Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Многоцветные динамические разбиения
торов на множества ограниченного остатка, *Изв. РАН.
Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 65–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:10:52

УДК 511

В. Г. Журавлев

Многоцветные динамические разбиения торов на множества ограниченного остатка

С помощью разбиений многомерных торов строятся множества ограниченного остатка, представляющие собою конечные объединения выпуклых многогранников. Для отклонений распределения точек орбит относительно сдвигов тора по указанным множествам доказывается многомерный вариант теоремы Гекке о распределении дробных долей на окружности.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: многомерная теорема Гекке, множества ограниченного остатка, многогранники.

DOI: 10.4213/im8003

§ 1. Введение

Э. Гекке в 1921 г. [1] доказал следующую теорему: для отклонений

$$\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|,$$

где $r(i, X^1)$ – количество точек орбиты длины i относительно вращения $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}$ окружности единичной длины на угол α , попавших в отрезок X^1 , выполняется неравенство

$$|\delta(i, X^1)| \leq h \quad (1.1)$$

при условии, что отрезок X^1 имеет длину $|X^1| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$.

И. Орен [2] перенес результат Гекке на случай, когда X^1 является конечным объединением интервалов X^1 , и для таких множеств получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Отметим, что интервалы из множества X^1 каждый в отдельности могут и не обладать свойством (1.2).

В общем случае, если X^d принадлежит d -мерному тору $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и для него выполняется условие (1.2), то X^d называется *множеством ограниченного остатка* или, кратко, *BR-множеством*.

П. Сюс [3] построил первое семейство параллелограммов $X^2 \subset \mathbb{T}^2$, для которых выполняется оценка (1.2). Анализ конструкции Сюса позволил П. Лиарде [4] найти редукцию BR-множеств X^d к аналогичным множествам X^{d-1} меньшей размерности. Это был важный шаг, так как он позволил строить BR-

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00433).

множества X^d для произвольной размерности d . Так, например, параллелограммы Сюса X^2 получаются подъемом отрезков Гекке X^1 из (1.1).

Другой подход к построению множеств X^d нашли Ж. Рози [5] и С. Ференци [6]. Они связали свойство X^d быть BR-множеством со свойствами соответствующего индуцированного отображения $S' = S_\alpha|X^d$ – отображения первого возвращения в X^d , или отображения Пуанкаре. Идея Рози–Ференци реализована в [7], где доказано общее неравенство

$$|\delta(i, X^2)| < 2 \quad (1.3)$$

для всех множеств $X^2 \subset \mathbb{T}^2$ из бесконечной последовательности самоподобных фрактальных областей Рози $\mathcal{R}_1 \supset \dots \supset \mathcal{R}_n \supset \dots$ с радиусом $\varrho(\mathcal{R}_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Глобальный подход к поиску BR-множеств предложен в [8], где впервые вместо отдельных множеств $X_k^d \subset \mathbb{T}^d$ были рассмотрены полные разбиения торов $\mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_s^d$ с некоторыми параметрами $\mathbf{c}$, λ . Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^d$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{S_v} & \mathbb{R}^d \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^d \end{array} \quad (1.4)$$

при котором повороту тора S_α отвечает перекладывание S_v некоторых множеств $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$ из $\mathbb{R}^d$. Если окажется, что число $s+1$ таких множеств X'_k не превосходит $d+1$, то каждый из образов $X_k^d = \pi(X'_k)$ на торе $\mathbb{T}^d$ будет BR-множеством, а соответствующее объединение $T_{\mathbf{c}, \lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$ из $\mathbb{R}^d$ будет торической разверткой для $\mathbb{T}^d$, т.е. фундаментальной областью в пространстве $\mathbb{R}^d$ относительно трансляций кубической решеткой $\mathbb{Z}^d$. Такие развертки T^d были сконструированы в [9] с помощью перекладывающихся параллелоэдров – многогранников, трансляционно разбивающих пространство $\mathbb{R}^d$. Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому d -мерного единичного куба C^d и отрезков.

В [10] по схеме (1.4) были построены простейшие многомерные BR-множества $X^d = P^d$, являющиеся d -мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин $\#V(P^d) = 2^{d+1} - 2$. Для размерностей $d = 1$ и $d = 2$ это будут множества, содержащие соответственно отрезки Гекке и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для $d = 3, 4$ – параллелоэдры Вороного [11], к которым относится, например, ромбический додекаэдр Федорова [12]. Для указанных BR-многогранников $X^d = P^d$ в работе [10] доказано следующее неравенство (см. также теорему 5.2 настоящей статьи):

$$|\delta(i, X^d)| \leq dh, \quad (1.5)$$

являющееся многомерным аналогом теоремы Гекке (1.1). Здесь отклонения $\delta(i, X^d)$ рассматриваются для сдвига тора S_β на вектор $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$, где h – любое натуральное число и l – произвольный вектор из кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

Цель настоящей работы – получить более сложные BR-множества X^d . Для этого применяются *многоцветные разбиения* тора $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \dots \sqcup X_D^d$ с числом областей $D + 1 > d + 1$, получающиеся как сечения соответствующих перекладывающихся разбиений $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^D = X_0^D \sqcup X_1^D \sqcup \dots \sqcup X_D^D$ тора $\mathbb{T}^D$. При таком подходе возникают BR-множества X^d , представляющие собою конечные объединения d -мерных многогранников, каждый из которых является сечением некоторого D -мерного многогранника из разбиения $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^D$, т.е. некоторого отмеченного выше параллелепипеда или выпуклого параллелепипеда P^D . В теореме 6.1 доказывается, что отклонения $\delta(i, X^d)$ для таких BR-множеств X^d снова удовлетворяют неравенству (1.5).

В качестве примера приведем разбиения для случая размерностей $d = 2$ и $D = 3$.

Рис. 1. Многоцветное разбиение тора $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^2$

На рис. 1 изображено двумерное многоцветное разбиение $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^2 = X_0^2 \sqcup X_1^2 \sqcup X_2^2 \sqcup X_3^2$, получающееся как сечение плоскостью перекладывающегося разбиения $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^3 = X_0^3 \sqcup X_1^3 \sqcup X_2^3 \sqcup X_3^3$ трехмерного тора $\mathbb{T}^3$. В разбиении $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^2$ каждое BR-множество $X^2 = \mathbb{T}_{A,k}^2$ ($k = 0, 1, 2, 3$) покрашено в отдельный цвет и является объединением параллелограммов и треугольников.

Если же произвести сдвиг S_t плоскости сечения, то получается другое разбиение $\mathbb{T}_{A_t,c,\lambda}^2$, изображенное на рис. 2. Теперь среди BR-множеств $X^2 = \mathbb{T}_{A_t,k}^2$ есть еще и пятиугольник. Отметим, что при всех сдвигах плоскости сечения площади множеств $X^2 = \mathbb{T}_{A_t,k}^2$ сохраняются.

Кроме упомянутых разбиений $\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^d$ в работе строятся еще динамические разбиения $\mathcal{D}_{\rho,A_t,c,\lambda}^d$ тора $\mathbb{T}^d$. На их основе получается новый тип ранее не рассматривавшихся *динамических множеств ограниченного остатка*, или DBR-множеств, X^d : это упорядоченные последовательности множеств, которые по

Рис. 2. Разбиение тора $\mathbb{T}^2_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}$, получающееся сдвигом плоскости сечения

отдельности могут и не являться BR-множествами (см. рис. 3 в § 10). Для них в теореме 8.1 также доказывается неравенство (1.5).

§ 2. Торические развертки

2.1. Перекладывающиеся торические развертки. Пусть дан D -мерный тор

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / L, \quad (2.1)$$

где L – невырожденная решетка из векторного пространства $\mathbb{R}^D$, т. е. решетка L имеет размерность D над $\mathbb{R}$. Пусть задан сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{L}. \quad (2.2)$$

Разверткой тора $\mathbb{T}^D$ назовем подмножество T^D из $\mathbb{R}^D$ такое, что ограничение на него факторотображения

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\text{mod } L} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto x \pmod{L}$$

задает биекцию

$$T^D \xrightarrow[\sim]{\text{mod } L} \mathbb{T}^D. \quad (2.3)$$

Пусть дана торическая развертка T^D , удовлетворяющая следующему условию. Существует такое разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_D \quad (2.4)$$

развертки T^D , что если с помощью биекции (2.3) отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D , то индуцированное отображение $T^D \xrightarrow{S_v} T^D$ для сдвига тора (2.2) будет эквивалентно перекладыванию областей $T_0, T_1, \dots, T_D$ развертки T^D :

$$S_v(x) = x + v(x), \quad (2.5)$$

где вектор сдвига $v(x)$ зависит от $x \in T^D$ и определяется условием

$$v(x) = v_k, \quad \text{если } x \in T_k, \quad (2.6)$$

при этом $v_0, v_1, \dots, v_D$ – некоторая фиксированная система векторов. Развертка T^D , удовлетворяющая условиям (2.3)–(2.6), называется *перекладывающейся*.

Заметим, что в силу биекции (2.3) разбиению (2.4) развертки T^D отвечает разбиение

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D \quad (2.7)$$

тора $\mathbb{T}^D$ на соответствующие области $\mathbb{T}_k \equiv T_k \bmod L$.

Далее мы будем использовать понятие *разбиения* множеств в *обычном* (*строгом*) смысле – когда рассматриваются покрытия множеств $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots$ с условием $X_k \cap X_{k'} = \emptyset$ для $k \neq k'$, а также в *расширенном* смысле $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$, предполагая в данном случае, что различные множества X_k не имеют общих внутренних точек.

2.2. Трансляционная решетка и ранг вектора сдвига. Из определений (2.2), (2.5) и (2.6) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha \bmod L \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (2.8)$$

при этом векторы

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, D \quad (2.9)$$

принадлежат основной решетке периодов L тора (2.1). Везде в дальнейшем будем предполагать, что L является невырожденной решеткой

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D], \quad (2.10)$$

порождаемой векторами (2.9) над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, т. е. что

$$\text{векторы } l_1, \dots, l_D \text{ имеют ранг } D \text{ над } \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

При этом условии вектор сдвига α можно разложить по данному базису:

$$\alpha = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_D l_D. \quad (2.12)$$

Пусть α – произвольный вектор из $\mathbb{R}^D$, имеющий координаты $(\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ в базисе (2.9). Определим его *ранг относительно решетки L* равенством

$$\text{rank}_L(\alpha) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha) - 1, \quad (2.13)$$

где $M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D] \subset \mathbb{R}$ обозначает *модуль* над кольцом $\mathbb{Z}$, порождаемый числами $1, \alpha_1, \dots, \alpha_D$, и $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D]$ – размерность этого модуля

над $\mathbb{Z}$. Если $\alpha' \subset \mathbb{R}^D$ – другой вектор, удовлетворяющий условию $\alpha' \equiv \alpha \pmod{L}$, то из определения (2.13) вытекает равенство

$$\text{rank}_L(\alpha') = \text{rank}_L(\alpha).$$

Это означает, что ранг $\text{rank}_L(\alpha)$ корректно определен для векторов α на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$. Из определения (2.13) также следуют неравенства

$$0 \leq \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) \leq D.$$

Назовем вектор α *иррациональным*, если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) > 0$. Если при этом ранг принимает наибольшее значение $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то будем говорить, что вектор *максимально иррациональный*. В оставшемся случае $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = 0$ скажем, что вектор *рациональный*; это равносильно тому, что вектор α имеет рациональные координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_D$ в базисе (2.9).

Для вектора α отвечающие ему сдвиг S_α тора (2.2) и перекладывание S_v из (2.5), (2.6) будем называть соответствующим образом.

§ 3. Торические развертки и множества ограниченного остатка

3.1. Цветные k -отклонения. Пусть $\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D$ – разбиение тора (2.7), отвечающее разбиению (2.4) развертки тора T^D . Зададим сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\beta} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\beta(x) \equiv x + \beta \pmod{L} \quad (3.1)$$

на вектор

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + b \circ l), \quad (3.2)$$

где h – произвольное натуральное число, $b \circ l = b_1 l_1 + \dots + b_D l_D$ и $b = (b_1, \dots, b_D) \in \mathbb{Z}^D$ – целый вектор. Из определения следует, что вектор $b \circ l$ принадлежит решетке L . Любому сдвигу тора (3.1) можно поставить в соответствие *считающую функцию*

$$r_k(i, x_0) = \#\{j; S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k; 0 \leq j < i\}. \quad (3.3)$$

По условию L – невырожденная решетка (2.10). Поэтому для ее базиса $l_1, \dots, l_D$ существует двойственный ему базис $l_1^*, \dots, l_D^*$, связанный с ним соотношениями

$$l_k^* \cdot l_m = \delta_{km}, \quad (3.4)$$

где $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_D y_D$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_D)$, $y = (y_1, \dots, y_D)$ из $\mathbb{R}^D$ и δ_{km} – символ Кронекера.

Для $k = 0, 1, \dots, D$ обозначим

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i a_k. \quad (3.5)$$

Здесь коэффициенты a_k при $k = 1, \dots, D$ задаются равенствами

$$a_k = -l_k^* \cdot \alpha = -\alpha_k \quad (3.6)$$

(где α_k – координаты вектора α относительно базиса $l_1, \dots, l_D$, см. (2.12)), а коэффициент a_0 определяется из равенства

$$a_0 + a_1 + \dots + a_D = 1. \quad (3.7)$$

Мы будем называть $\delta_k(i, x_0)$ *отклонением распределения точек орбиты*

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0) = \{S_\beta^i(x_0) \equiv x_0 + i\beta \bmod L; i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (3.8)$$

относительно области $T_k \subset T^D$ или, кратко, *k-отклонением* или *цветным отклонением*.

Для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ определим его крайние значения

$$\underline{m}_k(X) = \inf_{x \in X} l_k^* \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = \sup_{x \in X} l_k^* \cdot x, \quad (3.9)$$

где векторы $l_1^*, \dots, l_D^*$ определены соотношением (3.4) и

$$l_0^* = -l_1^* - \dots - l_D^*. \quad (3.10)$$

Относительно отклонений $\delta_k(i, x_0)$ в [10] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(T) h \quad (3.11)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константы

$$c_k(T) = \overline{m}_k(T) - \underline{m}_k(T) \quad (3.12)$$

не зависят от h, i и определяются исключительно размерами развертки тора $T = T^D$, определенной в (2.4).

3.2. Вырождение орбит. Пусть вектор сдвига α будет произвольным, т. е. не обязательно иррациональным, и пусть $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ – орбита (3.8) произвольной начальной точки $x_0 \in T$ относительно сдвига S_β , где вектор сдвига β определен равенством (3.2). Обозначим $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c$ замыкание орбиты $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$.

Если вектор сдвига α является максимально иррациональным, т. е. имеет ранг $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то вектор β также будет максимально иррациональным. Известно (см. [13]), что для указанных β имеет место соотношение $\dim \text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = D$ и, таким образом, в этом случае выполняется равенство

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = T^c. \quad (3.13)$$

В общем случае выполняется лишь включение

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subseteq T^c, \quad (3.14)$$

которое влечет за собой следующее неравенство для констант (3.12):

$$c_k(X) \leq c_k(T). \quad (3.15)$$

Здесь множество X определяется с помощью биекции (2.3):

$$T^D \supseteq X \xrightarrow[\sim]{\text{mod } L} \text{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subset \mathbb{T}^D. \quad (3.16)$$

Если неравенство (3.15) будет строгим, то, как следствие, в случае произвольного вектора сдвига α мы получим для отклонений $\delta_k(i, x_0)$ усиление оценки (3.11).

В этом случае теорема 3.1 принимает следующий вид [10].

ТЕОРЕМА 3.2. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X)h \quad (3.17)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константы $c_k(X)$ вычисляются по формуле

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X), \quad (3.18)$$

не зависят от h, i и определяются исключительно размерами множества X из (3.16). Величины $\overline{m}_k(X)$ и $\underline{m}_k(X)$ определены в (3.9).

3.3. Единичный базис. Константы $c_k(X)$ из теоремы 3.2 можно конкретизировать, если, полагая

$$l_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \dots, \quad l_D = -\mathbf{e}_D, \quad (3.19)$$

перейти от базиса (2.11) к единичному базису

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_D = (0, 0, \dots, 1). \quad (3.20)$$

При таком выборе базиса решетка L , определенная в (2.10), будет иметь вид

$$L = \mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D], \quad (3.21)$$

т. е. будет кубической решеткой $\mathbb{Z}^D$ в пространстве $\mathbb{R}^D$.

Если решетка L имеет вид (3.21), то справедлива следующая теорема [10].

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть векторы $l_1, \dots, l_D$ выбраны в виде (3.19) и x_0 – произвольная начальная точка из тора $\mathbb{T}^D$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) k -отклонения (3.5) имеют вид

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i\alpha_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (3.22)$$

где вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$.

2) Если выбран вектор сдвига $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$ с произвольным натуральным h и вектором l из кубической решетки $\mathbb{Z}^D$, то при любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X)h \quad (3.23)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ с константами $c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X)$, где множество X определено в (3.16),

$$\underline{m}_k(X) = -\sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = -\inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \quad \text{для } k = 1, \dots, D$$

и

$$\underline{m}_0(X) = \inf_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x, \quad \overline{m}_0(X) = \sup_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x \quad \text{для } k = 0,$$

где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_D$.

3) В случае $h = 1$ выполняются точные неравенства:

$$x_{0k} - \sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \leq \delta_k(i, x_0) \leq x_{0k} - \inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \quad \text{для } k = 1, \dots, D \quad (3.24)$$

(здесь начальная точка $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0D})$ записана в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$) и

$$\underline{m}_0(X) - \sigma(x_0) \leq \delta_0(i, x_0) \leq \overline{m}_0(X) - \sigma(x_0), \quad (3.25)$$

где $\sigma(x_0) = x_{01} + \dots + x_{0D}$.

§ 4. Разбиения вытянутых параллелоэдров

4.1. Вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}$. Приведем основные понятия и результаты работы [9], необходимые нам для дальнейшего. Пусть $C = C^D$ – замкнутый D -мерный куб, натянутый на единичные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$. Обозначим $\mathbb{R}_+^D$ положительный конус, состоящий из векторов $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ с координатами $x_1 > 0, \dots, x_D > 0$. Для любого вектора $\mathbf{s}$ из конуса $\mathbb{R}_+^D$ определим операцию *вытягивания* $\text{Str}_{\mathbf{s}}$ произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ как сумму по Минковскому

$$\text{Str}_{\mathbf{s}}(X) = X + I\mathbf{s} = \bigcup_{t \in I} (X + t\mathbf{s}) \quad (4.1)$$

самого множества X и вложенного в пространство $\mathbb{R}^D$ отрезка $I\mathbf{s} = \{t\mathbf{s}; t \in I\}$, где $I = [0, 1]$. Условимся $\mathbf{s}$ из (4.1) называть *вытягивающим вектором*.

Применяя данную операцию к единичному кубу C , построим из него многогранник

$$C_{\mathbf{s}} = \text{Str}_{\mathbf{s}}(C), \quad (4.2)$$

представляющий собою *вытянутый куб*, имеющий объем $\text{vol } C_{\mathbf{s}} = \sigma(\mathbf{s}) + 1$. Здесь мы обозначили $\sigma(\mathbf{s}) = s_1 + \dots + s_D$ для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_D)$. Вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}$ обладают следующим важным для наших целей свойством (см. [9, теорема 1.1]): для любого вектора $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^D$ имеет место разбиение пространства

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_{\mathbf{s}}} C_{\mathbf{s}}[l], \quad (4.3)$$

где $C_{\mathbf{s}}[l] = C_{\mathbf{s}} + l$ – множество, полученное сдвигом куба $C_{\mathbf{s}}$ на вектор l , и $L_{\mathbf{s}} = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{1,\mathbf{s}}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{s}}]$ – полная решетка, порождаемая векторами $\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} = \mathbf{e}_k + \mathbf{s}$ для $k = 1, \dots, D$.

4.2. Вытянутые параллелепедры $\mathcal{C}_\mathbf{s}$. Линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M_\mathbf{s}} \mathbb{R}^D: \quad \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} \mapsto \mathbf{e}_k, \quad k = 1, \dots, D, \quad (4.4)$$

задает изоморфизм решеток $M_\mathbf{s}: L_\mathbf{s}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^D$ и переводит D -мерный единичный куб $\mathcal{C}$ в *параллелепедр*

$$\mathcal{C} = M_\mathbf{s}(\mathcal{C}), \quad (4.5)$$

натянутый на векторы $\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{c}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_D - \mathbf{c}$, где вектор $\mathbf{c}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{c} = \text{inv}(\mathbf{s}). \quad (4.6)$$

Здесь

$$\text{inv}(x) = \frac{x}{\sigma(x) + 1}$$

представляет собою *линейно-инверсное преобразование* пространства $\mathbb{R}^D$.

Согласно (4.5) вытянутый куб $\mathcal{C}_\mathbf{s}$ при отображении $M_\mathbf{s}$ переходит в многогранник

$$\mathcal{C}_\mathbf{c} = \text{Str}_\mathbf{c}(\mathcal{C}), \quad (4.7)$$

получающийся вытягиванием параллелепедра $\mathcal{C}$ вдоль вектора $\mathbf{c}$, связанного с вектором $\mathbf{s}$ формулой (4.6). *Вытянутый параллелепедр* $\mathcal{C}_\mathbf{c}$ имеет объем

$$\text{vol } \mathcal{C}_\mathbf{c} = 1, \quad (4.8)$$

и число $\sharp V(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ его вершин равно $2^{D+1} - 2$.

4.3. Вытягивающие векторы для параллелепедров. Согласно [14] имеет место биекция

$$\text{inv}: \mathbf{S}_{<1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{<1} \quad (4.9)$$

между $\mathbf{S}_{<1} = \mathbb{R}_+^D$ и множеством

$$\mathbf{C}_{<1} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) < 1\}, \quad (4.10)$$

где $\sigma(\mathbf{c}) = c_1 + \dots + c_D$. Множество $\mathbf{C}_{<1}$ является D -мерным симплексом, замыкание которого содержит $(D-1)$ -мерный симплекс $\mathbf{C}_1^c = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}_+^D)^c; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$.

В [14] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. 1) *Множество*

$$\mathbf{C}_{\leq 1} = \mathbf{C}_{<1} \sqcup \mathbf{C}_1, \quad (4.11)$$

где $\mathbf{C}_1 = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$ – *внутренность* симплекса $\mathbf{C}_1^c$, представляет собою множество вытягивающих векторов для параллелепедров (4.7): любому вектору $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ соответствует выпуклый параллелепедр $\mathcal{C}_\mathbf{c}$.

2) *Вытянутые параллелепедры $\mathcal{C}_\mathbf{c}$ разбивают пространство $\mathbb{R}^D$ на многогранники $\mathcal{C}_\mathbf{c}[l] = \mathcal{C}_\mathbf{c} + l$ без общих внутренних точек:*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_\mathbf{c}[l]. \quad (4.12)$$

4.4. Разбиения и перекладывания вытянутых параллелеэдров. Используя (4.12), определим разбиение пространства $\mathbb{R}^D$:

$$\mathcal{T}_c = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_c[l]. \quad (4.13)$$

Обозначим

$$\partial \mathcal{T}_c = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \partial \mathcal{C}_c[l]$$

множество всех границ разбиения $\mathcal{T}_c$, состоящее из границ всех многогранников $\mathcal{C}_c[l]$. Для любого $\alpha = \lambda c$, $0 < \lambda < 1$, определим множество границ $\partial \mathcal{C}_{c,\lambda} = \partial \mathcal{C}_c \cup [\mathcal{C}_c \cap (\partial \mathcal{T}_c - \alpha)] \subset \mathcal{C}_c$. Границы $\partial \mathcal{C}_{c,\lambda}$ разбивают вытянутый параллелеэдр $\mathcal{C}_c$ на $D+1$ область без общих внутренних точек [14], и в результате получается разбиение

$$\mathcal{C}_{c,\lambda} = \mathcal{P}_0^c \cup \dots \cup \mathcal{P}_D^c, \quad (4.14)$$

где $\mathcal{P}_k^c$, $k = 1, \dots, D$, – параллелеэдры, содержащие точки $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (единица стоит на k -м месте), а $\mathcal{P}_0^c = [\mathcal{C}_c \setminus (\mathcal{P}_1^c \cup \dots \cup \mathcal{P}_D^c)]^c$ – вытянутый параллелеэдр вида $\mathcal{P}_0^c = \text{Str}_{c-\alpha}(\mathcal{C})$.

Зададим перекладывание

$$S_v(\mathcal{C}_{c,\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} S_v(\mathcal{P}_0^c) \cup S_v(\mathcal{P}_1^c) \cup \dots \cup S_v(\mathcal{P}_D^c) \quad (4.15)$$

вытянутого параллелеэдра с разбиением (4.14), где $S_v(\mathcal{P}_k^c) = \mathcal{P}_k^c[v_k] = \mathcal{P}_k^c + v_k$ – параллельный сдвиг многогранника $\mathcal{P}_k^c$ на вектор

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ e_k, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Перекладывание S_v индуцирует многозначное отображение

$$S_v: \text{Str}_c(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \quad (4.17)$$

определяемое условиями $x \mapsto S_v(x) = x + v_k$, если $x \in \mathcal{P}_k^c$.

Из [9, предложение 1.1] вытекает следующее свойство перекладывания S_v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Вытянутый параллелеэдр $\mathcal{C}_{c,\lambda} = \text{Str}_c(\mathcal{C})$ с разбиением (4.14) замкнут относительно операции перекладывания (4.15): $S_v(\mathcal{C}_{c,\lambda}) \subseteq \mathcal{C}_{c,\lambda}$.*

Из определения (4.16) векторов сдвига v_k вытекает сравнение $v_k \equiv \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}$ для любого $k = 0, 1, \dots, D$. Отсюда и из (4.17) получаем сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}, \quad (4.18)$$

означающее, что многозначное отображение S_v становится однозначным на вытянутом параллелеэдре $S_v: \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{C}_c$, если отображение S_v рассмотреть по модулю $\mathbb{Z}^D$.

Определим на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$ сдвиг

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}.$$

Тогда из (4.15)–(4.18) вытекает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c & \xrightarrow{S_v} & \mathcal{C}_c \\ \text{mod } \mathbb{Z}^D \downarrow & & \downarrow \text{mod } \mathbb{Z}^D \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (4.19)$$

4.5. Построение перекладывающихся торических разверток. Чтобы построить для вытянутого параллелепипеда $\mathcal{C}_{c,\lambda}$ с разбиением (4.14) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку $T_{c,\lambda}^D \subset \mathbb{R}^D$ (см. определение в п. 2.1), нам потребуется следующий i -алгоритм [9], определяющий индекс $i(x)$ точек $x \in \mathcal{C}_{c,\lambda}$.

Согласно i -алгоритму, любая точка x из вытянутого параллелепипеда $\mathcal{C}_{c,\lambda}$ имеет однозначно определенный индекс $i(x) \in \{-1, 0, 1, \dots, D\}$. Если точка x принадлежит внутренности некоторого параллелепипеда $\mathcal{P}_k^c$, то она имеет индекс $i(x) = k$. Так что смысл индекса $i(x)$ состоит в том, что он распределяет общие граничные точки между параллелепипедами $\mathcal{P}_0^c, \mathcal{P}_1^c, \dots, \mathcal{P}_D^c$.

Используя индекс $i(x)$, определим следующие незамкнутые многогранники:

$$\mathcal{P}_k = \{x \in \mathcal{C}_{c,\lambda}; i(x) = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, D. \quad (4.20)$$

Они состоят из всех внутренних точек параллелепипедов $\mathcal{P}_k^c$ и части их граничных точек. Из однозначности индекса $i(x)$ следует, что $\mathcal{P}_{k_1} \cap \mathcal{P}_{k_2} = \emptyset$, если $k_1 \neq k_2$. Так определенные многогранники $\mathcal{P}_k$ обладают следующим свойством [9].

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть параметр $c \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ определен равенством $\alpha = \lambda c$, где $0 < \lambda \leq 1$ в случае $c \in \mathbf{C}_{< 1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $c \in \mathbf{C}_1$. Кроме того, пусть $\mathcal{P}_k$ – многогранники (4.20). Тогда их объединение

$$T_{c,\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D \quad (4.21)$$

является перекладывающейся торической разверткой из $\mathbb{R}^D$.

Итак, любому вытянутому параллелепипеду $\mathcal{C}_c$ с разбиением $\mathcal{C}_{c,\lambda}$ из (4.14) i -алгоритм ставит в соответствие перекладывающуюся торическую развертку $T_{c,\lambda}^D \subset \mathcal{C}_c$ с разбиением (4.21):

$$\mathcal{C}_c \implies \mathcal{C}_{c,\lambda} \implies T(\mathcal{C}_{c,\lambda}) = T_{c,\lambda}^D. \quad (4.22)$$

Ее роль состоит в том, что посредством биекции (2.3) она задает каноническое разбиение тора

$$\mathbb{T}_{c,\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D \quad (4.23)$$

на множества $\mathbb{T}_k^D \equiv \mathcal{P}_k \bmod \mathbb{Z}^D$, являющиеся по теореме 3.1 множествами ограниченного остатка.

Последовательность шагов (4.14), (4.22) и (4.23) определяет следующий алгоритм построения разбиений тора $\mathbb{T}_{c,\lambda}^D$.

Общая схема для канонического разбиения тора $\mathbb{T}_{c,\lambda}^D$:

$$\mathcal{C} \implies \mathcal{C}_c \implies \mathcal{C}_{c,\lambda} \implies T_{c,\lambda}^D \implies \mathbb{T}_{c,\lambda}^D. \quad (4.24)$$

§ 5. Теорема Гекке для BR-многогранников

5.1. Многомерная теорема Гекке. Пусть $T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D$ – перекладывающаяся торическая развертка (4.21) с заданным на ней перекладыванием S_v (см. определение (2.5)). Указанной развертке $T_{\mathbf{c},\lambda}^D$ по схеме (4.24) соответствует разбиение тора $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D$, на котором определен сдвиг $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}$. Введем обозначение (ср. (3.2))

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l), \quad (5.1)$$

где h – произвольное натуральное число и $l \in \mathbb{Z}^D$. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \#\{j; S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k^D; 0 \leq j < i\},$$

где S_β – сдвиг тора на вектор (5.1) и x_0 – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$. Пусть вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$. Относительно отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) - i \operatorname{vol} \mathbb{T}_k^D \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (5.2)$$

доказана следующая теорема [9].

ТЕОРЕМА 5.1 (многомерная теорема Гекке). 1) Пусть $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leq 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Тогда в формуле (5.2)

$$\operatorname{vol} \mathbb{T}_k^D = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, D, \quad (5.3)$$

и для отклонений (5.2) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D)| \leq c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})h \quad (5.4)$$

при всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Константы $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формуле

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = \max_{v \in V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, D$, – единичные векторы и $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_D$. В (5.5) через $V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ обозначено множество вершин вытянутого параллелоэдра $\mathbf{C}_{\mathbf{c}}$. Таким образом, константы $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ в неравенстве (5.4) не зависят от выбора множителя h в определении (5.1) вектора сдвига β .

2) Если вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$, то константы $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формулам

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)c_k \quad \text{для } k = 1, \dots, D, \quad (5.6)$$

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad \text{для } k = 0. \quad (5.7)$$

3) Для констант $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ из (5.6), (5.7) выполняется общее неравенство

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) \leq D \quad \text{для любого } \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}. \quad (5.8)$$

5.2. BR-многогранники. Замкнутые многогранники $\mathcal{P}_k^c$ с номерами $k = 1, \dots, D$, определенные в (4.14), допускают простое описание:

$$\mathcal{P}_k^c = P_k^c + \omega. \quad (5.9)$$

Здесь $P_k^c \subset \mathbb{R}^D$ обозначает замкнутый *параллелепипед*, натянутый на векторы

$$\alpha, \quad \mathbf{c} - \mathbf{e}_{k'} \quad \text{для всех } k' = 1, \dots, D, \quad k' \neq k, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{c} = \lambda \alpha$ и $\mathbf{e}_{k'}$ – единичные векторы. Точка

$$\omega = \mathbf{e}_0 - (D - 1)\mathbf{c} - \alpha, \quad (5.11)$$

где $\mathbf{e}_0 = (1, \dots, 1)$, является общей для всех многогранников $\mathcal{P}_k^c$, $k = 0, 1, \dots, D$. При этом в случае $k = 0$ многогранник P_0^c также задается равенством (5.9), в котором $\omega = 0$ и P_0^c – вытянутый параллелепед вида (см. (4.7))

$$\mathcal{P}_0^c = \text{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C}). \quad (5.12)$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ и $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$, то из определения (5.10) следует, что

$$\text{vol } P_k^c = \alpha_k. \quad (5.13)$$

В (4.20) были определены незамкнутые многогранники $\mathcal{P}_k$, содержащие все внутренние и некоторые граничные точки многогранника $\mathcal{P}_k^c$. Используя $\mathcal{P}_k$, определим соответствующие незамкнутые многогранники P_k с помощью равенства (ср. (5.9))

$$\mathcal{P}_k = P_k + \omega, \quad k = 0, 1, \dots, D. \quad (5.14)$$

Множество $X \subset \mathbb{R}^D$ назовем $\mathbb{Z}^D$ -различимым, если оно удовлетворяет следующему условию:

$$\forall x, y \in X: \quad x - y \in \mathbb{Z}^D \implies x = y. \quad (5.15)$$

Из определения (5.14) следует, что все многогранники P_k являются $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, так как согласно теореме 5.1 все их сдвиги в совокупности образуют торическую развертку $T_{\mathbf{c}, \lambda}^D$. Пусть даны произвольный вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и число $h \in \{1, 2, 3, \dots\}$ такое, что существует вектор α , удовлетворяющий условиям

$$\alpha \in \mathbf{C}_{<1}, \quad \alpha \equiv h\beta \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (5.16)$$

Обозначим

$$P_k = P_{\beta, h, \lambda, k} \quad (5.17)$$

многогранники, определенные равенствами (5.14) для векторов α из (5.16) и $\mathbf{c} = \lambda \alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$.

Для сдвига S_β тора $\mathbb{T}^D$ и многогранника P_k зададим *считающую функцию*

$$r(i; \beta, x_0, P_k) = \#\{j; S_\beta^j(x_0) \in P_k \pmod{\mathbb{Z}^D}, 0 \leq j < i\},$$

где x_0 – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$, и, принимая во внимание равенство (5.13), определим отвечающее функции $r(i; \beta, x_0, P_k)$ *отклонение*

$$\delta(i; \beta, x_0, P_k) = r(i; \beta, x_0, P_k) - i \operatorname{vol} \mathbb{P}_k^D \quad (5.18)$$

распределения точек орбиты $\operatorname{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ относительно области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, при этом согласно (5.3) и (5.13) имеют место равенства $\operatorname{vol} \mathbb{P}_k^D = \operatorname{vol} P_k^c = \alpha_k$ для $k = 0, 1, \dots, D$.

Из теоремы 5.1 вытекает следующее утверждение [10].

ТЕОРЕМА 5.2. *Предположим, что даны вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и число $h \in \{1, 2, 3, \dots\}$, удовлетворяющие условиям (5.16), и пусть $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$; пусть $P_k = P_{\beta, h, \lambda, k}$ – отвечающие этим параметрам многогранники (5.17). При этих условиях справедливы следующие утверждения.*

1) *Для отклонений (5.18) выполняются неравенства*

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq h\gamma_k \quad (5.19)$$

с константами

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)c_k \quad \text{для } k = 1, \dots, D, \quad (5.20)$$

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad \text{для } k = 0, \quad (5.21)$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$.

2) *Для отклонений выполняется также общее неравенство*

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq hD. \quad (5.22)$$

Как уже отмечалось, многогранники P_k , определенные в (5.14), являются $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, а из теоремы 5.2 следует, что относительно сдвига S_β многогранники P_k , если их рассматривать как области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, являются множествами ограниченного остатка. По аналогии с определением (1.2) многогранники, обладающие указанными свойствами, естественно назвать *многогранниками ограниченного остатка* или, кратко, *BR-многогранниками*.

Для произвольной размерности D многогранники P_k с номерами $k = 1, \dots, D$ (по своей конструкции – параллелепипеды, натянутые на векторы (5.10)) представляют собою простейший вид BR-многогранников. Многогранник P_0 также может быть параллелепипедом в исключительном случае вектора $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, когда $\lambda = 1$. Если же $\lambda < 1$, то P_0 – параллелеоэдр с числом вершин $\sharp V(P_0) = 2^{D+1} - 2$.

Заметим, что приведенное во введении неравенство (1.5) вытекает из неравенства (5.22).

Далее мы предполагаем построить более сложные BR-множества, являющиеся объединением нескольких многогранников, каждый из которых уже не обязан быть BR-многогранником.

§ 6. Многоцветные стационарные разбиения торов

6.1. Вложения торов и торические обмотки. Определим вложение

$$\mathbb{R}^d \hookrightarrow \widehat{\mathbb{R}}^d \subseteq \mathbb{R}^D, \quad (6.1)$$

полагая $\widehat{x} = (x, 0)$ для $x \in \mathbb{R}^d$. Здесь считаем, что $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, где $D = d + d'$.

Поскольку кубическая решетка $\mathbb{Z}^D$ также разлагается в прямое произведение $\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^{d'}$, то вложение (6.1) можно факторизовать с помощью изоморфизма

$$x \bmod \mathbb{Z}^d \mapsto \widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^D \quad (6.2)$$

в виде вложения

$$\mathbb{T}^d \hookrightarrow \widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \quad (6.3)$$

тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ в тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$. Так определенное вложение (6.3) согласовано

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \hookrightarrow & \mathbb{T}^D \\ S_\alpha \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\widehat{\alpha}} \\ \mathbb{T}^d & \hookrightarrow & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (6.4)$$

с действием соответствующих сдвигов торов

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^d, \quad S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{x}) \equiv \widehat{x} + \widehat{\alpha} \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (6.5)$$

Укажем, что в (6.5) при определении сдвига S_α – в отличие от п. 2.1 – мы выбираем d -мерный вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$.

Тор меньшей размерности $\widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D$ будем называть *торической обмоткой* в $\mathbb{T}^D$. Из (6.3) и (6.4) следует, что торическая обмотка $\widehat{\mathbb{T}}^d$ является инвариантным множеством относительно сдвига $S_{\widehat{\alpha}}$:

$$S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) = \widehat{\mathbb{T}}^d. \quad (6.6)$$

Далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что вектор сдвига α тора $\mathbb{T}^d$ максимально иррациональный, т. е. $\text{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\mathbb{Z}^d) = d$.

6.2. Автоморфизмы тора $\mathbb{T}^D$. С помощью автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$ исходя из некоторой фиксированной обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d$ можно получить богатое семейство других торических обмоток на торе $\mathbb{T}^D$. Обозначим $\text{Aut } \mathbb{T}^D$ группу автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$. Эту группу можно разложить в прямое произведение ее некоммутативной подгруппы гиперболических автоморфизмов $\text{Aut}_h \simeq \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ и коммутативной подгруппы сдвигов тора $\text{Aut}_s \simeq \mathbb{T}^D$:

$$\text{Aut } \mathbb{T}^D \simeq \text{Aut}_h \times \text{Aut}_s.$$

Здесь $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$ обозначает *группу унимодулярных матриц*, или, иначе, матриц с целыми коэффициентами, имеющими определитель, равный ± 1 .

6.2.1. *Гиперболические автоморфизмы тора $\mathbb{T}^D$.* Любая матрица A из группы $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ задает автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ следующим образом:

$$A: \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D: \quad x^D \bmod \mathbb{Z}^D \mapsto Ax^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (6.7)$$

Это непосредственно вытекает из свойства $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ быть группой автоморфизмов кубической решетки $\mathbb{Z}^D$: для любого A из группы $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ отображение $x^D \mapsto Ax^D$ задает изоморфизм решетки $\mathbb{Z}^D$.

6.2.2. *Сдвиги тора $\mathbb{T}^D$.* Если элемент t^D принадлежит $\mathbb{T}^D$, то отвечающий ему автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ из подгруппы Aut_s будет обычным сдвигом тора

$$S_{t^D}: \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D: \quad x^D \mapsto x^D + t^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (6.8)$$

6.3. Согласованность сдвига S_α с автоморфизмами тора $\mathbb{T}^D$. Для произвольного преобразования $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$ обозначим через $A^\wedge$ отображение, действующее по правилу

$$A^\wedge \alpha = A\hat{\alpha}, \quad (6.9)$$

и определим вектор сдвига $\hat{\alpha}_A$ тора $\mathbb{T}^D$: $\hat{\alpha}_A \equiv A^\wedge \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$, полагая при этом, что вектор $\hat{\alpha}_A$ имеет вид

$$\hat{\alpha}_A = (\hat{\alpha}_{A,1}, \dots, \hat{\alpha}_{A,D}), \quad \text{где } 0 \leq \hat{\alpha}_{A,k} < 1. \quad (6.10)$$

При автоморфизме тора (6.7) преобразование сдвига $S_{\hat{\alpha}}$ переходит в преобразование $S_{\hat{\alpha}_A}$, что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^D & \xrightarrow[\sim]{A} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}} \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\hat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow[\sim]{A} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (6.11)$$

Из диаграммы (6.11) и коммутативности сдвигов $S_{t^D} \circ S_{\hat{\alpha}_A} = S_{\hat{\alpha}_A} \circ S_{t^D}$ получаем еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^D & \xrightarrow[\sim]{A_{t^D}} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}} \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\hat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow[\sim]{A_{t^D}} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (6.12)$$

где автоморфизм A_{t^D} тора $\mathbb{T}^D$ определяется как композиция

$$A_{t^D}(x^D) \equiv Ax^D + t^D \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (6.13)$$

6.4. Стационарные разбиения тора $\mathbb{T}^d$. Пусть $t = t^D$ и

$$\hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d = A_t^\wedge \mathbb{T}^d = S_t A \hat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \quad (6.14)$$

– торическая обмотка, где полагаем $A_t^\wedge(x) = A_t(\hat{x})$. Из диаграммы (6.12) и инвариантности (6.6) торической обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ вытекает инвариантность

$$S_{\hat{\alpha}_A}(\widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d) = \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \quad (6.15)$$

обмотки (6.14), при этом, как нетрудно убедиться, имеют место следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d & \xrightarrow[\sim]{A_t^\wedge} & \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \\ S_\alpha \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\hat{\alpha}_A} \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow[\sim]{A_t^\wedge} & \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \end{array} \quad (6.16)$$

и

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d & \xhookrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \\ S_{\hat{\alpha}_A} \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\hat{\alpha}_A} \\ \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d & \xhookrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (6.17)$$

Здесь id – тождественное вложение обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d$ в содержащий ее тор $\mathbb{T}^D$.

Пусть вектор сдвига α иррационален. Для таких α в [14] доказано, что существуют преобразования A из группы $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$, удовлетворяющие условию

$$\sigma(\hat{\alpha}_A) < 1, \quad (6.18)$$

где $\sigma(\hat{\alpha}_A) = \hat{\alpha}_{A,1} + \dots + \hat{\alpha}_{A,D}$ для вектора (6.10). Неравенство (6.18) означает, что $\hat{\alpha}_A$ принадлежит множеству параметров (4.10):

$$\hat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{<1}. \quad (6.19)$$

Определим вектор $\mathbf{c}$ равенством

$$\hat{\alpha}_A = \lambda \mathbf{c}, \quad \text{где } \sigma(\hat{\alpha}_A) < \lambda \leq 1. \quad (6.20)$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{c}$, так же как и вектор $\hat{\alpha}_A$, удовлетворяет условию

$$\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}. \quad (6.21)$$

Для таких векторов $\mathbf{c}$ по схеме (4.24) мы можем построить каноническое разбиение тора $\mathbb{T}^D$:

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D. \quad (6.22)$$

Используя разбиение (6.22) и вложение (6.17), можно естественным образом задать разбиение торической обмотки $\widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \subset \mathbb{T}^D$, полагая

$$\widehat{\mathbb{T}}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{A_t,0}^d \sqcup \widehat{\mathbb{T}}_{A_t,1}^d \sqcup \dots \sqcup \widehat{\mathbb{T}}_{A_t,D}^d, \quad (6.23)$$

где $\widehat{\mathbb{T}}_{A_t,k}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \cap \mathbb{T}_k^D$ и множества $\mathbb{T}_k^D$ взяты из разбиения (6.22).

Теперь с помощью изоморфизма (6.2) мы можем перенести разбиение (6.23) обмотки $\widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d$ на изоморфный ей тор $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d = \mathbb{T}_{A_t, 0}^d \sqcup \mathbb{T}_{A_t, 1}^d \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}_{A_t, D}^d. \quad (6.24)$$

Разбиение $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ назовем *стационарным* разбиением тора $\mathbb{T}^d$. Такое название обусловлено тем, что в п. 8.3 мы определим другие – так называемые динамические – разбиения.

6.5. Распределение точек орбит на торе $\mathbb{T}^D$: общий случай. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) = \#\{j; S_{\widehat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D; 0 \leq j < i\} \quad (6.25)$$

для сдвига тора $S_{\widehat{\beta}_A}$ на вектор $\widehat{\beta}_A = A^\wedge \beta$. Здесь x_0^D – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$ и

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d), \quad (6.26)$$

где h – произвольное натуральное число и l^d принадлежит решетке $\mathbb{Z}^D$. Введем обозначение

$$\delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) = \mathbf{r}_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) - i\widehat{\alpha}_{A, k}, \quad k = 0, 1, \dots, D, \quad (6.27)$$

для отклонения распределения точек орбиты $\text{Orb}_{S_{\widehat{\beta}_A}}(x_0)$ относительно области $\mathbb{T}_k^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, где согласно (6.19) координаты вектора $\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A, 1}, \dots, \widehat{\alpha}_{A, D})$ удовлетворяют условиям

$$\widehat{\alpha}_{A, 1} + \cdots + \widehat{\alpha}_{A, D} < 1, \quad \widehat{\alpha}_{A, k} > 0. \quad (6.28)$$

Аналогично тому, как это было сделано в теореме 3.3, дополнительно определяем нулевую координату:

$$\widehat{\alpha}_{A, 0} = 1 - \widehat{\alpha}_{A, 1} - \cdots - \widehat{\alpha}_{A, D} = 1 - \sigma(\widehat{\alpha}_A). \quad (6.29)$$

Из (6.28) следует, что $\widehat{\alpha}_{A, 0} > 0$. Тогда согласно теореме 5.1 для отклонений (6.27) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad (6.30)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ в силу (5.6) и (5.7) вычисляются по следующим формулам:

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)c_k \quad \text{для } k = 1, \dots, D, \quad (6.31)$$

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad \text{для } k = 0, \quad (6.32)$$

где вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$ определен в (6.20). Из формул (6.31) и (6.32) вытекает грубое неравенство

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) < D \quad (6.33)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$.

6.6. Отклонения на $\mathbb{T}^d$: стационарный случай. Выберем произвольную начальную точку x_0^d на торе $\mathbb{T}^d$ и для стационарного разбиения $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ из (6.15) определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \#\{j; S_{\beta}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_{A_t, k}^D; 0 \leq j < i\}, \quad (6.34)$$

а также отклонение

$$\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) - i \hat{\alpha}_{A, k}, \quad k = 0, 1, \dots, D, \quad (6.35)$$

распределения точек орбиты $\text{Orb}_{S_{\beta}}(x_0^d)$ относительно области $\mathbb{T}_{A_t, k}^D$ из разбиения тора $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$, определенного в (6.24).

ТЕОРЕМА 6.1. 1) Пусть параметр $\mathbf{c}$ определен равенством (6.20), где $\hat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ для некоторого преобразования $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$. Тогда для отклонений (6.35) имеют место неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| \leq c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})h, \quad k = 0, 1, \dots, D, \quad (6.36)$$

где константы $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ определены в (6.31) и (6.32).

2) При тех же условиях, независимо от выбора параметра $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{< 1}$, выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| < Dh, \quad k = 0, 1, \dots, D. \quad (6.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор сдвига $\hat{\beta}_A$ определен согласно (6.10). Так как по условию $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, где $l^d \in \mathbb{Z}^D$, то обмотка $\hat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ инвариантна относительно сдвига $S_{\hat{\beta}}: S_{\hat{\beta}}(\hat{\mathbb{T}}^d) = \hat{\mathbb{T}}^d$. Отсюда следует инвариантность обмотки (6.14):

$$S_{\hat{\beta}_A}(\hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d) = \hat{\mathbb{T}}_{A_t}^d. \quad (6.38)$$

Пусть $x_0^D = A_t^{\wedge} x_0^d$. В соответствии с коммутативной диаграммой (6.17) имеем согласование

$$S_{\hat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \hat{\mathbb{T}}_{A_t, k}^d \iff S_{\hat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D,$$

а в силу диаграммы (6.16) и инвариантности (6.38) – еще одно согласование:

$$S_{\hat{\beta}}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_k^d \iff S_{\hat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \hat{\mathbb{T}}_{A_t, k}^d.$$

Отсюда для любого k выводим равносильность

$$S_{\hat{\beta}}^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_{A_t, k}^d \iff S_{\hat{\beta}_A}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D. \quad (6.39)$$

Из определений (6.34), (6.35) и согласования (6.39) для любого i вытекает равенство отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \delta_k(i; \hat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) \quad (6.40)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. Отсюда и из теоремы 5.1 следуют оценки (6.36) и (6.37). Теорема доказана.

С помощью коммутативной диаграммы (6.17) определим подмножество $\widehat{T}_{A_t}^d$ из перекладывающейся торической развертки $T_{\mathbf{c}, \lambda}^D$, отвечающее при изоморфизме

$$\widehat{T}_{A_t}^d \xrightarrow[\sim]{\text{mod } \mathbb{Z}^D} \widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d \quad (6.41)$$

обмотке $\widehat{\mathbb{T}}_{A_t}^d$ тора $\mathbb{T}^D$, определенной в (6.14). Пусть $\mathcal{P}_{A_t}^d$ обозначает замыкание множества $\widehat{T}_{A_t}^d$. Поскольку линейное отображение A_t сохраняет размерность, то множество $\mathcal{P}_{A_t}^d$ имеет размерность

$$\dim \mathcal{P}_{A_t}^d = d. \quad (6.42)$$

Согласно определению (4.21) перекладывающейся торической развертки $T_{\mathbf{c}, \lambda}^D$ ее замыкание есть вытянутый параллелепипед $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ из (4.22), представляющий собою многогранник размерности D . Отсюда и из (6.42) заключаем, что множество $\mathcal{P}_{A_t}^d$ является объединением конечного числа многогранников размерности d .

Используя данный факт, получаем следующее усиление неравенства (6.36) из теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, где h – произвольное натуральное число и $l^d \in \mathbb{Z}^d$. Предположим, что преобразование $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ таково, что $\widehat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{<1}$, где $\widehat{\alpha}_A$ – вектор сдвига (6.10), и пусть вектор $\mathbf{c}$ определен равенством $\widehat{\alpha}_A = \lambda \mathbf{c}$, где $\sigma(\widehat{\alpha}_A) < \lambda \leq 1$. Тогда для отклонений (6.40) выполняется неравенство

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| \leq c_k(\mathcal{P}_{A_t}^d)h \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (6.43)$$

с константой $c_k(\mathcal{P}_{A_t}^d)$, определенной в (5.5):

$$c_k(\mathcal{P}_{A_t}^d) = \max_{v \in V(\mathcal{P}_{A_t}^d)} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathcal{P}_{A_t}^d)} \mathbf{e}_k \cdot v.$$

Здесь $V(\mathcal{P}_{A_t}^d)$ обозначает множество вершин объединения многогранников $\mathcal{P}_{A_t}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (6.43) вытекает из неравенства (6.36) и формулы (5.5) для константы $c_k(\mathcal{P}_{A_t}^d)$.

§ 7. Свойства стационарных разбиений

7.1. Сдвиги стационарных разбиений.

ЛЕММА 7.1. Пусть $t'^D = t^D + s^D$ – новый сдвиг тора $\mathbb{T}^D$, где $s^D = A^\wedge t^d$. Тогда разбиение $\mathbb{T}_{A_{t', D}, \mathbf{c}, \lambda}^d$ получается из разбиения $\mathbb{T}_{A_{t, D}, \mathbf{c}, \lambda}^d$ его сдвигом на вектор t^D :

$$S_{t^d}: \mathbb{T}_{A_{t, D}, \mathbf{c}, \lambda}^d \longrightarrow \mathbb{T}_{A_{t', D}, \mathbf{c}, \lambda}^d. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что сложение векторов $t^D + s^D$ происходит в аддитивной подгруппе $A^\wedge \mathbb{T}^d \subseteq \mathbb{T}^D$. Поэтому соответствие (7.1) вытекает из следующего сравнения для разбиений:

$$\mathbb{T}_{A_{t, D}, \mathbf{c}, \lambda}^d + t^d \equiv \mathbb{T}_{A_{t', D}, \mathbf{c}, \lambda}^d \pmod{\mathbb{Z}^d}.$$

Лемма доказана.

Если при сдвиге S_{t^d} тора $\mathbb{T}^d$ два его разбиения $\mathbb{T}_{1*}^d$ и $\mathbb{T}_{2*}^d$ связаны условием

$$\mathbb{T}_{1*}^d + t^d \equiv \mathbb{T}_{2*}^d \pmod{\mathbb{Z}^d}, \quad (7.2)$$

то такие разбиения назовем *эквивалентными* относительно сдвигов тора $\mathbb{T}^d$ и будем писать $\mathbb{T}_{1*}^d \stackrel{S}{\sim} \mathbb{T}_{2*}^d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Чтобы с точностью до сдвига (7.2) получить все эквивалентные разбиения тора $\mathbb{T}^d$ вида $\mathbb{T}_{A^D, \mathbf{c}, \lambda}^d$, определенные в (6.24), достаточно выбирать векторы $t^D \in \mathbb{T}^D$ сдвига тора $\mathbb{T}^D$ из факторгруппы*

$$\mathbb{T}^D / A^\wedge \mathbb{T}^d \simeq \mathbb{T}^{d'}, \quad (7.3)$$

где $d + d' = D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение (6.9) отображения $A^\wedge$, получаем следующий изоморфизм:

$$\mathbb{T}^D / A^\wedge \mathbb{T}^d \simeq A^{-1} \mathbb{T}^D / \widehat{\mathbb{T}}^d. \quad (7.4)$$

Поскольку $A^{-1} \mathbb{T}^D = \mathbb{T}^D$ в силу условия $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, то

$$A^{-1} \mathbb{T}^D / \widehat{\mathbb{T}}^d \simeq \mathbb{T}^D / \widehat{\mathbb{T}}^d. \quad (7.5)$$

Тор $\mathbb{T}^D$ разлагается в прямое произведение $\widehat{\mathbb{T}}^d \times \mathbb{T}^{\vee d'}$, где $\mathbb{T}^{\vee d'} \simeq \mathbb{T}^{d'}$. Следовательно, $\mathbb{T}^D / \widehat{\mathbb{T}}^d \simeq \mathbb{T}^{\vee d'} \simeq \mathbb{T}^{d'}$, и, значит, в силу (7.4) и (7.5) справедлив изоморфизм (7.3). Применяя лемму 7.1, завершаем доказательство предложения.

7.2. Инварианты стационарных разбиений.

ЛЕММА 7.2. *Для любого $\alpha \in \mathbb{T}^d$ такого, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) = d$ и $\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \dots, \widehat{\alpha}_{A,D})$ принадлежит области $\mathbf{C}_{<1}$, множества $\mathbb{T}_{A^t, k}^d$, образующие разбиение $\mathbb{T}_{A^t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ из (6.24), имеют объемы*

$$\mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}_{A^t, k}^d = \widehat{\alpha}_{A, k} \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (7.6)$$

где $\mathrm{vol}_{\mathbb{T}^d}$ обозначает объем на торе $\mathbb{T}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию вектор сдвига α имеет максимальный ранг $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) = d$ (см. определение (2.13)). В этом случае

$$\dim \mathrm{Orb}_{S_\alpha}(x_0^d)^c = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) = d.$$

Тогда из определения отклонений (6.35) и теоремы 6.1 вытекает нужная формула (7.6). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Из леммы 7.2 и неравенств (6.28) следует, что координаты $\widehat{\alpha}_{A, k}$ вектора сдвига $\widehat{\alpha}_A$ можно рассматривать как частоты попадания точек S_α -орбит в области $\mathbb{T}_{A^t, k}^d \subset \mathbb{T}_{A^t, \mathbf{c}, \lambda}^d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Пусть даны два разбиения (6.24) тора $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}_{A,c,\lambda}^d = \mathbb{T}_{A,0}^d \sqcup \mathbb{T}_{A,1}^d \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}_{A,D}^d, \quad \mathbb{T}_{A_t,c,\lambda}^d = \mathbb{T}_{A_t,0}^d \sqcup \mathbb{T}_{A_t,1}^d \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}_{A_t,D}^d,$$

где $t = t^D \in \mathbb{T}^D$ – произвольный вектор сдвига. Тогда объемы областей, образующих данные разбиения, инвариантны относительно сдвигов S_t тора $\mathbb{T}^D$:

$$\text{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}_{A_t,k}^d = \text{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}_{A,k}^d \quad (7.7)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6.10) следует, что частоты $\hat{\alpha}_{A,k}$, т.е. координаты вектора $\hat{\alpha}_A$, не зависят от вектора сдвига t тора $\mathbb{T}^D$. Из данного факта и формулы (7.6) вытекают равенства (7.7). Предложение доказано.

7.3. Частотная универсальность стационарных разбиений. Назовем произвольный вектор $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_D)$ из $\mathbb{R}_+^{D+1}$ частотным распределением точек орбиты по некоторым $D+1$ областям, если он удовлетворяет следующим условиям:

$$\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_D = 1, \quad \nu_j > 0, \quad j = 0, 1, \dots, D. \quad (7.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ иррационален, т.е. $\text{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha) > 0$. Тогда для любого частотного распределения $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_D)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое преобразование $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$, что вектор $\hat{\alpha}_A$ принадлежит $\mathbf{C}_{<1}$, или, другими словами, $\sigma(\hat{\alpha}_A) < 1$, и области $\mathbb{T}_{A_t,k}^d$ разбиения $\mathbb{T}_{A_t,c,\lambda}^d$ (см. (6.24)) имеют объемы, обладающие свойством

$$|\text{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}_{A_t,k}^d - \nu_k| < \varepsilon \quad (7.9)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию вектор сдвига α – иррациональный. В [14] для таких векторов α доказано существование преобразования $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ такого, что вектор $\hat{\alpha}_A$ принадлежит $\mathbf{C}_{<1}$ и выполняются неравенства

$$|\hat{\alpha}_{A,k} - \nu_k| < \frac{\varepsilon}{D} \quad (7.10)$$

для $k = 1, \dots, D$. Отсюда и из формул (7.6) следуют неравенства (7.9) для таких k . Для $k = 0$ неравенство (7.9) также будет выполняться – в силу равенства (6.29) для $\hat{\alpha}_{A,0}$ и аналогичного равенства для частоты ν_0 . Предложение доказано.

Предложение 7.3 означает, что стационарные разбиения $\mathbb{T}_{A_t,c,\lambda}^d$ обладают свойством частотной универсальности, т.е. выполняются неравенства (7.9) и (7.10). Далее мы докажем чисто алгебраическое утверждение (предложение 7.4), которое позволит нам ответить на вопрос, какие в точности частотные распределения $\nu \in \mathbb{R}_+^{D+1}$ реализуются разбиениями вида $\mathbb{T}_{A_t,c,\lambda}^d$ или, другими словами, когда левые части неравенств (7.9) и (7.10) обращаются в нуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Пусть $\alpha^d = (\alpha_1^d, \dots, \alpha_d^d) \in \mathbb{R}^d$, $\alpha^D = (\alpha_1^D, \dots, \alpha_D^D) \in \mathbb{R}^D$, где $d \leq D$, – любые фиксированные векторы, и пусть $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha^d) = d$. Тогда следующие два утверждения равносильны:

1) для некоторого $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ выполнено сравнение

$$\alpha^D \equiv A\hat{\alpha}^d \pmod{\mathbb{Z}^D}; \quad (7.11)$$

2) определенные после формулы (2.13) модули $M(\alpha^d)$ и $M(\alpha^D)$ совпадают:

$$M(\alpha^D) = M(\alpha^d). \quad (7.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения модулей $M(\alpha^d)$, $M(\alpha^D)$ (см. (2.13)) видно, что сравнение (7.11) влечет за собой равенство (7.12).

Докажем обратную импликацию: (7.12) $\implies$ (7.11). Прежде всего заметим, что из (7.12) вытекает существование матрицы $B_1 \in \text{Mat}_{d,D}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$\alpha^d = B_1 \alpha^D \quad (7.13)$$

(здесь векторы α^d и α^D считаются столбцами). Перепишем равенство (7.13) в виде

$$\alpha_U^d = B_2 \alpha_V^D, \quad (7.14)$$

где $U \in \text{GL}_d(\mathbb{Z})$, $V \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$, $\alpha_U^d = U \alpha^d$, $\alpha_V^D = V^{-1} \alpha^D$ и $B_2 = U B_1 V$. Подберем матрицы U , V так, чтобы матрица B_2 стала приведенной:

$$B_2 = (\mathcal{D} | 0), \quad (7.15)$$

где

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_d \end{pmatrix}$$

– диагональная матрица с целыми элементами $\delta_1, \dots, \delta_d$. Обозначим $\alpha_V^{D,d}$ вектор из первых d координат вектора α_V^D . Тогда из (7.14) и (7.15) получаем равенство

$$\alpha_U^d = \mathcal{D} \alpha_V^{D,d}, \quad (7.16)$$

или, в координатном виде,

$$\alpha_{U,1}^d = \delta_1 \alpha_{V,1}^D, \quad \dots, \quad \alpha_{U,d}^d = \delta_d \alpha_{V,d}^D. \quad (7.17)$$

Отсюда получаем следующую цепочку соотношений:

$$M(\alpha^D) = M(\alpha_V^D) \supseteq M(\alpha_V^{D,d}) \supseteq M(\alpha_U^d) = M(\alpha^d). \quad (7.18)$$

Сопоставляя (7.18) с условием (7.12), приходим к равенству модулей

$$M(\alpha_V^{D,d}) = M(\alpha_U^d), \quad (7.19)$$

и, следовательно, между рангами модулей из (7.18) существуют зависимости

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha_V^{D,d}) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha_U^d) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha) = d + 1. \quad (7.20)$$

Из равенств (7.17), (7.19) и определения модулей после формулы (2.13) следует, что

$$\mathbb{Z}[1, \alpha_{V,1}^D, \dots, \alpha_{V,d}^D] = \mathbb{Z}[1, \delta_1 \alpha_{V,1}^D, \dots, \delta_d \alpha_{V,d}^D], \quad (7.21)$$

а из максимальной ранга $\text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha_V^{D,d}) = d + 1$, вытекающей из (7.20), получаем, что $\delta_1 \neq 0, \dots, \delta_d \neq 0$ и $\alpha_{V,1}^D \neq 0, \dots, \alpha_{V,d}^D \neq 0$. Теперь можем записать очевидные равенства

$$\alpha_{V,k}^D = b_k \delta_k \alpha_{V,k}^D \quad \text{для } k = 1, \dots, d \quad (7.22)$$

с рациональными коэффициентами $b_k = \frac{1}{\delta_k}$. В силу (7.21) существуют представления чисел $\alpha_{V,k}^D$ в виде линейных комбинаций чисел $1, \delta_1 \alpha_{V,1}^D, \dots, \delta_d \alpha_{V,d}^D$ с целыми коэффициентами. Но ввиду максимальной ранга $\text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha_V^{D,d}) = d + 1$ такие представления единственны. Отсюда и из (7.22) заключаем, что все числа δ_k равны ± 1 .

Итак, векторы α_U^d и α_V^D из (7.14) связаны соотношением

$$\alpha_U^d = (\mathcal{D}|0) \alpha_V^D, \quad \text{где } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Построим матрицу $W = \begin{pmatrix} \mathcal{D} & 0 \\ W_1 & E_{d'} \end{pmatrix}$ с произвольным блоком $W_1 \in \text{Mat}_{d',d}(\mathbb{Z})$. Используя W , можно поднять (7.23) до матричного равенства

$$\begin{pmatrix} \alpha_U^d \\ \alpha^{d'} \end{pmatrix} = W \alpha_V^D, \quad (7.24)$$

где $\alpha^{d'} = W_1 \alpha_V^{D,d} + \alpha_V^{D,d'}$ и $\alpha_V^{D,d'}$ обозначает вектор из последних d' коэффициентов вектора α_V^D . Из (7.12) и (7.18) следует равенство $M(\alpha_V^D) = M(\alpha_V^{D,d})$, поэтому существует целая матрица W_1 такая, что $\alpha^{d'} \in \mathbb{Z}^{d'}$.

Принимая во внимание (7.13) и используя матрицу W , приходим к равенству

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & E_{d'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^d \\ \alpha^{d'} \end{pmatrix} = W V^{-1} \alpha^D. \quad (7.25)$$

Если обозначить $A = V W^{-1} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & E_{d'} \end{pmatrix}$, то равенство (7.25) примет вид

$$\alpha^D = A \begin{pmatrix} \alpha^d \\ \alpha^{d'} \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} \alpha^d \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (7.26)$$

С использованием вложения (6.1) сравнение из (7.26) можно переписать в виде $\alpha^D \equiv A \hat{\alpha}^d \pmod{\mathbb{Z}^D}$, а поскольку из предыдущих построений следует, что матрица A принадлежит группе $\text{GL}_D(\mathbb{Z})$, приходим к условию (7.11). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть дан вектор сдвига $\alpha = \alpha^d$ такой, что $\text{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha^d) = d \geq 1$. В этом случае для любого частотного распределения ν , удовлетворяющего условию (7.8), найдется такое преобразование $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$, что области $\mathbb{T}_{A_t,k}^d$ любого разбиения $\mathbb{T}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^d$ (см. (6.24)) имеют объемы

$$\text{vol}_{\mathbb{T}^d} \mathbb{T}_{A_t,k}^d = \nu_k \quad (7.27)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$, или, что равносильно, имеют место равенства

$$\hat{\alpha}_{A,k} = \nu_k, \quad (7.28)$$

где $\hat{\alpha}_{A,k}$ – координаты (6.10) вектора сдвига $\hat{\alpha}_A$, тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$M(\alpha) = M(\nu), \quad (7.29)$$

где по аналогии с (2.13) полагаем $M(\nu) = \mathbb{Z}[1, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_D]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Имеем $M(\alpha) = M(\hat{\alpha}_A)$ и, по условию (7.28), $M(\hat{\alpha}_A) = M(\nu)$, что доказывает равенство (7.29). Докажем достаточность. Рассмотрим вектор $\alpha^D = (\nu_1, \dots, \nu_D)$. Из определения частотного распределения (см. формулу (7.8)) следует, что $\alpha^D \in \mathbf{C}_{<1}$. Согласно условию (7.29) имеем $M(\alpha^D) = M(\alpha^d)$, отсюда и из предложения 7.4 получаем, что $\alpha^D \equiv A\hat{\alpha}^d \pmod{\mathbb{Z}^D}$ для некоторого преобразования $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$. Из данного сравнения и включения $\alpha^D \in \mathbf{C}_{<1}$ следует равенство $\alpha^D = \hat{\alpha}_A^d$ для вектора (6.10). Отсюда выводим (7.28). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Для произвольного вектора сдвига $\alpha^D \in \mathbb{R}^D$, имеющего ранг $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D) = d \geq 1$, найдется такое преобразование $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, что

$$\mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0)^c \equiv A\hat{\mathbb{T}}^d \pmod{\mathbb{Z}^D} \quad (7.30)$$

и, следовательно, для размерности орбиты выполняется равенство

$$\dim \mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0)^c = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D), \quad (7.31)$$

т. е. в нашем случае $\dim \mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0)^c = d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D) = d$. Отсюда следует существование вектора $\alpha^d \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющего условиям

$$M(\alpha^d) = M(\alpha^D), \quad \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\alpha^d) = d. \quad (7.32)$$

Отсюда и из предложения 7.4 получаем $\alpha^D \equiv A\hat{\alpha}^d \pmod{\mathbb{Z}^D}$ для некоторого $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$. Поэтому

$$\mathrm{Orb}_{S_{\alpha^D}}(0) \equiv A\widehat{\mathrm{Orb}_{S_{\alpha^d}}}(0) \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (7.33)$$

Поскольку $\mathrm{Orb}_{S_{\alpha^d}}(0)^c = \mathbb{T}^d$, то отсюда и из (7.33) выводим (7.30). Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Следствие 7.2 показывает, что вложения торов и торические обмотки из п. 6.1 представляют собою общую конструкцию для всех сдвигов S_{α^D} тора $\mathbb{T}^D$ при условии, что $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha^D) = d$, где $d \leq D$.

§ 8. Динамические разбиения тора

8.1. Двойственное вложение торов. Определим для вложения (6.1) двойственное ему вложение

$$\mathbb{R}^{d'} \hookrightarrow \mathbb{R}^{d'^\vee} \subseteq \mathbb{R}^D, \quad (8.1)$$

полагая $y^\vee = (0, y)$ для $y \in \mathbb{R}^{d'}$. Аналогично (6.2) вложение (8.1) можно факторизовать с помощью отображения

$$y \bmod \mathbb{Z}^{d'} \mapsto y^\vee \bmod \mathbb{Z}^D$$

в виде вложения

$$\mathbb{T}^{d'} \hookrightarrow \mathbb{T}^{d'^\vee} \subseteq \mathbb{T}^D \quad (8.2)$$

тора $\mathbb{T}^{d'} = \mathbb{R}^{d'} / \mathbb{Z}^{d'}$ в тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$. При этом вложение (8.2) согласуется с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^{d'} & \xhookrightarrow{\quad \wedge \quad} & \mathbb{T}^D \\ S_\rho \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\rho^\vee} \\ \mathbb{T}^{d'} & \xhookrightarrow{\quad \wedge \quad} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (8.3)$$

с действием соответствующих сдвигов торов

$$S_\rho(y) \equiv y + \rho \bmod \mathbb{Z}^{d'}, \quad S_{\rho^\vee}(y^\vee) \equiv y^\vee + \rho^\vee \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (8.4)$$

8.2. Расслоенные торические обмотки. В дальнейшем нас будет интересовать исключительно случай, когда вектор сдвига ρ из (8.4) рационален: $\rho \in \mathbb{Q}^{d'}$. При таком выборе орбита $\text{Orb}_{S_\rho}(y_0^{d'})$ любой начальной точки $y_0^{d'} \in \mathbb{T}^{d'}$ является периодической и ее *период* p не зависит от выбора точки $y_0^{d'}$.

Определим прямое произведение $S_\alpha \times S_\rho$ сдвигов тора (6.5) и (8.4):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^{d'} & \xrightarrow{\quad \wedge \times \vee \quad} & \mathbb{T}^D \\ S_\alpha \times S_\rho \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\hat{\alpha}\rho} \\ \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^{d'} & \xrightarrow{\quad \wedge \times \vee \quad} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (8.5)$$

где

$$\hat{\alpha}\rho = \alpha \times \rho = \hat{\alpha} + \rho^\vee. \quad (8.6)$$

Рассмотрим орбиту

$$\hat{\mathbb{T}}_\rho^d = \text{Orb}_{S_{\hat{\alpha}\rho}}(\hat{\mathbb{T}}^d) \subset \mathbb{T}^D \quad (8.7)$$

торической обмотки $\hat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ относительно сдвига на вектор (8.6). Поскольку согласно (6.6) имеем $S_{\hat{\alpha}}(\hat{\mathbb{T}}^d) = \hat{\mathbb{T}}^d$, то $\text{Orb}_{S_{\hat{\alpha}\rho}}(\hat{\mathbb{T}}^d) = \text{Orb}_{S_{\rho^\vee}}(\hat{\mathbb{T}}^d)$. Поэтому орбита (8.7) имеет вид

$$\hat{\mathbb{T}}_\rho^d = \hat{\mathbb{T}}_\rho^d(0) \sqcup \hat{\mathbb{T}}_\rho^d(1) \sqcup \dots \sqcup \hat{\mathbb{T}}_\rho^d(p-1), \quad (8.8)$$

т. е. представляет собою объединение p непересекающихся связных торических обмоток размерности d , где для любого $j = 0, 1, \dots, p-1$ через $\widehat{\mathbb{T}}_\rho^d(j) = S_{\rho^\vee}^j(\widehat{\mathbb{T}}^d)$ мы обозначили связную обмотку, получающуюся сдвигом обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ на вектор $j\rho^\vee \bmod \mathbb{Z}^D$. Используя изоморфизм (8.5), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{T}}_\rho^d & \xrightarrow{\text{pr}} & \widehat{\mathbb{T}}^d \\ S_{\widehat{\alpha}_\rho} \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\widehat{\alpha}} \\ \widehat{\mathbb{T}}_\rho^d & \xrightarrow{\text{pr}} & \widehat{\mathbb{T}}^d \end{array} \quad (8.9)$$

Здесь pr обозначает проекцию

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{\text{pr}} \widehat{\mathbb{T}}^d: (x, y) \bmod \mathbb{Z}^D \mapsto \text{pr}(x, y) = x \bmod \mathbb{Z}^d. \quad (8.10)$$

8.3. Определение динамического разбиения тора $\mathbb{T}^d$. Определим вектор сдвига $\widehat{\alpha}_{\rho,A}$ тора $\mathbb{T}^D$:

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} \equiv A\widehat{\alpha}_\rho \bmod \mathbb{Z}^D, \quad (8.11)$$

где $\widehat{\alpha}_\rho$ – вектор (6.10), полагая при этом, что вектор $\widehat{\alpha}_{\rho,A}$ выбран в виде

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} = (\widehat{\alpha}_{\rho,A,1}, \dots, \widehat{\alpha}_{\rho,A,D}), \quad \text{где } 0 \leq \widehat{\alpha}_{\rho,A,k} < 1. \quad (8.12)$$

Пусть

$$\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t}^d = A_t \widehat{\mathbb{T}}_\rho^d \subseteq \mathbb{T}^D \quad (8.13)$$

– объединение p торических обмоток, получающихся из (8.8) с помощью изоморфизма $A_t = S_t A$. В силу (8.5) и (8.11) имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{T}}_\rho^d & \xrightarrow[A_t]{\sim} & \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t}^d \\ S_{\widehat{\alpha}_\rho} \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\widehat{\alpha}_{\rho,A}} \\ \widehat{\mathbb{T}}_\rho^d & \xrightarrow[A_t]{\sim} & \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t}^d \end{array} \quad (8.14)$$

и вложение

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t}^d & \xhookrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \\ S_{\widehat{\alpha}_\rho} \downarrow \sim & & \sim \downarrow S_{\widehat{\alpha}_\rho} \\ \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t}^d & \xhookrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (8.15)$$

Пусть для некоторого преобразования $A \in \text{GL}_D(\mathbb{Z})$ вектор сдвига (8.12) удовлетворяет условию

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} \in \mathbf{C}_{<1}. \quad (8.16)$$

Аналогично (6.20) определим вектор $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ равенством

$$\widehat{\alpha}_{\rho,A} = \lambda \mathbf{c}, \quad \text{где } \sigma(\widehat{\alpha}_{\rho,A}) < \lambda \leq 1. \quad (8.17)$$

По схеме (4.24) для так выбранных $\mathbf{c}$ и λ можно построить каноническое разбиение тора $\mathbb{T}^D$:

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}_D^D, \quad (8.18)$$

ограничение которого на множество (8.13) порождает разбиение

$$\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,0}^d \sqcup \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,1}^d \sqcup \cdots \sqcup \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,D}^d \quad (8.19)$$

на множества

$$\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,k}^d = \widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t}^d \cap \mathbb{T}_k^D. \quad (8.20)$$

Так определенное разбиение (8.19) представляет собою объединение разбиений p торических обмоток $\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t}^d$.

Биекция A_t из диаграммы (8.14) индуцирует на множестве $\widehat{\mathbb{T}}_{\rho}^d$, определенном в (8.7), разбиение

$$A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}^d = A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,0}^d \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,1}^d \sqcup \cdots \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,D}^d, \quad (8.21)$$

которое, в свою очередь, задает разбиения связных обмоток $\widehat{\mathbb{T}}_{\rho}^d(j) \subset \widehat{\mathbb{T}}_{\rho}^d$:

$$A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}^d(j) = A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,0}^d(j) \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,1}^d(j) \sqcup \cdots \sqcup A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,D}^d(j), \quad (8.22)$$

где

$$A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,k}^d(j) = A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,k}^d \cap \widehat{\mathbb{T}}_{\rho}^d(j). \quad (8.23)$$

Используя (8.22), зададим на торе $\mathbb{T}^d$ разбиения

$$\mathbb{T}_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}^d(j) = \mathbb{T}_{\rho,A_t,0}^d(j) \sqcup \mathbb{T}_{\rho,A_t,1}^d(j) \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}_{\rho,A_t,D}^d(j) \quad (8.24)$$

для $j = 0, 1, \dots, p-1$. В разбиении (8.24) каждая из областей $\mathbb{T}_{\rho,A_t,k}^d(j)$ определяется с помощью следующей биекции:

$$\mathbb{T}_{\rho,A_t,k}^d(j) \xrightarrow{\sim} \text{pr } A_t^{-1}\widehat{\mathbb{T}}_{\rho,A_t,k}^d(j), \quad (8.25)$$

где $\wedge$ – вложение тора $\mathbb{T}^d$ в тор $\mathbb{T}^D$, определенное в (8.2), и pr – проекция (8.10).

Пусть $k = 0, 1, \dots, D$. Будем называть периодическую последовательность разбиений

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\rho,A_t,k}^d(0) &\implies \mathbb{T}_{\rho,A_t,k}^d(1) \implies \cdots \implies \mathbb{T}_{\rho,A_t,k}^d(p-1) \\ &\implies \mathbb{T}_{\rho,A_t,k}^d(0) \implies \cdots \end{aligned} \quad (8.26)$$

динамическим разбиением $\mathcal{D}_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}^d$ тора $\mathbb{T}^d$. Его отличие от стационарного разбиения $\mathbb{T}_{\rho,\mathbf{c},\lambda}^d$ из (6.24) состоит в следующем: когда мы рассматриваем последовательность сдвигов S_{α}^j , то каждому шагу $j = 1, 2, 3, \dots$ отвечает свое разбиение $\mathbb{T}_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}^d(\bar{j})$ тора $\mathbb{T}^d$, где номер $\bar{j} = 0, 1, \dots, p-1$ определяется сравнением $\bar{j} \equiv j \pmod{p}$.

По определению последовательность (8.26) имеет период p . В следующем пункте будет выяснено, что в определении (8.26) порядок следования разбиений $\mathbb{T}_{\rho,A_t,\mathbf{c},\lambda}^d(j)$ играет существенную роль.

8.4. Отклонения на $\mathbb{T}^d$: динамический случай. Сначала рассмотрим тор $\mathbb{T}^d$. Для динамического разбиения $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ введем *считающие функции* следующим образом (ср. с определением (6.34)):

$$\mathbf{r}_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \#\{j; S_\alpha^j(x_0^d) \in \mathbb{T}_{\rho, A_t, k}^d(\bar{j}); 0 \leq j < i\}, \quad (8.27)$$

где x_0^d – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^d$. Пусть вектор сдвига $\hat{\alpha}_{\rho, A}$ имеет координаты $\hat{\alpha}_{\rho, A} = (\hat{\alpha}_{\rho, A, 1}, \dots, \hat{\alpha}_{\rho, A, D})$ (см. (8.12)). Тогда соответствующие разности

$$\delta_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \mathbf{r}_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) - i \hat{\alpha}_{\rho, A, k}, \quad k = 0, 1, \dots, D, \quad (8.28)$$

назовем *отклонениями* распределения точек орбиты $\text{Orb}_{S_\alpha}(x_0^d)$ относительно областей динамического разбиения $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ с номером k .

Будем говорить, что точка $x_j^d = S_\alpha^j(x_0^d)$ из S_α -орбиты $\text{Orb}_{S_\alpha}(x_0^d)$ имеет *цвет*

$$\text{col}(x_j^d) = k$$

относительно динамического разбиения $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$, если $x_j^d \in \mathbb{T}_{\rho, A_t, k}^d(\bar{j})$, где $k = 0, 1, \dots, D$ (см. (8.26)).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. В этих терминах $\mathbf{r}_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)$ равно количеству точек x_j^d , $0 \leq j < i$, имеющих цвет $\text{col}(x_j^d) = k$, а второе слагаемое $i \hat{\alpha}_{\rho, A, k}$ в правой части (8.28) есть ожидаемое среднее значение числа точек, принимающих данный цвет. Таким образом, тор $\mathbb{T}^d$ на каждом шаге j имеет свою окраску, определяемую динамическим разбиением $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$, и цвет точки x_j^d определяется не только ее местонахождением на торе $\mathbb{T}^d$, но зависит и от шага, или времени, j .

Переходя к тору $\mathbb{T}^D$, определим обычным способом считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \hat{\alpha}_{\rho, A}, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) = \#\{j; S_{\hat{\alpha}_{\rho, A}}^j(x_0^D) \in \mathbb{T}_k^D; 0 \leq j < i\} \quad (8.29)$$

для начальной точки

$$x_0^D = A_t \hat{x}_0^d = A_t^\wedge x_0^d \quad (8.30)$$

на торе $\mathbb{T}^D$ и отвечающее (8.29) отклонение

$$\delta_k(i; \hat{\alpha}_{\rho, A}, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) = \mathbf{r}_k(i; \hat{\alpha}_{\rho, A}, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) - i \hat{\alpha}_{\rho, A, k} \quad (8.31)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$, где $\hat{\alpha}_{\rho, A, k}$ – координаты (8.12) вектора сдвига $\hat{\alpha}_{\rho, A}$.

ТЕОРЕМА 8.1. 1) В условиях теоремы 6.2 для отклонений (8.31) имеют место неравенства

$$|\delta_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| \leq c_k(\mathbf{C}_\mathbf{c}) \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (8.32)$$

где константы $c_k(\mathbf{C}_\mathbf{c})$ определены в (6.31), (6.32).

2) Независимо от выбора параметра $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| < D \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D. \quad (8.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из диаграмм (8.9), (8.14) и (8.15) следует согласованность отклонений

$$\delta_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d) = \delta_k(i; \hat{\alpha}_{\rho, A}, x_0^D, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D),$$

откуда вытекают утверждения теоремы.

§ 9. Свойства динамических разбиений тора

Динамическое разбиение $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ представляет собою единую систему (8.26) – последовательность из p обычных стационарных разбиений $\mathbb{T}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d(j)$ тора $\mathbb{T}^d$. Далее мы увидим, что динамическое разбиение $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ обладает некоторыми новыми свойствами, отсутствующими у составляющих его стационарных разбиений $\mathbb{T}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d(j)$.

9.1. Множества ограниченного остатка. В нетривиальном случае, когда период p больше 1, множества $\mathbb{T}_{\rho, A_t, k}^d(j)$, $k = 0, 1, \dots, D$, образующие стационарное разбиение $\mathbb{T}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d(j)$, не являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S_α тора $\mathbb{T}^d$. Согласно теореме 8.1, таковой является только периодическая последовательность из p разбиений (8.26).

Если в последовательности (8.26) нециклической подстановкой σ переставить стационарные разбиения и, тем самым, соответствующим образом переставить разбиения, то для нового динамического разбиения $\sigma \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ теорема 8.1 уже не будет выполняться (см. пример из п. 10.3).

9.2. Частоты и объемы областей. Согласно теореме 8.1, частота ν_k , с которой точки x_j^d из орбиты $\text{Orb}_{S_\alpha}(x_0^d)$ принимают цвет $\text{col}(x_j^d) = k$, равна

$$\nu_k = \hat{\alpha}_{\rho, A, k}. \quad (9.1)$$

Но тогда из определений (8.29), (8.30) и теоремы 8.1 будет следовать формула

$$\frac{1}{p} (\text{vol } \mathbb{T}_{\rho, A_t, k}^d(0) + \text{vol } \mathbb{T}_{\rho, A_t, k}^d(1) + \dots + \text{vol } \mathbb{T}_{\rho, A_t, k}^d(p-1)) = \hat{\alpha}_{\rho, A, k}, \quad (9.2)$$

где $\text{vol} = \text{vol}_{\mathbb{T}^d}$ – объем на торе $\mathbb{T}^d$. Это означает, что в отличие от стационарных разбиений, когда

$$\text{vol } \mathbb{T}_{A_t, k}^d = \nu_k = \hat{\alpha}_{A, k}, \quad (9.3)$$

для динамических разбиений $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ лишь среднее значение (9.2) объема всех областей $\mathbb{T}_{\rho, A_t, k}^d(j)$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, равно частоте ν_k (см. рис. 3 в § 10).

9.3. Переход от вектора сдвига α к вектору β . Если заменить вектор сдвига α на вектор β , то неравенство (8.32) в теореме 8.1 в общем случае перестает быть верным. Указанное свойство отличает динамические разбиения $\mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$ от стационарных $\mathbb{T}_{A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d$. Однако при некоторых дополнительных ограничениях на знаменатель h в определении (6.26) вектора β неравенство (8.32) все же удается сохранить.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, где $l^d \in \mathbb{Z}^d$ и h удовлетворяет условию $h \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда если выполнены условия теоремы 6.2, то для k -отклонений (8.31) имеют место неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho, A_t, \mathbf{c}, \lambda}^d)| \leq c_k(C_{\mathbf{c}})h, \quad k = 0, 1, \dots, D. \quad (9.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (8.6) имеем $\widehat{\beta}_\rho = \widehat{\beta} + \rho^\vee$. Отсюда и из определения (8.7) следует, что множество $\widehat{\mathbb{T}}_\rho^d$ остается инвариантным и относительно действия сдвига $S_{\widehat{\beta}_\rho}: S_{\widehat{\beta}_\rho}(\widehat{\mathbb{T}}_\rho^d) = \widehat{\mathbb{T}}_\rho^d$, а следовательно, инвариантным будет и множество $\widehat{\mathbb{T}}_{\rho, A_t}^d$ из (8.13):

$$S_{\widehat{\beta}_\rho, A}(\widehat{\mathbb{T}}_{\rho, A_t}^d) = \widehat{\mathbb{T}}_{\rho, A_t}^d. \quad (9.5)$$

Чтобы получить неравенство (9.4), мы хотим применить теорему 5.1, доказательство которой, в свою очередь, основывается на одном сравнении, которое в нашем случае будет иметь вид

$$h\widehat{\beta}_{\rho, A} \equiv \widehat{\alpha}_{\rho, A} \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (9.6)$$

По условию $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, поэтому сравнение (9.6) равносильно более простому сравнению

$$h\widehat{\beta}_\rho \equiv \widehat{\alpha}_\rho \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (9.7)$$

Здесь $\widehat{\alpha}_\rho = \widehat{\alpha} + \rho^\vee$ и $\widehat{\beta}_\rho = \widehat{\beta} + \rho^\vee$ для вектора сдвига $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, определенного в (5.1). Имеем

$$h\widehat{\beta}_\rho \equiv h\widehat{\beta} + h\rho^\vee \equiv \widehat{\alpha} + \widehat{l}^D + h\rho^\vee \pmod{\mathbb{Z}^D},$$

где вектор $\widehat{l}^D$ принадлежит решетке $\mathbb{Z}^D$. Следовательно, (9.7) можно переписать в виде сравнения $h\rho^\vee \equiv \rho^\vee \pmod{\mathbb{Z}^D}$, справедливого в силу условия $h \equiv 1 \pmod{p}$, где $p\rho \in \mathbb{Z}^{d'}$, поскольку, в соответствии с соглашением из п. 8.2, p – период сдвига $S_{\rho^\vee}$ тора $\mathbb{T}^D$.

Теперь неравенства (9.4) вытекают из теоремы 5.1, инвариантности (9.5) и сравнения (9.6). Теорема доказана.

§ 10. Двумерные многоцветные разбиения тора

10.1. Перекладывающиеся торические развертки $T_{\mathbf{c}, \lambda}^3$. Согласно (4.5) в случае размерности $D = 3$ параллелепипед $\mathcal{C}$ натянут на векторы $\mathbf{e}_{1, \mathbf{c}}$, $\mathbf{e}_{2, \mathbf{c}}$, $\mathbf{e}_{3, \mathbf{c}}$, а вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}} = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C})$, определенный в (4.7), для $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ представляет собою ромбический додекаэдр, имеющий 14 вершин:

$$\begin{aligned} &0, & \mathbf{e}_0 - 2\mathbf{c}, \\ &\mathbf{e}_{k, \mathbf{c}}, \quad 1 \leq k \leq 3, & \mathbf{e}_{k, \mathbf{c}} + \mathbf{e}_{k', \mathbf{c}}, \quad 1 \leq k < k' \leq 3, \\ &\mathbf{e}_{k, \mathbf{c}} + \mathbf{c}, \quad 1 \leq k \leq 3, & \mathbf{e}_{k, \mathbf{c}} + \mathbf{e}_{k', \mathbf{c}} + \mathbf{c}, \quad 1 \leq k < k' \leq 3. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Пусть вектор сдвига α определен равенством $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leq 1$. Тогда ввиду (4.14) параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ допускает разбиение

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda} = \mathcal{P}_0^{\mathbf{c}} \cup \mathcal{P}_1^{\mathbf{c}} \cup \mathcal{P}_2^{\mathbf{c}} \cup \mathcal{P}_3^{\mathbf{c}}. \quad (10.2)$$

Здесь $\mathcal{P}_k^c$ – многогранники, однозначно определяемые условиями $0 \in \mathcal{P}_0^c$, $\mathbf{e}_k \in \mathcal{P}_k^c$ для $k = 1, 2, 3$. При этом многогранники $\mathcal{P}_k^c$ для $k = 1, 2, 3$ являются параллелепипедами, а $\mathcal{P}_0^c = \text{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C})$ является ромбическим додекаэдром, как и параллелоэдр $\mathcal{C}_c$. Поскольку точка $\omega = \mathbf{e}_0 - 2\mathbf{c} - \alpha$ является общей вершиной всех многогранников $\mathcal{P}_k^c$ из (10.2), то их можно явно задать следующим образом:

$$\mathcal{P}_k^c = \mathcal{C}_c \cap \mathbf{T}_k \quad \text{для всех } 0 \leq k \leq 3, \quad (10.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= T(\omega, \mathbf{c} - \mathbf{e}_1, \mathbf{c} - \mathbf{e}_2, \mathbf{c} - \mathbf{e}_3), & \mathbf{T}_1 &= T(\omega, \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{e}_2, \mathbf{c} - \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{T}_2 &= T(\omega, \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{e}_1, \mathbf{c} - \mathbf{e}_3), & \mathbf{T}_3 &= T(\omega, \mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{e}_1, \mathbf{c} - \mathbf{e}_2) \end{aligned} \quad (10.4)$$

– трехгранные углы с общей вершиной ω и лучами, определяемыми соответствующими векторами в (10.4).

Теперь, используя разбиение (10.2) и теорему 5.1, построим в пространстве $\mathbb{R}^3$ перекладывающуюся торическую развертку

$$T_{\mathbf{c},\lambda}^3 = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2 \sqcup \mathcal{P}_3 \quad (10.5)$$

с векторами перекладывания $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - \mathbf{e}_1$, $v_2 = \alpha - \mathbf{e}_2$, $v_3 = \alpha - \mathbf{e}_3$. Здесь $\mathcal{P}_k$ обозначает незамкнутый многогранник, состоящий из всех внутренних точек многогранника $\mathcal{P}_k^c$ и некоторых его граничных точек, определяемых через индекс i (см. (4.20)). Из i -алгоритма п. 4.5 следует, что грани определенной размерности либо целиком принадлежат многограннику $\mathcal{P}_k$, либо не пересекаются с ним. Так как в дальнейшем граничные точки многогранников $\mathcal{P}_k$ нам не понадобятся, то мы не будем их здесь явно описывать.

Пусть точка x принадлежит развертке $T_{\mathbf{c},\lambda}^3$ и не является граничной точкой ни одного из многогранников $\mathcal{P}_k^c$. Если при этом x принадлежит трехгранному углу $\mathbf{T}_k$, то в силу равенства (10.3) она принадлежит многограннику $\mathcal{P}_k$ и, значит, мы можем найти ее образ

$$S_v(x) = x + v_k \quad (10.6)$$

при перекладывании (4.16).

10.2. Двумерные стационарные разбиения. Пусть $d = 2$ и вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ имеет координаты, например, $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$. В качестве унимодулярной матрицы (6.9) выберем

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Для нее вектор

$$\hat{\alpha}_A = (\hat{\alpha}_{A,1}, \hat{\alpha}_{A,2}, \hat{\alpha}_{A,3}), \quad \text{где } 0 \leq \hat{\alpha}_{A,k} < 1, \quad (10.8)$$

удовлетворяющий сравнению $\hat{\alpha}_A \equiv A^{\wedge} \alpha \pmod{\mathbb{Z}^3}$, будет иметь координаты

$$\hat{\alpha}_{A,1} = 5 - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}, \quad \hat{\alpha}_{A,2} = -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \hat{\alpha}_{A,3} = -3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}. \quad (10.9)$$

Их приближенные значения с точностью до двух знаков после запятой таковы: $\hat{\alpha}_{A,1} \approx 0.12$, $\hat{\alpha}_{A,2} \approx 0.31$, $\hat{\alpha}_{A,3} \approx 0.14$.

Определим вектор $\mathbf{c}$ равенством $\hat{\alpha}_A = \lambda \mathbf{c}$, где $\lambda = 1$. Согласно (10.9), он удовлетворяет условию $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$. Поэтому для такого вытягивающего вектора $\mathbf{c}$ можно построить перекладывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{c},\lambda}^3$ из (10.5), а с ее помощью по схеме (4.24) можем определить каноническое разбиение

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^3 = \mathbb{T}_0^3 \sqcup \mathbb{T}_1^3 \sqcup \mathbb{T}_2^3 \sqcup \mathbb{T}_3^3 \quad (10.10)$$

тора $\mathbb{T}^3$. Используя изоморфизм (6.2), мы можем перенести разбиение (10.10) на тор $\mathbb{T}^2$ и построить на нем соответствующее стационарное разбиение (см. рис. 1)

$$\mathbb{T}_{A,\mathbf{c},\lambda}^2 = \mathbb{T}_{A,0}^2 \sqcup \mathbb{T}_{A,1}^2 \sqcup \mathbb{T}_{A,2}^2 \sqcup \mathbb{T}_{A,3}^2. \quad (10.11)$$

Рассмотрим теперь неоднородный случай: выберем вектор сдвига $t^3 = t = (t_1, t_2, t_3)$ с координатами $t_1 = 0.1$, $t_2 = 0.1$, $t_3 = 0$. Тогда для тех же α и A получаем еще одно стационарное разбиение тора $\mathbb{T}^2$ (см. рис. 2):

$$\mathbb{T}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^2 = \mathbb{T}_{A_t,0}^2 \sqcup \mathbb{T}_{A_t,1}^2 \sqcup \mathbb{T}_{A_t,2}^2 \sqcup \mathbb{T}_{A_t,3}^2. \quad (10.12)$$

В нашем случае вектор сдвига $t^3 = t$ не принадлежит факторгруппе $\mathbb{T}^3/A^\wedge \mathbb{T}^2$, поэтому разбиение $\mathbb{T}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^2$ не может быть получено из разбиения $\mathbb{T}_{A,\mathbf{c},\lambda}^2$ параллельным сдвигом тора $\mathbb{T}^2$. Это можно увидеть непосредственно, если сравнить рис. 1 и рис. 2. Однако эти разбиения согласно формуле (7.7) обладают общим свойством: их области с одинаковыми номерами имеют равные площади:

$$\text{sq } \mathbb{T}_{A_t,k}^2 = \text{sq } \mathbb{T}_{A,k}^2 = \hat{\alpha}_{A,k} \quad \text{при любом } t \in \mathbb{T}^3. \quad (10.13)$$

В п. 5.2 для размерности $d = 2$ мы нашли многоугольники ограниченного остатка: специальные параллелограммы и шестиугольники. Стационарные разбиения (10.11) и (10.12) значительно расширяют класс фигур ограниченного остатка. Например, область $\mathbb{T}_{A_t,2}^2$ (см. рис. 2) состоит из объединения параллелограмма, пятиугольника и двух треугольников, рассматриваемых по модулю $\mathbb{Z}^2$. Однако нужно заметить, что параллельными сдвигами они могут быть совмещены снова в один параллелограмм.

Для полученных разбиений оценим величины отклонений. Выберем начальную точку $x_0^2 = (0, 0)$ на торе $\mathbb{T}^2$ и для стационарного разбиения $\mathbb{T}_{A,\mathbf{c},\lambda}^2$ из (10.11) рассмотрим определенные в (6.35) отклонения

$$\delta_k(i; \alpha, x_0^2, \mathbb{T}_{A,\mathbf{c},\lambda}^2) = \mathbf{r}_k(i; \alpha, x_0^2, \mathbb{T}_{A,\mathbf{c},\lambda}^2) - i \hat{\alpha}_{A,k} \quad (10.14)$$

распределения точек орбиты $\text{Orb}_{S_\alpha}(x_0^2)$ относительно областей $\mathbb{T}_{A,k}^2$ из разбиения $\mathbb{T}_{A,\mathbf{c},\lambda}^2$. По теореме 5.1 для отклонений (10.14) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \alpha, x_0^2, \mathbb{T}_{A,\mathbf{c},\lambda}^2)| \leq c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}), \quad (10.15)$$

где $k = 0, 1, 2, 3$ и $i = 0, 1, 2, \dots$, с константами $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$, определенными в (6.31) и (6.32). Используя координаты (10.9) и равенство $\mathbf{c} = \hat{\alpha}_A$, находим для констант

$c_k(\mathcal{C}_c)$ их численные значения:

$$\begin{aligned} c_0(\mathcal{C}_c) &= -1 + 2\sqrt{2} < 1.9, & c_1(\mathcal{C}_c) &= 11 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{3} < 1.3, \\ c_2(\mathcal{C}_c) &= 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1.7, & c_3(\mathcal{C}_c) &= -5 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1.3. \end{aligned} \quad (10.16)$$

По теореме 6.1 отклонения $\delta_k(i; \alpha, x_0^2, \mathbb{T}_{A_t, c, \lambda}^2)$ для разбиения (10.11) имеют ограничения (10.15) с теми же самыми константами (10.16). Причем согласно предложению 7.2 этим же свойством будут обладать все разбиения вида (10.12) при любых сдвигах S_t тора $\mathbb{T}^3$ и для произвольных начальных точек $x_0^2 \in \mathbb{T}^2$.

При фиксированном векторе α выбор матрицы $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ однозначно определяет частоты $\hat{\alpha}_{A,k}$ в (10.14). Согласно следствию 7.1 любое частотное распределение $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbf{C}_{<1}^{D+1}$ реализуется как $\nu_k = \hat{\alpha}_{A,k}$, $k = 0, 1, 2, 3$, через выбор матрицы A тогда и только тогда, когда модуль $M(\nu)$ совпадает с модулем

$$M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \alpha_2] = \mathbb{Z}[1, \sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

В случае $M(\nu) = M(\alpha)$ найдется такая матрица $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, что области $\mathbb{T}_{A_t, k}^2$ из разбиения (10.12) будут иметь площади $\mathrm{sq} \mathbb{T}_{A_t, k}^2 = \nu_k$ для всех $k = 0, 1, 2, 3$.

10.3. Двумерные динамические разбиения. Имеем $D = d + d'$, где в нашем случае $d = 2$, $d' = 1$. Снова предполагаем, что вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ имеет координаты $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$. Если выбрать $\varrho = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}^1$, то сдвиг S_ϱ будет иметь период $p = 3$, тогда в силу (8.6) имеем $\hat{\alpha}_\varrho = (\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{3})$. Для такого вектора $\hat{\alpha}_\varrho$ выберем унимодулярную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Для нее вектор (см. определение (8.12))

$$\hat{\alpha}_{\varrho, A} = (\hat{\alpha}_{\varrho, A, 1}, \hat{\alpha}_{\varrho, A, 2}, \hat{\alpha}_{\varrho, A, 3}), \quad \text{где } 0 \leq \hat{\alpha}_{\varrho, A, k} < 1, \quad (10.18)$$

удовлетворяющий сравнению $\hat{\alpha}_{\varrho, A} \equiv A^\wedge \alpha_\varrho \pmod{\mathbb{Z}^3}$, будет иметь координаты

$$\hat{\alpha}_{\varrho, A, 1} = 4\frac{2}{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad \hat{\alpha}_{\varrho, A, 2} = 1\frac{2}{3} - \sqrt{2}, \quad \hat{\alpha}_{\varrho, A, 3} = -1\frac{1}{3} + \sqrt{2}, \quad (10.19)$$

приближенные значения которых таковы:

$$\hat{\alpha}_{\varrho, A, 1} \approx 0.1, \quad \hat{\alpha}_{\varrho, A, 2} \approx 0.25, \quad \hat{\alpha}_{\varrho, A, 3} \approx 0.08.$$

Снова определим вектор $\mathbf{s}$ равенством $\hat{\alpha}_{\varrho, A} = \lambda \mathbf{s}$, где $\lambda = 1$. Согласно (10.19), вектор $\mathbf{s}$ принадлежит области $\mathbf{C}_{<1}$, поэтому для него можно построить перекрывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{s}, \lambda}^3$ вида (10.5). С ее помощью по схеме (4.24) можем определить каноническое разбиение $\mathbb{T}_{\mathbf{s}, \lambda}^3$ вида (10.10) и по нему, используя (10.17), задать на торе $\mathbb{T}^2$ разбиения

$$\mathbb{T}_{\rho, A, \mathbf{s}, \lambda}^2(j) = \mathbb{T}_{\rho, A, 0}^2(j) \sqcup \mathbb{T}_{\rho, A, 1}^2(j) \sqcup \mathbb{T}_{\rho, A, 2}^2(j) \sqcup \mathbb{T}_{\rho, A, 3}^2(j) \quad (10.20)$$

для $j = 0, 1, 2$. Из данных разбиений собираем периодические последовательности

$$\mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(0) \Rightarrow \mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(1) \Rightarrow \mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(2) \Rightarrow \mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(0) \Rightarrow \dots, \quad (10.21)$$

порождающие динамическое разбиение $\mathcal{D}_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}^2$ тора $\mathbb{T}^2$ (см. рис. 3).

Рис. 3. Динамическое разбиение тора $\mathcal{D}_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}^2$

Теперь для размерности $d = 2$ мы имеем возможность сравнить стационарные разбиения $\mathbb{T}_{A_t,\mathbf{c},\lambda}^2$ и динамические разбиения $\mathcal{D}_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}^2$. Прежде всего

заметим (см. рис. 3), что для любого фиксированного $k = 0, 1, 2, 3$ множества $\mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(0)$, $\mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(1)$ и $\mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(2)$ имеют различные площади, никак по отдельности не связанные с координатами или частотами $\hat{\alpha}_{\rho,A,k}$. Лишь для среднего значения площадей указанных множеств такая связь имеет место:

$$\frac{1}{3}(\text{sq } \mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(0) + \text{sq } \mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(1) + \text{sq } \mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(2)) = \hat{\alpha}_{\rho,A,k}. \quad (10.22)$$

Перейдем к оценке отклонений. По определению (8.28) отклонения распределения точек орбиты $\text{Orb}_{S_\alpha}(x_0^2)$ относительно областей $\mathbb{T}_{\rho,A,k}^2(j) \subset \mathbb{T}^2$, $j = 0, 1, 2$, динамического разбиения $\mathcal{D}_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}^2$ задаются равенствами

$$\delta_k(i; \alpha, x_0^d, \mathcal{D}_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}^2) = \mathbf{r}_k(i; \alpha, x_0^2, \mathcal{D}_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}^2) - i \hat{\alpha}_{\rho,A,k} \quad (10.23)$$

для $k = 0, 1, 2, 3$. По теореме 8.1 для этих отклонений выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \alpha, x_0^2, \mathcal{D}_{\rho,A,\mathbf{c},\lambda}^2)| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}), \quad (10.24)$$

где константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ определены в (6.31) и (6.32). Используя координаты (10.19) и равенство $\mathbf{c} = \hat{\alpha}_{\rho,A}$, находим для констант $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ их численные значения:

$$\begin{aligned} c_0(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) &= -7 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 2.2, & c_1(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) &= 10\frac{1}{3} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} < 1.3, \\ c_2(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) &= 4\frac{1}{3} - 2\sqrt{2} < 1.6, & c_3(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) &= -1\frac{2}{3} + 2\sqrt{2} < 1.2. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Из неравенств (10.24) следует, что свойством ограниченного остатка обладают объединения всех одноцветных множеств из периодической последовательности (10.21). С другой стороны, численные расчеты показывают, что, например, S_α -орбиты на множествах $\mathbb{T}_{\rho,A,2}^d(0)$ и $\mathbb{T}_{\rho,A,3}^d(0)$, представляющих собою треугольники (см. рис. 3, а), допускают отклонения, на два порядка превышающие значения (10.25).

Список литературы

1. E. Hecke, “Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **1**:1 (1922), 54–76.
2. I. Oren, “Admissible functions with multiple discontinuities”, *Proceedings of the Special Seminar on Topology*, v. I (Mexico City, 1980/1981), Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City, 1981, 217–230.
3. P. Szűsz, A. Rényi, “Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5**:1-2 (1954), 35–39.
4. P. Liardet, “Regularities of distribution”, *Compositio Math.*, **61**:3 (1987), 267–293.
5. G. Rauzy, “Ensembles à restes bornés”, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 1983–1984 (Talence, 1983/1984), Exp. №. 24, Univ. Bordeaux I, Talence, 1984, 12 pp.
6. S. Ferenczi, “Bounded remainder sets”, *Acta Arith.*, **61**:4 (1992), 319–326.
7. В. Г. Журавлев, “Разбиения Розы и множества ограниченного остатка на торе”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 83–106; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:2 (2006), 4658–4672.

8. В. Г. Журавлев, “Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей”, *Алгебра и анализ*, **24**:1 (2012), 95–130; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Multi-dimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts”, *St. Petersburg Math. J.*, **24**:1 (2013), 71–97.
9. В. Г. Журавлев, “Переключающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 26, Зап. научн. сем. ПОМИ, **392**, ПОМИ, СПб., 2011, 95–145; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Exchanged toric developments and bounded remainder sets”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **184**:6 (2012), 716–745.
10. В. Г. Журавлев, “Многогранники ограниченного остатка”, *Математика и информатика*, 1, К 75-летию со дня рождения А. А. Карацубы, Совр. пробл. матем., **16**, МИАН, М., 2012, 82–102; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Bounded remainder polyhedra”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **280**, suppl. 2 (2013), S71–S90.
11. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, т. 2, Изд-во АН УССР, Киев, 1952, 391 с.
12. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, Изд-во АН СССР, М., 1953, 410 с.
13. H. Weyl, “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins”, *Math. Ann.*, **77**:3 (1916), 313–352.
14. В. Г. Журавлев, “Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова”, *Алгебра и анализ*, **24**:4 (2012), 97–136; англ. пер.: V. G. Zhuravlev, “Moduli of toric tilings into bounded remainder sets and balanced words”, *St. Petersburg Math. J.*, **24**:4 (2013), 601–629.

Владимир Георгиевич Журавлев
(VLADIMIR G. ZHURAVLEV)
Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило в редакцию
04.06.2012
06.03.2015