах аналогичных кратностей для $\mathbb{P}^{N-1}$, что дает индуктивную (по N) процедуру оценки кратностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. (i) *Предположим, что $b_2 \geq 1$. Тогда существуют ненулевые линейные формы $h_1, h_2 \in \mathcal{P}_{1,N}$, зависящие только от многообразия B , и набор неотрицательных целых чисел*

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{Z}_+),$$

удовлетворяющих равенствам $d_{11} + d_{12} = d_{21} + d_{22} = d$, такие, что для подмногообразий

$$B_1 = B_{h_1} \subset \mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}, \quad B_2 = B_{h_2}(h_1 h_2) \subset \mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mu_{l,N}(B, d) &\leq \mu_{l,N-1}(B_1, d_{11}) + \mu_{l-1,N-1}(B_1, d_{12}) \\ &\quad + \mu_{l,N-1}(B_2, d_{21}) + \mu_{l-1,N-1}(B_2, d_{22}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом подмногообразие B_1 имеет тип

$$\tau(B_1) = ((a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12})), \quad (b_{11}, b_{12}) = (b_1, b_2 - 1).$$

(ii) *Предположим, что $b_1 \geq 1$. Тогда существуют ненулевые линейные формы h_1, h_2 , зависящие только от B , и набор неотрицательных целых чисел $(d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$, удовлетворяющих равенствам $d_{11} + d_{12} = d_{21} + d_{22} = d$, такие, что для подмногообразий*

$$B_1 = B_{h_1} \subset \mathcal{P}_{N-1}^{(n_1-1, n_2)}, \quad B_2 = B_{h_2}(h_1 h_2) \subset \mathcal{P}_{N-1}^{(n_1-1, n_2)}$$

справедливо неравенство (3.4). Более того, при этом подмногообразие B_1 имеет тип

$$\tau(B_1) = ((a_{11}, b_{11}), (a_{12}, b_{12})), \quad (b_{11}, b_{12}) = (b_1 - 1, b_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подробно случай (i). Случай (ii) рассматривается аналогично. Биинвариантное неприводимое подмногообразие B фиксировано. Пусть $h_1 \in \mathcal{P}_{1,N}$ – линейная форма общего положения, где общность положения понимается в следующем смысле: для общего набора $(f_1, \dots, f_N) \in B$ линейное пространство

$$\{df_1(o) = \dots = df_N(o) = 0\}$$

(имеющее размерность $b = b_1 + b_2$) не содержится в гиперплоскости $\{h_1 = 0\}$. Пусть

$$\Pi = \{h_1(z_*)h(z_*) \mid h \in \mathcal{P}_{1,N}\} \subset \mathcal{P}_{2,N}$$

– линейное пространство приводимых однородных квадратичных многочленов, делящихся на h_1 . Отметим, что $\mathcal{P}_{2,N} \subset \mathcal{P}_{[2,3],N}$, так что Π можно рассматривать как линейное подпространство в $\mathcal{P}_{[2,3],N}$. Очевидно, $\dim \Pi = N$. Положим

$$\mathcal{P}_\Pi = \mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2-1} \times \Pi.$$

Как объяснено выше, $\mathcal{P}_\Pi$ есть замкнутое неприводимое подмножество пространства

$$\mathcal{P}_{[1,2],N}^{n_1-b_1} \times \mathcal{P}_{2,N}^{b_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{n_2-b_2} \times \mathcal{P}_{[2,3],N}^{b_2}.$$

ЛЕММА 3.1. (i) Пересечение $\overline{B} \cap \mathcal{P}_\Pi$ непусто и имеет в $\mathcal{P}_\Pi$ коразмерность не выше $\text{codim } \overline{B}$.

(ii) Замыкание $\pi_2(\overline{B} \cap \mathcal{P}_\Pi)$ совпадает с $[\overline{B}]_{N-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим утверждение (i). В силу биинвариантности замкнутое множество $\overline{B}$ содержит нулевой набор $(0, \dots, 0) \in \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$. Поэтому $\overline{B} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, а остальное очевидно.

Докажем теперь утверждение (ii). Напомним, что π_2 есть проекция вдоль последнего прямого сомножителя $\mathcal{P}_{[2,3],N}$. В силу равенства (2.3) коразмерность множества $\overline{B}$ строго меньше N . Следовательно, для набора общего положения $(f_1, \dots, f_{N-1}) \in [\overline{B}]_{N-1}$ пересечение слоя $[\overline{B}]^N(f_1, \dots, f_{N-1})$ с подпространством Π в пространстве $\mathcal{P}_{[2,3],N}$ непусто и потому имеет положительную размерность. (Непустота снова вытекает из биинвариантности: $(f_1, \dots, f_{N-1}, 0) \in \overline{B}$.) Этим утверждение (ii) доказано. Доказательство леммы завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Без ущерба для общности можно предполагать, что неприводимое подмногообразие B есть неприводимая компонента замкнутого множества $X_{l,N}(m, d)$.

Равенство $\mu_{l,N}(B, d) = m$ означает, что для общего набора $(f_1, \dots, f_N) \in \overline{B}$ и любого эффективного цикла R коразмерности l степени d имеет место неравенство $\mu_R(f_1, \dots, f_N) \leq m$, причем для некоторого цикла R (зависящего от набора (f_*)) имеет место равенство. Следовательно, для общего набора

$$(f_1, \dots, f_{N-1}, h_1(z_*)h_2(z_*)) \in \overline{B} \cap \mathcal{P}_\Pi$$

найдется эффективный цикл R , зависящий от этого набора, для которого выполнено неравенство

$$\mu_R(f_1, \dots, f_{N-1}, h_1h_2) \geq m.$$

Форма $h_2(z_*)$, как объяснено выше, ненулевая. Пусть $H_i = \{h_i = 0\}$, $i = 1, 2$, – соответствующие гиперплоскости.

Определим эффективные циклы R_{ij} , $i, j = 1, 2$, коразмерности l условиями:

1) $R = R_{11} + R_{12} = R_{21} + R_{22}$;

2) $\text{Supp } R_{12} \subset H_1$ и ни одна неприводимая компонента цикла R_{11} не содержится в H_1 ;

3) $\text{Supp } R_{22} \subset H_2$ и ни одна неприводимая компонента цикла R_{21} не содержится в H_2 .

Положим $d_{ij} = \deg R_{ij}$. Очевидно, $d = d_{11} + d_{12} = d_{21} + d_{22}$. В силу изложенного выше справедливо неравенство

$$m \leq \mu_R(f_1, \dots, f_{N-1}, h_1) + \mu_R(f_1, \dots, f_{N-1}, h_2) \quad (3.5)$$

и для любого $i \in \{1, 2\}$

$$\mu_R(f_1, \dots, f_{N-1}, h_i) \leq \mu_{R_{i1}}(f_1, \dots, f_{N-1}, h_i) + \mu_{R_{i2}}(f_1, \dots, f_{N-1}, h_i). \quad (3.6)$$

Поскольку неприводимые компоненты цикла R_{i1} не содержатся в гиперплоскости H_i и $\text{Supp } R_{i2} \subset H_i$, для первой и второй кратности в правой части неравенства (3.6) имеем соответственно оценки

$$\mu_{R_{i1}}(f_1, \dots, f_{N-1}, h_i) \leq \mu_{(R_{i1} \circ H_i)}(f_1|_{H_i}, \dots, f_{N-1}|_{H_i}), \quad (3.7)$$

$$\mu_{R_{i2}}(f_1, \dots, f_{N-1}, h_i) \leq \mu_{R_{i2}}(f_1|_{H_i}, \dots, f_{N-1}|_{H_i}). \quad (3.8)$$

Отметим, что $(R_{i1} \circ H_i)$ есть эффективный цикл коразмерности l степени d_{i1} на $H_i \cong \mathbb{P}^{N-1}$, а R_{i2} — эффективный цикл коразмерности $l-1$ на $H_i \cong \mathbb{P}^{N-1}$. Далее,

$$(f_1|_{H_1}, \dots, f_{N-1}|_{H_1}) \in \pi_{h_1}([\overline{B}]_{N-1}), \quad (f_1|_{H_2}, \dots, f_{N-1}|_{H_2}) \in \pi_{h_2}(\overline{B}(h_1 h_2))$$

— общие наборы, так что неравенства (3.7) и (3.8) сохраняются, если в правой части заменить этот набор на общий набор многочленов $(g_1, \dots, g_{N-1}) \in B_i$. Теперь неравенство (3.4) является непосредственным следствием (3.5)–(3.8).

Наконец, в силу общности формы h_1 имеем

$$\text{rk}(dg_1(o), \dots, dg_{N-1}(o)) = N - b,$$

как и утверждалось. Предложение полностью доказано.

Для завершения нашей индуктивной процедуры остается оценить коразмерности подмногообразий B_2 и их тип. Снова мы рассмотрим более подробно случай проекции на последний сомножитель (т. е. $(f_*) \mapsto f_N$), соответствующий части (i) предложения 3.3. В случае проекции на последний квадратичный сомножитель (т. е. $(f_*) \mapsto f_{n_1}$) модификации очевидны и мы приведем только окончательный результат. Положим $\gamma = \gamma(h_1 h_2)$ (см. п. 3.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $h_2 \in \mathcal{P}_{1,N}$ — общая линейная форма такая, что $h_1 h_2 \in \lambda_2(\overline{B} \cap \mathcal{P}_{\Pi})$. Существует такой целочисленный вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{(0, 1), (-1, 1), (0, 0)\},$$

что для параметров $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ подмногообразия $B_{h_2}(h_1 h_2)$ справедливы равенства

$$\bar{b}_1 = b_1 - \alpha_1, \quad \bar{b}_2 = b_2 - \alpha_2.$$

Коразмерность $\bar{a}$ подмногообразия $B_{h_2}(h_1 h_2)$ в объемлющем пространстве $\mathcal{P}_{N-1}^{(n_1, n_2-1)}$ удовлетворяет следующим оценкам:

- (i) $\bar{a} \leq a - (2b - 1) - \gamma$ в случае $\alpha = (0, 1)$;
- (ii) $\bar{a} \leq a - b - \gamma$ в случае $\alpha = (-1, 1)$;
- (iii) $\bar{a} \leq a - b_1 - b - \gamma$ в случае $\alpha = (0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти такое же, как доказательство предложения 3.1. Хотя множество $\overline{B}(h_1 h_2)$ может не быть инвариантным относительно линейных замен координат, оно все еще инвариантно относительно операций взятия линейных комбинаций таким же образом, как и множество $[\overline{B}]_{N-1}$. По лемме 3.1 имеем

$$\overline{\bigcup_{h_1 h_2 \in \lambda_2(\overline{B} \cap \mathcal{P}_{\Pi})} \overline{B}(h_1 h_2)} = [\overline{B}]_{N-1},$$

и потому для общего набора $(g_1, \dots, g_{N-1}) \in \overline{B}(h_1 h_2)$ линейные формы

$$dg_1(o), \dots, dg_{n_1-b_1}(o), dg_{n_1+1}(o), \dots, dg_{N-b_2}(o)$$

линейно независимы. С учетом этого доказательство предложения 3.1 можно применять в силу неравенства (3.2) (с некоторыми упрощениями, поскольку ничего не утверждается о параметре $\bar{a}_1$ полного типа подмногообразия $B_{h_2}(h_1 h_2)$). Доказательство закончено.

Теперь сформулируем результат для случая, когда отщепляется квадратичный сомножитель.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $h_2 \in \mathcal{P}_{1,N}$ – общая линейная форма такая, что $h_1 h_2 \in \lambda_1(\overline{B} \cap \mathcal{P}_{\Pi})$. Существует такой целочисленный вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{(1, 0), (1, -1), (0, 0)\},$$

что параметры $(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ подмногообразия $B_{h_2}(h_1 h_2)$ удовлетворяют равенствам

$$\bar{b}_1 = b_1 - \alpha_1, \quad \bar{b}_2 = b_2 - \alpha_2.$$

Коразмерность $\bar{a}$ подмногообразия $B_{h_2}(h_1 h_2)$ в объемлющем пространстве $\mathcal{P}_{N-1}^{(n_1-1, n_2)}$ удовлетворяет следующим оценкам:

- (i) $\bar{a} \leq a - n_2 - 2b_1 - b_2 + 1 - \gamma$ в случае $\alpha = (1, 0)$;
- (ii) $\bar{a} \leq a - n_2 - 2b_1 + 1 - \gamma$ в случае $\alpha = (1, -1)$;
- (iii) $\bar{a} \leq a - n_2 - b_1 - \gamma$ в случае $\alpha = (0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти такое же, как доказательство предложения 3.2, и следует той же процедуре, которая была использована в доказательстве предложения 3.1.

§ 4. Локальные кратности. III. Явные оценки

В настоящем параграфе с помощью индуктивной процедуры, построенной в § 3, получены явные оценки для локальной кратности. Отдельно рассмотрены случаи малых значений $b = 1, 2$ и малых коразмерностей $a \leq 36$. Доказаны теоремы 2.1 и 2.2.

4.1. Оценка кратности для случая $b = b_1 + b_2 = 1$. Выше мы видели, что для неприводимого подмногообразия $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ при $b = 0$ имеет место равенство $\mu_{l,N}(B, d) = d$ (предложение 2.2). Рассмотрим случай $b = 1$, следующий по сложности. Пусть для определенности $b_2 = 1, b_1 = 0$. Согласно

предложению 3.3 имеет место неравенство

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq d + \mu_{l,N-1}(B_2, d_{21}) + \mu_{l-1,N-1}(B_2, d_{22}),$$

поскольку $(b_{11}, b_{12}) = (0, 0)$. Пусть $\tau(B_2) = ((a_{21}, b_{21}), (a_{22}, b_{22}))$ – тип многообразия B_2 . Если $b_{21} = b_{22} = 0$, то получаем оценку $\mu_{l,N}(B, d) \leq 2d$. Предположим, что $b_{21} + b_{22} = 1$. Полагая $B_2 = B^{(1)}$, применим к B_2 предложение 3.3. Продолжая это построение, получим цепочку подмногообразий $B^{(1)}, \dots, B^{(k)}$, имеющих тип $\tau(B^{(i)}) = ((a_1^{(i)}, b_1^{(i)}), (a_2^{(i)}, b_2^{(i)}))$, $b^{(i)} = b_1^{(i)} + b_2^{(i)} = 1$. Здесь $B^{(i+1)} = B_2^{(i)}$ в смысле предложения 3.3. Многообразия $B^{(i)}$ суть неприводимые биинвариантные подмногообразия пространства $\mathcal{P}_{N-i}^{(n_1^{(i)}, n_2^{(i)})}$, соответствующие подмногообразия $B_1^{(i)}$ имеют тип $((a_{11}^{(i)}, 0), (a_{12}^{(i)}, 0))$ и их вклад в оценку кратности $\mu_{l,N}$ известен. После k шагов получаем неравенство

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq kd + \sum_{j=0}^{\min\{k,l\}} \mu_{l-j,N-k}(B^{(k)}, d_{k,j}),$$

где $d_{k,0} + \dots + d_{k,\min\{k,l\}} = d$. Мы воспользовались очевидным неравенством

$$\mu_{l,N}(B, d') + \mu_{l,N}(B, d'') \leq \mu_{l,N}(B, d' + d''). \quad (4.1)$$

В силу предложений 3.1, 3.2 для коразмерности $a^{(i)} = \text{codim } B^{(i)}$ имеем неравенство $a^{(i+1)} \leq a^{(i)} - 1$, а необходимым условием существования многообразия $B^{(i)}$ является выполнение неравенства

$$a^{(i)} - b_1^{(i)}(k_2^{(i)} + b_1^{(i)}) - b_2^{(i)}b^{(i)} \geq 0.$$

Поэтому $a \geq a^{(k)} + k \geq k + 1$, так что после $k \leq a - 1$ шагов имеем $b_{21}^{(k)} = b_{22}^{(k)} = 0$, и построение завершается. В итоге получаем неравенство

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq (a + 1)d. \quad (4.2)$$

Отметим, что при $l = 0$ (когда все эффективные циклы имеют вид $d\mathbb{P}^N$) оценка (4.2) является точной: равенства $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ означают, что для общего набора $(f_1, \dots, f_N) \in B$ полное пересечение

$$\{f_1 = \dots = f_{N-1} = 0\}$$

есть кривая, неособая в точке o . Условие касания этой кривой порядка $j \leq N$ налагает на многочлен f_N не более j независимых условий. Следовательно, имеет место равенство

$$\mu_{0,N}(a, d) = (a + 1)d.$$

4.2. Оценка кратности для случая $b = 2$. По аналогии с п. 2.2 положим $\mu_{l,N}(a, b; d) = m$, если для любого неприводимого (биинвариантного) подмногообразия $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ коразмерности не больше a с $\varepsilon(B) = b$ имеет место неравенство $\mu_{l,N}(B, d) \leq m$, и для хотя бы одного подмногообразия B этого

класса это неравенство является равенством. Результат, полученный в п. 4.1, можно представить в виде неравенства

$$\mu_{l,N}(a, 1; d) \leq (a + 1)d.$$

Получим теперь оценку сверху для $\mu_{l,N}(a, 2; d)$. Пусть B – некоторое подмногообразие с $\varepsilon(B) = 2$. Применяя результат из п. 4.1, получаем

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq (a - 2)d + \mu_{l,N-1}(B_2, d_{21}) + \mu_{l-1,N-1}(B_2, d_{22})$$

для некоторых $d_{21}, d_{22} \in \mathbb{Z}_+$, $d_{21} + d_{22} = d$. Для параметров подмногообразия B_2 имеет место одна из двух возможностей:

- 1) $\text{codim } B_2 \leq a - 2$ и $\varepsilon(B_2) = 2$;
- 2) $\text{codim } B_2 \leq a - 3$ и $\varepsilon(B_2) = 1$.

В случае 2) получаем оценку

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq 2(a - 2)d.$$

В случае 1) процесс редукции можно продолжить, применяя предложение 3.3 к $B_2 = B^{(1)}$. Рассуждая, как в п. 4.1 (вычисления элементарны и аналогичны проведенным в п. 4.1, и мы их не приводим), получаем следующий окончательный результат: при четном $a = 2u$ справедливо неравенство

$$\mu_{l,N}(a, 2; d) \leq (2 + u(u - 1))d,$$

при нечетном $a = 2u + 1$ справедливо неравенство

$$\mu_{l,N}(a, 2; d) \leq (2 + u^2)d.$$

Данный процесс получения явных оценок сверху для чисел $\mu_{l,N}(a, b; d)$ можно продолжить, сводя оценку для $b = 3$ к уже известным формулам для $b = 1, 2$. Однако, как видно уже на примере случая $b = 2$, количество случаев, которые требуют отдельного рассмотрения, начинает расти, а формулы становятся более громоздкими. Поэтому для малых коразмерностей проще получить конкретное численное значение верхней грани для $\mu_{l,N}(a, b; d)$, а для больших значений a необходима более грубая, но обозримая оценка.

4.3. Малые коразмерности. Простое наблюдение, которое можно сделать на основе проведенных выше построений для $b = 1$ и $b = 2$, – это то, что получаемые оценки линейны по степени d и фактически не зависят от параметров l, N . Пусть $U \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ – множество $\{(a, b) \mid a \geq b^2\}$. Определим индуктивно функцию

$$\bar{\mu}: U \rightarrow \mathbb{Z}_+,$$

полагая $\bar{\mu}(a, 0) \equiv 1$, $\bar{\mu}(a, 1) \equiv a + 1$, при $a < b(b + 1)$

$$\bar{\mu}(a, b) = 2\bar{\mu}(a - (2b - 1), b - 1),$$

а при $a \geq b(b + 1)$

$$\bar{\mu}(a, b) = \bar{\mu}(a - (2b - 1), b - 1) + \max\{\bar{\mu}(a - (2b - 1), b - 1), \bar{\mu}(a - b, b)\}.$$

Из предложений 3.1–3.3 немедленно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Справедливо неравенство*

$$\mu_{l,N}(a,b;d) \leq \bar{\mu}(a,b)d.$$

Для небольших значений a функцию $\bar{\mu}$ легко вычислить вручную; нетрудно написать и компьютерную программу, вычисляющую $\bar{\mu}$. Мы приводим табл. 1 значений $\bar{\mu}(a,b)$ для $a \leq 36, b \leq 6$. Символом $*$ обозначено то, что $(a,b) \notin U$ и значение функции $\bar{\mu}$ не определено. Уже для этих небольших значений ко-размерности хорошо видна скорость роста значений $\bar{\mu}(a,b)$. Жирным шрифтом выделено максимальное значение $\bar{\mu}(a,b)$ для данного a .

Таблица 1

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$b = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$b = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$b = 2$	*	*	*	4	6	8	11	14	18	22	27	32	38	44	51
$b = 3$	*	*	*	*	*	*	*	*	8	12	16	22	28	36	44
$b = 4$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

a	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$b = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$b = 1$	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$b = 2$	58	66	74	83	92	102	112	123	134	146	158
$b = 3$	55	68	82	99	119	140	165	193	223	257	295
$b = 4$	16	24	32	44	56	72	88	110	136	164	198
$b = 5$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	32	48
$b = 6$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

a	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$b = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$b = 1$	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$b = 2$	171	184	198	212	227	242	258	274	291	308
$b = 3$	335	380	429	481	538	600	665	736	812	892
$b = 4$	238	280	330	391	461	537	625	726	841	966
$b = 5$	64	88	112	144	176	220	272	328	396	476
$b = 6$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	64
$b = 7$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Обратимся теперь к задаче получения простой эффективной оценки сверху для кратностей $\mu_{l,N}(B,d)$. С технической точки зрения необходимо найти

простую и наглядную формализацию процесса оценки этих чисел в терминах чисел $\mu_{N',N'}(B', d')$, где многообразия $B' \subset \mathcal{P}_{N'}^{(n'_1, n'_2)}$ имеют меньшее значение $b' = b'_1 + b'_2$, так что для соответствующих кратностей оценку сверху можно считать известной. Это дает индуктивную (по параметру b) процедуру оценки кратности, реализованную ниже.

4.4. Общий метод оценки кратности. Рассмотрим четырехбуквенный алфавит $\{A, C_0, C_1, C_2\}$. Опишем процедуру построения некоторого множества слов W в этом алфавите и для каждого слова $w \in W$ некоторого неприводимого биинвариантного подмногообразия

$$B[w] \subset \mathcal{P}_{N(w)}^{(n_1(w), n_2(w))},$$

имеющего тип $\tau(B[w]) = ((a_1(w), b_1(w)), (a_2(w), b_2(w)))$, и полную коразмерность $a(w) = a_1(w) + a_2(w)$; как обычно, положим $\varepsilon(B[w]) = b(w) = b_1(w) + b_2(w)$. Длину слова w обозначим через $|w| \in \mathbb{Z}_+$. Длина пустого слова равна нулю.

Пусть $B \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ – неприводимое биинвариантное многообразие коразмерности a типа $\tau(B)$. Положим $B[\emptyset] = B$. Если $b(\emptyset) = 0$, то полагаем $W = \{\emptyset\}$: процедура на этом завершается. Предположим, что $b(\emptyset) \geq 1$.

Множество слов W и соответствующих подмногообразий $B[w]$, $w \in W$, строим элементарными шагами: строим последовательность конечных подмножеств W_l множества всех слов, $l = 0, 1, \dots$. Множество $W_0 = \{\emptyset\}$ уже построено. Предположим, что построены $W_0, \dots, W_l$. Если для любого $w \in W_l$ выполнено равенство $b(w) = 0$, то полагаем $W = W_l$, завершая процедуру построения. В противном случае возьмем любое слово $w \in W_l$, $b(w) \geq 1$. Если $b_2(w) \geq 1$, то применяем к подмногообразию $B[w]$ (построенному на предыдущем шаге) утверждение (i) предложения 3.3. Полагаем $w_1 = wA$ и $w_2 = wC_e$, где $e \in \{0, 1, 2\}$ выбирается следующим образом.

Полагаем $B[w_1] = (B[w])_1$ и $B[w_2] = (B[w])_2$ в обозначениях предложения 3.3, (i). Теперь e принимает значение 0, 1 или 2, если подмногообразие $B[w_2]$ соответствует случаю (i), (ii) или (iii) предложения 3.1. Этим слова w_1 и w_2 определены. Множество W_{l+1} получается из W_l удалением слова w и добавлением слов w_1, w_2 длины $|w| + 1$. Неприводимые биинвариантные многообразия $B[w_i]$ определены выше, и этим определены значения всех параметров ($n_i(w)$ и т. д.).

Если $b_2(w) = 0$, то $b_1(w) \geq 1$, и применяем к подмногообразию $B[w]$ утверждение (ii) предложения 3.3. Далее слова w_1, w_2 и подмногообразия $B[w_i]$ строятся так же, как и в случае $b_2(w) \geq 1$, с заменой утверждения (i) предложения 3.3 на утверждение (ii) этого предложения и предложения 3.1 на предложение 3.2.

Этим процедура построения множества W_{l+1} однозначно определена. Очевидно,

$$\#W_l = l + 1.$$

Поскольку при замене слова $w \in W_l$ словами w_1, w_2 коразмерность новых подмногообразий $B[w_i]$ становится строго меньше, чем коразмерность $B[w]$ (предложения 3.1, 3.2), процедура построения последовательности $\{W_l\}$ не может быть бесконечной. Легко видеть, что при $\text{codim } B = a$ имеем $\sharp W \leq 2^a$. Теперь из предложения 3.3 немедленно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Имеет место неравенство*

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq d(\sharp W). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (4.3) следует из более общего факта:

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq \sum_{w \in W_i} \sum_{j=0}^{\min\{l, |w|\}} \mu_{l-j, N-|w|}(B[w], d_j(w)) \quad (4.4)$$

для любого $i = 0, 1, \dots$ и некоторых разбиений

$$d = \sum_{j=0}^{\min\{l, |w|\}} d_j(w) \quad (4.5)$$

для каждого слова $w \in W_i$. Неравенство (4.4) докажем индукцией по параметру $i = 0, 1, \dots$. При $i = 0$ его левая и правая части совпадают. Пусть (4.4) доказано для $i = 0, \dots, e$. Если $W_e = W_{e+1}$, то $W_e = W$ и доказательство очевидно. Если $W_e \neq W_{e+1}$, то множество слов W_{e+1} получается из W_e удалением некоторого слова $w \in W_e$ и добавлением двух слов w_1, w_2 . Следовательно, для доказательства неравенства (4.4) при $i = e + 1$ достаточно показать, что

$$\sum_{j=0}^{\min\{l, |w|\}} \mu_{l-j, N-|w|}(B[w], d_j[w])$$

не превосходит суммы аналогичных выражений для w_1, w_2 . Именно это и утверждается в предложении 3.3, если учесть неравенство (4.1). Этим оценка (4.4) доказана для любого i .

Наконец, если $W_i = W$, то для любого $w \in W$ имеем $b(w) = 0$, так что в правой части неравенства (4.4) для каждого слагаемого имеет место равенство

$$\mu_{l-j, N-|w|}(B[w], d_j(w)) = d_j(w),$$

значит, в силу равенства (4.5) получаем

$$\mu_{l,N}(B, d) \leq d \sum_{w \in W} 1,$$

что и требовалось показать. Предложение доказано.

4.5. Оценка мощности множества слов. Слова будем записывать следующим образом:

$$w = \tau_1 \dots \tau_K,$$

где $\tau_i \in \{A, C_0, C_1, C_2\}$. Пусть теперь

$$\nu: \{A, C_0, C_1, C_2\} \rightarrow \{A, C\}$$

– отображение четырехбуквенного алфавита в двухбуквенный, заданное равенствами $\nu(A) = A$, $\nu(C_i) = C$, и

$$\nu: w = \tau_1 \dots \tau_K \mapsto \bar{w} = \nu(\tau_1) \dots \nu(\tau_K)$$

– соответствующее отображение множества слов. Имеет место

ЛЕММА 4.1. *Для любого $i = 0, 1, \dots$ отображение $\nu|_{W_i}$ инъективно. В частности, $\nu|_W$ инъективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место более сильное утверждение: среди всех слов $\bar{w} = \nu(w)$, $w \in W_i$, никакое слово не является левым отрезком другого слова. (В частности, никакие два слова не совпадают, что и означает инъективность отображения $\nu|_{W_i}$.) Последнее утверждение легко доказать по индукции. Множество W_0 состоит из одного слова, и для него утверждение тривиально. Пусть оно доказано для W_i , где $i = 0, \dots, e$. Если $W_{e+1} = W_e$, то доказательство очевидно. Если $W_{e+1} \neq W_e$, то W_{e+1} получается из W_e удалением некоторого слова $w \in W_e$ и добавлением двух слов $w_1 = wA$ и $w_2 = wC_\alpha$, где $\alpha \in \{0, 1, 2\}$. Для этих слов имеем $\bar{w}_1 = \bar{w}A$ и $\bar{w}_2 = \bar{w}C$. Очевидно, $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ не являются левыми отрезками друг друга, и никакое слово $\bar{w}'_1$ для $w' \in W_e \setminus \{w\}$ не является левым отрезком $\bar{w}_1$ или $\bar{w}_2$, потому что в противном случае $\bar{w}' = \bar{w}_1$ или $\bar{w}' = \bar{w}_2$ (так как $\bar{w}'$ не является левым отрезком слова $\bar{w}$ по предположению индукции), но тогда $\bar{w}$ является левым отрезком слова $\bar{w}'$ вопреки предположению индукции. Тривиальным образом $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2$ не являются левыми отрезками слова $\bar{w}'$, потому что в противном случае это было бы верно и для $\bar{w}$ вопреки предположению индукции. Лемма доказана.

Таким образом, мы свели задачу оценки кратности $\mu_{l,N}(B, d)$ к задаче оценки числа слов во множестве W . Как указывалось выше, $\#W \leq 2^a$, но эта оценка слишком груба для наших целей. Будем контролировать длину слов $w \in W$ значениями параметров $a(w')$ и $b(w') = \varepsilon(B[w])$ для левых отрезков w' слова w .

ЛЕММА 4.2. (i) *Если $\tau = A$ или $\tau = C_0$, то справедливо неравенство*

$$a(w'\tau) \leq a(w') - (2b(w') - 1)$$

$$\text{и } b(w'\tau) = b(w') - 1.$$

(ii) *Если $\tau = C_1$ или $\tau = C_2$, то справедливо неравенство*

$$a(w'\tau) \leq a(w') - b(w')$$

$$\text{и } b(w'\tau) = b(w').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства немедленно вытекают из неравенств предложений 3.1, 3.2 согласно очевидной оценке $b_i \leq n_i$, $i = 1, 2$. Лемма доказана.

Далее, из неравенства (3.1) следует оценка

$$a(w) \geq b_1(w)(n_2(w) + b_1(w)) + b_2(w)b(w) \geq b^2(w)$$

для любого слова w , в частности для любого слова, являющегося левым отрезком любого слова из W .

ПРИМЕР 4.1. В терминах развитого выше формализма рассмотрим снова случай $b = b(\emptyset) = 1$. Здесь для любого слова $w \in W_i$ имеет место альтернатива: или $b(w) = 0$ (и тогда $w \in W$), или $b(w) = 1$ (и тогда $a(w\tau) \leq a(w) - 1$ для любой буквы τ), так что множество W имеет вид

$$A, C_{i_1}A, C_{i_1}C_{i_2}A, \dots, C_{i_1}C_{i_2} \dots C_{i_k}A, C_{i_1} \dots C_{i_k}C_0,$$

где $i_\alpha \in \{1, 2\}$ и $k + 1 \leq a$. Следовательно, $\#W \leq a + 1$, как и утверждалось выше в п. 4.1.

Вернемся к рассмотрению общего случая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Имеет место неравенство*

$$\#W \leq 2^b \frac{a^b}{(b!)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого слова $w \in W$ по построению $b(w) = 0$. Поскольку буквы C_1, C_2 не изменяют значения параметра b , а буквы A и C_0 уменьшают его на 1, можно заключить, что в слове w имеется ровно b позиций, на которых стоят буквы A и C_0 . Пусть это позиции с номерами

$$m_1 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, m_1 + m_2 + \dots + m_b + b,$$

где $m_i \in \mathbb{Z}_+$. Согласно лемме 4.2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} 0 \leq a(w) &\leq a - m_1b && - (2b - 1) \\ &- m_2(b - 1) && - (2(b - 1) - 1) \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ &- m_i(b - (i - 1)) && - (2(b - (i - 1)) - 1) \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ &- m_b && - 1 \\ &= a - b^2 - \sum_{i=1}^b m_i(b - (i - 1)), \end{aligned}$$

так что $(m_1, \dots, m_b)$ — произвольная целочисленная точка в многограннике

$$\Delta = \{x_1 \geq 0, \dots, x_b \geq 0, bx_1 + (b - 1)x_2 + \dots + x_b \leq a - b^2\} \subset \mathbb{R}^b.$$

Таким образом, даже если считать, что все возможные расстановки букв A и C_0 на выбранных позициях реализуются словами $w \in W$ (на самом деле это не так: слов в W гораздо меньше; см. замечание 4.1), то справедливо неравенство

$$\#W \leq 2^b \cdot \#(\Delta \cap \mathbb{Z}^b).$$

Оценим теперь количество целочисленных точек в Δ . Для этого рассмотрим больший многогранник

$$\Delta^+ = \left\{ x_1 \geq 0, \dots, x_b \geq 0, bx_1 + \dots + x_b \leq a - \frac{b(b-1)}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^b.$$

Очевидно, $\Delta \subset \Delta^+$.

ЛЕММА 4.3. *Имеет место неравенство*

$$\#(\Delta \cap \mathbb{Z}^b) \leq \text{vol}(\Delta^+). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждой точке $x = (x_1, \dots, x_b) \in \mathbb{R}^b$ поставим в соответствие единичный куб

$$\Gamma(x) = [x_1, x_1 + 1] \times [x_2, x_2 + 1] \times \dots \times [x_b, x_b + 1] \subset \mathbb{R}^b,$$

вершиной которого с наименьшим значением суммы координат $x_1 + \dots + x_b$ служит точка x . Если $x \in \Delta$, то $\Gamma(x) \subset \Delta^+$, потому что

$$b + (b-1) + \dots + 1 + a - b^2 = a - \frac{b(b-1)}{2}.$$

Поэтому

$$\#(\Delta \cap \mathbb{Z}^b) = \sum_{x \in \Delta \cap \mathbb{Z}^b} \text{vol}(\Gamma(x)) = \text{vol} \left(\bigcup_{x \in \Delta \cap \mathbb{Z}^b} \Gamma(x) \right) \leq \text{vol}(\Delta^+),$$

как и утверждалось. Лемма доказана.

Вычисляя объем многогранника Δ^+ и применяя формулу Стирлинга, получаем оценку

$$\#W \leq 2^b \frac{(a - \frac{b(b-1)}{2})^b}{(b!)^2} = \frac{1}{2\pi b e^{\theta/(6b)}} \left(\frac{2a - b(b-1)}{b^2} e^2 \right)^b \quad (4.7)$$

для некоторого $0 < \theta < 1$ (здесь e – основание натурального логарифма), так что, тем более,

$$\#W \leq u_b = \frac{1}{2\pi b} \left(\frac{2a - b(b-1)}{b^2} e^2 \right)^b. \quad (4.8)$$

Напомним, что $b \in \{1, \dots, [\sqrt{a}]\}$. Для получения эффективной оценки числа $\#W$ изучим поведение последовательности u_b при этих значениях b .

ЛЕММА 4.4. *Последовательность u_b является возрастающей, если выполнено неравенство*

$$2a - b(b-1) \geq \frac{5}{2}b^2. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$\frac{u_{b+1}}{u_b} = \frac{1}{1 + \frac{1}{b}} \frac{e^2}{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^{2b}} \frac{1}{\left(1 + \frac{2b}{2a - b(b+1)}\right)^b} \frac{2a - b(b+1)}{(b+1)^2}. \quad (4.10)$$

Предположим сначала, что $b \geq 9$. Если числа a и b удовлетворяют неравенству $2a - b(b+1) \geq \frac{5}{2}(b+1)^2$ (т. е. неравенству (4.9) для $b+1$), то знаменатель третьего сомножителя в правой части равенства (4.10) можно оценить сверху следующим образом:

$$\left(1 + \frac{2b}{2a - b(b+1)}\right)^b \leq \left(1 + \frac{4}{5} \frac{1}{b}\right)^b < e^{4/5}.$$

Второй сомножитель в правой части неравенства (4.10) строго больше единицы, а четвертый – не меньше $5/2$. В итоге получаем

$$\frac{u_{b+1}}{u_b} > \frac{9}{10} \frac{5}{2} e^{-4/5} > 1,$$

что и требуется показать. Для меньших значений $b \leq 8$ второй и третий сомножители в правой части неравенства (4.10) можно оценить точнее, и элементарные подсчеты с помощью компьютера завершают доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. При $a \geq 17$ значение $b_{\max} \in \{1, \dots, [\sqrt{a}]\}$, на котором достигается максимум последовательности u_b , удовлетворяет неравенству

$$2a - b_{\max}(b_{\max} - 1) \leq \frac{5}{3}a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предыдущей леммы значение $b_{\max}$ удовлетворяет неравенству

$$2a - b_{\max}(b_{\max} + 1) \leq \frac{5}{2}b_{\max}^2$$

(иначе следующий элемент последовательности u_b будет больше). Теперь элементарные вычисления завершают доказательство следствия.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. (i) При $a \geq 17$ имеет место оценка

$$\#W \leq v_b = \frac{1}{2\pi b} \left(\frac{5a}{3b^2} e^2 \right)^b.$$

(ii) Для любого a имеет место оценка

$$\#W \leq w_b = \frac{1}{2\pi b} \left(\frac{2a}{b^2} e^2 \right)^b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (ii) сразу следует из неравенства (4.8), утверждение (i) – из неравенства (4.8) согласно следствию 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. (i) При $a \geq 17$ имеет место оценка

$$\mu_{l,N}(a, d) \leq \frac{e^2}{2\pi[\sqrt{a}]} \left(\frac{5}{3}e^2\right)^{[\sqrt{a}]}. \quad (4.11)$$

(ii) Для любого a имеет место оценка

$$\mu_{l,N}(a, d) \leq \frac{e^2}{2\pi[\sqrt{a}]} (2e^2)^{[\sqrt{a}]}. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения в обоих случаях идентичны, отличие состоит лишь в том, какое из двух утверждений следствия 4.2 используется.

Докажем утверждение (i). Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 4.4, заключаем, что последовательность v_b возрастает. Следовательно, ее максимум достигается при $b = [\sqrt{a}]$. Поскольку

$$a < (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1,$$

справедливо неравенство

$$\left(\frac{a}{b^2}\right)^b \leq \left(1 + \frac{2}{b}\right)^b < e^2,$$

откуда немедленно следует утверждение (i). Утверждение (ii) доказывается так же. Доказательство закончено.

Легко убедиться в том, что утверждения теорем 2.1, 2.2 содержатся в утверждениях следствий 4.2, 4.3 согласно формуле (4.8).

Доказательства теорем 2.1, 2.2 завершены.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Как видно из приведенного доказательства теорем 2.1, 2.2, оценка (4.12) не является оптимальной и может быть существенно усилена. При $b \approx \sqrt{a}$ имеем $2a - b(b-1) \approx a$, так что в неравенстве (4.12) выражение $(2e^2)$ можно заменить на e^2 . Далее, в доказательстве предложения 4.3 мы учитывали все возможные наборы позиций $(m_1, \dots, m_b)$ и все возможные способы расстановки букв A и C_0 на b позициях. Однако, поскольку во множестве слов $\overline{W} = \nu(W)$ двухбуквенного алфавита $\{A, C\}$ никакое слово не является левым отрезком другого слова и отображение $\nu: W \rightarrow \overline{W}$ взаимно однозначно, для фиксированной расстановки букв A и C_0 на b позициях, при которой хотя бы две буквы C_0 стоят рядом, реализуются не все наборы $(m_1, \dots, m_b) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^b$, так как два различных слова $w_1 \neq w_2$, $\{w_1, w_2\} \subset W$, не могут различаться только на отрезке, состоящем из букв C_0, C_1, C_2 . Вопрос о точной оценке сверху чисел $\mu_{l,N}(a, d)$, хотя бы в асимптотическом смысле, остается открытым.

§ 5. Глобальные кратности. Доказательство теоремы 0.2

В настоящем параграфе на основе развитой в § 2–4 теории доказана теорема 0.2. Согласно [3, теорема 2] доказательства требуют два факта: линейная независимость направлений прямых, проходящих через точку $o \in V$ (последнее требование в условии (R1)), и справедливость условия (R3) в каждой точке

$o \in V$ на общем по Зарисскому полном пересечении V типа $2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$. Линейную независимость доказать несложно: достаточно оценить коразмерность множеств наборов многочленов, имеющих множество решений положительной размерности или конечное множество линейно зависимых решений. Это сделано в п. 5.1.

В пп. 5.2–5.4 глобализованы построения и результаты локальной теории, развитой в § 2–4: определены глобальные кратности, задача их оценки сведена к аналогичной задаче для локальных кратностей и, наконец, получены необходимые оценки для глобальных кратностей.

В п. 5.5 завершено доказательство теоремы 0.2.

5.1. Наборы многочленов, имеющие множество решений положительной размерности. Как всегда, через $\mathcal{P}_{i,N}$ обозначено пространство однородных многочленов степени i от N переменных, мы отождествляем $\mathcal{P}_{i,N+1}$ и $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(i))$. Пусть

$$\mathcal{H}_N^{(n_1, n_2)} = \prod_{i=1}^{n_1} \mathcal{P}_{2,N} \times \prod_{i=1}^{n_2} \mathcal{P}_{3,N}$$

– пространство всех наборов $(f_1, \dots, f_{n_1}, f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2})$, где первые n_1 многочленов квадратичные, последующие n_2 – кубические. (Это глобальный аналог пространства $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$, введенного в § 2.) В данном пункте рассматриваем пространство $\mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$ при $n_1 + n_2 = N, N + 1$. Через

$$Z(f_1, \dots, f_{n_1+n_2}) = Z(f_*)$$

обозначена замкнутая подсхема, определяемая набором однородных многочленов $f_1, \dots, f_{n_1+n_2}$, а через $|Z(f_*)|$ – замкнутое множество их общих нулей $\{f_1 = \dots = f_{n_1+n_2} = 0\} \subset \mathbb{P}^N$. Пусть

$$Y_\infty = \{(f_1, \dots, f_{n_1+n_2}) \mid \dim Z(f_*) \geq 1\} \subset \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$$

– замкнутое подмножество наборов, нули которых имеют “неправильную” размерность (для общего набора при $n_1 + n_2 = N$ множество $Z(f_*)$ нульмерно, при $n_1 + n_2 = N + 1$ пусто). Пусть, далее, $Y_{\text{line}} \subset Y_\infty$ состоит из таких наборов (f_*) , что множество $Z(f_*)$ содержит прямую в $\mathbb{P}^N$. Легко подсчитать, что при $n_1 + n_2 = N$

$$\text{codim } Y_{\text{line}} = n_1 + 2n_2 + 2,$$

а при $n_1 + n_2 = N + 1$

$$\text{codim } Y_{\text{line}} = n_1 + 2n_2 + 4$$

(эти коразмерности подразумеваются относительно пространства $\mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$). Пусть $Y'_\infty = \overline{Y_\infty \setminus Y_{\text{line}}}$ – объединение всех неприводимых компонент множества Y_∞ , отличных от Y_{line} . Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Неприводимое замкнутое множество Y_{line} есть компонента максимальной размерности замкнутого множества Y_∞ :*

$$\dim Y_{\text{line}} \geq \dim Y'_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость множества Y_{line} очевидна. Утверждение предложения будем доказывать методом, развитым в [2]. Рассмотрим сначала случай $n_1 + n_2 = N$. Пусть $Y_i \subset \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$ – множество таких наборов (f_*) , что:

- 1) $\text{codim}\{f_1 = \dots = f_i = 0\} = i$;
- 2) имеется компонента B множества $Z(f_1, \dots, f_i)$, которая при $i = N - 1$ не является прямой в $\mathbb{P}^N$ и на которой многочлен f_{i+1} тождественно обращается в нуль.

Достаточно показать, что

$$\text{codim } \overline{Y}_i > n_1 + 2n_2 + 2, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Следуя [2, § 3], представим Y_i в виде объединения:

$$Y_i = Y_{i,0} \cup Y_{i,1} \cup \dots \cup Y_{i,i},$$

меньших подмножеств $Y_{i,e}$, $e \in \{0, \dots, i\}$, заданных условием: множество B имеет в своей линейной оболочке $\langle B \rangle$ коразмерность $e \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим, прежде всего, случай $e = 0$, т.е. $B \subset \mathbb{P}^N$ есть линейное подпространство, $i \leq N - 2$. Поскольку $f_j|_B \equiv 0$ при $j = 1, \dots, i + 1$ и $d_j = \deg f_j \geq 2$, имеем оценку

$$\begin{aligned} \text{codim } Y_{i,0} &\geq (i + 1) \frac{(N - i + 1)(N - i + 2)}{2} - i(N - i + 1) \\ &= \frac{N - i + 1}{2} (i(N - i) + N - i + 2) \geq 3N, \end{aligned}$$

что и требуется показать (минимум правой части достигается при $i = N - 2$, что соответствует множеству наборов (f_*) таких, что $Z(f_*)$ содержит плоскость).

Следовательно, можно считать, что $e \geq 1$. В этом случае рассмотрим ограничения $f_j|_{\langle B \rangle}$, $j = 1, \dots, i$. Напомним [2] следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $h_1, \dots, h_m$ – однородные многочлены степени не менее 2 на проективном пространстве Π размерности $\dim \Pi \geq m + 1$. Неприводимое подмногообразие $C \subset \Pi$ такое, что $\langle C \rangle = \Pi$, и $\text{codim } C = m$ называется ассоциированным подмногообразием последовательности (h_*) , если существует цепочка неприводимых подмногообразий $C_j \subset \Pi$, $j = 0, \dots, m$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $C_0 = \Pi$;
- 2) для каждого $j = 0, \dots, m - 1$ подмногообразие C_{j+1} есть неприводимая компонента замкнутого алгебраического множества $\{h_{j+1} = 0\} \cap C_j$, причем $h_{j+1}|_{C_j} \not\equiv 0$, так что $\text{codim}_\Pi C_j = j$ для всех j ;
- 3) $C_m = C$.

Если последовательность (h_*) обладает ассоциированным подмногообразием, она называется *хорошей*.

Далее, справедлива

ЛЕММА 5.1. (i) Свойство последовательности (h_*) быть хорошей является открытым в пространстве последовательностей.

(ii) Хорошая последовательность (h_*) может иметь самое большее

$$\left[\frac{1}{m+1} \prod_{j=1}^m \deg h_j \right]$$

ассоциированных подмногообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2, лемма 4].

Как показано в [2, с. 73], среди многочленов f_j , $j = 1, \dots, i$, можно найти такие e многочленов $f_{j_1}, \dots, f_{j_e}$, что последовательность $(f_{j_1}|_{\langle B \rangle}, \dots, f_{j_e}|_{\langle B \rangle})$ является хорошей и B — одно из ее ассоциированных подмногообразий. Кроме того, как показано в [2, с. 72], для фиксированного неприводимого подмногообразия C в проективном пространстве Π такого, что $\langle C \rangle = \Pi$, требование $h|_C \equiv 0$ налагает на многочлен h не менее $\deg h \cdot \dim \Pi + 1$ независимых условий. Поэтому, фиксируя подпространство $\langle B \rangle$ и многочлены $f_{j_1}, \dots, f_{j_e}$, получаем, что требование $f_j|_B \equiv 0$ налагает на многочлены f_j , где $j \in \{i+1\} \cup (\{1, \dots, i\} \setminus \{j_1, \dots, j_e\})$, не менее $(i-e+1)(2(N-i+e)+1)$ независимых условий. Учитывая размерность грассманиана $(N-i+e)$ -подпространств в $\mathbb{P}^N$, получаем

$$\operatorname{codim} Y_{i,e} \geq (i-e+2)(N-i+e)+1.$$

Нетрудно проверить, что минимум правой части есть $2N+1$. Неравенство

$$2N+1 \geq n_1 + 2n_2 + 2$$

справедливо всегда, кроме единственного случая $n_1 = 0$, $n_2 = N$. Однако, оценивая число независимых условий, приведенных выше, мы принимали $\deg f_j = 2$. Если все многочлены кубические, оценка существенно усиливается:

$$\operatorname{codim} Y_{i,e} \geq (2i-2e+3)(N-i+e)+1 \geq 3N+1,$$

что и завершает доказательство предложения в случае $n_1 + n_2 = N$.

Рассмотрим случай $n_1 + n_2 = N+1$. Пусть $(f_1, \dots, f_{N+1})$ — набор общего положения в некоторой неприводимой компоненте Q множества Y'_∞ . Тогда имеются две возможности: либо $\dim Z(f_1, \dots, f_N) = 1$ и f_{N+1} обращается в нуль на некоторой неприводимой компоненте C множества $Z(f_1, \dots, f_N)$, причем кривая C не является прямой, либо $\dim Z(f_1, \dots, f_N) \geq 2$ и многочлен f_{N+1} произволен.

Предположим, что реализуется первая возможность. Согласно доказанному выше коразмерность множества

$$\{(f_1, \dots, f_N) \mid (f_1, \dots, f_{N+1}) \in Q\} \subset \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2-1)}$$

не меньше $n_1 + 2(n_2 - 1) + 2$, если $n_1 \leq N$ (т.е. имеется хотя бы один кубический многочлен), и не меньше $n_1 + 1$, если $n_1 = N+1$. Легко видеть, что условие $f_{N+1}|_C \equiv 0$, где C — некоторая кривая, линейная оболочка которой имеет размерность не меньше 2, налагает на многочлен f_{N+1} не менее пяти условий. Поэтому $\operatorname{codim} Q > \operatorname{codim} Y_{\text{line}}$, как и утверждалось.

Предположим, что реализуется вторая возможность. Тогда можно считать, что $\dim Z(f_1, \dots, f_N) = 2$. Многочлен f_{N+1} произволен, поэтому, меняя местами f_{N+1} и некоторый многочлен f_i , $i \leq N$, попадаем в уже разобранный ситуацию. Доказательство предложения 5.1 завершено.

Рассмотрим теперь множество

$$Y_i^\Delta \subset \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)} \setminus Y_\infty,$$

состоящее из таких наборов $(f_1, \dots, f_{N+1})$, что найдутся $i+1$ различных точек $p_1, \dots, p_{i+1} \in Z(f_*)$ таких, что

$$\dim \langle p_1, \dots, p_{i+1} \rangle \leq i-1.$$

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Справедливо равенство $\text{codim } Y_i^\Delta = N+2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для удобства $Y_1^\Delta = \emptyset$. Достаточно показать, что $\text{codim}(Y_i^\Delta \setminus Y_{i-1}^\Delta) = N+2$, т.е. можно предполагать, что среди точек p_* любые i точек линейно независимы, так что $\Lambda = \langle p_* \rangle$ – подпространство размерности $i-1$. Фиксируем Λ . Легко видеть, что линейные условия $f_j(p_i) = 0$ линейно независимы, так что множество

$$\{(f_1, \dots, f_{N+1}) \mid \{p_1, \dots, p_{i+1}\} \subset |Z(f_*)|\}$$

имеет коразмерность $(i+1)(N+1)$. Множество наборов $\{p_1, \dots, p_{i+1}\} \subset \Lambda$ имеет размерность $(i+1)(i-1)$, в то время как размерность проективного грассманиана есть $i(N-i+1)$. В итоге получаем

$$\text{codim}(Y_i^\Delta \setminus Y_{i-1}^\Delta) = (i+1)(N-i+2) - i(N-i+1) = N+2,$$

как и утверждалось. Предложение доказано.

Из предложений 5.1, 5.2 немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *При $a \leq N+1$ справедливо равенство*

$$\text{codim}\{(f_1, \dots, f_{N+1}) \mid \#|Z(f_*)| \geq a\} = a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что множество $|Z(f_*)|$ конечно и состоит из a линейно независимых точек. В этом случае утверждение предложения очевидно.

5.2. Глобальные кратности: определение и постановка задачи. Начинаем глобализацию локальной теории, построенной в § 2–4. Теперь, чтобы различить локальные и глобальные кратности, для локальных кратностей типа $\mu_{l,N}(a, b; d)$ пишем $\mu_{l,N}^{\text{local}}(a, b; d)$ и т.д. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)} = (\mathcal{P}_{2, N+1})^{\times n_1} \times (\mathcal{P}_{3, N+1})^{\times n_2}$$

наборов $(f_1, \dots, f_{n_1}, f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2})$, состоящих из n_1 квадратичных и n_2 кубических многочленов, которые мы рассматриваем как многочлены на $\mathbb{P}^N$. Считаем, что $n_1 + n_2 = N + 1$. Пусть

$$\Sigma_1(f_*) = \langle f_1, \dots, f_{n_1} \rangle$$

– линейная система, порожденная квадратичными многочленами, и

$$\Sigma_2(f_*) = \langle f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2} \rangle + \Sigma_1 \mathcal{P}_{1,N+1}$$

– линейная система кубических многочленов, порожденная всеми многочленами f_* .

Через Y_∞ обозначим замкнутое подмножество пространства $\mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$, состоящее из наборов (f_*) , имеющих множество нулей положительной размерности: $\dim Z(f_*) \geq 1$. Согласно предложению 5.1 имеем $\text{codim } Y_\infty = n_1 + 2n_2 + 4$. Пусть

$$(f_1, \dots, f_{N+1}) \in \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)} \setminus Y_\infty$$

– произвольный набор. Записываем $\Sigma_1 = \Sigma_1(f_*)$ и $\Sigma_2 = \Sigma_2(f_*)$, если понятно, о каком наборе идет речь.

Рассмотрим множество

$$\Sigma_1^{n_1} \times \Sigma_2^{N-n_1} \subset (\mathcal{P}_{2,N+1})^{\times n_1} \times (\mathcal{P}_{3,N+1})^{\times n_2}.$$

Пусть $(f_1^\sharp, \dots, f_N^\sharp) \in \Sigma_1^{n_1} \times \Sigma_2^{N-n_1}$ – набор общего положения. Для произвольного эффективного цикла R чистой коразмерности $l \in \mathbb{Z}_+$ на $\mathbb{P}^N$ определим *глобальную эффективную кратность* равенством

$$\mu_{\text{total}}((f_*); R) = \sum_{p \in |Z(f_*)|} \mu_{\text{local}}((f_*); R, p)$$

(напомним, что множество $|Z(f_*)|$ конечно, так как набор (f_*) выбран вне подмножества Y_∞), где локальная кратность в точке p понимается в смысле определения, данного в п. 2.1:

$$\mu_{\text{local}}((f_*); R, p) = \text{mult}_p(\{f_{l+1}^\sharp = 0\} \circ \dots \circ \{f_N^\sharp = 0\} \circ R).$$

(Очевидно, в скобках справа стоит нульмерный цикл, так что mult_p есть кратность точки p в этом цикле.) Если $R \subset \mathbb{P}^N$ – неприводимое подмногообразие коразмерности l , то

$$\mu_{\text{local}}((f_*); R, p) = \dim \mathcal{O}_{p,R} / (f_{l+1}^\sharp, \dots, f_N^\sharp).$$

Пусть, далее, $Y^\Delta \subset \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)} \setminus Y_\infty$ – множество таких наборов (f_*) , что среди конечного множества точек $|Z(f_*)|$ можно выбрать линейно зависимое подмножество. Согласно предложению 5.2 имеем

$$\text{codim } \overline{Y^\Delta} = N + 2.$$

Таким образом, имеет место представление

$$\mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)} \setminus (Y_\infty \cup \overline{Y^\Delta}) = Y_0 \sqcup Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_{N+1},$$

где Y_a – конструктивное множество такое, что для каждого набора $(f_*) \in Y_a$ множество нулей $|Z(f_*)|$ состоит в точности из $a \in \{0, \dots, N+1\}$ линейно независимых точек. Замыкания $\overline{Y_a}$ неприводимы, множества Y_a открыты в своих замыканиях, и согласно предложению 5.3 имеем $\text{codim } \overline{Y_a} = a$. В частности, $Y_0 \subset \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$ – открытое подмножество.

Как и в §2, через $\mathbb{H}_{l,N}(d)$ обозначаем многообразие Чжоу, параметризующее эффективные циклы чистой коразмерности $l \in \mathbb{Z}_+$ и степени $d \geq 1$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^N$.

Определим подмножество

$$\mathcal{Y}_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d) \subset Y_i \times \mathbb{H}_{l,N}(d)$$

условием $\mu_{\text{total}}((f_*); R) \geq m \in \mathbb{Z}_+$. Это замкнутое алгебраическое подмножество (при заданном значении $i \in \{0, \dots, N+1\}$). Также через $\pi_{\mathcal{P}}$ обозначаем проекцию прямого произведения $Y_i \times \mathbb{H}_{l,N}(d)$ на Y_i . В силу проективности многообразия Чжоу образ

$$Y_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d) = \pi_{\mathcal{P}}(\mathcal{Y}_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d)) \subset Y_i$$

есть замкнутое подмножество. Понятно, что и Y_i , и $Y_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d)$ инвариантны относительно действия группы $\text{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$ линейных замен переменных. Рассмотрим задачу оценки коразмерности

$$\text{codim}(Y_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d) \subset Y_i).$$

Кроме группы $\text{GL}_{N+1}(\mathbb{C})$, на пространстве $\mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$ действует и другая группа $G^*(n_1, n_2)$, аналогичная группе $G(n_1, n_2)$ в локальной ситуации. Опишем эту новую группу и ее действие. Элементы $g \in G^*(n_1, n_2)$ суть тройки

$$g = (A_{11} \in \text{GL}_{n_1}(\mathbb{C}), A_{22} \in \text{GL}_{n_2}(\mathbb{C}), A_{12} \in \text{Mat}_{(n_1, n_2)}(\mathcal{P}_{1, N+1})),$$

причем $g(f_1, \dots, f_{N+1}) = (f_1^g, \dots, f_{N+1}^g)$, где

$$\begin{aligned} (f_1^g, \dots, f_{n_1}^g) &= (f_1, \dots, f_{n_1})A_{11}, \\ (f_{n_1+1}^g, \dots, f_{n_1+n_2}^g) &= (f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2})A_{22} + (f_1, \dots, f_{n_1})A_{12}. \end{aligned}$$

Подмножества, инвариантные относительно и замен переменных, и действия группы $G^*(n_1, n_2)$, будем, как и в локальном случае, называть *биинвариантными*.

Биинвариантность множеств Y_∞, Y^Δ, Y_i и $Y_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d)$ очевидна.

По построению множество $Y_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d)$ состоит из таких наборов многочленов $(f_1, \dots, f_{N+1}) \in Y_i$, что существует эффективный цикл R чистой коразмерности l и степени d на $\mathbb{P}^N$, для которого справедлива оценка $\mu_{\text{total}}((f_*); R) \geq m$. Как и в локальном случае, переформулируем задачу оценки коразмерности

множества $Y_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d)$: будем максимизировать кратность m при фиксированной коразмерности. Точнее, пусть $B \subset Y_i$ – биинварантное неприводимое подмногообразие. Положим

$$\mu_{\text{total}}(B, d) = \max\{m \mid B \subset Y_{l,N,i}^{\text{total}}(m, d)\}$$

(индексы l, N слева опускаем для упрощения записи). В явном виде

$$\mu_{\text{total}}(B, d) = \max_R \{\mu_{\text{total}}((f_*); R)\},$$

максимум берется по всем эффективным циклам степени d коразмерности l , и, как обычно, $(f_*) \in B$ – общий набор. Теперь положим $\mu_{\text{total}}(i, a, d) = m$, если существует неприводимое биинварантное подмногообразие $B \subset Y_i$ коразмерности не выше a такое, что $\mu_{\text{total}}(B, d) = m$, и такого многообразия не существует для $m + j$, $j \geq 1$. Считая коразмерность a фиксированной, будем оценивать сверху кратность m .

5.3. Локальный и глобальный тип подмногообразия наборов многочленов. Зафиксируем неприводимое биинварантное подмногообразие $B \subset Y_r$, $r \geq 1$. Для общего (и любого) набора $(f_*) \in B$ теоретико-множественное пересечение $|Z(f_*)|$ состоит в точности из r линейно независимых точек $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^N$ (разумеется, зависящих от набора (f_*)). Для точки $p \in |Z(f_*)|$ положим $\varepsilon_p(f_*) = b$, где

$$\text{rk}(df_1(p), \dots, df_{N+1}(p)) = N - b.$$

Пусть $b_i = \varepsilon_{p_i}(f_*) \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, r$. Очевидно, набор чисел $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ не зависит от выбора набора (f_*) и является инвариантом подмногообразия B . Будем считать, что числа b_i упорядочены: $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Упорядоченный (невозрастающий) набор целых положительных чисел $(b_1, \dots, b_r)$ назовем *глобальным типом* биинварантного подмногообразия $B \subset Y_r$ и обозначим $\varepsilon_{\text{total}}(B) = (b_*)$.

Положим

$$r_* = \max\{j \mid b_j \geq j, 1 \leq j \leq r\},$$

если $b_1 \geq 1$; если же $b_1 = \dots = b_r = 0$, то полагаем $r_* = 0$. Пусть $\Phi(0, \dots, 0) = 0$, а при $b_1 \geq 1$

$$\Phi(b_1, \dots, b_r) = \sum_{j=1}^{r_*} (b_j + 1)(b_j + 1 - j).$$

Имеет место

ЛЕММА 5.2. *Справедлива оценка*

$$\text{codim}(B \subset Y_r) \geq \Phi(b_1, \dots, b_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b_1 = \dots = b_r = 0$, то доказательство очевидно. Предположим поэтому, что $b_1 \geq 1$. В силу биинвариантности достаточно показать, что для фиксированных линейно независимых точек $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^N$ имеет место оценка

$$\text{codim}(B(p_1, \dots, p_r) \subset Y_r(p_1, \dots, p_r)) \geq \Phi(b_*),$$

где $Y_r(p_*) = \{(f_*) \in Y_r \mid \{p_1, \dots, p_r\} = |Z(f_*)|\}$ и $B(p_*) = B \cap Y_r(p_*)$. Далее, переходя к аффинной карте $\mathbb{C}_{(z_1, \dots, z_N)}^N \subset \mathbb{P}^N$, можно считать, что p_1 есть начало координат, а при $j \geq 2$

$$p_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где единственная единица стоит на $(j-1)$ -м месте. Замкнутое подмножество $B(p_*) \subset Y_r(p_*)$ может состоять из нескольких неприводимых компонент. Возьмем любую компоненту B^+ этого множества, общий набор $(f_*) \in B^+$ в которой удовлетворяет равенствам

$$\varepsilon_{p_i}(f_*) = b_i.$$

Очевидно, лемма будет доказана, если установить неравенство

$$\text{codim}(B^+ \subset Y_r(p_*)) \geq \Phi(b_*).$$

Предположим для упрощения рассуждений, что все многочлены f_i квадратичные: если $\deg f_i = 3$, то последующие рассуждения можно использовать без изменений, при этом оценки коразмерности только усилятся (ввиду увеличения количества коэффициентов).

Запишем явно

$$f_i = a_1^{(i)} z_1 + \dots + a_N^{(i)} z_N + \sum_{j \leq k} a_{jk}^{(i)} z_j z_k.$$

Если $r \geq 2$, то условие $f_i(p_j) = 0$ принимает вид равенств

$$a_j^{(i)} + a_{jj}^{(i)} = 0$$

для всех i и $j = 1, \dots, r-1$. В силу биинвариантности можно считать, что

$$\text{rk}(df_1(o), \dots, df_{N-b_1}(o)) = N - b_1,$$

а линейные формы $df_i(o)$ являются линейными комбинациями первых $N - b_1$ форм $df_1(o), \dots, df_{N-b_1}(o)$ при $i \geq N - b_1 + 1$. Отсюда получаем $b_1(b_1 + 1)$ независимых условий для коэффициентов $a_j^{(i)}$ при $i \geq N - b_1 + 1$, считая многочлены $f_1, \dots, f_{N-b}$ фиксированными. Если $r = 1$, то доказательство очевидно.

Предположим, что $r \geq 2$, и рассмотрим условия, связанные с точкой $p_2 = (1, 0, \dots, 0)$. Напомним, что $b_2 \leq b_1$. Если $r_* = 1$, доказательство очевидно. Поэтому считаем, что $b_2 \geq 2$. Снова считаем многочлены $f_1, \dots, f_{N-b_2}$ фиксированными (что не противоречит первому шагу доказательства), так что линейные формы $df_1(p_2), \dots, df_{N-b_2}(p_2)$ линейно независимы, а $df_i(p_2)$ при $i \geq N - b_2 + 1$ суть их линейные комбинации. В явном виде

$$df_i(p_2) = (a_1^{(i)} + 2a_{11}^{(i)})z_1 + \sum_{j \geq 2} (a_j^{(i)} + a_{1j}^{(i)})z_j.$$

В силу равенства $a_1^{(i)} = -a_{11}^{(i)}$ коэффициент при z_1 линейно зависит от множества коэффициентов $a_j^{(i)}$. Однако коэффициенты $a_{1j}^{(i)}$ не участвовали в условиях, связанных с точкой p_1 . Поэтому, потребовав, чтобы

$$df_i(p_2)|_{\{z_1=0\}} \in \langle df_1(p_2)|_{\{z_1=0\}}, \dots, df_{N-b_2}(p_2)|_{\{z_1=0\}} \rangle \quad (5.1)$$

при $i \geq N - b_2 + 1$, мы налагаем не менее $(b_2 + 1)(b_2 - 1)$ независимых условий на коэффициенты $a_{1j}^{(i)}$. (Точное количество условий определяется размерностью пространства из правой части формулы (5.1): если размерность равна $N - b_2$, то получаем $(b_2 + 1)(b_2 - 1)$ условий, если она уменьшается на единицу, то $(b_2 + 1)b_2$ условий.) Этим рассмотрение второй компоненты ($j = 2$) функции Φ завершается. Если $r_* = 2$, то лемма доказана.

Если $r_* \geq 3$, то продолжаем рассуждения по индукции и считаем доказанным, что требование

$$\text{rk}(df_1(p_\alpha), \dots, df_{N+1}(p_\alpha)) = N - b_\alpha$$

при $\alpha = 1, \dots, j$ налагает на коэффициенты $a_\gamma^{(i)}$, $i \geq N - b_1 + 1$, и $a_{\lambda k}^{(i)}$, где $\lambda = 1, \dots, j - 1$, $k = \lambda + 1, \dots, N$ и $i \geq N - b_{\lambda+1} + 1$, в совокупности не менее

$$\sum_{\lambda=1}^j (b_\lambda + 1)(b_\lambda + 1 - \lambda)$$

независимых условий. Если $r_* = j$, то доказательство на этом закончено. В противном случае, считая $f_1, \dots, f_{N-b_{j+1}}$ фиксированными, получаем, что линейные формы

$$df_i(p_{j+1})|_{\{z_1=\dots=z_j=0\}}, \quad i \geq N - b_{j+1} + 1,$$

принадлежат линейному пространству

$$\langle df_1(p_{j+1})|_{\{z_1=\dots=z_j=0\}}, \dots, df_{N-b_{j+1}}(p_{j+1})|_{\{z_1=\dots=z_j=0\}} \rangle.$$

Это дает не менее $(b_{j+1} + 1)(b_j - j)$ независимых условий на *новые* (т.е. не участвовавшие в предыдущих рассмотрениях) коэффициенты

$$a_{j,j+1}^{(i)}, \dots, a_{j,N}^{(i)}, \quad i \geq N - b_{j+1} + 1.$$

Этим индуктивный переход от j к $j + 1$ построен и доказательство леммы завершено.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Имеет место оценка*

$$\mu_{\text{total}}(i, a, d) \leq \sum_{\Phi(b_1, \dots, b_i) + i \leq a} \mu_{\text{local}}(a - b_i, b_i; d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка следует из леммы 5.2, равенства $\text{codim } Y_i = i$ и того факта, что глобальная кратность μ_{total} вычисляется по наборам $N + 1$

многочленов, а локальная μ_{local} – по наборам N многочленов. Действительно, если

$$B \subset \mathcal{P}_{[1,2],N}^{\times n_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{\times n_2}$$

– бинвариантное подмногообразие коразмерности a (в смысле локальной теории из § 2–4) и $\varepsilon(B) = b$, причем $n_1 + n_2 = N + 1$, то проекция $[B]_{N+1}$ множества B вдоль последнего прямого сомножителя имеет коразмерность не больше $a - b$ в пространстве $\mathcal{P}_{[1,2],N}^{\times n_1} \times \mathcal{P}_{[1,3],N}^{\times (n_2-1)}$, поскольку для общего набора $(f_1, \dots, f_{N+1}) \in B$ имеем следующее: $df_{N+1}(o)$ обращается в нуль на подпространстве коразмерности b , зависящем только от $(f_1, \dots, f_N)$. Теперь утверждение следствия очевидно.

Для упрощения обозначений будем опускать параметры l и N , тем более, что наши оценки от этих параметров не зависят, и записывать $\mu_{\text{local}}(a, b; d)$ вместо $\mu_{l,N}^{\text{local}}(a, b; d)$. Значения параметров l и N в любом случае фиксированы в последующих рассуждениях.

5.4. Явная оценка для глобальной кратности. Теперь мы можем получить эффективную оценку сверху для глобальной кратности $\mu_{\text{total}}(r, a, d)$. Пусть $B \subset Y_r$ – неприводимое бинвариантное подмногообразие, коразмерность которого в пространстве $\mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$ не превосходит a . В частности, выполнено неравенство $\Phi(b_1, \dots, b_r) + r \leq a$, где $(b_1, \dots, b_r) = \varepsilon(B)$ – глобальный тип подмногообразия B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Имеет место неравенство*

$$\mu_{\text{total}}(B, d) \leq \sum_{i=1}^r \mu_{\text{local}}(a - b_i, b_i; d). \quad (5.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Справедливы неравенства*

$$\mu_{\text{total}}(r, a, d) \leq \max_{\Phi(b_1, \dots, b_r) + r \leq a} \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_{\text{local}}(a - b_i, b_i; d) \right\}, \quad (5.3)$$

$$\mu_{\text{total}}(r, a, d) \leq d \left(\max_{\Phi(b_1, \dots, b_r) + r \leq a} \left\{ \sum_{i=1}^r \bar{\mu}_{\text{local}}(a - b_i, b_i) \right\} \right). \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (5.3) вытекает из предложения 5.4 в силу определения чисел $\mu_{\text{total}}(r, a, d)$. Неравенство (5.4) справедливо согласно предложению 4.1. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.4. Пусть $(f_*) \in B$ – набор общего положения, $\{p_1, \dots, p_r\} = |Z(f_*)|$ – его общие нули, где $b_i = \varepsilon_{p_i}(f_*)$, $i = 1, \dots, r$. Неравенство (5.2) вытекает из оценки

$$\mu_{\text{local}}((f_*); R, p_i) \leq \mu_{\text{local}}(a - b_i, b_i; d) \quad (5.5)$$

для любого эффективного цикла R чистой коразмерности l степени d . Последнюю оценку мы и будем доказывать.

Положим $p = p_i$, и пусть $B(p) \subset B$ – замкнутое (в B) подмножество наборов (g_*) , обращающихся в нуль в точке p . В силу биинвариантности множества B исходный набор (f_*) , зафиксированный в начале доказательства, есть общий набор одной из неприводимых компонент B^+ множества $B(p)$, причем коразмерность B^+ в пространстве $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$ совпадает с $\text{codim}(B \subset \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)})$ и потому не превосходит a (мы воспользовались естественным отождествлением линейного пространства наборов $(g_*) \in \mathcal{H}_{N+1}^{(n_1, n_2)}$, обращающихся в нуль в точке p , с пространством $\mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)}$, определенным в § 2). Пусть

$$\pi: \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2)} \rightarrow \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2-1)}$$

– проекция вдоль последнего прямого сомножителя и $[B^+]_N$ – замыкание образа $\pi(B^+)$. В силу биинвариантности и условия $\varepsilon_p(f_*) = b$ общий слой проекции

$$\pi_B: B^+ \rightarrow [B^+]_N$$

имеет в $\mathcal{P}_{[1,3],N}$ коразмерность не меньше b (форма $df_{N+1}(p)$ обращается в нуль на b -мерном линейном подпространстве, зависящем только от $df_1, \dots, df_N$). Следовательно, справедливо неравенство

$$\text{codim}([B^+]_N \subset \mathcal{P}_N^{(n_1, n_2-1)}) \leq a - b,$$

так что неравенство (5.5) доказано. Предложение доказано.

Положим

$$\mu_{\text{total}}(a, d) = \max_{1 \leq r \leq \min\{a, N+1\}} \{\mu_{\text{total}}(r, a, d)\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. При $a \geq 12$ справедлива оценка

$$\mu_{\text{total}}(a, d) \leq 3 \cdot 2^{a-6} d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $a \geq 21$. Поскольку $r \leq a$, из неравенств (5.3) и (4.11) получаем

$$\mu_{\text{total}}(a, d) \leq a \frac{e^2}{2\pi[\sqrt{a}]} \left(\frac{5}{3}\right)^{[\sqrt{a}]} d.$$

Нетрудно проверить, что при $a \geq 21$ правая часть последнего неравенства строго меньше, чем $3 \cdot 2^{a-6}$. Этот метод, однако, очень грубый. Гораздо более точную оценку дает неравенство (5.4). Положим

$$\bar{\mu}_{\text{total}}(a) = \max_{1 \leq r \leq a} \left(\max_{\Phi(b_*) + r \leq a} \left\{ \sum_{i=1}^r \bar{\mu}(a - b_i, b_i) \right\} \right).$$

Согласно неравенству (5.4) и предложению 4.1 справедливо неравенство

$$\mu_{\text{total}}(a, d) \leq d \bar{\mu}_{\text{total}}(a),$$

так что для завершения доказательства предложения достаточно проверить, что при $12 \leq a \leq 20$ имеет место неравенство $\bar{\mu}_{\text{total}}(a) \leq 3 \cdot 2^{a-6}$. Для небольших значений коразмерности a функцию $\bar{\mu}_{\text{total}}(a)$ нетрудно вычислить явно,

и результаты (для $1 \leq a \leq 36$) приводятся ниже в табл. 2, которая устроена следующим образом. Каждая строка соответствует некоторому значению a , которое приводится в первой колонке. Во второй колонке указаны значения параметров r (число точек) и $b_1, \dots, b_r$, на которых достигается максимум в определении функции $\bar{\mu}_{\text{total}}$. В третьей колонке стоит собственно значение $\bar{\mu}_{\text{total}}(a)$.

ТАБЛИЦА 2

a	$r, b_1, \dots, b_r$	$\bar{\mu}_{\text{total}}(a)$
1	$r = 1, b_1 = 0$	1
2	$r = 2, b_1 = b_2 = 0$	2
3	$r = 3, b_1 = b_2 = b_3 = 0$	3
4	$r = 4, b_1 = b_2 = 1$	6
5	$r = 3, b_1 = b_2 = b_3 = 1$	15
6	$r = 4, b_1 = \dots = b_4 = 1$	24
7	$r = 5, b_1 = \dots = b_5 = 1$	35
8	$r = 6, b_1 = \dots = b_6 = 1$	48
9	$r = 7, b_1 = \dots = b_7 = 1$	63
10	$r = 8, b_1 = \dots = b_8 = 1$	80
11	$r = 9, b_1 = \dots = b_9 = 1$	99
12	$r = 10, b_1 = \dots = b_{10} = 1$	120
13	$r = 11, b_1 = \dots = b_{11} = 1$	143
14	$r = 12, b_1 = \dots = b_{12} = 1$	168
15	$r = 13, b_1 = \dots = b_{13} = 1$	195
16	$r = 7, b_1 = \dots = b_7 = 2$	308
17	$r = 8, b_1 = \dots = b_8 = 2$	408
18	$r = 9, b_1 = \dots = b_9 = 2$	522
19	$r = 10, b_1 = \dots = b_{10} = 2$	660
20	$r = 11, b_1 = \dots = b_{11} = 2$	814
21	$r = 12, b_1 = \dots = b_{12} = 2$	996
22	$r = 13, b_1 = \dots = b_{13} = 2$	1196
23	$r = 14, b_1 = \dots = b_{14} = 2$	1428
24	$r = 15, b_1 = \dots = b_{15} = 2$	1680
25	$r = 16, b_1 = \dots = b_{16} = 2$	1968
26	$r = 17, b_1 = \dots = b_{17} = 2$	2278
27	$r = 18, b_1 = \dots = b_{18} = 2$	2628

Последующие значения функции $\bar{\mu}_{\text{total}}$ таковы:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{\text{total}}(28) &= 3002, & \bar{\mu}_{\text{total}}(29) &= 3420, & \bar{\mu}_{\text{total}}(30) &= 3864, \\ \bar{\mu}_{\text{total}}(31) &= 4356, & \bar{\mu}_{\text{total}}(32) &= 4876, & \bar{\mu}_{\text{total}}(33) &= 5448, \\ \bar{\mu}_{\text{total}}(34) &= 6050, & \bar{\mu}_{\text{total}}(35) &= 6708.\end{aligned}$$

Все эти значения достигаются при $r = a - 9$, $b_1 = \dots = b_r = 2$. При $a = 36$ происходит следующий скачок: максимум достигается при $r = 12$ и $b_1 = \dots = b_{12} = 3$ и есть $\bar{\mu}_{\text{total}}(36) = 7980$.

Согласно табл. 2, начиная с $a = 12$, мы получаем требуемое неравенство $\bar{\mu}_{\text{total}}(a) \leq 3 \cdot 2^{a-6}$. Предложение этим доказано.

Наконец, из приведенных в табл. 2 значений функции $\bar{\mu}_{\text{total}}$ элементарными вычислениями получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. *Если тройка (a, n_1, n_2) совпадает с одной из следующих троек:*

$$(11, 5, 3), \quad (11, 3, 4), \quad (11, 1, 5), \quad (10, 2, 4), \quad (10, 0, 5),$$

то выполнено неравенство

$$\bar{\mu}_{\text{total}}(a, d) \leq 2^{n_1+n_2-4} 3^{n_2-1} d.$$

5.5. Регулярные полные пересечения. Докажем, наконец, теорему 0.2. Пусть

$$\mathcal{B} \subset \mathbb{P} \times (\mathcal{P}_{2, M+k+1}^{\times k_1} \times \mathcal{P}_{3, M+k+1}^{\times k_2})$$

– замкнутое множество “плохих” пар $(o, (f_*))$, где $f_1(o) = \dots = f_k(o) = 0$ и хотя бы одно из условий (R1)–(R3) не выполнено в этой точке. Пусть π_1 и π_2 – проекции прямого произведения на первый ($\mathbb{P}$) и второй (пространство наборов k многочленов) сомножители соответственно. Положим $\mathcal{B}(o) = \pi_1^{-1}(o) \cap \mathcal{B}$. Замкнутое подмножество $\mathcal{B}(o)$ содержится в подпространстве

$$\mathcal{L}(o) = \mathcal{P}_{[1,2], M+k}^{\times k_1} \times \mathcal{P}_{[1,3], M+k}^{\times k_2} \subset \pi_1^{-1}(0)$$

(где мы опять отождествляем однородные многочлены, обращающиеся в нуль в точке o , с неоднородными многочленами без свободного члена), и достаточно показать, что его коразмерность относительно этого подпространства не меньше, чем $M + 1$. В самом деле, если это так, то

$$\text{codim } \mathcal{B} = \text{codim}(\mathcal{B}(o) \subset \pi_1^{-1}(o)) \geq M + k + 1,$$

так что отображение $\pi_2|_{\mathcal{B}}$ не может быть сюръективным, откуда немедленно вытекает утверждение теоремы 0.2.

Для условий (R1) и (R2) неравенство

$$\text{codim}(\mathcal{B}(o) \subset \mathcal{L}(o)) \geq M + 1 \tag{5.6}$$

доказано в [2] с учетом предложения 5.2. Поэтому неравенство (5.6) достаточно доказывать для таких наборов $(f_*) \in \mathcal{B}(o)$, которые удовлетворяют условиям (R1) и (R2), но условие (R3) не выполнено. Фиксируя линейные части многочленов f_i в точке o и, тем самым, проективизированное касательное пространство $\mathbb{T} \cong \mathbb{P}^{M-1}$, сводим задачу к оценке коразмерности множества наборов $n_1 = k_1 + k_2 = k$ квадратичных и $n_2 = k_2$ кубических однородных многочленов

$$(\bar{q}_{1,2}, \dots, \bar{q}_{k,2}, \bar{q}_{k_1+1,3}, \dots, \bar{q}_{k,3}), \quad (5.7)$$

не удовлетворяющих условию (R3). Однако в силу предложений 5.5, 5.6 основное неравенство (0.3) условия (R3) выполнено для общего элемента любого подмногообразия коразмерности не более M в пространстве наборов $\mathcal{P}_{2,M}^{\times n_1} \times \mathcal{P}_{3,M}^{\times n_2}$ и любого неприводимого подмногообразия $R \subset \mathbb{T}$ коразмерности 3. Следовательно, замкнутое множество наборов (5.7), не удовлетворяющих условию (R3), имеет коразмерность не меньше $M + 1$. Этим оценка (5.6) и теорема 0.2 доказаны.

Список литературы

1. А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия. I. Многообразия Фано”, *УМН*, **62**:5 (2007), 15–106; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid varieties. I. Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **62**:5 (2007), 857–942.
2. A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano complete intersections”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 55–79.
3. A. V. Pukhlikov, *Birationally rigid Fano complete intersections*. II, arXiv:1110.2052.
4. A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
5. А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 139–182; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid iterated Fano double covers”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 555–596.
6. G. Fano, “Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche”, *Pont. Acad. Sci. Comment.*, **11** (1947), 635–720.
7. В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 815–868.
8. В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные кватерики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86(128)**:1(9) (1971), 140–166; англ. пер.: V. A. Iskovskih, J. I. Manin, “Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 141–166.
9. В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерного многообразия Фано V_6^3 ”, *Докл. АН СССР*, **235**:3 (1977), 509–511; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Birational automorphisms of the Fano 3-fold V_6^3 ”, *Soviet Math. Dokl.*, **18**:4 (1978), 948–951.
10. А. В. Пухликов, “Максимальные особенности на многообразии Фано V_6^3 ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **44**:2 (1989), 47–50; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Maximal singularities on the Fano variety V_6^3 ”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **44**:2 (1989), 70–75.
11. V. A. Iskovskikh, A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of multidimensional algebraic manifolds”, *J. Math. Sci.*, **82**:4 (1996), 3528–3613.

12. А. Н. Тюрин, “Пересечение квадрик”, *УМН*, **30:6** (1975), 51–99; англ. пер.: A. N. Tyurin, “On intersections of quadrics”, *Russian Math. Surveys*, **30:6** (1975), 51–105.
13. А. Н. Тюрин, “Средний якобиан трехмерных многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 5–57; англ. пер.: A. N. Tyurin, “The middle Jacobian of three-dimensional varieties”, *J. Soviet Math.*, **13:6** (1980), 707–745.
14. A. Beauville, “Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **10:3** (1977), 309–391.
15. A. V. Pukhlikov, “Birational isomorphisms of four-dimensional quintics”, *Invent. Math.*, **87** (1987), 303–329.
16. А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52:1** (1988), 229–239; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of a double space and double quadric”, *Math. USSR-Izv.*, **32:1** (1989), 233–243.
17. И. А. Чельцов, “Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и кватрики, не содержащего плоскости”, *Матем. сб.*, **194:11** (2003), 95–116; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Non-rationality of the 4-dimensional smooth complete intersection of a quadric and a quartic not containing planes”, *Sb. Math.*, **194:11** (2003), 1679–1699.
18. А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия двойных пространств Фано индекса два”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74:5** (2010), 45–114; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano double spaces of index two”, *Izv. Math.*, **74:5** (2010), 925–991.
19. J. Kollár, “Flips and abundance for algebraic threefolds” (Utah, Salt Lake City, 1991), *Asterisque*, **211**, Soc. Math. de France, Paris, 1993.
20. A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano varieties”, *The Fano conference* (Torino, Italy, 2002), Univ. Torino, Turin, 2004, 659–681.
21. A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano complete intersections”, *Manuscripta Math.*, **121:4** (2006), 491–526.
22. A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano cyclic covers”, *Pure Appl. Math. Q.*, **5:2** (2009), 641–700.
23. A. Gabriellov, A. Khovanskii, “Multiplicity of a Noetherian intersection”, *Geometry of differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 119–131.
24. А. В. Пухликов, “О кратности решений системы алгебраических уравнений”, *Теория чисел, алгебра и анализ*, Тр. МИАН, **276**, МАИК, М., 2012, 239–254; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “On the multiplicity of solutions of a system of algebraic equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **276** (2012), 234–249.
25. У. Фултон, *Теория пересечений*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: W. Fulton, *Intersection theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

А. В. Пухликов (A. V. PUKHLIKOV)
 University of Liverpool, United Kingdom
 E-mail: pukh@liv.ac.uk

Поступило в редакцию
 11.05.2012
 17.09.2012