Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Миклюков, Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 4, 111–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:09:06

УДК 517.957+514.752

В. М. Миклюков

Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей

Приводятся признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей $F = (D, ds_F^2)$, где D – область в $\mathbb{R}^n$ и ds_F^2 – квадрат элемента длины на F . Доказывается параболичность некоторых граничных множеств, расположенных на графиках решений уравнений типа минимальной поверхности. В качестве примера приводится обобщенный принцип максимума для производных решений уравнений типа минимальной поверхности в “узких” на бесконечности областях $\mathbb{R}^n$. Сформулированы признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств на графиках пространственноподобных поверхностей в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$, в частности, существенное усиление теоремы Чоя и Трайберга о гиперболичности графиков целых решений уравнения постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}_1^3$.

Библиография: 53 наименования.

Введение

Хорошо известно, что всякая двумерная односвязная поверхность F класса C^1 конформно эквивалентна плоскости $\mathbb{R}^2$ либо кругу единичного радиуса. В первом случае поверхность F называется *поверхностью параболического типа*, во втором – *гиперболического типа*.

Характерным свойством двумерных поверхностей F параболического (гиперболического) типа является выполнение (не выполнение) для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая ограниченная субгармоническая на F функция есть тождественная постоянная. Данное свойство служит основой для распространения понятий параболичности и гиперболичности на римановы многообразия размерности выше двух.

Поиски признаков параболичности или гиперболичности типа поверхностей имеют большую историю. Количество работ, выполненных по этой проблеме, весьма велико и непрерывно возрастает. Общее представление о картине в целом современных исследований в данном направлении можно получить из обзоров С. Гильдебрандта [1] и Ш.-Т. Яу [2].

Настоящая работа посвящена одному специальному вопросу общей задачи – поиску признаков параболичности или гиперболичности граничных множеств графиков C^1 -функций $t = f(x)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Проблема получения эффективных условий параболичности для явно заданных гиперповерхностей была поставлена Дж. Милнором [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-176).

Если поверхность F полна, то тип F зависит от параболичности или гиперболичности типа ее граничного множества, образуемого “бесконечно удаленными” точками F . Так что понятие типа граничного множества является локальной версией понятия типа поверхности. Заметим также, что граничные множества F параболического типа оказываются “пренебрежимыми” в обобщенном принципе максимума для ограниченных субгармонических на поверхности F функций, прямым следствием которого является теорема Лиувилля на F .

Тип граничного множества определяется на основе емкости последовательности конденсаторов специального вида на F . В двумерном случае он инвариантен при конформных отображениях поверхности и до определенной степени обслуживает те же задачи, что и простые концы Каратеодори при конформных отображениях областей из $\mathbb{R}^2$ (см., например, [4]).

Важный объект приложений разрабатываемой здесь техники представляют собой уравнения типа минимальных поверхностей. Одной из наиболее эффективных конструкций, используемых при исследовании двумерных минимальных поверхностей, является представление Эннепера–Вейерштрасса минимальной поверхности через голоморфные функции. Для минимальных поверхностей более высокой размерности такое представление невозможно. С другой стороны, в работе Р. Финна [5] были выделены классы нелинейных уравнений типа минимальных поверхностей, графики решений которых имеют квазиконформное гауссово отображение, и с использованием техники квазиконформных отображений были получены некоторые ключевые априорные оценки решений. Определяющим свойством квазиконформных отображений является искажение емкости конденсаторов не более чем в конечное число раз. Таким образом, можно утверждать о существовании иного подхода к исследованию минимальных поверхностей (и уравнений типа минимальных поверхностей) – подхода, который, используя конформный инвариант (емкость конденсатора), не использовал бы самих конформных (или квазиконформных) отображений. Данная работа посвящена развитию этой концепции.

Опишем кратко содержание работы. В §1 доказывается совпадение емкости и модуля конденсатора на абстрактной поверхности $F = (D, ds_F^2)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – область и ds_F^2 – квадрат элемента длины на F . Емкость конденсатора весьма удобна в оценках субгармонических функций на поверхности, модуль мы используем как средство для оценок емкости.

В §2 вводятся понятия параболичности и гиперболичности граничного множества на поверхности. Доказывается обобщенный принцип максимума для решений широкого класса квазилинейных уравнений эллиптического типа.

§3 посвящен общим признакам параболичности и гиперболичности граничных множеств на абстрактных поверхностях $F = (D, ds_F^2)$. В частности, здесь доказывается некоторое усиление известного признака параболичности типа поверхности, принадлежащего Ш.-Е. Ченгу и Ш.-Т. Яу [6], формулируемого в терминах скорости роста объема геодезического шара. Наш подход к задаче основывается на методах, развитых в теории конформных и квазиконформных отображений, и восходит к работам Г. Греча [7] и О. Тейхмюллера [8].

В §4 устанавливается признак параболичности типа граничных множеств на графиках решений уравнений типа минимальных поверхностей, расположенных над неограниченными областями $\mathbb{R}^n$. Этот результат является ключевым при доказательстве в §5 обобщенного принципа максимума для производных решений

уравнений типа минимальных поверхностей в неограниченных областях. В двумерном случае отсюда как следствия вытекают известные теоремы С.Н. Бернштейна [9] и Л. Берса [10] о линейности целых решений уравнения минимальных поверхностей и о существовании предела градиента решения, определенного над внешностью компакта в $\mathbb{R}^2$.

В §6 приводятся интерпретации общих признаков параболичности и гиперболичности граничных множеств, полученных в §3, для случая пространственноподобных поверхностей в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$. В частности, мы получаем существенное усиление признака гиперболичности целых решений уравнения поверхностей постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}_1^3$, принадлежащего Х.И. Чою и А. Трайбергсу [11].

Значительная часть излагаемых в статье результатов имеет аналоги для граничных множеств на римановых многообразиях. Ограничиваемся здесь изложением случая граничных множеств на графиках, поскольку основные приложения разрабатываемой в статье техники будут связаны с решениями дифференциальных уравнений. Кроме того, рассмотрение общего случая существенно увеличило бы объем статьи. Эти результаты будут изложены в дальнейшем.

Очевидно, что в данной работе затрагивается только чрезвычайно узкий пласт результатов и методов, связывающий теорию поверхностей заданной средней кривизны с теорией квазиконформных отображений. В частности, совсем не рассматривается связь теории минимальных поверхностей с вариационными задачами (см., например, [53] и цитированную там литературу), поэтому литературный обзор далеко не полон. В нем нет ссылок на многие замечательные работы, базирующиеся на дифференциально-геометрических методах.

§1. Емкость и модуль конденсатора в римановой метрике

1.1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 2$), и пусть $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность, заданная над областью D линейным элементом

$$ds_F^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j, \quad (1.1)$$

где $g_{i,j}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – непрерывные в области D функции.

Ниже предполагается, что квадратичная форма (1.1) положительно определена в каждой точке $x \in D$. Обозначим через

$$d\sigma_F = \sqrt{g(x)} dx$$

элемент объема поверхности F . Здесь $g = \det(g_{ij})$ и $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$\mathcal{E}_F(\xi) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad (1.2)$$

где $g^{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – элементы матрицы, обратной к матрице (g_{ij}) .

1.2. Пусть $\Delta \subset D$ – произвольная подобласть области D , и пусть $P, Q \subset \Delta$ – непустые, замкнутые относительно D , непересекающиеся множества. Всякую тройку $(P, Q; \Delta)$ множеств описанного вида будем называть *конденсатором*.

Зададим постоянную $\alpha > 1$ и положим

$$\text{cap}_{\alpha, F}(P, Q; \Delta) = \inf_{\Delta} \int_{\Delta} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_F, \quad (1.3)$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям $\phi(x)$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$, класса $\text{Lip } \Delta$, обращающимся в 1 на P и равным 0 на множестве Q . Величину $\text{cap}_{\alpha, F}(P, Q; \Delta)$ будем называть α -емкостью конденсатора в метрике поверхности F .

1.3. Наряду с емкостью будет использована еще одна величина, определяемая следующим образом. Пусть $(P, Q; \Delta)$ – произвольный конденсатор в области D . Рассмотрим семейство Γ замкнутых, локально спрямляемых дуг γ , лежащих в Δ и соединяющих там множество P с множеством Q в том смысле, что пересечения $\gamma \cap P$ и $\gamma \cap Q$ непусты.

Пусть $\rho(x)$ – измеримая по Лебегу, локально ограниченная, неотрицательная функция, определенная в области Δ . Будем говорить, что $\rho(x)$ *допустима* для семейства Γ в метрике ds_F^2 , если для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено

$$\int_{\gamma} \rho(x) ds_F \geq 1. \quad (1.4)$$

Величину

$$\text{mod}_{\alpha, F}(P, Q; \Delta) = \inf_{\Delta} \int_{\Delta} \rho^{\alpha}(x) d\sigma_F, \quad (1.5)$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым для Γ в метрике (1.1) функциям $\rho(x)$, будем называть α -модулем конденсатора $(P, Q; \Delta)$ в метрике поверхности F .

1.4. В случае, когда метрика (1.1) евклидова, т.е. $ds_F = |dx|$, мы будем говорить просто об α -емкости и α -модуле конденсатора и писать $\text{cap}_{\alpha}(P, Q; \Delta)$ и $\text{mod}_{\alpha}(P, Q; \Delta)$ без указания индекса F .

Если, кроме того, $\alpha = n$, то введенные величины совпадают соответственно с конформной емкостью и конформным модулем конденсатора $(P, Q; \Delta)$ в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [12], [13]).

1.5. Формулируемое ниже утверждение устанавливает связь между емкостью и модулем конденсатора.

ЛЕММА 1.1. Пусть F – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^n$ линейным элементом (1.1). Тогда для произвольного конденсатора $(P, Q; \Delta)$, содержащегося в D , выполнено

$$\text{cap}_{\alpha, F}(P, Q; \Delta) = \text{mod}_{\alpha, F}(P, Q; \Delta). \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi(x)$ – произвольная функция, допустимая в вариационной задаче (1.3). Положим

$$\lambda(x) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{|y - x|}.$$

Так как $\lambda(x) < \infty$ всюду в Δ , то согласно теореме Радемахера функция $\phi(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в области Δ . Обозначим через $\rho(x)$ функцию, совпадающую с функцией $\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla \phi(x))$ в точках дифференцируемости $\phi(x)$ и равную $\lambda(x)q(x)$, где

$$\frac{1}{q^2(x)} = \min_{|\eta|=1} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \eta_i \eta_j,$$

во всех остальных точках $x \in \Delta$.

Покажем, что $\rho(x)$ является допустимой в метрике (1.1) функцией для семейства дуг γ , соединяющих множества P и Q в Δ . Действительно, пусть $\gamma \in \Gamma$ – произвольная дуга и $x(s): [0, \text{дл.}\gamma] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – ее параметризация, где в качестве параметра s выбрана длина переменной дуги с фиксированным концом, совпадающим с одним из концов γ . Функция $\phi(x(s))$ абсолютно непрерывна на $[0, \text{дл.}\gamma]$. Не ограничивая общности, можно считать, что данная функция принимает на концах отрезка значения 0 и 1. Поэтому

$$1 \leq \int_0^{\text{дл.}\gamma} \left| \frac{d\phi}{ds}(x(s)) \right| ds.$$

Для доказательства (1.4) достаточно показать, что почти всюду на γ (а именно в точках, где существует касательная к γ) выполнено

$$\left| \frac{d\phi}{ds}(x(s)) \right| \leq \rho(x(s)) \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(s)) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Предположим сначала, что $x = x(s)$ – точка, в которой $\phi(x)$ не имеет полного дифференциала. Тогда

$$\left| \frac{d\phi}{ds}(x(s)) \right| \leq \lambda(x(s)) = \frac{\rho(x(s))}{q(x(s))} = \rho(x(s)) \min_{|\eta|=1} \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \eta_i \eta_j \right)^{1/2}.$$

Однако в точке $x = x(s)$ дуга γ имеет касательную, а потому

$$\min_{|\eta|=1} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(s)) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds},$$

что непосредственно приводит к (1.7).

Пусть теперь $x = x(s)$ – точка, где $\phi(x)$ имеет полный дифференциал, а дуга γ – касательную. Тогда

$$\left| \frac{d\phi}{ds}(x(s)) \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x(s)) \frac{dx_i}{ds} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}.$$

Далее нам потребуется

ЛЕММА 1.2. *Справедливо соотношение*

$$\max_{|\theta|=1} \frac{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \theta_i \theta_j}{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \theta_i \theta_j} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}. \quad (1.8)$$

Доказательство этого утверждения будет дано ниже, а пока заметим, что из (1.8) следует

$$\left| \frac{d\phi}{ds}(x(s)) \right|^2 \leq \mathcal{E}_F(\nabla \phi) \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x(s)) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds},$$

и соотношение (1.7) полностью доказано.

Таким образом, функция $\rho(x)$ допустима для семейства Γ , а потому

$$\text{mod}_{\alpha,F}(P, Q; \Delta) \leq \int_{\Delta} \rho^{\alpha}(x) d\sigma_F = \int_{\Delta} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_F.$$

Отсюда в силу произвола в выборе функции $\phi(x)$ выполнено

$$\text{mod}_{\alpha,F}(P, Q; \Delta) \leq \text{cap}_{\alpha,F}(P, Q; \Delta). \quad (1.9)$$

Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим произвольную функцию $\rho(x)$, допустимую для семейства Γ . Положим

$$\phi^*(x) = \inf_{\gamma(x)} \int_{\gamma(x)} \rho(y) ds_F,$$

где точная нижняя грань берется по всем дугам $\gamma(x)$, лежащим в области Δ и соединяющим точку $x \in \Delta$ с множеством Q . Так как $\rho(x)$ локально ограничена в области Δ , то функция $\phi^*(x)$ принадлежит классу $\text{Lip } \Delta$ и равна 0 всюду на Q . В силу (1.4) имеем $\phi^*(x) \geq 1$ для всех $x \in P$.

Далее введем в рассмотрение функцию

$$\phi(x) = \min\{1, \phi^*(x)\}.$$

Легко видеть, что $\phi(x)$ принадлежит $\text{Lip } \Delta$ и обращается в 1 и 0 соответственно на множествах P и Q . Если мы покажем, что почти всюду в Δ выполнено

$$\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla \phi(x)) \leq \rho(x), \quad (1.10)$$

то тогда

$$\text{cap}_{\alpha,F}(P, Q; \Delta) \leq \int_{\Delta} \rho^{\alpha}(x) d\sigma_F.$$

Отсюда, пользуясь произволом в выборе $\rho(x)$, мы сможем заключить, что

$$\text{cap}_{\alpha,F}(P, Q; \Delta) \leq \text{mod}_{\alpha,F}(P, Q; \Delta),$$

и, сопоставляя данное неравенство с неравенством (1.9), придем к нужному утверждению.

Чтобы установить справедливость (1.10), заметим сперва, что $\phi(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в Δ , а согласно известной теореме Лебега для почти всех точек $y \in \Delta$ выполнено

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|x-y| < r} |\rho(x) - \rho(y)| dx = 0. \quad (1.11)$$

Поэтому нам достаточно проверить (1.10) лишь на множестве, на котором имеет место каждое из отмеченных свойств. Пусть y — произвольная точка этого множества, в которой $0 < \phi(x) < 1$. Пусть $\gamma(y, \theta)$ — отрезок длины h , выходящий из точки y в направлении, задаваемом вектором $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$. Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) \theta_i \right| \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma(y, \theta)} \rho(x) ds_F. \quad (1.12)$$

Далее имеем

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma(y, \theta)} \rho(x) ds_F \leq \rho(y) \frac{1}{h} \int_{\gamma(y, \theta)} ds_F + \frac{1}{h} \int_{\gamma(y, \theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F. \quad (1.13)$$

Полагая h достаточно малым и интегрируя по единичной сфере, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{|\theta|=1} d\omega_{n-1} \int_{\gamma(y, \theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F \\ &= \int_{|\theta|=1} d\omega_{n-1} \int_0^h |\rho(y + r\theta) - \rho(y)| \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(y + r\theta) \theta_i \theta_j \right)^{1/2} dr \\ &\leq c_1 \int_{|\omega|=1} d\omega_{n-1} \int_0^h |\rho(y + r\theta) - \rho(y)| dr \\ &= c_1 \int_{|x-y| < h} |\rho(x) - \rho(y)| |x-y|^{1-n} dx, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где c_1 — постоянная, не зависящая от h при достаточно малых $h > 0$.

В силу неравенства Гёльдера при любом $\beta > n$ выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{|x-y| < h} |\rho(x) - \rho(y)| |x-y|^{1-n} dx \\ &\leq \left(\int_{|x-y| < h} |x-y|^{\frac{\beta(1-n)}{\beta-1}} dx \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left(\int_{|x-y| < h} |\rho(x) - \rho(y)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \left(\omega_{n-1} \int_0^h r^{\frac{1-n}{\beta-1}} dr \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left(\int_{|x-y| < h} |\rho(x) - \rho(y)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая локальную ограниченность функции $\rho(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| < h} |\rho(x) - \rho(y)| |x-y|^{1-n} dx &\leq c_2 h^{\frac{\beta-n}{\beta}} \left(\int_{|x-y| < h} |\rho(x) - \rho(y)|^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq c_3 h^{\frac{\beta-n}{\beta}} \left(\int_{|x-y| < h} |\rho(x) - \rho(y)| dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}$$

и на основании неравенства (1.14) приходим к неравенству

$$\frac{1}{h} \int_{|\theta|=1} d\omega_{n-1} \int_{\gamma(y,\theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F \leq c_4 \left(\frac{1}{h^n} \int_{|x-y|<h} |\rho(x) - \rho(y)| dx \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Пользуясь свойством (1.11) в точке $y \in \Delta$, имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|\theta|=1} d\omega_{n-1} \int_{\gamma(y,\theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F = 0.$$

Поэтому функция

$$g(y, h) = \frac{1}{h} \int_{\gamma(y,\theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F$$

стремится к нулю по мере на сфере $|\theta| = 1$ при $h \rightarrow 0$. По теореме Ф. Рисса о связи между сходимостью по мере и сходимостью почти везде существует последовательность чисел $h_k \rightarrow 0$ такая, что соответствующая ей последовательность $\{g(\theta, h_k)\}$ сходится к 0 почти всюду на $|\theta| = 1$. Таким образом, для почти всех направлений θ выполнено

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf \frac{1}{h} \int_{\gamma(y,\theta)} |\rho(x) - \rho(y)| ds_F = 0.$$

В силу соотношений (1.12) и (1.13) для почти всех θ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) \theta_i \right| &\leq \rho(y) \lim_{h \rightarrow 0} \inf \frac{1}{h} \int_{\gamma(y,\theta)} ds_F \\ &= \rho(y) \lim_{h \rightarrow 0} \inf \frac{1}{h} \int_0^h \left(\sum_{i=1}^n g_{ij}(y + r\theta) \theta_i \theta_j \right)^{1/2} dr. \end{aligned}$$

Пользуясь непрерывностью коэффициентов g_{ij} метрики (1.1), приходим к неравенству

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(y) \theta_i \theta_j \leq \rho^2(y) \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(y) \theta_i \theta_j,$$

справедливому для почти всех (а следовательно, и для всех) θ , $|\theta| = 1$. Пользуясь теперь соотношением (1.8), получаем

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \leq \rho^2(y),$$

что доказывает (1.10) для случая $0 < \phi(x) < 1$.

Пусть теперь S – множество точек $x \in \Delta$, в которых $\phi(x) = 1$, и пусть T – такое его подмножество, в каждой точке которого контингент множества S не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$. Множество T имеет нулевую меру [14, с. 384], а в каждой точке дифференцируемости $\phi(x)$, принадлежащей множеству $S \setminus T$, выполнено $\nabla \phi(x) = 0$ и, таким образом, справедливо (1.10). Те же аргументы пригодны и для точек множества, на котором $\phi(x) = 0$, и неравенство (1.10) доказано полностью. Лемма 1.1 доказана.

1.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. В силу известных свойств квадратичных форм наибольшее значение отношения двух квадратичных форм, стоящих в левой части (1.8), равно максимальному из корней λ уравнения

$$\det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \lambda g_{ij} \right) = 0.$$

Умножая обе части данного равенства на $\det(g^{ij})$, получим

$$\det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0,$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \sum_{k=1}^n g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$$

и δ_{ij} – символ Кронекера. Запишем это уравнение в развернутой форме:

$$(-\lambda)^n + s_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + s_{n-1}(-\lambda) + s_n = 0,$$

где s_k – сумма главных миноров k -го порядка матрицы (a_{ij}) . Так как любые два столбца матрицы (a_{ij}) пропорциональны, то $s_k = 0$ при $k > 1$. Получаем

$$\lambda_{\max} = s_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

что и требовалось.

1.7. Для случая евклидовой метрики лемма 1.1 была доказана Б. Фюгледе [15]. В процессе доказательства этой леммы мы применили схему, использованную ранее В. Цимером [16] при доказательстве аналогичного утверждения в евклидовой метрике. Для случая $n = 2$ совпадение 2-модуля и 2-емкости конденсатора в римановой метрике доказано в [17].

Подчеркнем, что совпадение емкости и модуля доказано здесь в предположении непрерывности коэффициентов $g_{ij}(x)$. Небезынтересно выяснить те минимальные условия на $g_{ij}(x)$, при выполнении которых лемма 1.1 остается справедливой.

При $n = 2$ вопрос о совпадении емкости и модуля решается положительно для метрик ds_F^2 , приводимых посредством подходящего квазиконформного отображения к виду $\lambda(y)(dy_1^2 + dy_2^2)$, $\lambda(y) > 0$. Существование такого квазиконформного отображения в случае

$$c_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq c_2 |\xi|^2, \quad c_1, c_2 - \text{const} > 0,$$

доказано, например, П.П. Белинским [18, с. 32]. При более слабых предположениях относительно метрики ds_F^2 различные теоремы существования получены И.Н. Песиным [19], О. Лехто [20], В.М. Миклюковым и Г.Д. Суворовым [21], В.И. Кругликовым [22], Г. Давидом [23].

При $n > 2$ проблема равенства модуля и емкости для нерегулярных метрик, по-видимому, значительно сложнее. Нам известно лишь, что приведенное выше доказательство с небольшими изменениями проходит для поверхностей, являющихся графиками локально липшицевых функций, либо функций, имеющих в области $D \subset \mathbb{R}^n$ обобщенные в смысле Соболева частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), локально суммируемые со степенью $p > n$.

Совпадение емкости и модуля конденсатора в финслеровой метрике $\Phi(x, dx)$ анонсировано В.Г. Ткачевым и А.Н. Ушаковым [24].

Безусловно интересны примеры метрик вида (1.1), имеющих не слишком “плохие” коэффициенты g_{ij} , однако не обладающих свойством, описанным в лемме 1.1.

§ 2. Граничные множества

2.1. Целью данного параграфа является введение граничных множеств параболического и гиперболического типов на поверхности $F = (D, ds_F^2)$. Эти понятия существенно связаны с поведением коэффициентов метрики (1.1) в области D и не могут быть описаны в терминах евклидовой границы ∂D . Мы будем определять граничные множества, пользуясь аналогиями с определением простых концов К. Каратеодори (см., например, [4, с. 45–46]).

Пусть $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная последовательность открытых множеств $U_k \subset D$ со свойствами:

- (i) для всякого $k = 1, 2, \dots$ выполнено $\overline{U_{k+1}} \subset U_k$;
- (ii) пересечение $\cap_{k=1}^\infty \overline{U_k}$ пусто.

(Здесь замыкания берутся относительно области D .)

Всякую последовательность $\{U_k\}$ такого вида будем называть *цепью* на поверхности F .

Пусть $\{U'_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{U''_k\}_{k=1}^\infty$ – две цепи открытых множеств на F . Будем говорить, что цепь $\{U'_k\}$ *входит* в цепь $\{U''_k\}$, если для любого $m \geq 1$ существует номер $k(m)$ такой, что при всех $k > k(m)$ выполнено $U'_k \subset U''_m$. Две цепи, каждая из которых входит в другую, назовем *эквивалентными*.

Всякий класс эквивалентности ξ цепей называется *граничным множеством* поверхности F . Для задания ξ достаточно указать хотя бы одну из входящих в него цепей. Если граничное множество ξ определено цепью $\{U_k\}_{k=1}^\infty$, то мы пишем $\xi \asymp \{U_k\}_{k=1}^\infty$.

Последовательность точек $x_k \in D$ *сходится* к ξ , если для некоторой (и, следовательно, для всякой) цепи $\{U_k\}_{k=1}^\infty \in \xi$ выполнено: для любого $k = 1, 2, \dots$ существует номер $n(k)$ такой, что при $n > n(k)$ все x_n принадлежат U_k .

Последовательность $\{x_n\}$ *лежит вне* граничного множества $\xi \asymp \{U_k\}$, если для любого $k = 1, 2, \dots$ существует номер $n(k)$ такой, что при всех $n > n(k)$ точки x_n не принадлежат U_k .

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из предельных точек всевозможных последовательностей $\{x_k\}$ из D , сходящихся к ξ в описанном выше смысле, назовем *носителем* граничного множества ξ . Если граничное множество ξ определяется единственным образом заданием своего носителя A , т.е. из сходимости последовательности $\{x_k\}$ точек области D к A (в топологии $\mathbb{R}^n$) вытекает сходимость этой последовательности к ξ , то данные понятия отождествляются.

Пусть ∂D – граница области D в $\mathbb{R}^n$. Последовательности $\{x_k\}$, сходящиеся к граничному множеству ∂D , будем называть *расходящимися* в D .

2.2. Пусть $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ – произвольная цепь на поверхности F . Зададим подобласть $H \subset \subset D$. Если k достаточно велико, то $\overline{H} \cap \overline{U}_k = \emptyset$, и мы вправе рассмотреть конденсатор $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$. При этом ясно, что

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \geq \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_{k+1}; D), \quad k = 1, 2, \dots$$

Будем говорить, что цепь $\{U_k\}$ на F имеет α -емкость *нуль*, если для любой подобласти $H \subset \subset D$ выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) = 0. \quad (2.1)$$

Будем говорить, что граничное множество ξ имеет α -параболический тип, если всякая цепь $\{U_k\} \in \xi$ имеет α -емкость нуль. Граничное множество ξ имеет α -гиперболический тип, если хотя бы одна из цепей $\{U_k\} \in \xi$ не имеет α -параболического типа.

Пусть $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_k \subset \dots$, $\bigcup_{k=1}^\infty D_k = D$, – произвольное *исчерпание* области D последовательностью подобластей $\{D_k\}$. Поверхность $F = (D, ds_F^2)$ имеет α -параболический или α -гиперболический тип в зависимости от α -параболичности или α -гиперболичности граничного множества $\{D \setminus \overline{D}_k\}$.

Известно (см., например, [25]), что *поверхность F имеет α -параболический тип тогда и только тогда, когда всякое ограниченное сверху на поверхности C^2 -решение неравенства*

$$\text{div}(|\nabla_F u|^{\alpha-2} \nabla_F u) \geq 0,$$

где $\nabla_F u$ – градиент u в метрике поверхности F , является тождественно *постоянным*.

При $\alpha = 2$ введенные выше понятия 2-параболичности и 2-гиперболичности поверхности совпадают с известными. Поэтому всюду ниже в случае $\alpha = 2$, говоря о параболическом или гиперболическом типе поверхности (граничного множества), мы будем подразумевать соответственно 2-параболичность или 2-гиперболичность.

2.3. Приведем утверждение, доставляющее определенные удобства при проверке условий α -параболичности и α -гиперболичности граничных множеств.

ЛЕММА 2.1. Пусть ξ – граничное множество поверхности $F = (D, ds_F^2)$. Если для некоторой цепи $\{U_k\}_{k=1}^\infty \in \xi$ и некоторого открытого множества $H_0 \subset D$ выполнено (2.1), то граничное множество ξ имеет α -параболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится по схеме, использованной при доказательстве леммы 3.4 в [26] для евклидовой метрики. Очень легко показать, что для параболичности граничного множества ξ достаточно проверить параболичность хотя бы одной цепи из ξ . Предположим, что цепь $\{U'_k\}_{k=1}^\infty$ входит в цепь $\{U_k\}_{k=1}^\infty$. Зададим произвольно подобласть $H \subset \subset D$. Так как для любого m и достаточно больших k выполнено $U'_k \subset U_m$, то множество функций $\phi(x) \in \text{Lip } D$, допустимых в вариационной задаче (1.1) для конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}_m; D)$, содержится в множестве

функций, допустимых при вычислении емкости конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}'_k; D)$. Отсюда получаем

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}'_k; D) \leq \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_m; D).$$

Если теперь цепь $\{U_k\}$ обладает свойством (2.1), то им обладает и цепь $\{U'_k\}$.

Для доказательства утверждения достаточно установить, что свойство (2.1) выполнено для произвольной подобласти $H \subset \subset D$. Если $H \subset \subset H_0$, то

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}_0, \overline{U}_k; D).$$

Выполнение (2.1) в этом случае очевидно.

Пусть теперь область $H \subset \subset D$ произвольна. Зададим область $W \subset \subset H_0$, где H_0 – открытое подмножество D , удовлетворяющее условиям леммы. В силу вышесказанного достаточно установить, что выполнение (2.1) для конденсаторов $(\overline{W}, \overline{U}_k; D)$ влечет аналогичное свойство для конденсаторов $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$.

Зафиксируем функцию $\eta(x) \in \text{Lip } D$, обращающуюся в 1 на H и имеющую компактный носитель $\text{supp } \eta(x) \subset D$. Выберем произвольно функцию $\phi(x) \in \text{Lip } D$, допустимую при вычислении α -емкости конденсатора $(\overline{W}, \overline{U}_k; D)$, где номер k выбран так, чтобы

$$\overline{U}_k \cap \text{supp } \eta(x) = \emptyset.$$

Функция

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \eta(x) - \phi(x)\eta(x)$$

принадлежит классу $\text{Lip } D$, обращается в 1 на H и равна 0 на U_k . Таким образом,

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq \int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \tilde{\phi}) d\sigma_F.$$

Далее заметим, что

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i}(x) = (1 - \phi(x)) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) + (1 - \eta(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x),$$

и потому

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_F(\nabla \tilde{\phi}) &= (1 - \phi)^2 \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + 2(1 - \phi)(1 - \eta) \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \\ &\quad + (1 - \eta)^2 \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Так как

$$\left| \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right|^2 \leq \mathcal{E}_F(\nabla \eta) \mathcal{E}_F(\nabla \phi),$$

то в силу неравенства Коши будем иметь

$$\mathcal{E}_F(\nabla \tilde{\phi}) \leq 2(1 - \phi)^2 \mathcal{E}_F(\nabla \eta) + 2(1 - \eta)^2 \mathcal{E}_F(\nabla \phi).$$

Отсюда, пользуясь неравенством

$$(a^2 + b^2)^{1/2} \leq c_1(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha}, \quad c_1 = c_1(\alpha) - \text{const}$$

(см. [27, с. 29, 32]), находим

$$\mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \tilde{\phi}) \leq c_2[(1 - \phi)^\alpha \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \eta) + (1 - \eta)^\alpha \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi)].$$

Таким образом, мы получаем

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq c_2 \int_D (1 - \phi)^\alpha \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \eta) d\sigma_F + c_2 \int_D (1 - \eta)^\alpha \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_F$$

и, полагая $c_3 = c_2 \max_{x \in D} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \eta(x)) \sqrt{g(x)}$, $c_4 = c_2 \max_{x \in D} (1 - \eta(x))^\alpha$, приходим к неравенству

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq c_3 \int_{\text{supp } \eta(x)} (1 - \phi)^\alpha dx + c_4 \int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi(x)) d\sigma_F. \quad (2.2)$$

Функция $1 - \phi(x)$ обращается в 0 на подобласти W . Поэтому существует постоянная c_5 , зависящая только от W и носителя $\text{supp } \eta(x)$, для которой

$$\int_{\text{supp } \eta(x)} (1 - \phi(x))^\alpha dx \leq c_5 \int_{\text{supp } \eta(x)} |\nabla \phi(x)|^\alpha dx. \quad (2.3)$$

(Это неравенство есть специальный случай хорошо известного неравенства С.Л. Соболева [28, с. 48].)

Так как носитель $\text{supp } \eta(x)$ компактен и содержится в D , а метрика (1.1) невырождена, то найдется постоянная c_6 такая, что

$$\int_{\text{supp } \eta(x)} |\nabla \phi(x)|^\alpha dx \leq c_6 \int_{\text{supp } \eta(x)} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi(x)) d\sigma_F. \quad (2.4)$$

Объединяя теперь неравенства (2.2) – (2.4), будем иметь

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq c_7 \int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_F,$$

и потому

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq c_7 \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{W}, \overline{U}_k; D).$$

Таким образом, выполнение соотношения (2.1) для последовательности конденсаторов $(\overline{W}, \overline{U}_k; D)$ влечет выполнение этого соотношения для последовательности конденсаторов $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$, и лемма доказана.

2.4. Пусть $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $A_i(x, \xi)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – измеримые по Лебегу функции, определенные при всяком $x \in D$ на некотором множестве $\Xi(x) \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $B(x)$ измерима в D . Предположим, что:

(i) для любого $\xi \in \Xi(x)$ выполняется

$$\sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \xi) \geq 0 \quad (2.5)$$

с обращением в равенство в том и только том случае, когда $\xi = 0$;

(ii) существует постоянная $k > 0$ такая, что для любых $\xi, \eta \in \Xi(x)$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \eta) \right)^\alpha \leq k \sqrt{g(x)} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\xi) \left(\sum_{i=1}^n \eta_i A_i(x, \eta) \right)^{\alpha-1}, \quad (2.6)$$

где $\alpha > 1$ – постоянная.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla f) = B(x). \quad (2.7)$$

Под решениями уравнения (2.7) ниже понимаются локально липшицевы в D функции $f(x)$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int_D \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx + \int_D \phi B(x) dx = 0, \quad (2.8)$$

справедливому для всякой функции $\phi(x) \in \text{Lip } D$ с компактным носителем $\text{supp } \phi \subset D$.

Имеет место следующая форма обобщенного принципа максимума.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность, и пусть $f(x)$ – решение уравнения (2.7), удовлетворяющего структурным условиям (2.5), (2.6). Пусть ξ – граничное множество поверхности F , имеющее α -параболический тип. Предположим, что всюду в D выполнено $B(x) \geq 0$ и для всякой расходящейся в D последовательности точек $\{x_k\}$, лежащей вне ξ , выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup f(x_k) \leq c, \quad c - \text{const}. \quad (2.9)$$

Тогда если $f(x)$ ограничено сверху, то $f(x) \leq c$ всюду в области D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in D$ выполнено $f(x_0) > c_1 > c$. Обозначим через $\mathcal{O}$ произвольную компоненту связности множества, на котором $f(x) - c_1 > 0$. Обозначим через $f_1(x)$ функцию, совпадающую с $f(x) - c_1$ на множестве $\mathcal{O}$ и равную 0 вне $\mathcal{O}$. Ясно, что $f_1 \in \text{Lip } D$. Зафиксируем подобласть $H \subset \subset \mathcal{O}$.

Пусть $\xi \asymp \{U_k\}$ и $\phi(x)$ – произвольная функция, допустимая в вариационной задаче (1.3) для конденсатора $(\bar{H}, \bar{U}_k; D)$. Положим

$$\psi(x) = \phi^\alpha(x) f_1(x).$$

В силу предположения (2.9) множества $(\text{supp } f_1(x)) \setminus U_k$ компактны, и потому функция $\psi(x)$ имеет компактный носитель. Пользуясь соотношением (2.8), находим

$$\int_D \phi^\alpha \sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx + \int_D \phi^\alpha f_1 B(x) dx = -\alpha \int_D f_1 \phi^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx.$$

Так как $f_1 B(x) \geq 0$ и $\sup_{x \in D} f_1(x) < \infty$, то

$$\int_D \phi^\alpha \sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx \leq c_2 \int_D \phi^{\alpha-1} \left| \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} A_i(x, \nabla f) \right| dx. \quad (2.10)$$

Структурное условие (2.6) влечет

$$\left| \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} A_i(x, \nabla f) \right| \leq k^{1/\alpha} g^{1/2\alpha} \mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla \phi) \left(\sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f) \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Поэтому на основании неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} & \int_D \phi^{\alpha-1} \left| \sum_{i=1}^n \phi_{x_i} A_i(x, \nabla f) \right| dx \\ & \leq k^{1/\alpha} \left(\int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_F \right)^{1/\alpha} \left(\int_D \phi^\alpha \sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

и неравенство (2.10) трансформируется к виду

$$\int_D \phi^\alpha \sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx \leq c_3 \int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_F.$$

Однако $\phi(x) = 1$ на H , и, пользуясь произволом в выборе функции ϕ , получаем

$$\int_H \sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx \leq c_3 \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D).$$

Цепь $\{U_k\}$ имеет α -емкость нуль, и на основании (2.5) заключаем, что $\nabla f(x) = 0$ почти всюду на H . Тем самым, $f(x) \equiv \text{const}$ на H , что невозможно ввиду произвола в выборе подобласти $H \subset \subset \mathcal{O}$.

2.5. Пусть $F_1 = (D_1, ds_1^2)$ и $F_2 = (D_2, ds_2^2)$ – поверхности, заданные над областями $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$. Диффеоморфизм $u: D_1 \rightarrow D_2$ будем называть *квазиизометрией* между F_1 и F_2 , если существует постоянная $c \geq 1$ такая, что

$$c^{-1} ds_1 \leq ds_2 \leq c ds_1. \quad (2.11)$$

Диффеоморфизм u называется *квазиконформным* отображением F_1 на F_2 , если существует постоянная $Q \geq 1$, для которой

$$\max_{ds_1=1} ds_2 \leq Q \min_{ds_1=1} ds_2. \quad (2.12)$$

Отметим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть ξ_1 и ξ_2 – граничные множества поверхностей F_1 и F_2 соответственно, причем $\xi_2 = u(\xi_1)$. Тогда:

- (i) если u – квазиизометрия F_1 на F_2 , то при всяком $\alpha \geq 1$ граничные множества ξ_1 и ξ_2 одновременно α -параболичны или α -гиперболичны;
- (ii) если u – квазиконформное отображение F_1 на F_2 , то ξ_1 и ξ_2 одновременно n -параболичны либо n -гиперболичны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (i) достаточно заметить, что диффеоморфизм u индуцирует взаимно однозначное соответствие между классами локально липшицевых функций в D_1 и D_2 , при котором каждой функции $\phi \in \text{Lip } D_1$ отвечает такая функция $\psi \in \text{Lip } D_2$, что $\phi = \psi(u)$. Непосредственно проверяется, что из (2.11) следует

$$c^{-(n+\alpha)} \int_{D_1} \mathcal{E}_{F_1}^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_{F_1} \leq \int_{D_2} \mathcal{E}_{F_2}^{\alpha/2}(\nabla \psi) d\sigma_{F_2} \leq c^{n+\alpha} \int_{D_1} \mathcal{E}_{F_1}^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_{F_1}.$$

Отсюда для произвольной пары конденсаторов $(P_1, Q_1; D_1)$ и $(P_2, Q_2; D_2)$, где $P_2 = g(P_1)$ и $Q_2 = g(Q_1)$, выполнено

$$c^{-(n+\alpha)} \text{cap}_{\alpha, F_1}(P_1, Q_1; D_1) \leq \text{cap}_{\alpha, F_2}(P_2, Q_2; D_2) \leq c^{n+\alpha} \text{cap}_{\alpha, F_1}(P_1, Q_1; D_1).$$

Таким образом, граничные множества ξ_1 и ξ_2 одновременно α -параболичны или α -гиперболичны.

В случае (ii) в силу (2.12) почти всюду в D_1 имеем

$$\mathcal{E}_{F_1}(\nabla \phi(x)) \leq \mathcal{E}_{F_2}(\nabla \phi(u(x))) \max_{ds_1^2=1} ds_2^2.$$

Следовательно, в силу квазиконформности отображения u выполнено

$$\mathcal{E}_{F_1}^{n/2}(\nabla \phi(x)) \leq Q^n |I(x, u)| \mathcal{E}_{F_2}^{n/2}(\nabla \psi(u(x))),$$

где $I(x, u)$ – якобиан u в точке x .

Отсюда получаем

$$Q^{-n} \int_{D_1} \mathcal{E}_{F_1}^{n/2}(\nabla \phi) d\sigma_{F_1} \leq \int_{D_2} \mathcal{E}_{F_2}^{n/2}(\nabla \psi) d\sigma_{F_2} \leq Q^n \int_{D_1} \mathcal{E}_{F_1}^{n/2}(\nabla \phi) d\sigma_{F_1},$$

и потому

$$Q^{-n} \text{cap}_{n, F_1}(P_1, Q_1; D_1) \leq \text{cap}_{n, F_2}(P_2, Q_2; D_2) \leq Q^n \text{cap}_{n, F_1}(P_1, Q_1; D_1).$$

Из данного соотношения вытекает, что граничные множества ξ_1 и ξ_2 одновременно n -параболичны или n -гиперболичны.

§ 3. Общие признаки α -параболичности и α -гиперболичности граничных множеств

3.1. Пусть $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^n$, и ξ – некоторое граничное множество на поверхности F . Зафиксируем локально липшицеву функцию

$$h(x): D \rightarrow (a, b), \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$$

такую, что $|\nabla h(x)| > 0$ почти всюду в D . Для произвольного $t \in (a, b)$ полагаем

$$E_h(t) = \{x \in D : h(x) = t\}, \quad U_h(t) = \{x \in D : h(x) > t\}.$$

Будем говорить, что функция $h(x)$ *исчерпывает граничное множество* ξ , если для любой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $t_k < t_{k+1}$, $t_k \rightarrow b$, цепь подобластей $\{U_h(t_k)\}$ принадлежит ξ .

Пусть $h(x)$ – функция исчерпания граничного множества ξ , и пусть

$$\lambda_h(t) = \int_{E_h(t)} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla h) \frac{\sqrt{g}}{|\nabla h|} H(dx),$$

где $H(dx)$ – элемент $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа.

При всяком $t \in (a, b)$ величина $\lambda_h(t)$ больше 0. Параболичность типа граничного множества ξ зависит от поведения величины $\lambda_h(t)$ в окрестности точки b . Имеет место

ТЕОРЕМА 3.1. *Если*

$$\int_a^b \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) dt = +\infty, \quad \alpha > 1, \quad (3.1)$$

то граничное множество ξ имеет α -параболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $\tau_2 > \tau_1$ так, чтобы $a < \tau_1 < \tau_2 < b$. Оценим α -емкость конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}_h(\tau_2); D)$, где $H \subset \subset D \setminus U_h(\tau_1)$ – подобласть D . Выберем произвольно локально липшицеву на (a, b) функцию $\phi(t)$, равную 1 при $t \leq \tau_1$ и обращающуюся в 0 при $t \geq \tau_2$. Функция $\phi(h(x))$ допустима в вариационной задаче (1.3) при вычислении емкости конденсатора. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_h(\tau_2); D) &\leq \int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) d\sigma_F \\ &= \int_{\tau_1 < h(x) < \tau_2} \phi'^{\alpha}(h(x)) \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla h) \sqrt{g} dx. \end{aligned}$$

На основании формулы Кронрода–Федерера имеем

$$\int_{\tau_1 < h(x) < \tau_2} \phi'^{\alpha}(h(x)) \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla h) \sqrt{g} dx = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \phi'^{\alpha}(t) \lambda_h(t) dt,$$

и потому

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_h(\tau_2); D) \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \phi'^{\alpha}(t) \lambda_h(t) dt. \quad (3.2)$$

Найдем минимум правой части (3.2). Для произвольной функции $\phi(t)$ выполнено

$$1 \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\phi'(t)| dt \leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \phi'^\alpha \lambda_h(t) dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) dt \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Следовательно, всегда

$$\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) dt \right)^{1-\alpha} \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \phi'^\alpha(t) \lambda_h(t) dt. \quad (3.3)$$

Выберем функцию $\phi(t)$ в виде

$$\phi(t) = \left(\int_{\tau_1}^t \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) dt \right) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) dt \right)^{-1}$$

при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, $\phi(t) = 1$ при $t \leq \tau_1$ и $\phi(t) = 0$ при $t \geq \tau_2$. Легко видеть, что данная функция доставляет равенство в (3.3), а потому из (3.2) получаем

$$\text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_h(\tau_2); D) \leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) dt \right)^{1-\alpha}. \quad (3.4)$$

Полагая $\tau_2 \rightarrow b$ в (3.4), в силу условия (3.1) заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_h(t); D) = 0.$$

Лемма 2.1 позволяет сделать вывод, что граничное множество ξ имеет α -параболический тип.

3.2. Для произвольной пары точек $x', x'' \in D$ пусть $s_F(x', x'')$ означает расстояние между x', x'' в метрике поверхности $F = (D, ds_F^2)$, т.е.

$$s_F(x', x'') = \inf \int_{\gamma} ds_F,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам $\gamma \subset D$, соединяющим x' и x'' .

Функция $h(x)$ является липшицевой в метрике ds_F , если существует постоянная $c < \infty$ такая, что

$$|h(x') - h(x'')| \leq cs_F(x', x'') \quad \forall x', x'' \in D. \quad (3.5)$$

Следующий признак α -параболичности граничных множеств ξ мы формулируем в терминах “взвешенного объема”.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что граничное множество ξ поверхности $F = (D, ds_F^2)$ имеет липшицеву в метрике ds_F функцию исчерпания $h(x): D \rightarrow +\infty$. Тогда каждое из перечисленных ниже условий влечет α -параболичность ξ :*

(i) *существуют постоянные $a_0 > a$ и $s < \alpha$ такие, что*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \inf \tau^{s-\alpha} \int_{a_0 < h(x) < \tau} h^{-s} \sqrt{g} dx < \infty; \quad (3.6)$$

(ii) *для некоторой постоянной $a_0 > a$ выполнено*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \inf \frac{1}{\log^\alpha \tau} \int_{a_0 < h(x) < \tau} h^{-\alpha} \sqrt{g} dx < \infty; \quad (3.7)$$

(iii) *существует постоянная $s > \alpha$ такая, что*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \inf \tau^{s-\alpha} \int_{\tau < h(x)} h^{-s} \sqrt{g} dx < \infty. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что при любых s и $\tau_1 < \tau_2$ выполнено

$$\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{-\frac{s}{\alpha}} d\tau \right)^\alpha \leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\lambda_h(\tau)}{\tau^s} d\tau \right) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{\alpha-1}.$$

Отсюда получаем

$$\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha} \leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{-\frac{s}{\alpha}} d\tau \right)^{-\alpha} \int_{\tau_1 < h(x) < \tau_2} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla h) \frac{\sqrt{g}}{h^s} dx. \quad (3.9)$$

Так как функция исчерпания $h(x)$ удовлетворяет (3.5), то в каждой точке дифференцируемости функции $h(x)$ выполнено

$$\mathcal{E}_F(\nabla h) \leq c^2,$$

где c – постоянная из (3.5). Это ясно, если вспомнить, что величина $\mathcal{E}_F(\nabla h)$ есть квадрат модуля градиента h в метрике поверхности F . Формальное доказательство можно найти, например, в [29, п. 3.3].

Из соотношения (3.9) следует

$$\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha} \leq c^\alpha \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{-\frac{s}{\alpha}} d\tau \right)^{-\alpha} \int_{\tau_1 < h(x) < \tau_2} h^{-s} \sqrt{g} dx. \quad (3.10)$$

Условие (3.6) влечет

$$\left(\int_{a_0}^{+\infty} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha} \leq c_1 \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \inf \tau^{s-\alpha} \int_{a_0 < h(x) < \tau} h^{-s} \sqrt{g} dx.$$

Постоянная c_1 и предел в правой части не зависят от величины $a_0 > a$. Это возможно в том и только том случае, когда выполнено (3.1). На основании теоремы 3.1 делаем вывод об α -параболичности граничного множества ξ в случае (i).

В случае (ii) из (3.7) и (3.10) выводим

$$\left(\int_{a_0}^{+\infty} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha} \leq c^\alpha \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \inf (\log \tau)^{-\alpha} \int_{a_0 < h(x) < \tau} h^{-\alpha} \sqrt{g} dx < \infty.$$

Как и выше, убеждаемся в α -параболичности граничного множества ξ .

Пусть $s > \alpha$. Переходя к пределу при $\tau_2 \rightarrow +\infty$ в (3.10), при всяком $\tau_1 = \tau > a$ имеем

$$\left(\int_{\tau}^{+\infty} \lambda_h^{\frac{1}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha} \leq c_2 \tau^{s-\alpha} \int_{\tau < h(x)} h^{-s} \sqrt{g} dx.$$

Условие (3.8) влечет (3.1) и тем самым α -параболичность ξ .

3.3. Пусть $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^n$, и $\xi \asymp \{U_k\}_{k=1}^\infty$ – граничное множество поверхности F . Зафиксируем произвольно подобласть $H \subset \subset U_1$ и рассмотрим класс подобластей $\{G\}$, содержащих множество H . Обозначим через $V_F(G)$ объем $G \setminus H$ в метрике поверхности F , через $S_F(\partial'G)$ – $(n-1)$ -мерную площадь в метрике ds_F множества $\partial'G = \partial G \cap D$.

Предположим, что существует непрерывная, положительная на $[0, v)$, где $v = V_F(D)$, функция $\theta(\tau)$ такая, что для всякой подобласти $G \in \{G\}$ выполнено

$$\theta(V_F(G)) \leq S_F(\partial'G). \quad (3.11)$$

Функцию θ будем называть *изопериметрической функцией* граничного множества ξ .

ТЕОРЕМА 3.3. Если граничное множество ξ поверхности F имеет изопериметрическую функцию $\theta(\tau)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^v \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\tau) d\tau < \infty, \quad (3.12)$$

то множество ξ имеет α -гиперболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим конденсатор $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$, $k = 1, 2, \dots$. Нашей целью является получение оценки снизу α -емкости конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$. Для произвольного $t \in [0, 1]$ полагаем

$$G(t) = \{x \in D : \phi(x) > t\}, \quad I(t) = \{x \in D : \phi(x) = t\}$$

и, далее,

$$V(t) = V_F(G(t)) = \int_{G(t) \setminus H} \sqrt{g} dx,$$

$$S(t) = S_F(I(t)) = \int_{I(t)} \frac{\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla \phi)}{|\nabla \phi|} \sqrt{g(x)} H(dx).$$

По формуле Кронрода–Федерера

$$\int_{G(t) \setminus H} \sqrt{g(x)} dx = \int_t^1 dt \int_{I(t)} \sqrt{g(x)} \frac{H(dx)}{|\nabla \phi|}.$$

Отсюда

$$V'(t) = - \int_{I(t)} \sqrt{g(x)} \frac{H(dx)}{|\nabla \phi|}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(\int_{I(t)} \frac{\mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla \phi)}{|\nabla \phi|} \sqrt{g} H(dx) \right)^\alpha &\leq \left(\int_{I(t)} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) \sqrt{g} \frac{H(dx)}{|\nabla \phi|} \right) \\ &\quad \times \left(\int_{I(t)} \sqrt{g} \frac{H(dx)}{|\nabla \phi|} \right)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Так как $\partial' G(t) \subset I(t)$, то в силу условия изопериметричности (3.11) граничного множества ξ имеем

$$\theta(V_F(G(t))) \leq S_F(\partial' G(t)) \leq \int_{I(t)} \mathcal{E}_F^{1/2}(\nabla \phi) \frac{\sqrt{g}}{|\nabla \phi|} H(dx).$$

Таким образом, мы получаем

$$\theta^\alpha(V(t)) \left(\int_{I(t)} \sqrt{g} \frac{H(dx)}{|\nabla \phi|} \right)^{1-\alpha} \leq \int_{I(t)} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) \sqrt{g} \frac{H(dx)}{|\nabla \phi|},$$

откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) \sqrt{g} dx &= \int_0^1 dt \int_{I(t)} \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) \frac{\sqrt{g}}{|\nabla \phi|} H(dx) \\ &\geq \int_0^1 \theta^\alpha(V(t)) |V'(t)|^{1-\alpha} dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Пусть $t = t(V)$ – функция, обратная к функции $V = V(t)$. Тогда

$$\int_0^1 \theta^\alpha(V(t)) |V'(t)|^{1-\alpha} dt = \int_{V_0}^{V_k} \theta^\alpha(t) |t'(\tau)|^\alpha d\tau,$$

где

$$V_0 = V_F(H), \quad V_k = V_F(D \setminus U_k).$$

Замечая, что

$$1 \leq \left(\int_{V_0}^{V_k} |t'(\tau)| d\tau \right)^\alpha \leq \left(\int_{V_0}^{V_k} \theta^\alpha(\tau) |t'(\tau)|^\alpha d\tau \right) \left(\int_{V_0}^{V_k} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{\alpha-1},$$

ВЫВОДИМ

$$\int_0^1 \theta^\alpha(V(t)) |V'(t)|^{1-\alpha} dt \geq \left(\int_{V_0}^{V_k} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha}.$$

Неравенство (3.13) позволяет теперь заключить, что

$$\int_D \mathcal{E}_F^{\alpha/2}(\nabla \phi) \sqrt{g} dx \geq \left(\int_{V_0}^{V_k} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha}.$$

Переходя к точной нижней грани по ϕ , приходим к неравенству

$$\left(\int_{V_0}^{V_k} \theta^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\tau) d\tau \right)^{1-\alpha} \leq \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D). \quad (3.14)$$

В силу условия (3.12) для изопериметрической функции θ из (3.14) находим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \text{cap}_{\alpha, F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) > 0.$$

Это означает, что граничное множество ξ имеет α -гиперболический тип.

3.4. Пусть (r, ω) – сферические координаты в $\mathbb{R}^n$ с полюсом в точке $x = 0$, $d\omega$ – элемент $(n-1)$ -мерной площади на единичной сфере S^{n-1} . Обозначим через l_ω луч, выходящий из начала координат $\mathbb{R}^n$ в направлении $\omega \in S^{n-1}$, через

$$K(\tau', \tau'') = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau' < |x| < \tau''\}$$

– сферическое кольцо. Выберем произвольно область $\Delta \subset S^{n-1}$ и постоянные $0 \leq a < b \leq +\infty$. Положим

$$D(a, b; \Delta) = \{x \in K(a, b) : x \in l_\omega, \omega \in \Delta\}.$$

Рассмотрим поверхность F , заданную над областью $D = D(a, b; \Delta)$ линейным элементом (1.1). Пусть

$$\delta(r, \omega) dr = \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j \right)^{1/2} \Big|_{l_\omega}, \quad \omega \in \Delta, \quad a < r < b,$$

означает сужение ds_F на l_ω .

Зададим граничное множество ξ на F цепью $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ областей

$$U_k = \{x \in D(a, b; \Delta) : \tau_k < |x|\},$$

где

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = b,$$

– произвольная последовательность чисел.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3.4. *Предположим, что существует измеримое множество $E \subset \Delta$, $\text{mes}_{n-1} E > 0$, такое, что*

$$\int_b^b g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(r, \omega) \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(r, \omega) r^{\frac{n-1}{1-\alpha}} dr < \infty \quad \forall \omega \in E. \quad (3.15)$$

Тогда граничное множество ξ имеет α -гиперболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $k > 1$ и оценим снизу емкость конденсатора $(P, \bar{U}_k; D)$, где $P = D \setminus U_1$. В силу леммы 1.1 имеем

$$\text{cap}_{\alpha, F}(P, \bar{U}_k; D) = \text{mod}_{\alpha, F}(P, \bar{U}_k; D).$$

Пусть ρ – произвольная функция, допустимая при вычислении емкости этого конденсатора. Так как прямолинейный отрезок $l_\omega \cap K(\tau_1, \tau_2)$ содержится в $D(a, b; \Delta)$ и соединяет множества P и U_k , то для любого $\omega \in \Delta$ выполняется

$$1 \leq \int_{l_\omega \cap K(\tau_1, \tau_k)} \rho(x) ds_F = \int_{\tau_1}^{\tau_k} \rho(r, \omega) \delta(r, \omega) dr.$$

Отсюда получаем

$$1 \leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} \rho^\alpha \sqrt{g} r^{n-1} dr \right) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(r, \omega) r^{\frac{n-1}{1-\alpha}} dr \right)^{\alpha-1},$$

и потому

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} d\omega \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(r, \omega) r^{\frac{n-1}{1-\alpha}} dr \right)^{1-\alpha} \\ \leq \int_{\Delta} d\omega \int_{\tau_1}^{\tau_k} \rho^\alpha g^{1/2} r^{n-1} dr = \int_{D(a, b; \Delta)} \rho^\alpha d\sigma_F. \end{aligned}$$

Поскольку допустимая функция $\rho(x)$ произвольна, то, переходя здесь к точной нижней грани по ρ , находим

$$\int_{\Delta} d\omega \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(r, \omega) r^{\frac{n-1}{1-\alpha}} dr \right)^{1-\alpha} \leq \text{mod}_{\alpha, F}(P, \bar{U}_k; D).$$

Тем самым приходим к нужной оценке

$$\int_{\Delta} d\omega \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(r, \omega) \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(r, \omega) r^{\frac{n-1}{1-\alpha}} dr \right)^{1-\alpha} \leq \text{cap}_{\alpha, F}(P, \bar{U}_k; D). \quad (3.16)$$

Из (3.16) выводим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E d\omega \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(r, \omega) \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(r, \omega) r^{\frac{n-1}{1-\alpha}} dr \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{cap}_{\alpha, F}(P, \bar{U}_k; D).$$

Условие (3.15) тогда влечет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{cap}_{\alpha, F}(P, \bar{U}_k; D) > 0.$$

Выполнение данного свойства хотя бы для одной цепи из класса эквивалентности ξ означает α -гиперболичность типа граничного множества ξ .

3.5. Использованный прием оценки α -емкости конденсатора снизу пригоден для широкого класса “правильных” областей в $\mathbb{R}^n$ или, в общем случае, для областей на многообразиях с системой полугеодезических координат. Мы ограничимся здесь только рассмотрением случая граничных множеств цилиндрических областей в $\mathbb{R}^n$.

Пусть Δ – ограниченная область в гиперплоскости $x_1 = 0$. Зададим постоянные $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и определим область $D = D(a, b; \Delta)$ в $\mathbb{R}^n$ как декартово произведение $(a, b) \times \Delta$.

Пусть $F = (D, ds_F^2)$ – поверхность. Для фиксированной точки $'x = (x_2, x_3, \dots, x_n) \in \Delta$ полагаем

$$\delta(x_1, 'x) d\tau = \sqrt{g_{11}(x_1, 'x)} d\tau = \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j \right)^{1/2} \Big|_{l_x},$$

где

$$l_x = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_2, \dots, x_n) = 'x \in \Delta\}.$$

Предположим, что граничное множество ξ поверхности F задано цепью $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ областей

$$U_k = \{x = (x_1, 'x) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \tau_k\},$$

где $a < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = b$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 3.5. *Если существует множество $E \subset \Delta$, $\text{mes}_{n-1} E > 0$, такое, что*

$$\int_a^b g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(\tau, 'x) \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\tau, 'x) d\tau < \infty \quad \forall 'x \in \Delta, \quad (3.17)$$

то граничное множество ξ имеет α -гиперболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, достаточно получить оценку α -модуля конденсатора $(P, \overline{U}_k; D)$, где $P = D \setminus U_1$. Отрезок $l_x \cap (U_1 \setminus U_k)$, $'x \in \Delta$, соединяет в D множества P и U_k . Поэтому для любой допустимой при вычислении модуля конденсатора $(P, \overline{U}_k; D)$ функции $\rho(x) = \rho(x_1, 'x)$ имеем

$$\int_{\tau_1}^{\tau_k} \rho(\tau, 'x) \delta(\tau, 'x) d\tau \geq 1 \quad \forall 'x \in \Delta.$$

Отсюда

$$1 \leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} \rho^\alpha \sqrt{g} d\tau \right) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\tau \right)^{\alpha-1}$$

и, далее, приходим к оценке

$$\int_\Delta d'x \left(\int_{\tau_1}^{\tau_k} g^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(\tau, 'x) \delta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\tau, 'x) d\tau \right)^{1-\alpha} \leq \text{mod}_{\alpha, F}(P, \overline{U}_k; D). \quad (3.18)$$

Неравенство (3.18) вместе с условием (3.17) гарантирует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mod}_{\alpha, F}(P, \bar{U}_k; D) > 0.$$

Используя лемму 1.1, получаем нужное.

3.6. Сделаем некоторые замечания к истории вопроса. Впервые связь между скоростью роста объема геодезического шара на многообразии и параболичностью типа многообразия была установлена при $\alpha = 2$ Ченгом и Яу [6]. В случае, когда $\alpha = 2$, $s = 0$ и $h(x)$ – геодезическое расстояние от некоторой фиксированной точки на поверхности, условие (3.6) параболичности из теоремы 3.2 является некоторой модификацией указанного результата Ченга и Яу.

В случае $\alpha = 2$ условие (3.7) было использовано в работе В.М.Миклюкова [17] в процессе доказательства параболичности типа графиков решений уравнений типа минимальных поверхностей (см. также [30], [31] и в случае произвольного $\alpha = n \geq 2 - [25]$).

Условие параболичности (3.8), по-моему, является существенно новым.

Условие α -гиперболичности (3.12) граничного множества ξ в случае евклидовой метрики $ds_F = |dx|$ можно получить из известных оценок α -емкости (см., например, [32, с. 96]). В случае, когда F – полное риманово многообразие и $\alpha = 2$, условие (3.12) гиперболичности типа F получено А.А.Григорьяном [33] (см. также [25] для произвольного $\alpha > 1$).

Условия α -гиперболичности типа (3.15) и (3.17) для метрик ds_F общего вида, по-видимому, новы. Вместе с тем оценки (3.16) и (3.18) емкости и модуля конденсатора, на которых базируются эти условия, в случае евклидовой метрики $ds_F = |dx|$ были известны еще Тейхмюллеру [8] (см. также [34, с. 169–172]).

§ 4. Графики в евклидовом пространстве

4.1. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$ и $A(x, \xi) = (A_1(x, \xi), A_2(x, \xi), \dots, A_n(x, \xi))$ – вектор-функция, непрерывно дифференцируемая на декартовом произведении $D \times \mathbb{R}^n$. Предположим, что существуют постоянные $\nu_1, \nu_2 > 0$ такие, что для любых $x \in D$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\nu_1 \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \leq \sum_{i=1}^n \xi_i A_i(x, \xi), \quad (4.1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i^2(x, \xi) \right)^{1/2} \leq \nu_2 \frac{|\xi|}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Q[f] = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla f). \quad (4.3)$$

Целью данного параграфа является получение признаков параболичности граничных множеств поверхностей F , являющихся решениями дифференциального

уравнения $Q[f] = 0$. Отметим, что условиям (4.1), (4.2) с постоянными $\nu_1 = \nu_2 = 1$ удовлетворяет, в частности, оператор *средней кривизны*

$$Q_0[f] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f x_i}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right). \quad (4.4)$$

4.2. Введем обозначения. Пусть $\chi = (x, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ – произвольная точка в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $x_{n+1} = g(x)$ – функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Положим

$$(E, g) = \left\{ \chi = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq \frac{x_{n+1}}{g(x)} \leq 1, \quad x \in E \right\}.$$

Пусть Δ – подобласть области D . Зафиксируем конденсатор $(P, Q; \Delta)$ и обозначим через $\tilde{P}, \tilde{Q}$ множества точек $\chi \in \mathbb{R}^{n+1}$, лежащих на поверхности F над множествами P, Q соответственно. Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим множество локально спрямляемых дуг $\tilde{\gamma}$, лежащих на части F , высекаемой цилиндром $\Delta \times \mathbb{R}^1$, и соединяющих $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$.

Пусть $\mathcal{R}(\chi) \geq 0$ – произвольная, непрерывная на $\Delta \times \mathbb{R}^1$ и удовлетворяющая условию Липшица локально на $\Delta \times \mathbb{R}^1$ функция. Введем величину

$$d(\mathcal{R}) = \inf_{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}} \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{R}(\chi) |d\chi|. \quad (4.5)$$

Основным средством для оценок модуля конденсатора на поверхности является

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что дифференциальное выражение $Q[f]$ определено соотношением (4.3) и удовлетворяет условиям (4.1), (4.2). Тогда для произвольной C^2 -функции $f(x)$ в D , произвольной $\mathcal{R}(\chi) \geq 0$ и произвольного конденсатора $(P, Q; \Delta)$ выполнено*

$$\begin{aligned} \text{mod}_{2,F}(P, Q; \Delta) &\leq 2 \frac{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}{d^2(\mathcal{R})} \int_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)| d\chi + \frac{\nu_2}{d^2(\mathcal{R})} \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0) dx \\ &\quad - \frac{1}{d^2(\mathcal{R})} \int_{\Delta} Q[f(x)] dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) dt \\ &\quad + \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} \liminf \int_{(\partial\Delta_k, f)} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям ограниченных областей $\Delta_k, \bar{\Delta}_k \subset \Delta$, с кусочно гладкими границами и $H(d\chi)$ – n -мерная мера Хаусдорфа на множестве $(\partial\Delta_k, f)$.

4.3. Следует отметить, что оценка (4.6) остается содержательной, если, во-первых, при вычислении точной нижней грани в (4.5) рассматривать (более широкое, чем $\tilde{\Gamma}$) множество всех кривых, лежащих в цилиндре $\Delta \times \mathbb{R}^1$ и соединяющих $\tilde{P}, \tilde{Q}$, и, во-вторых, расширить множества (Δ, f) , $(\partial\Delta_k, f)$, по которым производится интегрирование в (4.6), заменив их на множества $\Delta \times \mathbb{R}^1$, $\partial\Delta_k \times \mathbb{R}^1$ соответственно. Минимизируя после этого правую часть (4.6) по всем функциям $\mathcal{R}(\chi)$

указанного вида, мы придем к величине, зависящей только от геометрии конденсатора и значений $f(x)$ на множествах P и Q . Однако функционал, который необходимо минимизировать в этом случае, имеет довольно сложное строение. Поэтому все дальнейшие применения неравенства (4.6) будут основаны на эмпирическом подборе функции $\mathcal{R}(\chi)$ и выбору той или иной функции $\mathcal{R}(\chi)$ не всегда можно будет дать простую мотивировку. Впрочем, это является известным недостатком модульной техники.

4.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Предположим сначала, что Δ – строго внутренняя, ограниченная подобласть D с кусочно гладкой границей. Зададим функцию

$$\Phi(x) = \int_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) dt$$

и воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Delta} \sum_{i=1}^n \Phi_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx + \int_{\Delta} \Phi Q[f] dx = \int_{\partial \Delta} \Phi \sum_{i=1}^n A_i(x, \nabla f) \cos(\bar{n}, x_i) H(dx),$$

где $(\bar{n}, x_i)$ – угол между единичным вектором $\bar{n}$ внешней нормали к $\partial \Delta$ и осью Ox_i , $H(dx)$ – элемент площади на $\partial \Delta$.

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) \sum_{i=1}^n f_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx \leq \int_{\partial \Delta} |\Phi(x)| |A(x, \nabla f)| H(dx) \\ & - \int_{\Delta} Q[f(x)] dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) dt - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Delta} A_i(x, \nabla f) dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R} \mathcal{R}'_{x_i}(x, t) dt. \end{aligned}$$

Пользуясь условиями (4.1), (4.2), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) d\sigma_F & \leq \nu_2 \int_{\partial \Delta} |\Phi(x)| H(dx) \\ & + \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) \frac{dx}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \int_{\Delta} Q[f(x)] dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) dt \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Delta} A_i(x, \nabla f) dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R} \mathcal{R}'_{x_i}(x, t) dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для контурного интеграла имеем

$$\int_{\partial \Delta} |\Phi(x)| H(dx) = \int_{\partial \Delta} H(dx) \left| \int_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) dt \right| = \int_{(\partial \Delta, f)} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi). \quad (4.8)$$

Далее заметим, что

$$\int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) dx = 2 \int_{\Delta} dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R}(x, t) \mathcal{R}'_{x_{n+1}}(x, t) dt + \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0) dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Delta} A_i(x, \nabla f) dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R} \mathcal{R}'_{x_i}(x, t) dt \\ & + \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) dx = \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0) dx + 2 \int_{\Delta} b(x) dx, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$b(x) = \int_0^{f(x)} \mathcal{R} \left(\nu_2 \mathcal{R}'_{x_{n+1}}(x, t) + \sum_{i=1}^n A_i(x, \nabla f) \mathcal{R}'_{x_i}(x, t) \right) dt.$$

В силу неравенства Коши имеем

$$\left(\nu_1 \mathcal{R}'_{x_{n+1}} - \sum_{i=1}^n A_i \mathcal{R}'_{x_i} \right)^2 \leq (\nu_1^2 + |A(x, \nabla f)|^2) \sum_{i=1}^{n+1} (\mathcal{R}'_{x_i})^2,$$

и из условия (4.2) для оператора Q вытекает, что

$$\left(\nu_1 \mathcal{R}'_{x_{n+1}} - \sum_{i=1}^n A_i \mathcal{R}'_{x_i} \right)^2 \leq (\nu_1^2 + \nu_2^2) |\nabla \mathcal{R}(\chi)|^2.$$

Таким образом, из (4.9) получаем

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Delta} A_i(x, \nabla f) dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R} \mathcal{R}'_{x_i}(x, t) dt + \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) dx \\ & \leq \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0) dx + 2\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \int_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)| d\chi. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Объединяя неравенства (4.7), (4.8) и (4.10), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) d\sigma_F \leq 2\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \int_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)| d\chi \\ & - \int_{\Delta} Q[f(x)] dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) dt + \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0) dx + \nu_2 \int_{(\partial\Delta, f)} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi). \end{aligned}$$

Пусть теперь Δ – произвольная ограниченная подобласть области D . Аппроксимируя ее последовательностью строго внутренних, ограниченных областей Δ_k и пользуясь каждый раз данным неравенством, будем иметь

$$\begin{aligned} & \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, f(x)) d\sigma_f \leq 2\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \int_{(\Delta, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)| d\chi \\ & - \int_{\Delta} Q[f(x)] dx \int_0^{f(x)} \mathcal{R}^2(x, t) dt + \nu_1 \int_{\Delta} \mathcal{R}^2(x, 0) dx \\ & + \nu_2 \liminf \int_{(\partial\Delta_k, f)} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Функция

$$\rho(x) = \frac{1}{d(\mathcal{R})} \mathcal{R}(x, f(x))$$

является допустимой в метрике

$$ds_F^2 = \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} + f'_i f'_j) dx_i dx_j \quad (4.12)$$

для семейства кривых, соединяющих множества P и Q в Δ . Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\int_{\gamma} \mathcal{R}(x, f(x)) ds_F = \int_{\tilde{\gamma}} \mathcal{R}(\chi) |d\chi| \geq d(\mathcal{R}).$$

Необходимая оценка модуля конденсатора непосредственно вытекает теперь из неравенства (4.11). Лемма доказана.

4.5. Рассмотрим приложения леммы 4.1 к конкретным оценкам модуля конденсатора на поверхности, начиная с примера, в котором выбор функции $\mathcal{R}(\chi)$ максимально прост.

Рассмотрим на F внутреннюю метрику

$$s_F(x, y) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} ds_F,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам γ , соединяющим точки x и y в D . Закрепим точку $y \in D$ и обозначим через U_k множество точек $x \in D$, в которых $s_F(x, y) > k$.

Пусть $\sup_{x \in D} s_F(x, y) = \infty$. Последовательность $\{U_k\}$ образует цепь. Рассмотрим граничное множество ξ , порождаемое этой цепью.

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что объем области D конечен и поверхность F такова, что*

$$\liminf \int_{\partial D_n} |f(x)| H(dx) < \infty, \quad (4.13)$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям ограниченных областей $D_n, \overline{D}_n \subset D$, исчерпывающих область D . Тогда если

$$f(x)Q[f(x)] \leq 0 \quad \forall x \in D, \quad (4.14)$$

то граничное множество ξ имеет 2-параболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем строго внутреннюю подобласть $H \subset D$, содержащую точку $y \in D$, и рассмотрим конденсаторы $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$. Если $\sup_{x \in D} s_F(x, y) = \infty$, то эти конденсаторы определены по крайней мере при достаточно больших k .

Воспользуемся леммой 4.1. Положим $\mathcal{R}(\chi) \equiv 1$. В силу неравенства (4.6) на основании условия (4.14) имеем

$$\text{mod}_{2,F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} \liminf \int_{(\partial D_n, f)} H(d\chi) + \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} |D|$$

(здесь $|D|$ – объем D). Отсюда

$$\text{mod}_{2,F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} \liminf \int_{\partial D_n} |f(x)| H(dx) + \frac{\nu_1}{d^2(\mathcal{R})} |D|. \quad (4.15)$$

Замечая, что

$$d(\mathcal{R}) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} ds_F,$$

где инфимум берется по всем дугам $\gamma \subset D$, соединяющим множества H и U_k , получаем

$$d(\mathcal{R}) \geq k - c, \quad (4.16)$$

где c – некоторая постоянная, зависящая от $\sup_{x, y \in H} s_F(x, y)$.

Сопоставляя (4.13), (4.15), (4.16) и пользуясь леммами 1.1 и 2.1, легко выводим нужное заключение.

4.6. Предположим, что поверхность F задана над ограниченной областью D с кусочно гладкой границей. Обозначим через U_k множество, на котором $|f(x)| > k$. Если функция $f(x)$ неограничена, то последовательность $\{U_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) образует цепь. Положим $\xi \asymp \{U_k\}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Если $f(x) \in C^2(D)$ и в области D выполнено $f(x)Q[f(x)] \leq 0$, то граничное множество ξ имеет 2-параболический тип в метрике поверхности F .

Следующий простой иллюстрирующий пример показывает, что граничное множество ξ может располагаться на поверхности F над подмножествами границы области D , не имеющими емкости нуль в евклидовой метрике $ds^2 = |dx|^2$.

Рассмотрим поверхность Шерка

$$f(x_1, x_2) = \log \frac{\cos x_2}{\cos x_1},$$

заданную над квадратом $-\frac{\pi}{2} < x_i < \frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2$). Данная поверхность минимальна, и функция $f(x_1, x_2)$ заведомо удовлетворяет неравенству $fQ[f] \leq 0$.

Цепь $\{U_k\}$ располагается в данном случае над всей границей квадрата, за исключением его вершин. Нетривиальная часть границы поверхности F сосредоточена здесь над вершинами квадрата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Зададим строго внутреннюю подобласть $H \subset D$ и оценим модуль конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$. Воспользуемся леммой 4.1. Положим

$$\mathcal{R}(\chi) = (1 + x_{n+1}^2)^{-1/2}.$$

Так как $|d\chi| \geq |dx_{n+1}|$, то

$$d(\mathcal{R}) \geq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{|df(x)|}{\sqrt{1 + f^2(x)}},$$

где точная нижняя грань берется по всем кривым γ , соединяющим множества H и U_k в D . Отсюда

$$d(\mathcal{R}) \geq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} |d \operatorname{arcsch} f(x)|$$

и

$$d(\mathcal{R}) \geq \inf_{x \in H, y \in U_k} |\operatorname{arcsch} f(x) - \operatorname{arcsch} f(y)|. \quad (4.17)$$

Оценим теперь каждый из интегралов в правой части (4.6). Имеем

$$\int_{D \times \mathbb{R}^1} |\rho(\chi)| |\nabla \mathcal{R}(\chi)| d\chi = \frac{1}{2} \int_D dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2} \leq c_1 |D|, \quad (4.18)$$

где c_1 – абсолютная постоянная.

Далее замечаем, что

$$\int_D \mathcal{R}^2(x, 0) dx = |D| < \infty \quad (4.19)$$

и

$$\int_{\partial D \times \mathbb{R}^1} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi) = \int_{\partial D} H(dx) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \pi |\partial D| < \infty. \quad (4.20)$$

Объединяя оценки (4.17) – (4.20) и пользуясь неравенством (4.6), получаем

$$\operatorname{mod}_{2,F}(\overline{H}, \overline{U}_k; D) \leq c_2 \sup_{x \in H, y \in U_k} |\operatorname{arcsch} f(x) - \operatorname{arcsch} f(y)|^{-2},$$

где c_2 – постоянная, не зависящая от k .

Это неравенство показывает, что модуль конденсатора $(\overline{H}, \overline{U}_k; D)$ стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. На основании лемм 1.1 и 2.1 делаем нужное заключение. Теорема доказана.

4.7. Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат $x = 0$ и имеющая кусочно гладкую границу ∂D . Зададим ограниченную подобласть $H, \overline{H} \subset D$, $H \ni 0$. Обозначим через D_r компоненту связности множества $D \cap \{|x| < r\}$, содержащую H . При достаточно больших r множество D_r определено. Символом U_r будем обозначать множество $D \setminus \overline{D}_r$.

Последовательность открытых множеств $\{U_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) есть цепь. Пусть ξ – граничное множество на F , определяемое этой цепью. Положим

$$\delta(x) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} |dx|,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам γ , лежащим в D и соединяющим точку $x \in D$ с началом координат.

ЛЕММА 4.4. Если $f \in C^2(D)$ и всюду в области D выполнено $fQ[f] \leq 0$, то

$$\text{mod}_{2,F}(\overline{H}, \overline{U}_r; D) \leq \frac{1}{\log^2(1 + \frac{\delta(r)}{M})} \left(c \int_{D_r \setminus H} \frac{dx}{\delta^2(x)} + \pi \nu_1 \int_{\partial(D_r \setminus H)} \frac{H(dx)}{\delta(x)} \right), \quad (4.21)$$

где

$$M = \max_{x \in \overline{H}} \sqrt{\delta^2(x) + f^2(x)}, \quad c = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_2}$$

и $\delta(r)$ – длина кратчайшей дуги в D , соединяющей множество H с множеством U_r .

Непосредственным следствием данного утверждения является

ТЕОРЕМА 4.5. Если $fQ[f] \leq 0$ в $D \subset \mathbb{R}^n$ и область D удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{\log^2 \delta(r)} \left(\int_{D_r \setminus H} \frac{dx}{\delta^2(x)} + \int_{\partial D_r} \frac{H(dx)}{\delta(x)} \right) = 0, \quad (4.22)$$

то граничное множество ξ имеет 2-параболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.4. Зададим произвольно $R > r$ и рассмотрим конденсатор $(\overline{H}, \overline{V}_r; D_R)$, где $V_r = U_r \cap D_R$. Из определения модуля вытекает, что

$$\text{mod}_{2,F}(\overline{H}, \overline{U}_r; D) = \text{mod}_{2,F}(\overline{H}, \overline{V}_r; D_R). \quad (4.23)$$

Для оценки модуля конденсатора $(\overline{H}, \overline{V}_r; D_R)$ воспользуемся леммой 4.1. Положим

$$\mathcal{R}(\chi) = (\delta^2(x) + x_{n+1}^2)^{-1/2}.$$

Легко видеть, что функция $\delta(x)$ принадлежит классу $\text{Lip } D$, а потому $\mathcal{R} \in \text{Lip}(D \times \mathbb{R}^1)$. Так как граница ∂D кусочно гладкая, то $\delta(x)$ может быть продолжена по непрерывности в $\overline{D}$ и функция $\mathcal{R}(\chi)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым леммой 4.1.

Оценим каждый из интегралов в правой части соотношения (4.6). Для оценки первого из интегралов заметим сначала, что

$$|\nabla \mathcal{R}(\chi)|^2 = \frac{\delta^2 |\nabla \delta|^2 + x_{n+1}^2}{(\delta^2(x) + x_{n+1}^2)^3},$$

а так как $|\nabla \delta(x)| \leq 1$, то

$$|\nabla \mathcal{R}(\chi)| \leq \frac{1}{\delta^2(x) + x_{n+1}^2}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_{(D_R \setminus H, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)| d\chi &\leq \int_{(D_R \setminus H, f)} \frac{d\chi}{(\delta^2(x) + x_{n+1}^2)^{3/2}} \\ &= \int_{D_R \setminus H} dx \left| \int_0^{f(x)} \frac{dt}{(\delta^2(x) + t^2)^{3/2}} \right| \leq \int_{D_R \setminus H} \frac{dx}{\delta^2(x)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\int_{(D_R \setminus H, f)} \mathcal{R}(\chi) |\nabla \mathcal{R}(\chi)| d\chi \leq \int_{D_R \setminus H} \frac{dx}{\delta^2(x)}. \quad (4.24)$$

Для второго из интегралов выполнено

$$\int_{D_R \setminus H} \mathcal{R}^2(x, 0) dx = \int_{D_R \setminus H} \frac{dx}{\delta^2(x)}. \quad (4.25)$$

Найдем оценку для третьего интеграла. Прежде всего, легко видеть, что

$$\liminf \int_{(\partial \Delta_n, f)} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi) \leq \int_{\partial(D_R \setminus H) \times \mathbb{R}^1} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi),$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям областей $\Delta_n \subset D_R \setminus H$, аппроксимирующим область $D_R \setminus H$ изнутри. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \liminf \int_{(\partial \Delta_n, f)} \mathcal{R}^2(\chi) H(d\chi) &= \int_{\partial \Delta_n} H(dx) \left| \int_0^{f(x)} \frac{dt}{\delta^2(x) + t^2} \right| \\ &\leq \pi \int_{\partial(D_R \setminus H)} \frac{H(dx)}{\delta(x)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Нетрудно показать, что

$$d(\mathcal{R}) \geq \log \left(1 + \frac{\delta(r)}{M} \right). \quad (4.27)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что из геометрических соображений

$$\left| d \left(\delta^2(x) + f^2(x) \right)^{1/2} \right| \leq ds_F.$$

Далее, пусть $\gamma \in \Gamma$ – произвольная локально спрямляемая дуга. Зададим точки $a, b \in \gamma$ и для переменной точки $x \in \gamma$, лежащей между a и b , обозначим через $\widehat{ax}$ часть γ , заключенную между a и x , через $s(x)$ – ее длину в метрике ds_F . Тогда из предыдущего неравенства следует

$$\sqrt{\delta^2(x) + f^2(x)} \leq s(x) + M(a),$$

где $M(a) = \sqrt{\delta^2(a) + f^2(a)}$. Таким образом,

$$\int_{\widehat{ab}} \frac{ds_F}{s(x) + M(a)} \leq \int_{\gamma} \frac{ds_F}{\sqrt{\delta^2(x) + f^2(x)}},$$

и мы получаем

$$\log \left(1 + \frac{s(b)}{M(a)} \right) \leq \int_{\gamma} \frac{ds_F}{\sqrt{\delta^2(x) + f^2(x)}}.$$

Учитывая произвол в выборе точек a и b , имеем (4.27).

Объединяя оценки (4.24)–(4.27) и пользуясь неравенством (4.6), приходим к соотношению

$$\text{mod}_{2,F}(\overline{H}, \overline{V}_r; D_R) \leq \frac{1}{\log^2 \left(1 + \frac{\delta(r)}{M}\right)} \left(c \int_{D_R \setminus H} \frac{dx}{\delta^2(x)} + \pi \nu_1 \int_{\partial(D_R \setminus H)} \frac{H(dx)}{\delta(x)} \right).$$

Учитывая произвол в выборе $R \geq r$, на основании равенства (4.23) получаем нужное. Лемма доказана.

4.8. Если D – область в $\mathbb{R}^2$, то, как легко видеть, условие (4.22) может быть записано в виде

$$\liminf \frac{1}{\log^2 \delta(r)} \int_{\partial D_r} \frac{H(dx)}{\delta(x)} = 0, \quad (4.28)$$

что является требованием лишь “извилистости” границы области D в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^2$. Является ли данное требование (или похожее) действительно необходимым – не ясно. Соответствующих примеров у нас не имеется.

При $n \geq 3$ соотношение (4.22) выполняется только в случае, когда область D является достаточно “узкой” в окрестности бесконечности, например, когда она расположена в области вида $\Delta \times \mathbb{R}^2$, где Δ – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-2}$.

4.9. Укажем случай, в котором емкость конденсатора на минимальной поверхности можно подсчитать точно, не прибегая к модульной технике. Пусть

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b\}, \quad 0 < a \leq \infty, \quad 0 < b \leq \infty,$$

– прямоугольник, и пусть $f(x)$ есть $C^2(\overline{D})$ -решение уравнения $Q_0[f(x)] = 0$, где дифференциальный оператор Q_0 определен соотношением (4.4). Предположим, что решение $f(x)$ удовлетворяет одному из условий:

- (a) $f(x_1, 0) = d_1, \quad f(x_1, b) = d_2 \quad (d_i - \text{const});$
- (b) $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, b) = 0.$

Выберем постоянные c_1, c_2 так, чтобы было $0 < c_1 < c_2 < a$, и обозначим через H_1 множество $\{x \in D : x_1 < c_1\}$, через H_2 – множество $\{x \in D : x_1 > c_2\}$. Оценим емкость конденсатора $(\overline{H}_1, \overline{H}_2; D)$ в метрике поверхности F , описываемой уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Существует постоянная $\mathcal{I} > 0$, зависящая только от поверхности F и такая, что при любых c_1, c_2 выполнено*

$$\text{cap}_{2,F}(\overline{H}_1, \overline{H}_2; D) = \frac{\mathcal{I}}{c_2 - c_1}. \quad (4.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для коэффициентов первой квадратичной формы поверхности F имеем

$$g_{11} = 1 + p^2, \quad g_{12} = g_{21} = pq, \quad g_{22} = 1 + q^2, \quad g = w^2,$$

где

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad w = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Отсюда находим

$$g^{11} = \frac{1+q^2}{w^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{pq}{w^2}, \quad g^{22} = \frac{1+p^2}{w^2}$$

и

$$\text{cap}_{2,F}(\overline{H}_1, \overline{H}_2; D) = \inf_{\phi} \int_D \left(\frac{1+q^2}{w} \phi_{x_1}^2 - 2\frac{pq}{w} \phi_{x_1} \phi_{x_2} + \frac{1+p^2}{w} \phi_{x_2}^2 \right) dx_1 dx_2.$$

Выберем функцию $\phi(x)$ так, чтобы $\phi(x) = 0$ на H_1 , $\phi(x) = 1$ на H_2 ; при всех остальных значениях $x \in D$ полагаем

$$\phi(x) = \frac{x_1 - c_1}{c_2 - c_1}.$$

Имеем

$$\text{cap}_{2,F}(\overline{H}_1, \overline{H}_2; D) \leq \frac{1}{(c_2 - c_1)^2} \int_{D_1} \frac{1+q^2}{w} dx_1 dx_2, \quad (4.30)$$

где $D_1 = D \setminus (\overline{H}_1 \cup \overline{H}_2)$.

Для оценки интеграла в правой части (4.30) воспользуемся следующей известной формой уравнения минимальных поверхностей:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1+q^2}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{pq}{w} \right) = 0.$$

На основании формулы Грина будем иметь

$$\int_{D_1} \frac{1+q^2}{w} dx_1 dx_2 = \int_{\partial D_1} x_1 \left(-\frac{pq}{w} dx_1 + \frac{1+q^2}{w} dx_2 \right).$$

В силу условий, накладываемых на граничные данные решения $f(x)$, интегралы по горизонтальным частям границы ∂D_1 исчезают, а потому

$$\int_{D_1} \frac{1+q^2}{w} dx_1 dx_2 = c_2 \int_0^b \frac{1+q_2^2}{w_2} dx_2 - c_1 \int_0^b \frac{1+q_1^2}{w_1} dx_2,$$

где обозначено

$$q_i = q(c_i, x_2), \quad w_i = w(c_i, x_2), \quad i = 1, 2.$$

Из этих же соображений следует, что интеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^b \frac{1+q^2(t, x_2)}{w(t, x_2)} dx_2$$

не зависит от переменной t и является постоянной величиной для данной поверхности. Таким образом, мы получаем

$$\int_{D_1} \frac{1+q^2}{w} dx_1 dx_2 = (c_2 - c_1) \mathcal{I}$$

и, замечая, что функция $\phi(x)$ доставляет равенство в (4.30), приходим к (4.29). Предложение доказано.

§ 5. Приложения к уравнениям типа минимальных поверхностей

5.1. Первое из применений изложенных выше результатов будет связано с граничными множествами параболического типа в евклидовой метрике $ds_F = |dx|$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область. Для произвольного $k = 1, 2, \dots$ полагаем $U_k = \{x \in D : |x| > k\}$. Последовательность открытых множеств $\{U_k\}$ образует цепь. Приведем простое условие, при выполнении которого граничное множество $\xi \asymp \{U_k\}$ на поверхности $F = (D, |dx|^2)$ имеет параболический тип. Обозначим через $S_D(t)$ пересечение D со сферой радиуса $t > 0$, через $|S_D(t)|$ — площадь $S_D(t)$. Имеет место

ЛЕММА 5.1. *Если*

$$\int^{+\infty} |S_D(t)|^{-1} dt = +\infty, \quad (5.1)$$

то ξ имеет 2-параболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 3.1 при $h(x) = |x|$ и $\alpha = 2$.

5.2. Формулируемое ниже утверждение представляет собой обобщенный принцип максимума для разности решений уравнения минимальных поверхностей. Мы приведем его в несколько более общем виде.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область, удовлетворяющая условию (5.1). Пусть $f_i(x)$ — обобщенные решения уравнений*

$$Q_0[f_i(x)] = B_i(x), \quad i = 1, 2,$$

и пусть $B_1(x) - B_2(x) \leq 0$ почти всюду в D . Предположим, что разность $f_1(x) - f_2(x)$ ограничена сверху в D и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup (f_1(x) - f_2(x)) \leq c \quad \forall x_0 \in \partial D. \quad (5.2)$$

Тогда $f_1(x) - f_2(x) \leq c$ всюду в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.8) для произвольной липшицевой в D функции $\phi(x)$ с компактным носителем $\text{supp } \phi \subset D$ выполнено

$$\int_D \sum_{i=1}^n \phi'_{x_i} \left(\frac{f'_{1x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f_1|^2}} - \frac{f'_{2x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f_2|^2}} \right) dx + \int_D \phi(B_1 - B_2) dx = 0. \quad (5.3)$$

Воспользуемся теоремой 2.2. Пусть $F = (D, |dx|^2)$. Положим

$$A_i(x, \xi) = \frac{f'_{1x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f_1|^2}} - \frac{f'_{2x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f_2|^2}} - (f_1 - f_2)'_{x_i} + \xi_i$$

при $\xi_i = (f_1 - f_2)'_{x_i}$ и $A_i(x, \xi) = \xi_i$ при $\xi_i \neq (f_1 - f_2)'_{x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Из соотношения (5.3) вытекает, что функция $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$L[f] = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla f) = B(x),$$

где $B(x) = B_2(x) - B_1(x) \geq 0$ почти всюду в D .

Оператор L обладает свойствами (2.5) и (2.6). Выполнение свойства (2.5) очевидно. Неравенство (2.6) при $\xi \neq \nabla(f_1 - f_2)$ справедливо в силу определения L . Покажем, что (2.6) выполнено при $\xi = \nabla(f_1 - f_2)$.

Положим

$$p_{ik} = \frac{f'_{x_k}}{\sqrt{1 + |\nabla f_i|^2}}, \quad \omega_i = \left(1 - \sum_{k=1}^n p_{ik}^2\right)^{1/2},$$

где $i = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$f'_{i x_k} = \frac{p_{ik}}{\omega_i},$$

и нам достаточно доказать неравенство

$$\sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k})^2 \leq \sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k}) \left(\frac{p_{1k}}{\omega_1} - \frac{p_{2k}}{\omega_2} \right). \quad (5.4)$$

Введем обозначения:

$$p_k = p_{2k} + t(p_{1k} - p_{2k}), \quad \omega = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n p_k^2}, \quad t \in [0, 1].$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\delta(t) = \sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k}) \frac{p_k}{\omega}.$$

Так как

$$\delta(0) = \sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k}) \frac{p_{2k}}{\omega_2}, \quad \delta(1) = \sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k}) \frac{p_{1k}}{\omega_1},$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k}) \left(\frac{p_{1k}}{\omega_1} - \frac{p_{2k}}{\omega_2} \right) &= \int_0^1 \delta'(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left[(p_{1k} - p_{2k})^2 \left(1 - \sum_{j=1}^n p_j^2 \right) + \sum_{j=1}^n p_k p_j (p_{1j} - p_{2j}) (p_{1k} - p_{2k}) \right] \frac{dt}{\omega^3} \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k})^2 \left(1 - \sum_{j=1}^n p_j^2 \right) + \left(\sum_{j=1}^n p_j (p_{1j} - p_{2j}) \right)^2 \right] \frac{dt}{\omega^3}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k}) \left(\frac{p_{1k}}{\omega_1} - \frac{p_{2k}}{\omega_2} \right) \geq \sum_{k=1}^n (p_{1k} - p_{2k})^2 \int_0^1 \frac{dt}{\omega}$$

и, замечая, что $\omega < 1$, приходим к (5.4).

Необходимое заключение следует, таким образом, из теоремы 2.2.

5.3. Непосредственным следствием доказанного является утверждение о единственности решения уравнения минимальных поверхностей в неограниченных областях.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию (5.1). Предположим, что разность $f_1(x) - f_2(x)$ решений уравнения минимальных поверхностей ограничена в D и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup (f_1(x) - f_2(x)) = 0 \quad \forall x_0 \in \partial D.$$

Тогда $f_1(x) = f_2(x)$ всюду в D .

В двумерном случае условие (5.1) выполнено для любой неограниченной области; последнее утверждение дает (в определенном смысле) полное решение проблемы единственности решений задачи Дирихле в неограниченных областях, содержащейся у Ниче (см. [35, с. 89]). Для внешности круга в $\mathbb{R}^2$ аналогичный результат содержится в работе Оссермана [36] и, как отмечает автор, принадлежит Р. Финну.

В многомерном случае проблема единственности решений задачи Дирихле в областях, не удовлетворяющих условию (5.1), остается открытой.

5.4. Пусть $A_i(\xi)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – дважды непрерывно дифференцируемые функции переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$. Положим $a_{ij}(\xi) = \frac{\partial A_i}{\partial \xi_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Пусть $a_{ij} = a_{ji}$ и $\det(a_{ij}(\xi)) > 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\theta(t)$, суммируемая по $\mathbb{R}^1$, обладающая свойствами

$$\theta(t) > 0, \quad \theta(-t) = \theta(t), \quad \theta'(t) \leq 0 \quad \forall t \geq 0,$$

и такая, что при любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi) \eta_i \eta_j \leq \varepsilon \theta(|\xi|) \sqrt{1 + |\xi|^2} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{1 + |\xi|^2} \right) \eta_i \eta_j, \quad (5.5)$$

где $\varepsilon < \infty$ – постоянная.

Рассмотрим уравнение

$$Q[f] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(\nabla f) = 0 \quad (5.6)$$

и предположим, что оператор Q удовлетворяет условиям (4.1), (4.2) с некоторыми постоянными ν_1 и ν_2 .

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию (4.22). Пусть $f(x)$ – трижды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (5.6) в области D . Предположим, что для производной $f'_{x_k}(x)$ выполнено

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup f'_{x_k}(x) \leq c \quad \forall x_0 \in \partial D. \quad (5.7)$$

Тогда $f'_{x_k}(x) \leq c$ всюду в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $k = 1$. Дифференцируя (5.6) по переменной x_1 , приходим к соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\nabla f) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} \right) = 0.$$

Введем вспомогательную функцию

$$u(x) = \int_{-\infty}^{f'_{x_1}(x)} \theta(t) dt. \quad (5.8)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} = \frac{1}{\theta(f'_{x_1})} \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

и мы получаем

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\theta(f'_{x_1})} a_{ij}(\nabla f) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Данное соотношение будем рассматривать как уравнение относительно функции $u(x)$. С этой целью положим

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \frac{1}{\theta(f'_{x_1})} a_{ij}(\nabla f).$$

Тогда имеем

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (5.9)$$

Пусть F – поверхность, заданная над областью D уравнением $x_{n+1} = f(x)$. Пользуясь теоремой 4.5 и учитывая условие, наложенное на область D , мы можем заключить, что цепь $\{U_k\}$, $U_k = \{x \in D : |x| > k\}$, имеет 2-емкость 0 в метрике ds_F .

Так как $\theta(t)$ – суммируемая по $\mathbb{R}^1$ функция, то из (5.8) следует, что функция $u(x)$ ограничена в D . Требование (5.7) для производной $f'_{x_1}(x)$ влечет выполнение свойства

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup u(x) \leq u(c) \quad \forall x_0 \in \partial D.$$

Если мы покажем, что оператор L , определенный соотношением (5.9), удовлетворяет условиям (2.5), (2.6) в метрике поверхности F , то на основании теоремы 2.2 мы сможем заключить, что $u(x) \leq u(c)$ при всех $x \in D$. Тем самым будет показано, что $f_{x_1}(x) \leq c$ всюду в области D .

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение неравенства (2.6) для оператора L , т.е. нам достаточно доказать существование постоянной $\varepsilon_1 < \infty$ такой, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j \sum_{p,q=1}^n g_{pq} \tilde{a}_{pi} \tilde{a}_{qj} \leq \varepsilon_1 \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (5.10)$$

Обозначим через $\tilde{a}$ матрицу с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}$, через G – матрицу с коэффициентами g_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Так как определитель матрицы (a_{ij}) отличен от нуля, то это же свойство имеет место и для матрицы $\tilde{a}$.

Легко видеть, что матрица коэффициентов квадратичной формы, стоящей в левой части (5.10), имеет вид $\tilde{a}G\tilde{a}$. Определим максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ регулярного пучка квадратичных форм

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{p,q=1}^n g_{pq} \tilde{a}_{pi} \tilde{a}_{qj} \right) \xi_i \xi_j - \lambda \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j.$$

В силу известных результатов (см., например, [37, с. 286–288]), величина $\lambda_{\max}$ есть наибольший из корней уравнения

$$\det(\tilde{a}G\tilde{a} - \lambda \sqrt{g}\tilde{a}) = 0.$$

Поскольку матрица $G\tilde{a}$ невырождена, данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\det(\tilde{a} - \lambda \sqrt{g} G^{-1}) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{\max} = \max_{\xi} \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla f) \xi_i \xi_j}{\theta(f'_{x_1}) \sqrt{g} \sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - g^{-1} f'_{x_i} f'_{x_j}) \xi_i \xi_j}.$$

Функция $\theta(t)$ монотонно убывает с ростом $|t|$, и потому $\theta(f'_{x_1}) \geq \theta(|\nabla f|)$. Тем самым мы получаем

$$\lambda_{\max} \leq \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\nabla f) \xi_i \xi_j}{\theta(|\nabla f|) \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{f'_{x_i} f'_{x_j}}{1 + |\nabla f|^2} \right) \xi_i \xi_j} \leq \varepsilon,$$

где ε – постоянная из неравенства (5.5), что доказывает (5.10) и теорему.

5.5. В случае минимальных поверхностей имеем

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию (4.22). Если $f(x)$ – решение уравнения минимальных поверхностей в D и производная f'_{x_k} удовлетворяет (5.7) на границе ∂D , то всюду в D выполнено $f'_{x_k}(x) \leq c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить справедливость неравенства (5.5). Имеем

$$A_i(\xi) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}$$

и

$$a_{ij}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{1 + |\xi|^2} \right),$$

где $i, j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда находим

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi) \eta_i \eta_j = \frac{1}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{1 + |\xi|^2} \right) \eta_i \eta_j,$$

и неравенство (5.5) действительно имеет место для функции $\theta(t) = (1 + t^2)^{-1}$ с постоянной $\varepsilon = 1$.

В двумерном случае с использованием известных свойств решений равномерно эллиптических уравнений отсюда вытекают хорошо известные теоремы С.Н. Бернштейна [9] и Л.Берса [10] для решений уравнения минимальных поверхностей. (Подробности см. в [17].)

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Пусть $x_3 = f(x_1, x_2)$ – решение уравнения минимальных поверхностей, определенное во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда f – линейная функция.

СЛЕДСТВИЕ 5.7. Если $x_3 = f(x_1, x_2)$ – решение уравнения минимальных поверхностей, определенное над внешностью компакта в $\mathbb{R}^2$, то существует конечный предел градиента $\nabla f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

5.6. Следует подчеркнуть, что в условиях теоремы 5.4 и следствия 5.5 не предполагается априорная ограниченность производной f'_{x_k} в области D . Этот эффект есть проявление специфики уравнения минимальных поверхностей и ему аналогичных.

Для самих решений уравнения минимальных поверхностей подобное свойство, вообще говоря, не имеет места. Простейший пример такого рода дает линейная функция $x_3 = cx_1$, заданная над полуплоскостью $x_1 > 0$ из $\mathbb{R}^2$. Заметим, однако, что такое свойство все же может иметь место и для самих решений $x_3 = f(x_1, x_2)$, но при условии, что решение определено над неограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$, достаточно “узкой” в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^2$ (см. [35] для случая угла, раствора $\theta < \pi$, и [38] – для общего случая).

В случае $n = 2$ теоремы 5.2 и 5.4 при несколько более жестких ограничениях были опубликованы в [17]. При $n \geq 3$ специальные случаи теорем 5.2 и 5.4 анонсированы в [39], однако полные доказательства не публиковались.

Условия (4.1), (4.2) и (5.5), накладываемые на уравнение (5.6) при доказательстве обобщенного принципа максимума для производных решения, восходят к Р.Финну [5], описавшему уравнения, решения которых имеют графики с квазиконформным гауссовым отображением. Неравенство (5.5) представляет собой многомерный аналог условия принадлежности уравнения классу $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ Финна [5], неравенства (4.1) и (4.2) являются усиленными вариантами условий принадлежности классам $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ и $\mathcal{E}_3(\varepsilon)$ из работы [5].

§ 6. Графики в пространстве Минковского

6.1. Пусть $\mathbb{R}_1^{n+1}$ – пространство-время Минковского, т.е. $(n+1)$ -мерное псевдоевклидово пространство с метрикой сигнатуры $(n, 1)$. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точка (или вектор) в $\mathbb{R}^n$, $\chi = (x, t) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$. Для произвольной пары векторов $\chi' = (x', t')$ и $\chi'' = (x'', t'')$ в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ определим скалярное произведение

$$\langle \chi', \chi'' \rangle = \sum_{i=1}^n x'_i x''_i - t' t''$$

и скалярный квадрат вектора χ

$$|\chi|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - t^2.$$

Вектор $\chi \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ называется *пространственноподобным*, если $|\chi|^2 > 0$.

Гиперповерхность F класса C^1 в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ *пространственноподобна*, если пространственноподобен каждый касательный к ней вектор. Если F пространственноподобна, то она локально представима в виде графика C^1 -функции $t = f(x)$. Ниже мы будем считать, что такое представление имеет место “в целом”.

График C^1 -функции $t = f(x)$, заданной над областью $D \subset \mathbb{R}^n$, пространственноподобен тогда и только тогда, когда $|\nabla f(x)| < 1$ всюду в области D .

Основные понятия и факты теории поверхностей в пространстве Минковского можно найти в [40], [51].

6.2. Пусть F – график функции класса C^1 , определенной над областью $D \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что поверхность $F \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ пространственноподобна. Скалярное произведение в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ индуцирует на F метрику

$$ds_F^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx_i dx_j, \quad g_{ij} = \delta_{ij} - f'_{x_i} f'_{x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (6.1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

В силу условия пространственноподобности F метрика (6.1) положительно определена всюду в области D . Элементы обратной матрицы $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ записываются в виде

$$g^{ij} = \delta_{ij} + \frac{f'_{x_i} f'_{x_j}}{1 - |\nabla f|^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Нашей ближайшей целью является интерпретация некоторых специальных случаев признаков 2-параболичности и 2-гиперболичности граничных множеств поверхностей, полученных в §3. Предположим сначала, что граничное множество ξ поверхности F исчерпывается функцией $h(x): D \rightarrow (a, +\infty)$ со свойством $|\nabla h| \equiv 1$ в D , например одной из функций вида

$$h(x) = \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (6.2)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_F(\nabla h) &= \sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{i,j} + \frac{f'_{x_i} f'_{x_j}}{1 - |\nabla f|^2} \right) h'_{x_i} h'_{x_j} \\ &= |\nabla h|^2 + \frac{\langle \nabla f, \nabla h \rangle^2}{1 - |\nabla f|^2} = |\nabla h|^2 \frac{1 - |\nabla_\omega f|^2}{1 - |\nabla f|^2}, \end{aligned}$$

где символом $\nabla_\omega f$ обозначен градиент сужения функции f на поверхность уровня $E_h(t) = \{x \in D: h(x) = t\}$ функции $h(x)$ и

$$|\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla h \rangle^2 + |\nabla_\omega f|^2.$$

Тем самым в случае $\alpha = 2$ находим

$$\lambda_h(t) = \int_{E_h(t)} \frac{1 - |\nabla_\omega f|^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} H(dx). \quad (6.3)$$

6.3. Зафиксируем постоянную $a \geq 0$. Предположим, что поверхность F задана над областью $D = D(a, +\infty; \Delta)$ описанного в п. 3.4 вида. Пусть ξ – граничное множество на F , задаваемое цепью областей

$$U_k = \{x \in D: \tau_k < |x| < +\infty\}, \quad \lim \tau_k = +\infty.$$

В качестве функции исчерпания ξ выберем $h(x)$, определенную равенством (6.2) с $p = n$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть F – пространственноподобная поверхность, определенная над областью $D = D(a, +\infty; \Delta)$. Справедливы высказывания:

(i) если поверхность F удовлетворяет условию

$$\int^{+\infty} r^{1-n} dr \left(\int_{D \cap \{|x|=r\}} \frac{1 - |\nabla_\omega f|^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(r, \omega) H(d\omega) \right)^{-1} = +\infty, \quad (6.4)$$

где ∇_ω – градиент сужения f на сферу $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| = r\}$ и $H(d\omega)$ – элемент площади на сфере единичного радиуса, то граничное множество ξ имеет 2-параболический тип;

(ii) если существует измеримое множество $E \subset \Delta$, $\text{mes}_{n-1} E > 0$, такое, что

$$\int^{+\infty} \frac{1 - f_r'^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(r, \omega) \frac{dr}{r^{n-1}} < +\infty \quad \forall \omega \in E, \quad (6.5)$$

где $f_r = \langle \nabla f, x|x|^{-1} \rangle$, то граничное множество ξ имеет 2-гиперболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первой части утверждения достаточно воспользоваться соотношениями (3.1) и (6.3) с функцией исчерпания $h(x) = |x|$.

Чтобы доказать вторую часть, необходимо применить теорему 3.4, предварительно заметив, что

$$\begin{aligned} \delta(r, \omega) &= \left(\sum_{i,j=1}^n (\delta_{ij} - f_{x_i} f_{x_j}) dx_i dx_j \right)^{1/2} \Big|_{l_\omega} \\ &= (|dx|^2 - \langle \nabla f, dx \rangle^2)^{1/2} \Big|_{l_\omega} = (1 - f_r'^2)^{1/2} dr. \end{aligned}$$

В случае радиально симметрических поверхностей, замечая, что $\nabla_\omega f \equiv 0$, из (6.4) и (6.5) получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть F – пространственноподобная поверхность в $\mathbb{R}_1^{n+1}$, определенная над всем пространством $\mathbb{R}^n$ посредством графика C^1 -функции $t = f(|x|)$. Тогда:

(i) если $n \geq 3$, то F имеет 2-гиперболический тип;

(ii) если $n = 2$, то F имеет 2-параболический тип тогда и только тогда, когда

$$\int^{+\infty} \sqrt{1 - f_r'^2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau} = +\infty.$$

6.4. Пусть Δ – ограниченная область в гиперплоскости $x_1 = 0$, и пусть $D(a, +\infty; \Delta) = \Delta \times (a, +\infty)$ – цилиндрическая область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что F – пространственноподобная поверхность, заданная над D посредством C^1 -функции $t = f(x)$. Следуя обозначениям п. 3.5, для фиксированной точки $'x = (x_2, x_3, \dots, x_n) \in \Delta$ полагаем

$$\delta(\tau, 'x) d\tau = (1 - f'_{x_1}{}^2(\tau, 'x))^{1/2} d\tau.$$

Выберем функцию исчерпания (6.2) с $p = 1$. Определим граничное множество ξ поверхности F цепью областей

$$U_k = \{x = (x_1, 'x) \in \mathbb{R}^n : x_1 > \tau_k\}, \quad \lim \tau_k = +\infty.$$

Непосредственным следствием теорем 3.1 и 3.5 является

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть F – пространственноподобная поверхность над D . Тогда:

(i) если

$$\int^{+\infty} d\tau \left(\int_{\Delta \cap \{x_1 = \tau\}} \frac{1 - |\nabla_{'x} f|^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(\tau, 'x) H(d'x) \right)^{-1} = +\infty,$$

то граничное множество ξ имеет 2-параболический тип;

(ii) если существует измеримое множество $E \subset \Delta$, $\text{mes}_{n-1} E > 0$, такое, что

$$\int^{+\infty} \frac{1 - f'_{x_1}{}^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(\tau, 'x) d\tau < +\infty \quad \forall 'x \in E,$$

то граничное множество ξ имеет 2-гиперболический тип.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. Пусть $D = \Delta \times (a, +\infty)$ – цилиндрическая область, и пусть F – график $C^1(D)$ -функции вида $t = f(x_1)$. Пространственноподобная поверхность F имеет 2-параболический тип тогда и только тогда, когда

$$\int^{+\infty} \sqrt{1 - f'^2(\tau)} d\tau < +\infty.$$

6.5. Укажем применение найденных результатов к проблеме типа пространственноподобных поверхностей в $\mathbb{R}_1^3$ постоянной средней кривизны H . Пусть $t = f(x)$ – решение уравнения

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1 - |\nabla f(x)|^2}} \right) = 2H, \quad H \equiv \text{const} > 0, \quad (6.6)$$

определенное во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Относительно условий существования целых решений уравнения (6.6) см. [44] и [42].

Согласно результатам [41] график F как график функции $t = f(x)$ в $\mathbb{R}^3$ является выпуклым. Следуя [44], [45], определим *асимптотические граничные значения* f , полагая

$$\Lambda_f(\omega) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (f(r, \omega) - r).$$

Величина $\Lambda_f(\omega)$ существует (либо равна $-\infty$) при всяком $\omega \in S^1$.

Простейший пример целого решения уравнения (6.6) – гиперболический цилиндр $t = \sqrt{n^{-2}H^{-2} + x_n^2}$. Легко видеть, что для этой поверхности $\Lambda_f(\omega) = 0$ вдоль положительного и отрицательного направлений оси Ox_n и $\Lambda_f(\omega) = -\infty$ вдоль всех других направлений $\omega \in S^{n-1}$.

Воспользуемся теоремой 6.1. Выражение (6.3) имеет вид

$$\lambda_h(t) = t^{n-1} \int_{|x|=t} \left(\sqrt{1 - |\nabla f|^2} + \frac{f_r'^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} \right) (t, \omega) d\omega.$$

Легко подсчитать, что

$$\sqrt{1 - |\nabla f|^2} + \frac{f_r'^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}} = \frac{c}{t} + c_1,$$

где c, c_1 – постоянные.

В силу условия (6.4) при $n = 2$ поверхность имеет 2-параболический тип. Условие (6.5) влечет 2-гиперболичность типа этой поверхности при $n \geq 3$.

6.6. В общем случае имеет место

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть $f(x)$ – целое решение уравнения пространственноподобных поверхностей постоянной средней кривизны в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^3$. Тогда если существует измеримое множество $E \subset S^1$, $\text{mes } E > 0$, такое, что

$$\Lambda_f(\omega) > -\infty \quad \forall \omega \in E, \quad (6.7)$$

то график F имеет 2-гиперболический тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на следующую априорную оценку градиента целого решения уравнения (6.6):

$$1 - |\nabla f(x)|^2 \geq \frac{1}{1 + 2H|x|^2}, \quad (6.8)$$

справедливую при всех $x \in \mathbb{R}^2$ (см. [11, доказательство леммы 4.5]).

Пусть $\omega \in E$ – точка, в которой выполнено свойство (6.7). Воспользуемся условием 2-гиперболичности (6.5). Не ограничивая общности, можем считать, что график F является выпуклым вниз, и потому $1 > f_r'(r, \omega) \geq 0$. В силу (6.8) имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1 - f_r'^2}{\sqrt{1 - |\nabla f|^2}}(r, \omega) \frac{dr}{r} &\leq \int_1^{+\infty} (1 - f_r'^2(r, \omega)) \sqrt{1 + 2Hr^2} \frac{dr}{r} \\ &\leq C \int_1^{+\infty} (1 - f_r'^2(r, \omega)) dr \leq C \int_1^{+\infty} (1 - f_r'(r, \omega)) dr \\ &= C \lim_{r \rightarrow +\infty} (r - f(r, \omega)) = -C\Lambda_f(\omega), \quad C - \text{const.} \end{aligned}$$

Условие (6.7) гарантирует выполнение (6.5) и, тем самым, гиперболичность графика функции $f(x)$.

6.7. Одной из причин возрастающего интереса к поверхностям постоянной средней кривизны в пространстве Минковского является их связь с гармоническими

отображениями. В частности, при $n = 2$ гауссово отображение поверхности F нулевой средней кривизны есть гармоническое отображение F в гиперболическое пространство H^2 . Поиск простых способов проверки полной пространственноподобной поверхности F на параболичность или гиперболичность типа – важная составная часть общей программы построения примеров гармонических отображений в гиперболическое пространство [43].

В работах [44]–[46], [11] гиперболичность типа F была установлена в предположении, что функция $\Lambda_f(\omega) > -\infty$ на некотором интервале $I \subset S^1$ и удовлетворяет на I условию Липшица. Наша теорема 6.5 существенно усиливает данный признак.

Так как графики целых решений уравнения (6.6) являются выпуклыми, то при условии нерасщепляемости [43, теорема 2.6] они доставляют новые примеры пространственноподобных трубок (определение трубки в $\mathbb{R}_1^3$ и ее свойства см. в [47], [48], [52]). Некоторые признаки гиперболичности и параболичности граничных множеств на трубках и лентах нулевой средней кривизны в пространстве Минковского установлены в [48], [49]. Параболичность конформного типа целых решений уравнений типа максимальных поверхностей (т. е. решений уравнения пространственноподобных поверхностей нулевой средней кривизны) в пространстве $\mathbb{R}_1^3$ доказана в [50].

Список литературы

1. *Hildebrandt S.* Liouville theorems for harmonic mappings and approach to Bernstein theorems // *Ann. Math. Stud.* 1982. V. 102. P. 107–131.
2. *Yau S.T.* Nonlinear analysis in geometry // *L'Enseignement Mathematique*. 1987. V. 33. P. 109–158.
3. *Milnor J.* On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic // *Amer. Math. Monthly*. 1977. V. 84. № 1. P. 43–46.
4. *Суворов Г.Д.* Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965.
5. *Finn R.* On equations of minimal surface type // *Ann. of Math.* 1954. V. 60. № 3. P. 397–416.
6. *Cheng S.-Y., Yau S.-T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // *Comm. Pure Appl. Math.* 1975. V. 28. P. 333–354.
7. *Grötsch H.* Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II // *Ber. Sachs. Akad., Leipzig*. 1928. V. 80. P. 367–376, 497–502.
8. *Teichmüller O.* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // *Deutsche Math.* 1938. V. 3. P. 621–678.
9. *Бернштейн С.Н.* Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа. Собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
10. *Bers L.* Isolated singularities of minimal surfaces // *Ann. of Math.* 1951. V. 53. P. 364–386.
11. *Choi H.I., Treibergs A.* Hyperbolicity of constant mean curvature surfaces of Minkowski Space // Submitted to the Proceed. of the first Pacific Rim Conference in Geometric Analysis held at The Chinese Univ. of Hong Kong. Dec. 16–19, 1992. Intern. Press.
12. *Альфорт Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
13. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. Oxford Mathematical Monographs: Clarendon Press, 1993. P. 363.
14. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
15. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // *Acta Math.* 1957. V. 98. № 3, 4. P. 171–219.
16. *Zierner W.P.* Extremal length and p -capacity // *Michigan Math. J.* 1969. V. 16. P. 43–51.
17. *Миклюков В.М.* Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности // *Матем. сб.* 1979. Т. 108(150). № 2. С. 268–289.

18. Беллинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
19. Песин И.Н. Отображения, квазиконформные в среднем // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 4. С. 740–742.
20. Lehto O. Homeomorphisms with a given dilatation // Lect. Notes Math. 1970. V. 118. P. 58–73.
21. Миклюков В.М., Суворов Г.Д. О существовании и единственности квазиконформных отображений с неограниченными характеристиками // Дослідження з теорії функцій комплексної змінної та її застосувань. Київ: Ін-т математики АН УРСР, 1972. С. 45–53.
22. Кругликов В.И. О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем // Метрические вопросы теории функций и отображений. Вып. 4. Киев: Наук. думка, 1973. С. 123–147.
23. David G. Solutions de l'équation de Beltrami avec $\|\mu\| = 1$ // Annal. Acad. Sci. Fennice. Ser. A.I. Math. 1988. V. 13. P. 25–70.
24. Ткачев В.Г., Ушаков А.Н. Теорема Фуглде в финслеровом пространстве // Тез. докл. Всесоюз. школы "Теория потенциала". Киев: Ин-т математики АН УРСР, 1991. С. 19.
25. Кесельман В.М. О римановых многообразиях p -параболического типа // Изв. ВУЗов. Математика. 1985. № 4. С. 81–83.
26. Решетняк Ю.Г. Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. № 5. С. 886–919.
27. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.
28. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
29. Клячин А.А., Миклюков В.М. Следы функций с пространственноподобными графиками и задача о продолжении при ограничениях на градиент // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 49–64.
30. Миклюков В.М., Ткачев В.Г. О строении в целом внешне полных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Изв. ВУЗов. Математика. 1987. № 7. С. 30–36.
31. Кесельман В.М., Миклюков В.М. О поведении в целом неограниченных гиперповерхностей с квазиконформным гауссовым отображением // Сиб. матем. журн. 1984. Т. 25. № 6. С. 195.
32. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1985.
33. Григорьян А.А. Об одной Диуиллеовой теореме на римановом многообразии // УМН. 1982. Т. 37. № 3(225). С. 181–182.
34. Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960.
35. Nitsche J.C.C. On new results in the theory of minimal surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V. 71. № 2. P. 195–270. (Русский перевод в сб. переводов "Математика". 1967. Т. II. № 3. С. 37–100).
36. Оссерман Р. Минимальные поверхности // УМН. 1967. Т. 22. № 4. С. 55–136.
37. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
38. Миклюков В.М. Некоторые особенности поведения решений уравнений типа минимальной поверхности в неограниченных областях // Матем. сб. 1981. Т. 116(158). № 1. С. 72–86.
39. Миклюков В.М. Емкость и обобщенный принцип максимума для квазилинейных уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 6. С. 1318–1320.
40. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1985.
41. Cheng S.-Y., Yau S.-T. Maximal spacelike hypersurfaces in Lorentz–Minkowski spaces // Ann. Math. 1976. V. 104. P. 407–419.
42. Bartnik R., Simon L. Spacelike Hypersurfaces with Prescribed Boundary Values and Mean Curvature // Comm. Math. Phys. 1982. V. 87. № 1. P. 131–152.
43. Choi H.I., Treibergs A. Constructing Harmonic Maps into the Hyperbolic Space // Proc. of Symp. in Pure Math. 1993. V. 54. Part 1.

44. *Treibergs A.* Entire Spacelike Hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowsky Space // *Invent. Math.* 1982. V. 66. P. 39–56.
45. *Choi H.I., Treibergs A.* New examples of harmonic diffeomorphisms of the hyperbolic plane to itself // *Manuscripta Math.* 1988. V. 62. P. 249–256.
46. *Choi H.I., Treibergs A.* Gauss map of spacelike constant mean curvature hypersurface of Minkowski Space // *J. Diff. Geom.* 1990. V. 32. P. 775–817.
47. *Клячин В.А., Миклюков В.М.* Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1991. Т. 55. № 1. С. 206–217.
48. *Миклюков В.М.* Максимальные трубки и ленты в пространстве Минковского // *Матем. сб.* 1992. Т. 183. № 12. С. 45–76.
49. *Клячин В.А., Миклюков В.М.* Условия конечности времени существования максимальных трубок и лент в искривленных лоренцевых произведениях // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1994. Т. 58. № 3. С. 196–210.
50. *Миклюков В.М.* О критических точках решений уравнений типа максимальных поверхностей в пространстве Минковского // *Теория отображений и приближения функций.* Киев: Наук. думка, 1989. С. 112–125.
51. *Артыкбаев А., Соколов Д.Д.* Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент: ФАН, 1991.
52. *Miklyukov V.M.* Space-Like Tubes of Zero Mean Curvature in Minkowski Space // *Advances in Geometric Analysis & Continuum Mechanics.* Boston: International Press Inc., 1995. P. 209–224.
53. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.

Волгоградский государственный университет,
математический факультет,
400062 г. Волгоград, ул. 2-я Продольная, 30.
E-mail: miklukov@math.vgu.tsaritsyn.su

Поступило в редакцию
21.XII.1994