Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Бавула, Алгебры Ли треугольных полиномиальных дифференцирований и критерий изоморфности их факторалгебр Ли, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 6, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 04:14:57

УДК 512.81

В. В. Бавула

Алгебры Ли треугольных полиномиальных дифференцирований и критерий изоморфности их факторалгебр Ли

Подробно изучаются алгебры Ли u_n , $n \geq 2$, треугольных полиномиальных дифференцирований, их прямой предел u_∞ и пополнение $\hat{u}_\infty$. Классифицируются идеалы алгебр u_n , все они являются характеристическими идеалами. С помощью классификации идеалов дается явный критерий изоморфности факторалгебр Ли алгебр u_n и u_m . Для алгебр (Ли) и их модулей вводятся две новые размерности: центральная размерность $c.\dim$ и однородная размерность $u.\dim$. Показано, что $c.\dim(u_n) = u.\dim(u_n) = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1$ для всех $n \geq 2$, где ω – первый бесконечный ординал. Аналогичные результаты доказываются для алгебр Ли u_∞ и $\hat{u}_\infty$. В частности, $u.\dim(u_\infty) = \omega^\omega$ и $c.\dim(u_\infty) = 0$.

Библиография: 5 наименований.

Ключевые слова: алгебра Ли, треугольные полиномиальные дифференцирования, автоморфизм, проблема изоморфизма, ряд коммутантов, нижний центральный ряд, локально нильпотентное дифференцирование, локально нильпотентная и локально конечномерная алгебра Ли.

DOI: 10.4213/im8005

§ 1. Введение

Всюду далее модуль означает левый модуль; $\mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$ – множество натуральных чисел; K – поле характеристики нуль, K^* – его группа единиц; $P_n := K[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} Kx^\alpha$ – алгебра многочленов над K , где $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial_1 := \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \partial_n := \frac{\partial}{\partial x_n}$ – частные производные (K -линейные дифференцирования) алгебры P_n ; $\text{Der}_K(P_n) = \bigoplus_{i=1}^n P_n \partial_i$ – алгебра Ли K -дифференцирований алгебры P_n ; $A_n := K\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle = \bigoplus_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} Kx^\alpha \partial^\beta$ – n -я алгебра Вейля; для каждого натурального $n \geq 2$

$$u_n := K\partial_1 + P_1\partial_2 + \dots + P_{n-1}\partial_n$$

– алгебра Ли треугольных полиномиальных дифференцирований (это подалгебра Ли алгебры Ли $\text{Der}_K(P_n)$), $U_n := U(u_n)$ – ее универсальная обертывающая алгебра.

Многие свойства алгебр Ли u_n , где $n \geq 2$, доказаны в предложении 2.1. Доказано, в частности, что алгебры Ли u_n , $n \geq 2$, попарно неизоморфны, все они являются разрешимыми, но не нильпотентными алгебрами Ли, а их внутренние

Работа выполнена при частичной поддержке Королевского общества (Royal Society) и Исследовательского совета по инженерным и физическим наукам (EPSRC).

дифференцирования являются локально нильпотентными дифференцированиями. Найдены ряд коммутантов и нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$.

Вводится новая размерность для алгебр и модулей – *однорядная размерность* (см. § 4), которая оказалась очень полезным инструментом в изучении нёнтеровых алгебр Ли, их идеалов и автоморфизмов [1], [2].

В § 3 дается классификация всех идеалов алгебры $\mathfrak{u}_n$ и для каждого идеала указывается явный базис. Доказывается, что $\mathfrak{u}_n$ является однорядной, артиновой, но не нётеровой алгеброй Ли, а ее однорядная размерность есть

$$\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n) = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1,$$

где ω – первый бесконечный ординал (теорема 3.6). Показано, что гиперцентральный ряд $\{Z^{(\lambda)}(\mathfrak{u}_n)\}_{\lambda \in \mathbb{W}}$ стабилизируется в точности на шаге $\text{ord}(\Omega_n) := \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1$. Более того, $Z^{(\lambda)}(\mathfrak{u}_n) = I_\lambda$ для каждого $\lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)]$, где I_λ явно задано формулой (3.3). Центральная размерность алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ есть $\text{s. dim}(\mathfrak{u}_n) = \text{ord}(\Omega_n)$ (теорема 3.10). Доказано, что все идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ являются характеристическими идеалами (следствие 3.11).

Алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется *локально нильпотентной* (соответственно, *локально конечномерной*) алгеброй Ли, если каждая конечно порожденная подалгебра Ли алгебры $\mathcal{G}$ является нильпотентной (соответственно, конечномерной) алгеброй Ли. В § 4 доказано, что все алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ являются локально конечномерными и локально нильпотентными (теорема 4.2).

В § 5 теорема 5.1 и следствие 5.2 дают ответ на следующий

ВОПРОС. Пусть I и J – идеалы алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{u}_m$ соответственно. При каких условиях факторалгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I$ и $\mathfrak{u}_m/J$ изоморфны?

Ответ дается в явном виде (через однорядные размерности идеалов I и J) с использованием классификации идеалов алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$ (теорема 3.6). В частности, имеется только счетное число идеалов I алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, для которых $\mathfrak{u}_n/I \simeq \mathfrak{u}_n$. Теорема 3.6, 1) показывает, что каждый идеал I алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ *однозначно определяется* его однорядной размерностью

$$\lambda = \text{u. dim}(I) \in [0, \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1],$$

т. е. $I = I_\lambda$, где ω – первый бесконечный ординал.

В § 6 изучается алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty := \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{u}_n = \bigoplus_{n \geq 2} P_{n-1} \partial_n$. Многие свойства алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ схожи со свойством алгебр $\mathfrak{u}_n$, $n \geq 2$, но существует ряд отличий. Например, алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty$ не разрешима, не артинова, но почти артинова, $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_\infty) = \omega^\omega$. Получена классификация всех идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ (теорема 6.2). Все идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ являются характеристическими идеалами (следствие 6.4). Следствие 6.3 дает явный критерий изоморфности двух факторалгебр Ли алгебры $\mathfrak{u}_\infty$.

В § 7 изучается топологическая алгебра Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$, являющаяся пополнением алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$. Ее свойства еще далее отклоняются от свойств алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$, $n \geq 2$, и $\mathfrak{u}_\infty$. Классифицируются все замкнутые и все открытые идеалы топологической алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ (теорема 7.2, 1)).

§ 2. Ряд коммутантов и нижний центральный ряд алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$

В этом параграфе доказываются различные свойства алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$ (предложение 2.1, следствие 2.3), которые широко используются в настоящей работе. В конце параграфа вычисляются образ и ядро гомоморфизма алгебр $\chi_n: U_n \rightarrow A_{n-1} \otimes K[\partial_n]$ (см. (2.11) и теорему 2.6). В частности, показывается, что алгебра $\chi_n(U_n)$ не конечно порождена и не является ни лево-, ни правонётеровой.

Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли над полем K , а $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ – ее идеалы. Коммутант $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – это линейная оболочка в $\mathcal{G}$ всех элементов $[a, b]$, где $a \in \mathfrak{a}$ и $b \in \mathfrak{b}$. Коммутант $[U, V]$ подпространств U и V алгебры $\mathcal{G}$ определяется таким же образом. Коммутант $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ является идеалом алгебры Ли $\mathcal{G}$, для которого $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. В частности, $\mathcal{G}_{(1)} := \mathcal{G}^{(1)} := [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ называется *коммутантом* алгебры Ли $\mathcal{G}$. Определим по индукции следующее множество идеалов алгебры Ли $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}_{(i)} := [\mathcal{G}_{(i-1)}, \mathcal{G}_{(i-1)}], \quad \mathcal{G}^{(i)} := [\mathcal{G}, \mathcal{G}^{(i-1)}], \quad i \geq 2.$$

Ясно, что $\mathcal{G}_{(i)} \subseteq \mathcal{G}^{(i)}$ для всех $i \geq 1$. Убывающие цепочки идеалов алгебры Ли $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{(0)} &:= \mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}_{(1)} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{G}_{(i)} \supseteq \mathcal{G}_{(i+1)} \supseteq \cdots, \\ \mathcal{G}^{(0)} &:= \mathcal{G} \supseteq \mathcal{G}^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{G}^{(i)} \supseteq \mathcal{G}^{(i+1)} \supseteq \cdots \end{aligned}$$

называются *рядом коммутантов* и *нижним центральным рядом* алгебры Ли $\mathcal{G}$ соответственно. Заметим, что

$$\mathfrak{u}_n = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^{i-1}} K x^\alpha \partial_i.$$

Значит, элементы

$$X_{\alpha,i} := x^\alpha \partial_i = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \partial_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha \in \mathbb{N}^{i-1}, \quad (2.1)$$

образуют K -базис $\mathcal{B}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Базис $\mathcal{B}_n$ называется *каноническим базисом* алгебры $\mathfrak{u}_n$. Для всех $1 \leq i \leq j \leq n$, $\alpha \in \mathbb{N}^{i-1}$ и $\beta \in \mathbb{N}^{j-1}$ имеем

$$[X_{\alpha,i}, X_{\beta,j}] = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ \beta_i X_{\alpha+\beta-e_i,j}, & \text{если } i < j, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $e_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1)$ – канонический свободный $\mathbb{Z}$ -базис $\mathbb{Z}$ -модуля $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{N}^i := \sum_{k=1}^i \mathbb{N} e_k \subseteq \mathbb{Z}^i := \sum_{k=1}^i \mathbb{Z} e_k$. В частности, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{N}^n$ и $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{Z}^n$. Алгебра Ли $\mathfrak{u}_n = \bigoplus_{i=1}^n P_{i-1} \partial_i$ является прямой суммой *абелевых* (бесконечномерных, когда $i > 1$) подалгебр Ли $P_{i-1} \partial_i$ (т.е. $[P_{i-1} \partial_i, P_{i-1} \partial_i] = 0$) таких, что для всех $i < j$ выполнено

$$[P_{i-1} \partial_i, P_{j-1} \partial_j] = P_{j-1} \partial_j. \quad (2.3)$$

Вложение $\subseteq$ в (2.3) очевидно, но равенство следует из того, что $[\partial_i, P_{j-1}] = P_{j-1}$. В силу (2.3) алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ допускает конечную строго убывающую цепочку идеалов

$$\mathfrak{u}_{n,1} := \mathfrak{u}_n \supset \mathfrak{u}_{n,2} \supset \cdots \supset \mathfrak{u}_{n,i} \supset \cdots \supset \mathfrak{u}_{n,n} \supset \mathfrak{u}_{n,n+1} := 0, \quad (2.4)$$

где $u_{n,i} := \sum_{j=i}^n P_{j-1} \partial_j$ при $i = 1, \dots, n$. В силу (2.3) для всех $i < j$

$$[u_{n,i}, u_{n,j}] \subseteq \begin{cases} u_{n,i+1}, & \text{если } i = j, \\ u_{n,j}, & \text{если } i < j. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для всех $i = 1, \dots, n$ имеется канонический изоморфизм алгебр Ли

$$u_i \simeq u_n / u_{n,i+1}, \quad X_{\alpha,j} \mapsto X_{\alpha,j} + u_{n,i+1}. \quad (2.6)$$

В частности, $u_{n-1} \simeq u_n / P_{n-1} \partial_n$. Ясно, что

$$u_2 \subset u_3 \subset \dots \subset u_n \subset u_{n+1} \subset \dots \subset u_\infty := \bigcup_{n \geq 2} u_n = \bigoplus_{i \geq 1} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^{i-1}} K x^\alpha \partial_i$$

является возрастающей цепочкой алгебр Ли. Алгебра многочленов P_n является A_n -модулем: для всех элементов $p \in P_n$

$$x_i * p = x_i p, \quad \partial_i * p = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ясно, что $P_n \simeq A_n / \sum_{i=1}^n A_n \partial_i$, $1 \mapsto 1 + \sum_{i=1}^n A_n \partial_i$. Поскольку $u_n \subseteq A_n$, алгебра многочленов P_n также является u_n -модулем.

Пусть V – векторное пространство над полем K ; K -линейное отображение $\delta: V \rightarrow V$ называется *локально нильпотентным отображением*, если $V = \bigcup_{i \geq 1} \ker(\delta^i)$, или, что равносильно, для каждого $v \in V$ выполняется $\delta^i(v) = 0$ для всех $i \gg 1$. Когда δ – локально нильпотентное отображение в V , будем также говорить, что δ *действует локально нильпотентно* на V . Каждое нильпотентное линейное отображение δ , т.е. такое, что $\delta^n = 0$ для некоторого $n \geq 1$, является локально нильпотентным отображением, но, вообще говоря, не наоборот. Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли. Каждый элемент $a \in \mathcal{G}$ определяет дифференцирование алгебры Ли $\mathcal{G}$ по правилу $\text{ad}(a): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $b \mapsto [a, b]$, которое называется *внутренним дифференцированием*, связанным с a . Множество $\text{Inn}(\mathcal{G})$ всех внутренних дифференцирований алгебры Ли $\mathcal{G}$ является подалгеброй Ли алгебры Ли $(\text{End}_K(\mathcal{G}), [\cdot, \cdot])$, где $[f, g] := fg - gf$. Имеется короткая точная последовательность алгебр Ли

$$0 \rightarrow Z(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\text{ad}} \text{Inn}(\mathcal{G}) \rightarrow 0,$$

т.е. $\text{Inn}(\mathcal{G}) \simeq \mathcal{G}/Z(\mathcal{G})$, где $Z(\mathcal{G})$ – *центр* алгебры Ли $\mathcal{G}$ и $\text{ad}([a, b]) = [\text{ad}(a), \text{ad}(b)]$ для всех элементов $a, b \in \mathcal{G}$. Элемент $a \in \mathcal{G}$ называется *локально нильпотентным элементом* (соответственно, *нильпотентным элементом*), если таковым является внутреннее дифференцирование $\text{ad}(a)$ алгебры Ли $\mathcal{G}$. Пусть J – непустое подмножество алгебры $\mathcal{G}$; тогда $\text{Cen}_{\mathcal{G}}(J) := \{a \in \mathcal{G} \mid [a, b] = 0 \text{ для всех } b \in J\}$ называется *централизатором* J в $\mathcal{G}$. Это подалгебра Ли алгебры Ли $\mathcal{G}$. Пусть A – ассоциативная алгебра и I – непустое подмножество из A . Тогда $\text{Cen}_A(I) := \{a \in A \mid ab = ba \text{ для всех } b \in I\}$ называется *централизатором* I в A . Это подалгебра из A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. 1) Алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ является разрешимой, но не нильпотентной алгеброй Ли.

2) Конечная цепочка идеалов (2.4) является рядом коммутантов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, т. е. $(\mathfrak{u}_n)_{(i)} = \mathfrak{u}_{n,i+1}$ для всех $i \geq 0$.

3) Нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ стабилизируется на первом шаге, т. е. $(\mathfrak{u}_n)^{(0)} = \mathfrak{u}_n$ и $(\mathfrak{u}_n)^{(i)} = \mathfrak{u}_{n,2}$ для всех $i \geq 1$.

4) Каждый элемент $u \in \mathfrak{u}_n$ действует локально нильпотентно на $\mathfrak{u}_n$ -модуле P_n .

5) Все внутренние дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ являются локально нильпотентными дифференцированиями.

6) Центр $Z(\mathfrak{u}_n)$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ равен $K\partial_n$.

7) Алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, где $n \geq 2$, попарно неизоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из утверждений 2) и 3), которые, в свою очередь, следуют из разложения $\mathfrak{u}_n = \bigoplus_{i=1}^n P_{i-1}\partial_i$ и (2.3). Утверждение 4) следует из определения алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$.

Докажем утверждение 5). Пусть $u \in \mathfrak{u}_{n,i} \setminus \mathfrak{u}_{n,i+1}$ для некоторого $i = 1, \dots, n$. Тогда $u = a\partial_i + u'$ для некоторых элементов $a \in P_{i-1}$ и $u' \in \mathfrak{u}_{n,i+1}$. Пусть $\delta = \text{ad}(u)$, $\partial = \text{ad}(a\partial_i)$ и $v \in \mathfrak{u}_n$. Необходимо показать, что $\delta^s(v) = 0$ для всех $s \gg 1$. Дважды применяя (2.5), видим, что $\delta(v) \in \mathfrak{u}_{n,i}$ и $\delta^2(v) \in \mathfrak{u}_{n,i+1}$. Заменяя элемент v на $\delta^2(v)$, без ограничения общности можно считать, что $v \in \mathfrak{u}_{n,i+1}$ и $v \neq 0$. Ввиду равенства $\mathfrak{u}_{n,i+1} = \bigoplus_{j=i+1}^n P_{j-1}\partial_j$ имеем $v = b\partial_{i+1} + v'$ для некоторых элементов $0 \neq b \in P_i$ и $v' \in \mathfrak{u}_{n,i+2}$. Для всех натуральных $s \geq 1$ в силу (2.5) имеем

$$\delta^s(v) \equiv \delta^s(b\partial_{i+1}) \equiv \delta^s(b)\partial_{i+1} \equiv \partial^s(b)\partial_{i+1} \pmod{\mathfrak{u}_{n,i+2}}.$$

В силу утверждения 4) имеем $\partial^s(b) = 0$ для всех $s \gg 1$. Тогда $\delta^s(v) \in \mathfrak{u}_{n,i+2}$ для всех $s \gg 1$. Аналогично, $\delta^s(v) \in \mathfrak{u}_{n,i+3}$ для всех $s \gg 1$. Применяя то же рассуждение несколько раз, видим, что $\delta^s(v) \in \mathfrak{u}_{n,n+1} = 0$ для всех $s \gg 1$. Это означает, что δ – локально нильпотентное отображение, как и требуется.

Теперь докажем утверждение 6). Хорошо известно и легко показать, что

$$\text{Cen}_{A_n}(\partial_1, \dots, \partial_n) = K[\partial_1, \dots, \partial_n]. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что

$$\text{Cen}_{A_n}(\partial_1, \dots, \partial_n, x_1\partial_n, \dots, x_{n-1}\partial_n) = K[\partial_n], \quad (2.8)$$

а тогда

$$Z(\mathfrak{u}_n) \subseteq \mathfrak{u}_n \cap \text{Cen}_{A_n}(\partial_1, \dots, \partial_n, x_1\partial_n, \dots, x_{n-1}\partial_n) = \mathfrak{u}_n \cap K[\partial_n] = K\partial_n.$$

Обратное включение $Z(\mathfrak{u}_n) \supseteq K\partial_n$ очевидно. Значит, $Z(\mathfrak{u}_n) = K\partial_n$.

Утверждение 7) следует из утверждения 2), так как ряды коммутантов алгебр $\mathfrak{u}_n$ имеют различную длину (и являются инвариантами при изоморфизмах). Предложение доказано.

Предложение 2.1, 5) позволяет получить много автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Для каждого элемента $a \in \mathfrak{u}_n$ внутреннее дифференцирование $\text{ad}(a)$ является локально нильпотентным дифференцированием, поэтому

$$e^{\text{ad}(a)} := \sum_{i \geq 0} \frac{\text{ad}(a)^i}{i!} \in \text{Aut}_K(\mathfrak{u}_n).$$

В [1] найдены группа автоморфизмов $\text{Aut}_K(\mathfrak{u}_n)$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ и ее явные порождающие и показано, что *присоединенная группа* $\langle e^{\text{ad}(a)} \mid a \in \mathfrak{u}_n \rangle$ является очень малой частью группы $\text{Aut}_K(\mathfrak{u}_n)$.

Следующая лемма классифицирует нильпотентные внутренние дифференцирования алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $a \in \mathfrak{u}_n$ и $\delta = \text{ad}(a)$. Следующие утверждения равносильны:

- 1) отображение δ является нильпотентным дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$;
- 2) $a \in P_{n-1}\partial_n$;
- 3) $\delta^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$ очевидны.

Докажем импликацию $1) \Rightarrow 2)$. Покажем, что дифференцирование δ не является нильпотентным для каждого элемента $a \in \mathfrak{u}_n \setminus P_{n-1}\partial_n$. Пусть $u \in \mathfrak{u}_n \setminus P_{n-1}\partial_n$, т. е. $u = p_i\partial_i + p_{i+1}\partial_{i+1} + \dots + p_n\partial_n = p_i\partial_i + \dots$, где $p_j \in P_{j-1}$ для всех $j = i, \dots, n$, $i < n$, и $p_i \neq 0$. Поскольку

$$\delta^m(x_i^m\partial_{i+1}) = m!p_i^m\partial_{i+1} + \dots, \quad m \geq 1,$$

дифференцирование δ не является нильпотентным дифференцированием. Лемма доказана.

Пусть A – кольцо. Подмножество S из A называется *мультипликативным подмножеством* или *мультипликативно замкнутым подмножеством* кольца A , если $1 \in S$, $SS \subseteq S$ и $0 \notin S$. Каждую ассоциативную алгебру A можно рассматривать как алгебру Ли $(A, [\cdot, \cdot])$, где $[a, b] = ab - ba$ – коммутатор элементов $a, b \in A$. Для каждого элемента $a \in A$ отображение $\text{ad}(a): A \rightarrow A$, $b \mapsto [a, b]$, является K -дифференцированием алгебры A , рассматриваемой как ассоциативная алгебра и алгебра Ли. Дифференцирование $\text{ad}(a)$ называется *внутренним дифференцированием* кольца A , связанным с элементом a . Таким образом, ассоциативная алгебра A и алгебра Ли $(A, [\cdot, \cdot])$ имеют то же самое множество внутренних дифференцирований $\text{Inn}(A)$ и тот же самый центр $Z(A)$.

Пусть δ – дифференцирование кольца A . Для всех элементов $a, b \in A$

$$\delta^n(ab) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \delta^i(a) \delta^{n-i}(b), \quad n \geq 1, \quad (2.9)$$

$$a^n b = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\text{ad } a)^i(b) a^{n-i}, \quad n \geq 1. \quad (2.10)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. 1) Внутренние дифференцирования $\{\text{ad}(u) \mid u \in \mathfrak{u}_n\}$ универсальной обертывающей алгебры U_n алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ являются локально нильпотентными дифференцированиями.

2) Каждое мультипликативное подмножество S из U_n , порожденное произвольным множеством элементов алгебры $\mathfrak{u}_n$, является (левым и правым) множеством Оре в U_n . Значит, $S^{-1}U_n \simeq U_n S^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из (2.9) и предложения 2.1, 5). Утверждение 2) является несложным следствием из соотношения (2.10) и предложения 2.1, 5). Следствие доказано.

ПРИМЕР 2.4. Множество $S = \{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ является мультипликативным подмножеством алгебры U_n . В силу следствия 2.3, 2) существует кольцо частных $S^{-1}U_n$.

Пусть D – кольцо, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – набор из n коммутирующих автоморфизмов кольца D (т.е. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ для всех i, j) и $a = (a_1, \dots, a_n)$ – набор из n (ненулевых) элементов центра $Z(D)$ кольца D , для которых $\sigma_i(a_j) = a_j$ при всех $i \neq j$.

Обобщенная алгебра Вейля $A = D(\sigma, a)$ (кратко ОАВ) степени n с базовым кольцом D – это кольцо, порожденное D и $2n$ переменными $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, подчиненными следующим определяющим соотношениям [3], [4]:

$$\begin{aligned} y_i x_i &= a_i, & x_i y_i &= \sigma_i(a_i), \\ x_i \alpha &= \sigma_i(\alpha) x_i, & y_i \alpha &= \sigma_i^{-1}(\alpha) y_i, & \alpha \in D, \\ [x_i, x_j] &= [y_i, y_j] = [x_i, y_j] = 0, & i &\neq j, \end{aligned}$$

где $[x, y] = xy - yx$. Будем говорить, что a и σ – множества определяющих элементов и автоморфизмов алгебры A соответственно. Для вектора $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ положим $v_k = v_{k_1}(1) \cdots v_{k_n}(n)$, где $v_m(i) = x_i^m$, $v_{-m}(i) = y_i^m$, $v_0(i) = 1$ для $1 \leq i \leq n$ и $m \geq 0$. Из определения ОАВ следует, что

$$A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^n} A_k$$

является $\mathbb{Z}^n$ -градуированной алгеброй ($A_k A_e \subset A_{k+e}$ для всех $k, e \in \mathbb{Z}^n$), где $A_k = Dv_k = v_k D$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – алгебра многочленов $K[H_1, \dots, H_n]$ от n переменных, и пусть $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – набор из n коммутирующих автоморфизмов алгебры $\mathcal{P}_n$, определенный следующим образом: $\sigma_i(H_i) = H_i - 1$ и $\sigma_i(H_j) = H_j$ при $i \neq j$. Отображение

$$A_n \rightarrow \mathcal{P}_n((\sigma_1, \dots, \sigma_n), (H_1, \dots, H_n)), \quad x_i \mapsto x_i, \quad \partial_i \mapsto y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

является изоморфизмом K -алгебр. Мы отождествляем алгебру Вейля A_n с вышеупомянутой ОАВ посредством этого изоморфизма. Алгебра Вейля $A_n = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} A_{n,\alpha}$ является $\mathbb{Z}$ -градуированной алгеброй ($A_{n,\alpha} A_{n,\beta} \subseteq A_{n,\alpha+\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$).

Мультипликативные множества $S = \{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ и $T = \{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ являются (левыми и правыми) множествами Оре алгебры Вейля A_n , причем

$$B_n := S^{-1}A_n = K[H_1, \dots, H_n][\partial_1^{\pm 1}, \dots, \partial_n^{\pm 1}; \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}],$$

$$B'_n := T^{-1}A_n = K[H_1, \dots, H_n][x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}; \sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

Алгебра Вейля $(A_n, [\cdot, \cdot])$ является $\mathbb{Z}^n$ -градуированной алгеброй Ли, т. е. $[A_{n,\alpha}, A_{n,\beta}] \subseteq A_{n,\alpha+\beta}$ для всех элементов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$. По определению $\mathfrak{u}_n$ и $\text{Der}_K(P_n)$ являются $\mathbb{Z}^n$ -градуированными подалгебрами Ли алгебры Ли A_n .

Алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ содержит конечно- и бесконечномерные максимальные абелевы подалгебры Ли, как показывает следующая лемма.

ЛЕММА 2.5. 1) $\mathcal{D}_n := \bigoplus_{i=1}^n K\partial_i$ является максимальной абелевой подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, причем $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(\mathcal{D}_n) = \mathcal{D}_n$.

2) Идеал $P_{n-1}\partial_n$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ является максимальной абелевой подалгеброй Ли алгебры $\mathfrak{u}_n$, причем $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(P_{n-1}\partial_n) = P_{n-1}\partial_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) вытекает из следующих двух фактов: $\text{Cen}_{A_n}(\mathcal{D}_n) = K[\partial_1, \dots, \partial_n]$ (см. (2.7)) и $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(\mathcal{D}_n) = \mathfrak{u}_n \cap K[\partial_1, \dots, \partial_n] = \mathcal{D}_n$.

Докажем утверждение 2). Из равенства $\text{Cen}_{A_{n-1}}(P_{n-1}) = P_{n-1}$ следует, что

$$\text{Cen}_{A_{n-1} \otimes K[\partial_n]}(P_{n-1}\partial_n) = \text{Cen}_{A_{n-1}}(P_{n-1}) \otimes K[\partial_n] = P_{n-1}[\partial_n].$$

Тогда $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(P_{n-1}\partial_n) = \mathfrak{u}_n \cap P_{n-1}[\partial_n] = P_{n-1}\partial_n$. Значит, идеал $P_{n-1}\partial_n$ является максимальной абелевой подалгеброй Ли алгебры $\mathfrak{u}_n$. Лемма доказана.

Вложение $\mathfrak{u}_n \subseteq A_{n-1} \otimes K[\partial_n]$ индуцирует гомоморфизм алгебр

$$\chi_n: U_n \rightarrow A_{n-1} \otimes K[\partial_n], \quad X_{\alpha,i} \mapsto x^\alpha \partial_i. \quad (2.11)$$

Образ и ядро χ_n вычисляются в теореме 2.6. В силу следствия 2.3, 2) гомоморфизм χ_n продолжается до гомоморфизма алгебр

$$\chi_n: S^{-1}U_n \rightarrow S^{-1}(A_{n-1} \otimes K[\partial_n]) = B_{n-1} \otimes K[\partial_n, \partial_n^{-1}],$$

где $S = \{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$. Очевидно, что $\chi_n(S^{-1}U_n) = B_{n-1} \otimes K[\partial_n, \partial_n^{-1}]$ (так как $X_{\alpha,i}\partial_i^{-1} \mapsto x^\alpha \partial_i \partial_i^{-1} = x^\alpha$ и $x_i = \partial_i^{-1}H_i$).

Определим отношение $\prec$ на множестве $\mathbb{N}^n$: будем записывать $\alpha \prec \beta$ для элементов $\alpha = (\alpha_i)$ и $\beta = (\beta_i)$ из $\mathbb{N}^n$ тогда и только тогда, когда либо $\alpha = 0$, а β произвольно (т. е. $0 \prec \beta$ для всех $\beta \in \mathbb{N}^n$), либо $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\max\{i \mid \alpha_i \neq 0\} < \max\{i \mid \beta_i \neq 0\}$. Ясно, что из $\alpha \prec \beta$ и $\beta \prec \gamma$ следует $\alpha \prec \gamma$; $\alpha \prec \alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$; для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ из $\alpha \prec \beta$ следует $\beta \not\prec \alpha$.

ТЕОРЕМА 2.6. 1) Множество $W_n := \{x^\alpha \partial^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n; \alpha \prec \beta\}$ является K -базисом алгебры $U'_n := \chi_n(U_n)$.

2) Ядро гомоморфизма алгебр χ_n является идеалом алгебры U_n , порожденным элементами $X_{\alpha,i}X_{\beta,j} - X_{0,i}X_{\alpha+\beta,j}$, где $i \leq j$, $\alpha \in \mathbb{N}^{i-1}$ и $\beta \in \mathbb{N}^{j-1}$.

3) Гомоморфизм χ_n не является сюръективным отображением.

4) Алгебра U'_n не является ни конечно порожденной, ни лево-, ни правонётеровой алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 1). Элементы множества W_n являются K -линейно независимыми элементами, так как они являются таковыми как элементы алгебры $A_{n-1} \otimes K[\partial_n]$. Пусть $\mathcal{I}_n := \sum_{w \in W_n} Kw$. Необходимо показать, что $\chi_n(U_n) = \mathcal{I}_n$. Алгебра $\chi_n(U_n)$ порождается элементами $\chi_n(X_{\alpha,i}) = x^\alpha \partial_i$. Используя соотношения

$$x^\alpha \partial_i x^\beta \partial_i = x^{\alpha+\beta} \partial_i^2, \quad [x^\alpha \partial_i, x^\gamma \partial_j] = \gamma_i x^{\alpha+\gamma-e_i} \partial_i \partial_j, \quad i < j,$$

видим, что алгебра $\chi_n(U_n)$ содержится в линейной оболочке, скажем, $\mathcal{I}'_n$ элементов

$$\partial_1^{\beta_1} x^{\alpha_2} \partial_2^{\beta_2} \dots x^{\alpha_i} \partial_i^{\beta_i} \dots x^{\alpha_n} \partial_n^{\beta_n}, \quad \beta_i \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}^{i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Используя соотношения коммутирования $[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$ (где δ_{ij} – дельта-функция Кронекера), каждый такой элемент можно записать в виде линейной комбинации некоторых элементов из W_n . Значит, $\chi_n(U_n) \subseteq \mathcal{I}'_n \subseteq \mathcal{I}_n$.

Чтобы доказать, что выполняется обратное вложение $\chi_n(U_n) \supseteq \mathcal{I}_n$ и тем самым завершить доказательство утверждения 1), нам нужно показать, что каждый элемент $w \neq 1$ из W_n принадлежит алгебре $\chi_n(U_n)$. Элемент $w \neq 1$ является произведением

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_t^{\beta_t} \quad \text{для некоторых} \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}, \quad s < t, \quad \beta_t \neq 0.$$

Случай, когда $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$, очевиден. Итак, можно считать, что $\alpha_s \neq 0$. Каждый элемент $x_1^{\alpha_1} \dots x_s^{\alpha_s} \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_s^{\beta_s}$ алгебры Вейля A_s можно записать в виде суммы $\sum_{u,v \in \mathbb{N}^s} \lambda_{uv} \partial^u x^v$, где $\lambda_{uv} \in K$. Теперь

$$w = \left(\sum_{u,v \in \mathbb{N}^s} \lambda_{uv} \partial^u x^v \right) \partial_{s+1}^{\beta_{s+1}} \dots \partial_t^{\beta_t} = \sum_{u,v \in \mathbb{N}^s} \lambda_{uv} \partial^u \partial_{s+1}^{\beta_{s+1}} \dots \partial_{t-1}^{\beta_{t-1}} (x^v \partial_t^{\beta_t}) \in \chi_n(U_n).$$

Доказательство утверждения 1) закончено. Более того, из последнего шага следует, что множество

$$W'_n := \{ \partial^\alpha, \partial^\beta x^\nu \partial_t^i \mid \alpha \in \mathbb{N}^n; i \geq 1; \beta, \nu \in \mathbb{N}^{t-1}, \nu \neq 0; t = 2, \dots, n \} \quad (2.12)$$

также является K -базисом алгебры $\chi_n(U_n)$. Подробнее, алгебра $\chi_n(U_n)$ является линейной оболочкой W'_n , а элементы множества W'_n линейно независимы, так как они линейно независимы как элементы алгебры Вейля A_n . Значит, W'_n является K -базисом алгебры $\chi_n(U_n)$. Этот базис используется в доказательстве утверждения 2).

Докажем утверждение 2). Пусть I – идеал алгебры U_n , порожденный элементами из утверждения 2) (кандидатами на роль порождающих $\ker(\chi_n)$). Для каждого элемента w' множества W'_n , т.е. для ∂^α и $\partial^\beta x^v \partial_t^i$, выберем элемент $w'' \in \chi_n^{-1}(w')$ следующим образом:

$$w'' := \begin{cases} \prod X_{0,i}^{\alpha_i}, & \text{если } w' = \partial^\alpha, \alpha = (\alpha_i), \\ \prod X_{0,i}^{\beta_i} X_{v,t} X_{0,t}^{i-1}, & \text{если } w' = \partial^\beta x^v \partial_t^i. \end{cases}$$

Итак, $\chi_n(w'') = w'$ для всех элементов $w' \in W'_n$. Пусть W''_n – множество всех элементов w'' . Элементы из W''_n линейно независимы в алгебре U_n как

прообразы линейно независимых элементов. Пусть $\mathcal{I}_n'' := \sum_{w'' \in W_n''} K w''$. Для завершения доказательства утверждения 2) достаточно показать, что

$$U_n = \mathcal{I}_n'' + I.$$

(Предположим, что выполняется равенство. Поскольку $I \subseteq \ker(\chi_n)$ и множество W_n'' отображается биективно на базис W_n' алгебры $\chi_n(U_n)$, из этих двух фактов с необходимостью следует, что $I = \ker(\chi_n)$.) Чтобы доказать равенство $U_n = \mathcal{I}_n'' + I$, следуем схеме доказательства утверждения 1). Из соотношений (2.2) и $X_{\alpha,i} X_{\beta,i} \equiv X_{0,i} X_{\alpha+\beta,i} \pmod{I}$ следует, что линейная оболочка элементов

$$\{X_{0,1}^{\beta_1} (X_{0,2}^{\beta_2} X'_{\alpha_2,2}) \cdots (X_{0,i}^{\beta_i} X'_{\alpha_i,i}) \cdots (X_{0,n}^{\beta_n} X'_{\alpha_n,n}) \mid \beta_i \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{N}^{i-1}, \\ X'_{\alpha_i,i} \in \{1, X_{\alpha_i,i}\}, i = 2, \dots, n\},$$

где

$$(X_{0,i}^{\beta_i} X'_{\alpha_i,i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_i = 0, \\ X_{0,i}^{\beta_i} X'_{\alpha_i,i}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \end{cases}$$

порождает алгебру U_n по модулю идеала I . Используя порождающие для идеала I и соотношения (2.2), каждый из этих элементов можно записать в виде линейной комбинации элементов w'' (определенных выше). Тогда $U_n = \mathcal{I}_n'' + I$.

Теперь докажем утверждение 3). Предположим, что гомоморфизм χ_n является сюръективным отображением; получим противоречие. Идеал $\mathfrak{a} := U_n \mathfrak{u}_n U_n$ алгебры U_n содержит $\ker(\chi_n)$, $U_n/\mathfrak{a} \simeq K$, $\chi_n(\mathfrak{a})$ – идеал алгебры $\chi_n(U_n) = A_{n-1} \otimes K[\partial_n]$, и

$$A_{n-1} \otimes K[\partial_n]/\chi_n(\mathfrak{a}) = \chi_n(U_n)/\chi_n(\mathfrak{a}) = \chi_n(K + \mathfrak{a})/\chi_n(\mathfrak{a}) = (K + \chi_n(\mathfrak{a}))/\chi_n(\mathfrak{a}) \simeq K.$$

Алгебра Вейля A_{n-1} является простой бесконечномерной алгеброй, поэтому она отображается изоморфно на свой образ под действием гомоморфизма алгебр

$$A_{n-1} \rightarrow A_{n-1} \otimes K[\partial_n]/\chi_n(\mathfrak{a}) \simeq K, \quad a \mapsto a \otimes 1 + \chi_n(\mathfrak{a}).$$

Противоречие.

Утверждение 4) следует из предложения 3.13, где доказано более сильное утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Множество W_n' (см. (2.12)) является K -базисом алгебры U_n' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот факт установлен в доказательстве утверждения 1) теоремы 2.6.

§ 3. Классификация идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$

В этом параграфе вводятся однорядная и центральная размерности и дается классификация идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ (теорема 3.6, 1)). Доказывается, что алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ является однорядной, артиновой, но не нётеровой алгеброй Ли однорядной размерности и $\dim(\mathfrak{u}_n) = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \cdots + \omega + 1$ (теорема 3.6, 2));

каждый идеал из $\mathfrak{u}_n$ является характеристическим идеалом (следствие 3.11); найден гиперцентральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ и показано, что центральной размерностью алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ является $\text{с. dim}(\mathfrak{u}_n) = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1$ (теорема 3.10).

3.1. Однорядная размерность. Пусть $(S, \leq)$ – частично упорядоченное множество, т. е. множество S допускает отношение $\leq$, удовлетворяющее для всех $a, b, c \in S$ трем условиям:

- (i) $a \leq a$;
- (ii) из $a \leq b$ и $b \leq a$ следует $a = b$;
- (iii) из $a \leq b$ и $b \leq c$ следует $a \leq c$.

Частично упорядоченное множество $(S, \leq)$ называется *артиновым* частично упорядоченным множеством, если каждое непустое подмножество T из S обладает *наименьшим элементом*, скажем, $t \in T$, т. е. $t \leq t'$ для всех $t' \in T$. Частично упорядоченное множество $(S, \leq)$ *линейно упорядочено*, если для всех элементов $a, b \in S$ либо $a \leq b$, либо $b \leq a$. Биекция $f: S \rightarrow S'$ между двумя частично упорядоченными множествами $(S, \leq)$ и $(S', \leq)$ называется *изоморфизмом*, если из $a \leq b$ в S следует $f(a) \leq f(b)$ в S' . Напомним, что *ординальные числа* – это классы изоморфизмов линейно упорядоченных артиновых множеств (т. е. вполне упорядоченных множеств). Ординальное число (класс изоморфизма) линейно упорядоченного артинова множества $(S, \leq)$ обозначается через $\text{ord}(S)$. Класс всех ординальных чисел обозначается через W . Класс W линейно упорядочен по включению $\leq$ и артинов. В W определены ассоциативное сложение $+$ и ассоциативное умножение $\cdot$, продолжающие сложение и умножение натуральных чисел. Каждое ненулевое натуральное число n отождествляется с $\text{ord}(1 < 2 < \dots < n)$. Пусть $\omega := \text{ord}(\mathbb{N}, \leq)$. (Более подробно с ординальными числами можно ознакомиться в книге [5].)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $(S, \leq)$ – частично упорядоченное множество. *Однорядной размерностью* $\text{u. dim}(S)$ множества S называется супремум ординальных чисел $\text{ord}(T)$, где T пробегает все артиновы линейно упорядоченные подмножества из S .

Для алгебры Ли $\mathcal{G}$ пусть $\mathcal{I}_0(\mathcal{G})$ и $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ – множества всех и всех ненулевых идеалов алгебры Ли $\mathcal{G}$ соответственно. Таким образом, $\mathcal{I}_0(\mathcal{G}) = \mathcal{I}(\mathcal{G}) \cup \{0\}$. Множества $\mathcal{I}_0(\mathcal{G})$ и $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ являются частично упорядоченными множествами по включению. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется *артиновой* (соответственно, *нётеровой*), если частично упорядоченное множество $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ артиново (соответственно, нётерово). Это означает, что каждая убывающая (соответственно, возрастающая) цепочка идеалов стабилизируется. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется *однорядной* алгеброй Ли, если частично упорядоченное множество $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ является линейно упорядоченным множеством. Это означает, что для любых двух идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$ либо $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, либо $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{G}$ – артинова однорядная алгебра Ли. Ординальное число $\text{u. dim}(\mathcal{G}) := \text{ord}(\mathcal{I}(\mathcal{G}))$ артинова линейно упорядоченного множества $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ ненулевых идеалов алгебры $\mathcal{G}$ называется *однорядной размерностью* алгебры Ли $\mathcal{G}$. Для произвольной алгебры Ли $\mathcal{G}$ однорядная размерность

$\text{u. dim}(\mathcal{G})$ – это супремум ординальных чисел $\text{ord}(\mathcal{I})$, где $\mathcal{I}$ пробегает все артиновы линейно упорядоченные множества идеалов.

Если $\mathcal{G}$ – нётерова алгебра Ли, то $\text{u. dim}(\mathcal{G}) \leq \omega$. Таким образом, однорядная размерность является мерой отклонения от условия нётеровости. Понятие однорядной размерности имеет смысл для любого класса алгебр (ассоциативных, йордановых и т. п.).

Пусть A – алгебра, а M – ее модуль, и пусть $\mathcal{J}_l(A)$ и $\mathcal{M}(M)$ – множества всех ненулевых левых идеалов алгебры A и всех ненулевых подмодулей из M соответственно. Они являются частично упорядоченными множествами относительно $\subseteq$. *Левая однорядная размерность* алгебры A определяется как $\text{u. dim}(A) := \text{u. dim}(\mathcal{J}_l(A))$ и *однорядная размерность* A -модуля M определяется как $\text{u. dim}(M) := \text{u. dim}(\mathcal{M}(M))$.

3.2. Артиново линейное упорядочение на каноническом базисе $\mathcal{B}_n$ алгебры $\mathfrak{u}_n$. Определим артиново линейное упорядочение $\leq$ на каноническом базисе $\mathcal{B}_n$ для алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ по правилу $X_{\alpha,i} > X_{\beta,j}$ тогда и только тогда, когда $i < j$ или $i = j$ и $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}, \dots, \alpha_{m+1} = \beta_{m+1}, \alpha_m > \beta_m$ для некоторого m .

ПРИМЕР 3.3. Для $n = 2$ имеем $\partial_2 < x_1\partial_2 < x_1^2\partial_2 < \dots < \partial_1$. Для $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \partial_3 < x_1\partial_3 < x_1^2\partial_3 < \dots < x_2\partial_3 < x_1x_2\partial_3 < x_1^2x_2\partial_3 < \dots \\ \dots < x_2^i\partial_3 < x_1x_2^i\partial_3 < x_1^2x_2^i\partial_3 < \dots < \partial_2 < x_1\partial_2 < x_1^2\partial_2 < \dots < \partial_1. \end{aligned}$$

Следующая лемма является простым следствием определения упорядочения $<$; записываем $0 < X_{\alpha,i}$ для всех $X_{\alpha,i} \in \mathcal{B}_n$.

ЛЕММА 3.4. Если $X_{\alpha,i} > X_{\beta,j}$, то:

- 1) $X_{\alpha+\gamma,i} > X_{\beta+\gamma,j}$ для всех $\gamma \in \mathbb{N}^{i-1}$;
- 2) $X_{\alpha-\gamma,i} > X_{\beta-\gamma,j}$ для всех $\gamma \in \mathbb{N}^{i-1}$ таких, что $\alpha-\gamma \in \mathbb{N}^{i-1}$ и $\beta-\gamma \in \mathbb{N}^{j-1}$;
- 3) $[\partial_k, X_{\alpha,i}] > [\partial_k, X_{\beta,j}]$ для всех $k = 1, \dots, i-1$ таких, что $\alpha_k \neq 0$;
- 4) $[X_{\gamma,k}, X_{\alpha,i}] > [X_{\gamma,k}, X_{\beta,j}]$ для всех $X_{\gamma,k} > X_{\alpha,i}$ таких, что $[X_{\gamma,k}, X_{\alpha,i}] \neq 0$, т. е. $\alpha_k \neq 0$.

Пусть Ω_n – множество индексов $\{(\alpha, i)\}$, параметризующих канонический базис $\{X_{\alpha,i}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Множество $(\Omega_n, \leq)$ является артиновым линейно упорядоченным множеством, где $(\alpha, i) \geq (\beta, j)$ тогда и только тогда, когда $X_{\alpha,i} \geq X_{\beta,j}$, которое изоморфно артинову линейно упорядоченному множеству $(\mathcal{B}_n, \leq)$ посредством $(\alpha, i) \mapsto X_{\alpha,i}$. отождествим частично упорядоченные множества $(\Omega_n, \leq)$ и $(\mathcal{B}_n, \leq)$ с помощью этого изоморфизма. Очевидно, что

$$\text{ord}(\mathcal{B}_n) = \text{ord}(\Omega_n) = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1, \quad (3.1)$$

$\Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$ и $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_3 \subset \dots$. Пусть $[1, \text{ord}(\Omega_n)] := \{\lambda \in W \mid 1 \leq \lambda \leq \text{ord}(\Omega_n)\}$. В силу (2.2) если $[X_{\alpha,i}, X_{\beta,j}] \neq 0$, то

$$[X_{\alpha,i}, X_{\beta,j}] < \min\{X_{\alpha,i}, X_{\beta,j}\}. \quad (3.2)$$

В силу (3.2) отображение

$$\rho_n: [1, \text{ord}(\Omega_n)] \rightarrow \mathcal{J}(\mathfrak{u}_n), \quad \lambda \mapsto I_\lambda := I_{\lambda, n} := \bigoplus_{(\alpha, i) \leq \lambda} KX_{\alpha, i}, \quad (3.3)$$

является мономорфизмом частично упорядоченных множеств (ρ_n – сохраняющая порядок инъекция). Мы докажем, что отображение ρ_n является биекцией (теорема 3.6, 1)) и в результате получим классификацию всех идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Каждый ненулевой элемент u из $\mathfrak{u}_n$ является конечной линейной комбинацией:

$$u = \lambda X_{\alpha, i} + \mu X_{\beta, j} + \dots + \nu X_{\sigma, k} = \lambda X_{\alpha, i} + \dots,$$

где $\lambda, \mu, \dots, \nu \in K^*$ и $X_{\alpha, i} > X_{\beta, j} > \dots > X_{\sigma, k}$. Элементы $\lambda X_{\alpha, i}$ и $\lambda \in K^*$ называются *старшим членом* и *старшим коэффициентом* элемента u соответственно, а ординальное число, обозначаемое через $\text{ord}(X_{\alpha, i}) = \text{ord}(\alpha, i) \in [1, \text{ord}(\Omega_n)]$, по определению равное ординальному числу, представляющему артиново линейно упорядоченное множество $\{(\beta, j) \in \Omega_n \mid (\beta, j) \leq (\alpha, i)\}$, называется *ординальной степенью* элемента u , обозначаемой через $\text{ord}(u)$ (надеемся, что эти обозначения не вызовут путаницы). Для всех ненулевых элементов $u, v \in \mathfrak{u}_n$ и $\lambda \in K^*$ выполнено:

- (i) $\text{ord}(u + v) \leq \max\{\text{ord}(u), \text{ord}(v)\}$, как только $u + v \neq 0$;
- (ii) $\text{ord}(\lambda u) = \text{ord}(u)$;
- (iii) $\text{ord}([u, v]) < \min\{\text{ord}(u), \text{ord}(v)\}$, как только $[u, v] \neq 0$;
- (iv) $\text{ord}(\sigma(u)) = \text{ord}(u)$ для всех автоморфизмов σ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ (следствие 3.12).

3.3. Классификация идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Следующая лемма является решающим фактом в доказательстве теоремы 3.6.

ЛЕММА 3.5. *Предположим, что I – ненулевой идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Тогда $I = \bigcup_{0 \neq u \in I} I_{\text{ord}(u)}$. В частности, $(v) = I_{\text{ord}(v)}$ для всех ненулевых элементов v из $\mathfrak{u}_n$, где (v) – идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, порожденный элементом v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что выполнено второе утверждение, т. е. $(v) = I_{\text{ord}(v)}$, так как тогда

$$I = \sum_{0 \neq u \in I} (u) = \sum_{0 \neq u \in I} I_{\text{ord}(u)} = \bigcup_{0 \neq u \in I} I_{\text{ord}(u)}.$$

Чтобы доказать равенство $(v) = I_{\text{ord}(v)}$, используем двойную индукцию: сначала по $n \geq 2$, а затем для фиксированного n вторую индукцию по $\lambda = \text{ord}(v)$. Без ограничения общности можно считать, что старший коэффициент элемента v равен 1. Заметим, что $\text{ord}(v)$ – непрелый ординал.

А. Пусть $n = 2$. Если $\lambda = 1$, то $v = \partial_2$ и, значит, $(v) = K\partial_2 = I_1$, как и требуется. Предположим, что $\lambda > 1$ и утверждение верно для всех непрелых ординалов λ' таких, что $\lambda' < \lambda$.

Случай 1: $\lambda = \text{ord}(x_1^i \partial_2)$ для некоторого $i \geq 1$, т. е.

$$v = x_1^i \partial_2 + \mu_{i-1} x_1^{i-1} \partial_2 + \dots + \mu_0 \partial_2$$

для некоторых скаляров $\mu_j \in K$. Пусть $\delta = \text{ad}(\partial_1)$. Тогда $I_\lambda \supseteq (v) \supseteq \sum_{j=0}^i K\delta^j(v) = I_\lambda$, т. е. $(v) = I_\lambda$.

Случай 2: $\lambda = \text{ord}(\partial_1) = \omega + 1$, т. е. $v = \partial_1 + p\partial_2$ для некоторого элемента $p \in P_1$. Для всех $i \geq 1$ имеем $(v) \ni [v, x_1^i \partial_2] = ix_1^{i-1} \partial_2$. В силу случая 1 имеем $\mathfrak{u}_{2,1} \subseteq (v)$, и потому $\partial_1 \in (v)$. Значит, $(v) = \mathfrak{u}_2 = I_{\omega+1} = I_{\text{ord}(v)}$.

В. Предположим, что $n > 2$ и утверждение выполняется для всех n' таких, что $n' < n$. Если $\lambda = 1$, то $v \in K^* \partial_n$, и потому $(v) = K \partial_n = I_1$, как и требуется. Предположим, что $\lambda > 1$ и утверждение верно для всех неперелыхных ординалов λ' таких, что $\lambda' < \lambda$.

Случай 1: $\lambda = \text{ord}(x^\alpha \partial_n)$ для некоторого $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, т. е. $v = x^\alpha \partial_n + \dots$, где три точки означают младшие члены. Следующее утверждение вытекает из (2.2) и определения линейного упорядочения на каноническом базисе $\mathcal{B}_n$ алгебры $\mathfrak{u}_n$.

Известно следующее утверждение: для каждого неперелыхного ординала λ' такого, что $\lambda' < \lambda$, существуют элементы из $\mathcal{B}_n$, скажем, $a_1, \dots, a_s$ такие, что $X_{\beta,i}, i \neq n$, такие, что

$$\text{ord}(\text{ad}(a_1) \cdots \text{ad}(a_s)(v)) = \lambda'.$$

Из этого утверждения индукцией по λ следует, что $(v) = I_{\text{ord}(v)}$.

Случай 2: $v = \partial_i + \dots$ для некоторого i такого, что $i < n$. Для всех элементов $x^\beta \partial_{i+1}$ при $\beta \in \mathbb{N}^i$ и $\beta_i \neq 0$ имеем

$$(v) \ni [v, x^\beta \partial_{i+1}] = \beta_i x^{\beta-e_i} \partial_{i+1} + \dots,$$

и потому $\text{ord}([v, x^\beta \partial_{i+1}]) = \text{ord}(x^{\beta-e_i} \partial_{i+1})$. По индукции $(v) \supseteq \bigcup_{\mu < \lambda} I_\mu =: J$. Однако $I_\lambda \supseteq (v) = Kv + J = K\partial_i + J = I_\lambda$, и потому $(v) = I_\lambda$.

Случай 3: $v = x^\alpha \partial_i + \dots$ для некоторого i такого, что $i < n$ и $\alpha \in \mathbb{N}^{i-1} \setminus \{0\}$. Заметим, что

$$(v) \ni \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\text{ad}(\partial_j)^{\alpha_j}}{\alpha_j!} (v) = \partial_i + \dots.$$

В силу случая 2 имеем $I_{\text{ord}(\partial_i)} \subseteq (v)$. Поскольку $\mathfrak{u}_{n,i+1} \subseteq I_{\text{ord}(\partial_i)}$, имеем $\mathfrak{u}_{n,i+1} \subseteq (v)$. В силу (2.6) получаем $\mathfrak{u}_i \simeq \mathfrak{u}_n / \mathfrak{u}_{n,i+1}$. По предположению имеем $i < n$. Рассматривая элемент $v + \mathfrak{u}_{n,i+1} \in \mathfrak{u}_i$, доказываем лемму в случае 3 индукцией по i . Лемма доказана.

Пусть $u, v \in \mathfrak{u}_n \setminus \{0\}$. Тогда $(u) \subseteq (v)$, если и только если $\text{ord}(u) \leq \text{ord}(v)$.

ТЕОРЕМА 3.6. 1) *Отображение (3.3) является биекцией.*

2) *Алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ является однорядной, артиновой, но не нётеровой алгеброй Ли, и ее однорядная размерность есть $\text{u.dim}(\mathfrak{u}_n) = \text{ord}(\Omega_n) = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) немедленно следует из леммы 3.5. Утверждение 2) следует из утверждения 1). Теорема доказана.

Идеал $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$ называется *собственным* (соответственно, *конечным*), если $\mathfrak{a} \neq 0, \mathcal{G}$ (соответственно, $\dim_K(\mathcal{G}/\mathfrak{a}) < \infty$).

СЛЕДСТВИЕ 3.7. 1) Идеал $\mathfrak{u}_{n,2}$ является наибольшим собственным идеалом алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$.

2) Идеал $\mathfrak{u}_{n,2}$ является единственным собственным коконечным идеалом алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, причем $\dim_K(\mathfrak{u}_n/\mathfrak{u}_{n,2}) = 1$.

3) Центр $Z(\mathfrak{u}_n) = K\partial_n$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ является наименьшим ненулевым идеалом алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$.

4) Идеалы $I_s := \sum_{i=0}^{s-1} Kx_1^i \partial_n$, $s = 1, 2, \dots$, и только они являются конечномерными идеалами алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, причем $\dim_K(I_s) = s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения – это несложные следствия теоремы 3.6.

3.4. Централизаторы идеалов алгебры $\mathfrak{u}_n$. В сочетании с теоремой 3.6 следующее предложение описывает централизаторы всех идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Заметим, что централизатор идеала алгебры Ли также является идеалом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. 1) Имеем

$$\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(I_{\lambda,n}) = \begin{cases} K\partial_n, & \text{если } \lambda = \text{ord}(\Omega_n) = \omega^{n-1} + \dots + \omega + 1, \\ I_{\omega^i,n} = P_i\partial_n, & \text{если } \lambda \in (\omega^{n-1} + \dots + \omega^{i+1}, \omega^{n-1} + \dots + \omega^i], \\ & i = 1, \dots, n-2, \\ \bigoplus_{i=m+1}^n P_{i-1}\partial_i, & \text{если } \lambda \in (\omega^{m-1}, \omega^m], \quad m = 1, \dots, n-1, \\ \mathfrak{u}_n, & \text{если } \lambda = 1. \end{cases}$$

2) Множество $\mathcal{C}(\mathfrak{u}_n)$ всех централизаторов идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ содержит в точности $2n-1$ элементов, а отображение $\mathcal{C}(\mathfrak{u}_n) \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{u}_n)$, $C \mapsto \text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(C)$, является биекцией. Более того, оно является обращающей вложение инволюцией, т.е. $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(C)) = C$ для всех $C \in \mathcal{C}(\mathfrak{u}_n)$.

3) Имеем $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(\mathfrak{u}_n) = K\partial_n$, $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(K\partial_n) = \mathfrak{u}_n$, $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(P_{n-1}\partial_n) = P_{n-1}\partial_n$, $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(P_i\partial_n) = \bigoplus_{j=i+1}^n P_{j-1}\partial_j$ и $\text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(\bigoplus_{j=i+1}^n P_{j-1}\partial_j) = P_i\partial_n$ для $i = 1, \dots, n-2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_\lambda := \text{Cen}_{\mathfrak{u}_n}(I_{\lambda,n})$. Если $\lambda = \text{ord}(\Omega_n)$, то $I_{\lambda,n} = \mathfrak{u}_n$ и $C_\lambda = Z(\mathfrak{u}_n) = K\partial_n$ по предложению 2.1, 6). Если $\lambda = 1$, то $I_{1,n} = K\partial_n = Z(\mathfrak{u}_n)$, и потому $C_1 = \mathfrak{u}_n$. Можно считать, что $\lambda \neq 1, \text{ord}(\Omega_n)$. Чтобы доказать утверждение 1), воспользуемся индукцией по $n \geq 2$. При $n = 2$ необходимо рассмотреть только случай, когда $\lambda \in (1, \omega]$. В этом случае

$$I_{\lambda,2} = \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{\lambda-1} x_1^i \partial_2, & \text{если } 1 < \lambda < \omega, \\ P_1 \partial_2, & \text{если } \lambda = \omega, \end{cases}$$

и потому $C_\lambda = P_1 \partial_2$.

Пусть $n > 2$; предположим, что утверждение 1) выполнено для всех $n' < n$.

Далее мы докажем следующее утверждение: имеем $C_{\omega^m} = \bigoplus_{i=m+1}^n P_{i-1}\partial_i$ для $m = 1, \dots, n-1$.

Для $m = n - 1$ имеем $I_{\omega^{n-1},n} = P_{n-1}\partial_n$ и данное утверждение – это лемма 2.5, 2). Предположим, что $m < n - 1$. Тогда $I_{\omega^m,n} = P_m\partial_n \subset I_{\omega^{n-1},n}$; отсюда $C_{\omega^m} \supseteq C_{\omega^{n-1}} = P_{n-1}\partial_n$. Это означает, что $\mathfrak{u}_n$ -модуль $I_{\omega^m,n}$ является также $(\mathfrak{u}_n/P_{n-1}\partial_n)$ -модулем и $\mathfrak{u}_{n-1}$ -модулем, так как $\mathfrak{u}_{n-1} \simeq \mathfrak{u}_n/P_{n-1}\partial_n$. Отображение

$$I_{\omega^m,n} = P_m\partial_n \rightarrow I_{\omega^m,n-1} = P_m\partial_{n-1}, \quad p\partial_n \mapsto p\partial_{n-1},$$

является изоморфизмом $\mathfrak{u}_{n-1}$ -модулей (так как $\partial_n \in Z(\mathfrak{u}_n)$ и $\partial_{n-1} \in Z(\mathfrak{u}_{n-1})$), и данное утверждение следует по индукции по n .

Предположим, что $1 < \lambda \leq \omega^{n-1}$, т. е. $\lambda \in (\omega^{m-1}, \omega^m]$ для некоторого $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Надо показать, что $C_\lambda = C_{\omega^m}$ (см. утверждение). В силу данного утверждения из вложений $I_{\omega^{m-1},n} \subset I_{\lambda,n} \subseteq I_{\omega^m,n}$ следуют вложения $C_{\omega^{m-1}} \supseteq C_\lambda \supseteq C_{\omega^m}$. Заметим, что $C_{\omega^{m-1}} = C_{\omega^m} \oplus P_{m-1}\partial_m$, $x_m\partial_n \in I_{\lambda,m}$ (так как $\lambda \in (\omega^{m-1}, \omega^m]$) и $[p\partial_m, x_m\partial_n] = p\partial_n \neq 0$ для всех ненулевых элементов $p \in P_{m-1}$. Отсюда следует, что $C_\lambda = C_{\omega^m}$, как и требуется.

Пусть $\omega^{n-1} < \lambda < \text{ord}(\Omega_n) = \omega^{n-1} + \dots + \omega + 1$, т. е. $\lambda \in (\omega^{n-1} + \dots + \omega^{i+1}, \omega^{n-1} + \dots + \omega^i]$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n-2\}$, и пусть $\lambda_i := \omega^{n-1} + \dots + \omega^i$. Тогда $I_{\lambda,n} \subseteq I_{\lambda_i,n} = \bigoplus_{j=i+1}^n P_{j-1}\partial_j = \text{Сеп}_{\mathfrak{u}_n}(I_{\omega^i,n})$ в силу приведенного утверждения. Значит, $C_\lambda \supseteq I_{\omega^i,n} = P_i\partial_n$. Из вложения $I_{\lambda,n} \supset P_{n-1}\partial_n = I_{\omega^{n-1},n}$ следует вложение $C_\lambda \subseteq C_{\omega^{n-1}} = P_{n-1}\partial_n$ в силу данного утверждения. Тогда из вложения $\{\partial_{i+1}, \dots, \partial_n\} \subseteq I_{\lambda,n}$ следует, что $C_\lambda \subseteq \text{Сеп}_{P_{n-1}}(\partial_{i+1}, \dots, \partial_n)\partial_n = P_i\partial_n = I_{\omega^i,n}$. Это означает, что $C_\lambda = I_{\omega^i,n}$.

Утверждение 2) следует из утверждения 3). Утверждение 3) следует из утверждения 1). Предложение доказано.

3.5. Гиперцентральный ряд и центральная размерность. Для алгебры Ли $\mathcal{G}$ над полем K определим по индукции ее *гиперцентральный ряд* $\{Z^{(\lambda)}(\mathcal{G})\}_{\lambda \in W}$. Положим $Z^{(0)}(\mathcal{G}) := Z(\mathcal{G})$. Если λ – непредельный ординал, т. е. $\lambda = \mu + 1$ для некоторого $\mu \in W$, то

$$Z^{(\lambda)}(\mathcal{G}) := \pi_\mu^{-1}(Z(\mathcal{G}/Z^{(\mu)}(\mathcal{G}))), \quad \text{где } \pi_\mu: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/Z^{(\mu)}(\mathcal{G}), \quad a \mapsto a + Z^{(\mu)}(\mathcal{G}).$$

Если λ – предельный ординал, то $Z^{(\lambda)}(\mathcal{G}) := \bigcup_{\mu < \lambda} Z^{(\mu)}(\mathcal{G})$. Если $\lambda \leq \mu$, то $Z^{(\lambda)}(\mathcal{G}) \subseteq Z^{(\mu)}(\mathcal{G})$. Итак, $\{Z^{(\lambda)}(\mathcal{G})\}_{\lambda \in W}$ – возрастающий класс идеалов алгебры Ли $\mathcal{G}$. Пусть $Z^{(W)}(\mathcal{G}) := \bigcup_{\lambda \in W} Z^{(\lambda)}(\mathcal{G})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Минимальное ординальное число λ (если оно существует) такое, что $Z^{(\lambda)}(\mathcal{G}) = Z^{(W)}(\mathcal{G})$, называется *центральной размерностью* алгебры Ли $\mathcal{G}$ и обозначается через $\text{с. dim}(\mathcal{G})$. В том случае, когда такого ординала λ не существует, пишем $\text{с. dim}(\mathcal{G}) = W$. Понятие центральной размерности имеет смысл для любого класса алгебр (ассоциативных, йордановых и т. п.).

Алгебра Ли $\mathcal{G}$ *центральна*, т. е. $Z(\mathcal{G}) = 0$, тогда и только тогда, когда $\text{с. dim}(\mathcal{G}) = 0$. Таким образом, центральная размерность измеряет отклонение от “центральности”. Следующая теорема описывает гиперцентральный ряд для алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ и дает $\text{с. dim}(\mathfrak{u}_n)$.

ТЕОРЕМА 3.10. *Гиперцентральный ряд $\{Z^{(\lambda)}(\mathfrak{u}_n)\}_{\lambda \in W}$ стабилизируется в точности на шаге $\text{ord}(\Omega_n) = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1$, т. е. $\text{с. dim}(\mathfrak{u}_n) =$*

$\text{ord}(\Omega_n)$. Более того, $Z^{(\lambda)}(\mathfrak{u}_n) = I_\lambda$ для каждого $\lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)]$. В частности, $Z^{(\text{c.dim}(\mathfrak{u}_n))}(\mathfrak{u}_n) = \mathfrak{u}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $Z^{(\lambda)} = I_\lambda$ для всех $\lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)]$, где $Z^{(\lambda)} := Z^{(\lambda)}(\mathfrak{u}_n)$. Воспользуемся индукцией по λ . Случай $\lambda = 1$ следует из предложения 2.1, 6): $Z^{(1)} = Z(\mathcal{G}) = K\partial_n = I_1$. Предположим, что $\lambda > 1$ и равенство выполняется для всех ординалов $\lambda' < \lambda$.

Если λ – предельный ординал, то

$$Z^{(\lambda)} = \bigcup_{\mu < \lambda} Z^{(\mu)} = \bigcup_{\mu < \lambda} I_\mu = I_\lambda.$$

Предположим, что λ – непрелельный ординал, т. е. $\lambda = \mu + 1$ для некоторого ординального числа μ .

Случай 1: $\lambda \leq \omega^{n-1}$. Тогда с необходимостью имеем $\lambda < \omega^{n-1}$, так как λ – непрелельный ординал, но ω^{n-1} предельный. Ясно, что $I_\lambda \subseteq Z^{(\lambda)}$ в силу (2.2) (так как $Z^{(\mu)} = I_\mu$ по индукции). Предположим, что $I_\lambda \neq Z^{(\lambda)}$; тогда с необходимостью $I_{\lambda+1} \subseteq Z^{(\lambda)}$ (по теореме 3.6, 1)). Если $\lambda = X_{\alpha,i}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ (напомним, что мы отождествили $(\Omega_n, \leq)$ и $(\mathcal{B}_n, \leq)$), то $\lambda + 1 = X_{\alpha+e_1,n}$ и $X_{\alpha+e_1,n} \in I_{\lambda+1}$, но $[\partial_1, X_{\alpha+e_1,n}] = (\alpha_1 + 1)X_{\alpha,n} \notin Z^{(\mu)}$. Противоречие. Значит, $Z^{(\lambda)} = I_\lambda$.

Случай 2: $\lambda > \omega^{n-1}$. Заметим, что $Z^{(\lambda)} \supseteq I_\lambda \supsetneq I_{\omega^{n-1}} = \mathfrak{u}_{n,n}$ и $\mathfrak{u}_n/\mathfrak{u}_{n,n} \simeq \mathfrak{u}_{n-1}$ в силу (2.6). Теперь завершим рассуждение индукцией по n . База индукции $n = 2$ следует из случаев 1, 2 для $n = 2$. Теорема доказана.

Идеал I алгебры Ли $\mathcal{G}$ называется *характеристическим идеалом*, если он инвариантен под действием всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{G}$, т. е. $\sigma(I) = I$ для всех $\sigma \in \text{Aut}_K(\mathcal{G})$. Очевидно, что идеал I характеристический тогда и только тогда, когда $\sigma(I) \subseteq I$ для всех $\sigma \in \text{Aut}_K(\mathcal{G})$.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. Все идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ являются характеристическими идеалами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения все идеалы в центральном ряду $\{Z^{(\lambda)}(\mathfrak{u}_n)\}$ являются характеристическими идеалами алгебры $\mathfrak{u}_n$, но это все идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ по теореме 3.10. Следствие можно также вывести из теоремы 3.6, 2).

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Для всех ненулевых элементов $u \in \mathfrak{u}_n$ и всех автоморфизмов σ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ выполняется $\text{ord}(\sigma(u)) = \text{ord}(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\text{ord}(u) = \min\{\lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)] \mid u \in I_\lambda\}. \quad (3.4)$$

Теперь утверждение следует из того, что все идеалы I_λ являются характеристическими (следствие 3.11).

3.6. Подалгебра U'_n алгебры Вейля A_n . Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал алгебры Ли $\mathcal{G}$. Тогда идеалом $U(\mathcal{G})\mathfrak{a}U(\mathcal{G})$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathcal{G})$, порожденным $\mathfrak{a}$, является $U(\mathcal{G})\mathfrak{a} = \mathfrak{a}U(\mathcal{G})$. Цепочка идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$

$$I_1 \subset \cdots \subset I_\lambda \subset \cdots \subset \mathfrak{u}_n = I_{\text{ord}(\Omega_n)}, \quad \lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)],$$

дает цепочку подалгебр и цепочку идеалов алгебры U_n соответственно

$$U(I_1) \subset \cdots \subset U(I_\lambda) \subset \cdots \subset U_n, \quad U_n I_1 \subset \cdots \subset U_n I_\lambda \subset \cdots \subset U_n.$$

Пусть $U'_{n,\lambda} := \chi_n(U(I_\lambda))$ и $I'_\lambda := \chi_n(U_n I_\lambda)$, где χ_n – гомоморфизм алгебр (2.11). Тогда

$$U'_{n,1} \subseteq \cdots \subseteq U'_{n,\lambda} \subseteq \cdots \subseteq U'_n = \chi_n(U_n) \quad (3.5)$$

является цепочкой подалгебр алгебры U'_n , а

$$I'_{n,1} \subseteq \cdots \subseteq I'_{n,\lambda} \subseteq \cdots \subseteq U'_n \quad (3.6)$$

является цепочкой идеалов алгебры U'_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. 1) Все включения в (3.5) строгие. Алгебра U'_n не конечно порождена.

2) Все включения в (3.6) строгие. В частности, алгебра U'_n не является ни лево-, ни правонётеровой алгеброй и не удовлетворяет условию максимальнойности для идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Воспользуемся индукцией по n . Пусть $n = 2$. Для каждого $i \in [1, \omega]$ алгебра $U'_{2,i}$ порождается коммутирующими элементами $x_1^j \partial_2$, где $0 \leq j \leq i - 1$, так как

$$x_1^j \partial_2 \cdot x_1^k \partial_2 = x_1^{j+k} \partial_2^2 \quad \forall j, k.$$

Эти равенства означают, что алгебра $U'_{2,i}$ изоморфна моноидной алгебре $K\mathcal{M}_i$ (посредством $x_1^j \partial_2 \mapsto (j, 1)$), где $\mathcal{M}_i$ – подмоноид из $(\mathbb{N}^2, +)$, порожденный элементами $(j, 1)$, $0 \leq j \leq i - 1$. Следовательно,

$$x_1^{i-1} \partial_2 \in U'_{2,i} \setminus U'_{2,i-1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Это означает, что вложения $U'_{2,1} \subset U'_{2,2} \subset \cdots \subset U'_{2,i} \subset \cdots \subset U'_{2,\omega} = \bigcup_{i \geq 1} U'_{2,i}$ строгие, и потому алгебра $U'_{2,\omega}$ не конечно порождена. Поскольку $\partial_1 \in U'_2 \setminus U'_{2,\omega}$, $U'_2 = U'_{2,\omega}[\partial_1; \text{ad}(\partial_1)]$ является алгеброй косых многочленов и $[\partial_1, U'_{2,i}] \subseteq U'_{2,i}$ для всех $i \geq 1$, утверждение 1) верно для $n = 2$.

Предположим, что $n > 2$ и утверждение 1) верно для всех $n' < n$. Пусть $\lambda \in [1, \omega^{n-1}]$. Тогда $\lambda + 1$ не является предельным ординалом. Заметим, что $[1, \omega^{n-1}] \subseteq [1, \text{ord}(\Omega_n))$. Отсюда следует, что $\lambda + 1 = (\alpha, n)$. Элементы $\{x^\beta \partial_n \mid \beta \in \mathbb{N}^{n-1}\}$ перестановочны. Более того,

$$x^\beta \partial_n \cdot x^\gamma \partial_n = x^{\beta+\gamma} \partial_n^2, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{N}^{n-1}.$$

Значит, $U'_{n,\lambda}$ является коммутативной алгеброй, изоморфной моноидной алгебре $K\mathcal{M}_{n,\lambda}$ (посредством $x^\beta \partial_n \mapsto (\beta, 1)$), где $\mathcal{M}_{n,\lambda}$ – подмоноид из $(\mathbb{N}^n, +)$, порожденный элементами $\{(\beta, 1) \mid (\beta, n) \leq \lambda\}$. Следовательно,

$$x^\alpha \partial_n \in U'_{n,\lambda+1} \setminus U'_{n,\lambda} \quad \forall \lambda \in [1, \omega^{n-1}].$$

Это означает, что (включения строгие)

$$U'_{n,1} \subset U'_{n,2} \subset \cdots \subset U'_{n,\lambda} \subset \cdots \subset U'_{n,\omega^{n-1}} = \bigcup_{\lambda \in [1, \omega^{n-1})} U'_{n,\lambda}.$$

Пусть $\lambda \geq \omega^{n-1}$. В силу теоремы 2.6, 1) и (3.3)

$$U'_n/I'_{n,\omega^{n-1}} \simeq U'_{n-1}, \quad (U'_{n,\omega^{n-1}+\mu} + I'_{n,\omega^{n-1}})/I'_{n,\omega^{n-1}} \simeq U'_{n-1,\mu}, \quad \mu \in [1, \text{ord}(\Omega_{n-1})]. \quad (3.7)$$

В силу индукции по n утверждение 1) выполняется.

2. Мы свободно используем факты, доказанные в п. 1. Воспользуемся индукцией по n . Пусть $n = 2$. Для каждого $i \in [1, \omega]$ идеал $I'_{2,i}$ алгебры U'_2 порожден коммутирующими элементами $x_1^j \partial_2$, где $0 \leq j \leq i-1$. В силу следствия 2.7 множество $W'_2 = \{\partial_1^i \partial_2^j, \partial_1^i x_1^k \partial_2 \cdot \partial_2^j \mid i, j \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$ является K -базисом алгебры U'_2 . Для каждого $i \in [1, \omega]$ имеем

$$I'_{2,i} = \sum_{j=0}^{i-1} U'_2 x_1^j \partial_2 = \bigoplus_{i \geq 0} \bigoplus_{k \geq 0, j \geq 2} K \partial_1^i x_1^k \partial_2^j \oplus \bigoplus_{i \geq 0} \bigoplus_{k=0}^{i-1} K \partial_1^i x_1^k \partial_2.$$

Следовательно,

$$x_1^{i-1} \partial_2 \in I'_{2,i} \setminus I'_{2,i-1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Это означает, что

$$I'_{2,1} \subset I'_{2,2} \subset \dots \subset I'_{2,i} \subset \dots \subset I'_{2,\omega} = \bigcup_{i \geq 1} I'_{2,i}.$$

Поскольку $1 \in U'_2 \setminus I'_{2,\omega+1}$ и $\partial_1 \in I'_{2,\omega+1} \setminus I'_{2,\omega}$, утверждение 2) верно для $n = 2$.

Предположим, что $n > 2$ и утверждение 2) верно для всех $n' < n$. Пусть $\lambda \in [1, \omega^{n-1})$. Тогда $\lambda + 1$ не является предельным ординалом. Заметим, что $[1, \omega^{n-1}) \subseteq [1, \text{ord}(\Omega_n))$. Отсюда следует, что $\lambda + 1 = (\alpha, n)$. Из равенства $I'_{n,\lambda+1} = U'_n \chi_n(I_{\lambda+1}) = \sum_{(\beta, n) \leq \lambda+1} U'_n x^\beta \partial_n$ и (2.2) следует, что

$$I'_{n,\lambda+1} \cap \left(\bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^{n-1}} K x^\beta \partial_n \right) = \bigoplus_{(\beta, n) \leq \lambda+1} K x^\beta \partial_n. \quad (3.8)$$

Следовательно,

$$x^\alpha \partial_n \in I'_{n,\lambda+1} \setminus I'_{n,\lambda} \quad \forall \lambda \in [1, \omega^{n-1}).$$

Это означает, что

$$I'_{n,1} \subset I'_{n,2} \subset \dots \subset I'_{n,\lambda} \subset \dots \subset I'_{n,\omega^{n-1}} = \bigcup_{\lambda \in [1, \omega^{n-1})} I'_{n,\lambda}.$$

Пусть $\lambda > \omega^{n-1}$. Ввиду (3.7) также имеем

$$I'_{n,\omega^{n-1}+\mu}/I'_{n,\omega^{n-1}} \simeq I'_{n-1,\mu} \quad \forall \mu \in [1, \text{ord}(\Omega_{n-1})]. \quad (3.9)$$

В силу индукции по n утверждение 2) выполняется. Предложение доказано.

3.7. Подалгебры Ли Гейзенберга алгебры $\mathfrak{u}_n$. Пусть

$$\mathfrak{gl}_n(K) = \bigoplus_{i,j=1}^n K E_{ij}$$

– алгебра Ли матриц размера $n \times n$, где E_{ij} – матричные единицы. Для каждого $n \geq 2$ пусть $\text{UT}_n(K) = \bigoplus_{i \leq j} K E_{ij}$ – алгебра Ли верхнетреугольных матриц

размера $n \times n$, $\text{UT}_n(K) \subseteq \text{gl}_n(K)$; K -линейное отображение

$$\text{UT}_n(K) \rightarrow \mathfrak{u}_n, \quad E_{ij} \mapsto x_i \partial_j,$$

является мономорфизмом алгебр Ли. отождествим алгебру Ли $\text{UT}_n(K)$ с ее образом в $\mathfrak{u}_n$.

Алгебра Ли Гейзенберга $\mathcal{H}_n$ – это $(2n+1)$ -мерная алгебра Ли с K -базисом $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z$, в которой Z – центральный элемент алгебры $\mathcal{H}_n$,

$$[Y_i, X_j] = \delta_{ij} Z, \quad [X_i, X_j] = 0, \quad [Y_i, Y_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где δ_{ij} – дельта-функция Кронекера. K -линейное отображение

$$\mathcal{H}_{n-1} \rightarrow \mathfrak{u}_n, \quad X_i \mapsto x_i \partial_n, \quad Y_i \mapsto \partial_i, \quad Z \mapsto \partial_n, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

является мономорфизмом алгебр Ли. отождествим алгебру Ли Гейзенберга $\mathcal{H}_{n-1}$ с ее образом в $\mathfrak{u}_n$. Поскольку $\mathcal{H}_{i-1} \subseteq \mathfrak{u}_i \subseteq \mathfrak{u}_n$ для $i = 2, \dots, n-1$, алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ содержит алгебры Ли Гейзенберга $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Для всех натуральных чисел i и j , $i \neq j$, имеем $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} K \partial_k$.

Пусть A – алгебра или алгебра Ли, а M – ее модуль. Тогда $\text{ann}_A(M) := \{a \in A \mid aM = 0\}$ называется *аннулятором* A -модуля M . Это идеал алгебры A . Модуль называется *точным*, если его аннулятор равен нулю.

3.8. $\mathfrak{u}_n$ -модуль P_n . Утверждать, что P_n является $\mathfrak{u}_n$ -модулем – это то же, что утверждать, что P_n является U'_n -модулем. Важность этого очевидного наблюдения состоит в том, что соотношения алгебры Вейля A_n можно использовать в различных вычислениях в алгебре U'_n , так как $U'_n \subseteq A_n$. Для каждого $n \geq 2$ алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ является подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathfrak{u}_{n+1} = \mathfrak{u}_n \oplus P_n \partial_{n+1}$, $P_n \partial_{n+1}$ – идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_{n+1}$ и $[P_n \partial_{n+1}, P_n \partial_{n+1}] = 0$. В частности, $P_n \partial_{n+1}$ – левый $\mathfrak{u}_n$ -модуль, где действие алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ на $P_n \partial_{n+1}$ задается по правилу $uv := [u, v]$ для всех $u \in \mathfrak{u}_n$ и $v \in P_n \partial_{n+1}$. Напомним, что алгебра многочленов P_n является левым $\mathfrak{u}_n$ -модулем.

ЛЕММА 3.14. 1) K -линейное отображение $P_n \rightarrow P_n \partial_{n+1}$, $p \mapsto p \partial_{n+1}$, является изоморфизмом $\mathfrak{u}_n$ -модулей.

2) $\mathfrak{u}_n$ -модуль P_n является неразложимым однорядным $\mathfrak{u}_n$ -модулем, кроме того, $\dim(P_n) = \omega^n$ и $\text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_n) = 0$.

3) Множество $\{P_{\lambda,n} := \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n, (\alpha, n+1) \leq \lambda} K x^\alpha \mid \lambda \in [1, \omega^n]\}$ является множеством всех ненулевых $\mathfrak{u}_n$ -подмодулей из P_n ; $P_{\lambda,n} \subset P_{\mu,n}$ тогда и только тогда, когда $\lambda < \mu$; $\dim(P_{\lambda,n}) = \lambda$ для всех $\lambda \in [1, \omega^n]$.

4) Все $\mathfrak{u}_n$ -подмодули из P_n являются попарно неизоморфными неразложимыми однорядными $\mathfrak{u}_n$ -модулями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) отметим, что данное отображение является биекцией и $\mathfrak{u}_n$ -гоморфизмом.

Докажем утверждение 3). В силу утверждения 1) можно отождествить $\mathfrak{u}_n$ -модуль P_n с идеалом $P_n \partial_{n+1}$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_{n+1}$. При этом отождествлении каждый $\mathfrak{u}_n$ -подмодуль из P_n становится идеалом алгебры Ли $\mathfrak{u}_{n+1}$ в $P_n \partial_{n+1}$, и наоборот. Теперь утверждение 3) следует из утверждения 1) и классификации идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_{n+1}$ (теорема 3.6, 1)).

Теперь докажем утверждение 2). В силу утверждения 3) $\mathfrak{u}_n$ -модуль P_n однороден, следовательно, неразложим и $\text{u.dim}(P_n) = \omega^n$. Алгебра Вейля A_n является простой алгеброй, отсюда следует, что $\text{ann}_{A_n}(P_n) = 0$. Тогда $\text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_n) = \mathfrak{u}_n \cap \text{ann}_{A_n}(P_n) = 0$, так как $\mathfrak{u}_n \subseteq A_n$.

Докажем утверждение 4). В силу утверждения 3) имеем $\text{u.dim}(P_{\lambda,n}) = \lambda$. Отсюда следует, что $P_{\lambda,n} \not\cong P_{\mu,n}$ для всех $\lambda \neq \mu$. Остальное очевидно (см. утверждение 2)).

Следующее следствие описывает аннуляторы всех $\mathfrak{u}_n$ -подмодулей из P_n . В частности, оно классифицирует точные $\mathfrak{u}_n$ -подмодули $\mathfrak{u}_n$ -модуля P_n .

СЛЕДСТВИЕ 3.15. 1) $\mathfrak{u}_n$ -подмодуль $P_{\lambda,n}$ из P_n является точным подмодулем тогда и только тогда, когда $\lambda \in [\omega^{n-1} + 1, \omega^n]$.

2) Имеем $\text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_{\omega^{n-1},n}) = P_{n-1}\partial_n$.

$$3) \text{ Имеем } \text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_{\lambda,n}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \in (\omega^{n-1}, \omega^n], \\ \bigoplus_{i=m+1}^n P_{i-1}\partial_i, & \text{если } \lambda \in (\omega^{m-1}, \omega^m], \\ \mathfrak{u}_n, & \text{если } \lambda = 1. \end{cases} \quad m = 1, \dots, n-1,$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 2). Вложение $\supseteq$ очевидно. Обратное вложение $\subseteq$ следует из того, что P_{n-1} – точный $\mathfrak{u}_{n-1}$ -модуль (лемма 3.14, 2)), $\mathfrak{u}_{n-1} \simeq \mathfrak{u}_n/P_{n-1}\partial_n$ и $P_{n-1} = P_{\omega^{n-1},n}$ является $(\mathfrak{u}_n/P_{n-1}\partial_n)$ -модулем.

Для доказательства утверждения 1) заметим, что если N – подмодуль из M , то $\text{ann}(N) \supseteq \text{ann}(M)$. Ввиду этого факта и утверждения 2), чтобы завершить доказательство утверждения 1), достаточно показать, что $\mathfrak{u}_n$ -модуль $P_{\omega^{n-1}+1,n}$ точен. Поскольку $P_{\omega^{n-1},n} \subseteq P_{\omega^{n-1}+1,n}$, имеем $\mathfrak{a} := \text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_{\omega^{n-1}+1,n}) \subseteq \text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_{\omega^{n-1},n}) = P_{n-1}\partial_n$. Так как $x_n \in P_{\omega^{n-1}+1,n}$ и $p\partial_n * (x_n) = p \neq 0$ для всех ненулевых элементов $p \in P_{n-1}$, имеем $\mathfrak{a} = 0$.

Докажем утверждение 3). Воспользуемся индукцией по $n \geq 2$. Начальный случай состоит в том, что $n = 2$, и нужно рассмотреть три случая: $\lambda \in (\omega, \omega^2]$, $\lambda = (1, \omega]$ и $\lambda = 1$. Первый случай – это утверждение 1). Последний случай очевиден. Во втором случае имеем

$$\text{ann}_{\mathfrak{u}_2}(P_{m,2}) = \text{ann}_{\mathfrak{u}_2}\left(\bigoplus_{i=0}^{m-1} Kx_1^i\right) = K[x_1]\partial_2.$$

Пусть $n > 2$, и предположим, что утверждение 3) выполнено для всех $n' < n$. Если $\lambda \in (\omega^{n-1}, \omega^n]$, то $\mathfrak{u}_n$ -модуль $P_{\lambda,n}$ точен по утверждению 1). Если $\lambda = 1$, то $\text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_{1,n}) = \text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(K) = \mathfrak{u}_n$. Если $1 < \lambda \leq \omega^{n-1}$, т.е. $\lambda \in (\omega^{m-1}, \omega^m]$ для некоторого $m \in \{1, \dots, n-1\}$, то $P_{\lambda,n} \subseteq P_{n-1}$. В силу утверждения 2) имеем $\mathfrak{a} := \text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_{\lambda,n}) \supseteq \text{ann}_{\mathfrak{u}_n}(P_{\omega^{n-1},n}) = P_{n-1}\partial_n$. Поскольку $\mathfrak{u}_{n-1} \simeq \mathfrak{u}_n/P_{n-1}\partial_n$, вложение $P_{\lambda,n} \subseteq P_{n-1}$ является вложением $\mathfrak{u}_{n-1}$ -модулей. Более того, $\mathfrak{u}_{n-1}$ -подмодуль $P_{\lambda,n}$ из P_{n-1} можно отождествить с $\mathfrak{u}_{n-1}$ -подмодулем $P_{\lambda,n-1}$ из P_{n-1} . Теперь результат следует индукцией по n .

СЛЕДСТВИЕ 3.16. При $n \geq 3$ идеал $I_{\omega^{n-2}+1} = Kx_{n-1}\partial_n + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-2}} Kx^\alpha \partial_n$ является наименьшим идеалом I алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, который является точным $\mathfrak{u}_{n-1}$ -модулем (т. е. $\text{ann}_{\mathfrak{u}_{n-1}}(I) = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.14, 1) и следствия 3.15, 1) $\mathfrak{u}_{n-1}$ -модуль $I_{\omega^{n-2}+1}$ точен, но его предшественник $I_{\omega^{n-2}}$ не точен, так как $\text{ann}_{\mathfrak{u}_{n-1}}(I_{\omega^{n-2}}) = \text{ann}_{\mathfrak{u}_{n-1}}(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-2}} Kx^\alpha \partial_n) \ni \partial_{n-1}$. Следствие доказано.

Вложение алгебр Ли $\mathfrak{u}_n \subseteq \mathfrak{u}_{n+1} = \mathfrak{u}_n \oplus P_{n-1}\partial_n$ сохраняет линейные упорядочения на базисах $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}_{n+1}$. Изоморфизм $\mathfrak{u}_n$ -модулей $P_n \rightarrow P_n\partial_{n+1}$, $p \mapsto p\partial_{n+1}$ (лемма 3.14, 1)) индуцирует линейное упорядочение на мономах $\{x^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ алгебры многочленов P_n по правилу $x^\alpha > x^\beta$ тогда и только тогда, когда $X_{\alpha,n+1} > X_{\beta,n+1}$, т. е. тогда и только тогда, когда $\alpha_n = \beta_n$, $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}, \dots, \alpha_{m+1} = \beta_{m+1}$ и $\alpha_m > \beta_m$ для некоторого $m \in \{1, \dots, n\}$. Это так называемое *обратное лексикографическое упорядочение* на $\{x^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ или $\mathbb{N}^n$ ($\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $x^\alpha > x^\beta$). В силу леммы 3.4, 3), 4) и леммы 3.14, 1) если $x^\alpha > x^\beta$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$), то:

- (i) $\partial_k * x^\alpha > \partial_k * x^\beta$ для всех $k = 1, \dots, n$ таких, что $\alpha_k \neq 0$;
- (ii) $X_{\gamma,k} * x^\alpha > X_{\gamma,k} * x^\beta$ для всех $k = 1, \dots, n-1$ и $\gamma \in \mathbb{N}^{k-1}$ таких, что $X_{\gamma,k} * x^\alpha \neq 0$, т. е. $\alpha_k \neq 0$.

Пусть $\mathcal{M}(P_n)$ – множество всех ненулевых подмодулей $\mathfrak{u}_n$ -модуля P_n ; это линейно упорядоченное множество относительно $\subseteq$. В силу леммы 3.14, 3) отображение

$$\kappa_n: [1, \omega^n] \rightarrow \mathcal{M}(P_n), \quad \lambda \mapsto P_{\lambda,n}, \quad (3.10)$$

является изоморфизмом линейно упорядоченных множеств. Каждый ненулевой многочлен $p \in P_n$ имеет однозначное представление в виде суммы

$$\lambda_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha > \beta} \lambda_\beta x^\beta, \quad \lambda_\alpha \in K^*, \quad \lambda_\beta \in K.$$

Элементы $\lambda_\alpha x^\alpha$ и λ_α называются *старшим членом* и *старшим коэффициентом* многочлена p соответственно (относительно линейного упорядочения $>$). Ординальное число

$$\text{ord}(p) := \text{ord}([1, \alpha])$$

(где $[1, \alpha] \subseteq [1, \omega^n]$) называется *ординальной степенью* многочлена p . Для всех ненулевых многочленов $p, q \in P_n$ и для $\lambda \in K^*$ имеем:

- (i) $\text{ord}(p + q) \leq \max\{\text{ord}(p), \text{ord}(q)\}$, как только $p + q \neq 0$;
- (ii) $\text{ord}(\lambda p) = \text{ord}(p)$;
- (iii) $\text{ord}(u * p) < \text{ord}(p)$ для всех $u \in \mathfrak{u}_n$ таких, что $u * p \neq 0$.

Для каждого ординала $\lambda \in [1, \omega^n)$ имеется однозначное представление:

$$\lambda = \alpha_n \omega^{n-1} + \alpha_{n-1} \omega^{n-2} + \dots + \alpha_2 \omega + \alpha_1,$$

где $\alpha_i \in \mathbb{N}$ и не все α_j равны нулю (отметим сдвиг на 1 в индексах коэффициентов α_i). Тогда

$$P_{\lambda,n} = \begin{cases} \oplus \{Kx^\beta \mid \beta \in \mathbb{N}^n, x^\beta \leq x_1^{-1} x^\alpha\}, & \text{если } \alpha_1 \neq 0, \\ \oplus \{Kx^\beta \mid \beta \in \mathbb{N}^n, x^\beta < x^\alpha\}, & \text{если } \alpha_1 = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

где $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$. Заметим, что $\alpha_1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда λ – неперелыйный ординал. Векторное пространство $P_{\lambda,n}$ обладает наибольшим мономом тогда и только тогда, когда λ – неперелыйный ординал, и в этом случае $x_1^{-1}x^\alpha$ – наибольший моном из $P_{\lambda,n}$. Ординальное число $\lambda \in [1, \omega^n)$ однозначно представляется в виде суммы:

$$\lambda = \alpha_m \omega^{m-1} + \alpha_{m-1} \omega^{m-2} + \dots + \alpha_j \omega^{j-1}, \quad \alpha_m \neq 0, \quad \alpha_j \neq 0,$$

где $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$ и $1 \leq j \leq m$. Натуральные числа α_m и α_j называются *кратностью* и *кократностью* ординального числа λ . Натуральные числа $m-1$ и $j-1$ называются *степенью* и *костепенью* ординального числа λ .

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 3.17. Пусть $\lambda \in [1, \omega^n)$, т.е. $\lambda = \alpha_m \omega^{m-1} + \alpha_{m-1} \omega^{m-2} + \dots + \alpha_j \omega^{j-1}$, где $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_m \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$, $m \leq n$ и $j \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{\lambda,n} = & \sum_{i=0}^{\alpha_m-1} x_m^i P_{m-1} + x_m^{\alpha_m} \sum_{0 \leq i \leq \alpha_{m-1}-1} x_{m-1}^i P_{m-2} + \dots \\ & \dots + x_m^{\alpha_m} x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \dots x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \sum_{0 \leq i \leq \alpha_k-1} x_k^i P_{k-1} + \dots \\ & \dots + x_m^{\alpha_m} x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \dots x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \sum_{0 \leq i \leq \alpha_j-1} x_j^i P_{j-1}. \end{aligned}$$

В частности, $P_{\alpha_m \omega^{m-1}, n} = \sum_{i=0}^{\alpha_m-1} x_m^i P_{m-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.18. Если $\alpha_k = 0$, то соответствующее слагаемое отсутствует.

Пусть V – векторное пространство над полем K . Линейное отображение $\varphi: V \rightarrow V$ называется *отображением/оператором Фредгольма*, если его ядро и коядро конечномерны, и тогда

$$\text{ind}(\varphi) := \dim_K(\ker(\varphi)) - \dim_K(\text{coker}(\varphi))$$

называется *индексом* отображения φ . Пусть $\mathcal{F}(V)$ – множество всех линейных отображений Фредгольма в V . На самом деле это моноид, так как

$$\text{ind}(\varphi\psi) = \text{ind}(\varphi) + \text{ind}(\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}(V). \quad (3.12)$$

Пусть V – векторное пространство со счетным K -базисом $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, а ∂ – K -линейное отображение на V , заданное по правилу $\partial e_i = e_{i-1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, где $e_{-1} := 0$.

Например, $V = K[x]$, $e_i := \frac{x^i}{i!}$ и $\partial = \frac{d}{dx}$. Подалгебра из $\text{End}_K(V)$, порожденная отображением ∂ , является алгеброй многочленов $K[\partial]$. Поскольку отображение ∂ локально нильпотентно, алгебра $\text{End}_K(V)$ содержит алгебру $K[[\partial]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \partial^i \mid \lambda_i \in K\}$ формальных степенных рядов от ∂ . Множество $K[[\partial]]^* = \{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \partial^i \in K[[\partial]] \mid \lambda_0 \in K^*\}$ – группа единиц алгебры $K[[\partial]]$. Векторное пространство V является $K[\partial]$ -модулем.

Следующая лемма тривиальна.

ЛЕММА 3.19. 1) *Имеем*

$$\begin{aligned} \text{End}_{K[\partial]}(V) &= \left\{ \varphi \in \text{End}_K(V), \varphi(e_i) = \sum_{j=0}^i \lambda_j e_{i-j} = \left(\sum_{j \geq 0} \lambda_j \partial^j \right) (e_i), i \in \mathbb{N} \mid \right. \\ &\quad \left. \lambda_i \in K, i \in \mathbb{N} \right\} = K[[\partial]], \\ \text{Aut}_{K[\partial]}(V) &= \left\{ \varphi \in \text{End}_K(V), \varphi(e_i) = \sum_{j=0}^i \lambda_j e_{i-j}, i \in \mathbb{N} \mid \right. \\ &\quad \left. \lambda_0 \neq 0, \lambda_i \in K, i \in \mathbb{N} \right\} = K[[\partial]]^*. \end{aligned}$$

2) *В частности, все ненулевые элементы $\text{End}_{K[\partial]}(V)$ являются сюръективными отображениями Фредгольма.*

3) *Пусть $a = \sum_{i \geq d} \lambda_i \partial^i \in K[[\partial]]$ и $\lambda_d \neq 0$. Тогда $d = \text{ind}(a) = \dim_K(\ker(a))$.*

Пусть V – векторное пространство с K -базисом $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, а x – K -линейное отображение на V , определенное следующим образом: $x e_i := e_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Например, $V = K[x]$, $e_i := x^i$ и $x: K[x] \rightarrow K[x]$, $p \mapsto xp$. Алгебра многочленов $K[x]$ является подалгеброй алгебры $\text{End}_K(V)$.

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 3.20. 1) *Имеем $\text{End}_{K[x]}(V) = \{p: V \rightarrow V, a \mapsto pa \mid p \in K[x]\} \simeq K[x]$ (посредством $p \mapsto p$). В частности, все ненулевые элементы $\text{End}_{K[x]}(V)$ являются инъективными отображениями.*

2) *Имеем $\text{Aut}_{K[x]}(V) = K^*$.*

3) *Для всех $p \in \text{End}_{K[x]}(V) = K[x]$ выполнены равенства $\deg(p) = -\text{ind}(p) = \dim_K(\text{coker}(p))$.*

Следующее предложение описывает алгебру всех $\mathfrak{u}_n$ -гомоморфизмов (и ее группу единиц) $\mathfrak{u}_n$ -модуля P_n . Ясно, что $K[x_n] \subseteq P_n$ – вложение $K[\partial_n]$ -модулей и $K[[\frac{d}{dx_n}]] = \text{End}_{K[\partial_n]}(K[x_n])$ (лемма 3.19, 1)). K -дифференцирование $\frac{d}{dx_n}$ алгебры многочленов $K[x_n]$ также обозначается через ∂_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.21. 1) *Отображение $\text{End}_{\mathfrak{u}_n}(P_n) \rightarrow \text{End}_{K[\partial_n]}(K[x_n]) = K[[\frac{d}{dx_n}]]$, $\varphi \mapsto \varphi|_{K[x_n]}$, является изоморфизмом K -алгебр с обратным отображением $\varphi' \mapsto \varphi$, где $\varphi(x^\beta x_n^i) := X_{\beta,n} \varphi'(\frac{x_n^{i+1}}{i+1})$ для всех $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$ и $i \in \mathbb{N}$.*

2) *Отображение $\text{Aut}_{\mathfrak{u}_n}(P_n) \rightarrow \text{Aut}_{K[\partial_n]}(K[x_n]) = K[[\frac{d}{dx_n}]]^*$, $\varphi \mapsto \varphi|_{K[x_n]}$, является групповым изоморфизмом с обратным отображением, как в утверждении 1).*

3) *Каждое ненулевое отображение $\varphi \in \text{End}_{\mathfrak{u}_n}(P_n)$ является сюръективным отображением с ядром $\ker(\varphi) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} P_{n-1} x_n^i$, где $d = \text{ind}(\varphi|_{K[x_n]}) = \dim_K(\ker(\varphi|_{K[x_n]}))$.*

4) *Для всех натуральных $d \geq 1$ выполняется $(\frac{\partial}{\partial x_n})^d \in \text{End}_{\mathfrak{u}_n}(P_n)$ и $\ker_{P_n}(\frac{\partial}{\partial x_n})^d = \bigoplus_{i=0}^{d-1} P_{n-1} x_n^i$. В частности, $(\frac{\partial}{\partial x_n})^d: P_n / \bigoplus_{i=0}^{d-1} P_{n-1} x_n^i \rightarrow P_n$ – изоморфизм $\mathfrak{u}_n$ -модулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 1). В силу леммы 3.19 имеем $\text{End}_{K[\partial_n]}(K[x_n]) = K[[\frac{d}{dx_n}]]$. Поскольку $K[x_n] = \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker_{P_n}(\partial_i)$ и отображения $\partial_1, \dots, \partial_n$ перестановочны, отображение $\varphi \mapsto \varphi|_{K[x_n]}$ – корректно определенный гомоморфизм K -алгебр. Для всех элементов $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$ и $i \in \mathbb{N}$

$$\varphi(x^\beta x_n^i) = \varphi\left(X_{\beta,n} * \frac{x_n^{i+1}}{i+1}\right) = X_{\beta,n} \varphi\left(\frac{x_n^{i+1}}{i+1}\right).$$

Значит, отображение ограничения является мономорфизмом. Чтобы доказать, что отображение ограничения – сюръекция, необходимо показать, что для данного отображения $\varphi' \in \text{End}_{K[\partial_n]}(K[x_n])$ его продолжение φ , определенное, как в формулировке утверждения 1), является $\mathfrak{u}_n$ -гомоморфизмом. Отображение φ является K -линейным отображением, так что надо проверить, что $\varphi X_{\alpha,i} = X_{\alpha,i} \varphi$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $\alpha \in \mathbb{N}^{i-1}$.

Случай 1: $i < n$. Для всех $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$ и $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi X_{\alpha,i}(x^\beta \cdot x_n^j) &= \varphi(x^\alpha \partial_i * x^\beta x_n^j) = \varphi(\beta_i x^{\alpha+\beta-e_i} x_n^j) = \beta_i X_{\alpha+\beta-e_i,n} \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right), \\ X_{\alpha,i} \varphi(x^\beta \cdot x_n^j) &= x^\alpha \partial_i * \left(x^\beta \partial_n * \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right)\right) = \beta_i x^{\alpha+\beta-e_i} \partial_n * \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right) \\ &\quad + x^\beta \partial_n * x^\alpha \partial_i * \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right) = \beta_i x^{\alpha+\beta-e_i} \partial_n * \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right) + 0 \\ &= \beta_i X_{\alpha+\beta-e_i,n} \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right). \end{aligned}$$

Случай 2: $i = n$. Пусть $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$ и $j \in \mathbb{N}$. Предположим, что $j \geq 1$; тогда

$$\begin{aligned} \varphi X_{\alpha,n}(x^\beta x_n^j) &= \varphi(x^{\alpha+\beta} j x_n^{j-1}) = X_{\alpha+\beta,n} \varphi'(x_n^j), \\ X_{\alpha,n} \varphi(x^\beta x_n^j) &= x^\alpha \partial_n * \left(x^\beta \partial_n * \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right)\right) = x^{\alpha+\beta} \partial_n * \partial_n * \varphi'\left(\frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right) \\ &= X_{\alpha+\beta,n} \varphi'\left(\partial_n * \frac{x_n^{j+1}}{j+1}\right) = X_{\alpha+\beta,n} \varphi'(x_n^j). \end{aligned}$$

Предположим, что $j = 0$; тогда

$$\begin{aligned} \varphi X_{\alpha,n}(x^\beta) &= \varphi(0) = 0, \\ X_{\alpha,n} \varphi(x^\beta) &= x^\alpha \partial_n * x^\beta \partial_n * \varphi'(x_n) = x^{\alpha+\beta} \partial_n * \partial_n * \varphi'(x_n) \\ &= X_{\alpha+\beta,n} \varphi'(\partial_n * x_n) = X_{\alpha+\beta,n} \varphi'(1) = 0 \end{aligned}$$

(так как $\varphi'(1) \in K$).

Утверждение 2) следует из утверждения 1). Утверждение 3) следует из утверждения 1) и леммы 3.19. Утверждение 4) следует из утверждения 1). Предложение доказано.

3.9. Мономиальные подпространства алгебры многочленов P_n .

Пусть S – подмножество из $\mathbb{N}^n$; векторное пространство $P_n(S) := \bigoplus_{\alpha \in S} K x^\alpha$ называется *мономиальным* подпространством алгебры многочленов P_n с носителем S . По определению положим $P_n(\emptyset) := 0$. Ясно, что $\bigcap_{i \in I} P_n(S_i) = P_n(\bigcap_{i \in I} S_i)$.

ПРИМЕР 3.22. Для каждого натурального $i = 1, \dots, n$ и ординального числа $\lambda \in [1, \omega^n)$ векторное пространство $\{p \in P_n \mid \frac{\partial p}{\partial x_i} \in P_{\lambda,n}\}$ является мономиальным подпространством из P_n , а потому таковым является и их пересечение

$$P'_{\lambda,n} := \left\{ p \in P_n \mid \frac{\partial p}{\partial x_i} \in P_{\lambda,n}, i = 1, \dots, n \right\} \\ = \oplus \left\{ Kx^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n, \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_i} \in P_{\lambda,n}, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Ясно, что $P_{\lambda,n} \subseteq P'_{\lambda,n}$. Следующая теорема описывает векторное пространство $P'_{\lambda,n}$ и показывает, что вложение всегда строгое и $\dim_K(P'_{\lambda,n}/P_{\lambda,n}) < \infty$.

ТЕОРЕМА 3.23. Пусть $\lambda \in [1, \omega^n)$, т.е. $\lambda = \alpha_n \omega^{n-1} + \alpha_{n-1} \omega^{n-2} + \dots + \alpha_i \omega^{i-1} + \dots + \alpha_j \omega^{j-1}$, где $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq 0$ и $j \geq 1$. Тогда:

- 1) $P'_{\lambda,n} = P_{\lambda,n} \oplus \bigoplus_{i=j}^n K\theta_i$, где $\theta_i = \begin{cases} x^\alpha = \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}, & \text{если } i = j, \\ x_i \prod_{k=i}^n x_k^{\alpha_k}, & \text{если } j < i \leq n; \end{cases}$
- 2) $1 \leq \dim_K(P'_{\lambda,n}/P_{\lambda,n}) = n - j + 1 \leq n$;
- 3) λ – неперелый ординал (т.е. $\alpha_1 \neq 0$), если и только если выполнено равенство $\dim_K(P'_{\lambda,n}/P_{\lambda,n}) = n$;
- 4) $1 \leq \dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P'_{\lambda,n}) = j \leq n-1$ и множество элементов $\{x_i x^\alpha + P'_{\lambda,n} \mid i = 1, \dots, j\}$ – базис векторного пространства $P'_{\lambda+1,n}/P'_{\lambda,n}$;
- 5) векторные пространства $\{P'_{\lambda,n} \mid \lambda \in [1, \omega^n)\}$ различны; в частности, если $\lambda < \mu$, то $P'_{\lambda,n} \subsetneq P'_{\mu,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 1). Пусть R – правая часть равенства в формулировке утверждения 1). Тогда $P'_{\lambda,n} \supseteq R$ (согласно лемме 3.17). В частности, множество $P'_{\lambda,n} \setminus P_{\lambda,n}$ непусто.

Случай 1: λ – неперелый ординал, т.е. $j = 1$ ($\alpha_1 \neq 0$). В этом случае

$$P_{\lambda,n} = \oplus \{Kx^\alpha \mid x^\beta \leq x^{\alpha'}\}$$

(см. (3.11)), где $x^{\alpha'} := x_1^{-1} x^\alpha$, т.е. $\alpha'_1 = \alpha_1 - 1$ и $\alpha'_i = \alpha_i$ для $i = 2, \dots, n$. Пусть $x^\beta \in P'_{\lambda,n} \setminus P_{\lambda,n}$. Тогда $x^\beta > x^{\alpha'}$ и существуют натуральное i такое, что $1 \leq i \leq n$, и $\beta_j = \alpha_j$ для всех $j > i$ и $\beta_i = \alpha'_i + 1$. Тогда с необходимостью $\beta_k = 0$ для всех $k < i$ (так как $\frac{\partial x^\beta}{\partial x_k} \leq x^{\alpha'}$ для всех $k < i$), и потому $x^\beta = \theta_i$.

Случай 2: λ – перелый ординал, т.е. $j > 1$ ($\alpha_1 = 0$). В этом случае

$$P_{\lambda,n} = \oplus \{Kx^\gamma \mid x^\gamma < x^\alpha\}$$

(см. (3.11)). Пусть $x^\beta \notin P_{\lambda,n}$. Тогда $x^\beta \in P'_{\lambda,n}$, если и только если $\frac{\partial x^\beta}{\partial x_i} < x^\alpha$ для всех $i = 1, \dots, n$ (напомним, что $P_{\lambda,n} = \oplus \{Kx^\gamma \mid x^\gamma < x^\alpha\}$), т.е. тогда и только тогда, когда:

- (i) $\frac{\partial x^\beta}{\partial x_i} \leq x^\alpha$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (ii) $\frac{\partial x^\beta}{\partial x_i} \notin K^* x^\alpha$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Условие (i) – это случай 1 для $\lambda + 1$. Значит,

$$\begin{aligned} P'_{\lambda,n} &= P'_{\lambda,n} \cap P'_{\lambda+1,n} = P'_{\lambda,n} \cap \left(P_{\lambda+1,n} \oplus \bigoplus_{i=1}^n K\theta'_i \right) \\ &= P'_{\lambda,n} \cap \left(P_{\lambda,n} \oplus Kx^\alpha \oplus \bigoplus_{i=1}^n K\theta'_i \right) = P_{\lambda,n} \oplus Kx^\alpha \oplus P'_{\lambda,n} \cap \bigoplus_{i=1}^n K\theta'_i \\ &= P_{\lambda,n} \oplus Kx^\alpha \oplus \bigoplus_{i=1}^n P'_{\lambda,n} \cap K\theta'_i, \end{aligned}$$

где

$$\theta'_i := \begin{cases} x_i \prod_{k=i}^n x_k^{\alpha_k}, & \text{если } i > j, \\ x_i x^\alpha, & \text{если } i \leq j. \end{cases}$$

Заметим, что $\theta_j = x^\alpha$ и $\theta'_i = \theta_i \in P'_{\lambda,n}$ для $j < i \leq n$. Условие (ii) исключает в точности элементы $\{\theta'_i \mid i \leq j\}$, т.е. $\bigoplus_{i=1}^n (P'_{\lambda,n} \cap K\theta'_i) = \bigoplus_{j < i \leq n} K\theta'_i = \bigoplus_{j < i \leq n} K\theta_i$. Доказательство утверждения 1) закончено.

Утверждение 2) следует из утверждения 1). Утверждение 3) следует из утверждения 2).

Докажем утверждение 4). Ординальное число $\lambda + 1$ – неперелый ординал. В силу утверждения 3) имеем $\dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P_{\lambda+1,n}) = n$. Заметим, что $P_{\lambda,n} \subset P_{\lambda+1,n} \subset P'_{\lambda+1,n}$ и $\dim_K(P_{\lambda+1,n}/P_{\lambda,n}) = 1$. В силу утверждения 1) имеем

$$\dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P_{\lambda,n}) = \dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P_{\lambda+1,n}) + \dim_K(P_{\lambda+1,n}/P_{\lambda,n}) = n + 1.$$

Наконец, в силу утверждения 2)

$$\dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P'_{\lambda,n}) = \dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P_{\lambda,n}) - \dim_K(P'_{\lambda,n}/P_{\lambda,n}) = n + 1 - (n - j + 1) = j$$

и $1 \leq j = \dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P'_{\lambda,n}) \leq n - 1$. Элементы $\theta'_i := x_i x^\alpha$, $i = 1, \dots, j$, являются элементами θ_i , $i = 1, \dots, j$, в утверждении 1), но для ординала $\lambda + 1$, а не для λ . Ясно, что $\theta'_i \in P'_{\lambda+1,n} \setminus P'_{\lambda,n}$ для $i = 1, \dots, j$. Значит, элементы $\{\theta'_i + P_{\lambda,n} \mid i = 1, \dots, j\}$ K -линейно независимы в векторном пространстве $P'_{\lambda+1,n}/P'_{\lambda,n}$, так как векторные пространства $P'_{\lambda+1,n}$ и $P'_{\lambda,n}$ – мономиальные пространства. Эти элементы образуют базис векторного пространства $P'_{\lambda+1,n}/P'_{\lambda,n}$, так как $j = \dim_K(P'_{\lambda+1,n}/P'_{\lambda,n})$.

Утверждение 5) следует из утверждения 4). Теорема доказана.

Например, для всех натуральных i и j имеем

$$P'_{i\omega^{n-1},n} = P_{i\omega^{n-1},n} \oplus Kx_n^i, \quad P'_{i\omega^{n-1}+j,n} = P_{i\omega^{n-1}+j,n} \oplus Kx_1^j x_n^i \oplus \bigoplus_{2 \leq k \leq n} Kx_k x_n^i.$$

ПРИМЕР 3.24. Рассмотрим следующие условия:

$$P_{i-1} \frac{\partial p}{\partial x_i} \subseteq P_{\lambda,n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Для каждого натурального $i = 1, \dots, n$, элемента $\alpha \in \mathbb{N}^{i-1}$ и ординального числа $\lambda \in [1, \omega^n)$ векторное пространство $\{p \in P_n \mid x^\alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} \in P_{\lambda,n}\}$ является мономиальным подпространством из P_n , значит, таковым является пересечение

$$P''_{\lambda,n} := \{p \in P_n \mid p \text{ удовлетворяет (3.13)}\} \\ = \oplus \{Kx^\beta \mid \beta \in \mathbb{N}^n, x^\beta \text{ удовлетворяет (3.13)}\}.$$

Для всех ординальных чисел $\lambda \in [1, \omega^n)$

$$P_{\lambda,n} \subseteq P''_{\lambda,n} \subseteq P'_{\lambda,n}.$$

Первое вложение следует из того, что $P_{\lambda,n}$ – $\mathfrak{u}_n$ -модуль. Если $\lambda \leq \mu$, то $P''_{\lambda,n} \subseteq P''_{\mu,n}$. Следующее следствие показывает, что данные вложения строгие, и дает K -базис для каждого векторного пространства $P''_{\lambda,n}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.25. Пусть $\lambda \in [1, \omega^n)$, т. е. $\lambda = \alpha_m \omega^{m-1} + \alpha_{m-1} \omega^{m-2} + \dots + \alpha_j \omega^{j-1}$, где $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_m \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$, $m \leq n$ и $j \geq 1$. Тогда:

- 1) $P''_{\lambda,n} = P_{\lambda,n} \oplus Kx^\alpha = P_{\lambda+1,n}$, где $x^\alpha = \prod_{k=j}^m x_k^{\alpha_k}$;
- 2) векторные пространства $\{P''_{\lambda,n} \mid \lambda \in [1, \omega^n)\}$ различны; в частности, если $\lambda < \mu$, то $P''_{\lambda,n} \subsetneq P''_{\mu,n}$;
- 3) $\dim_K(P''_{\lambda,n}/P_{\lambda,n}) = 1$;
- 4) $\dim_K(P''_{\lambda+1,n}/P''_{\lambda,n}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) сразу следует из леммы 3.17, включений $P_{\lambda,n} \subseteq P''_{\lambda,n} \subseteq P'_{\lambda,n}$ и теоремы 3.23.

Утверждения 2)–4) следуют из утверждения 1). Следствие доказано.

§ 4. Локальная конечномерность и локальная нильпотентность алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$

Цель этого параграфа – доказательство теоремы 4.2. Ключевые идеи состоят в том, чтобы использовать однорядность алгебры $\mathfrak{u}_n$, индукцию по ординалам $\lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)]$ и теорему 4.1, дающую достаточные условия нильпотентности алгебры Ли.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть J – идеал алгебры Ли $\mathcal{G}$ такой, что факторалгебра Ли $\overline{\mathcal{G}} := \mathcal{G}/J$ является конечномерной нильпотентной алгеброй Ли, J – нильпотентная алгебра Ли и каждый элемент $a \in \mathcal{G}$ действует нильпотентно на J (т. е. $(\text{ad } a)^n(J) = 0$ для некоторого натурального $n = n(a)$). Тогда $\mathcal{G}$ – нильпотентная алгебра Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по $d = \dim_K(\overline{\mathcal{G}})$. Случай $d = 0$, т. е. $\mathcal{G} = J$, очевиден.

Пусть $d = 1$. Это самый важный случай, так как мы сведем общий случай к нему. Тогда $\mathcal{G} = Ka \oplus J$, где $a \in \mathcal{G} \setminus J$. Пусть $\delta := \text{ad}(a) \in \text{Inn}(\mathcal{G})$ и $\partial := \text{ad}(J) := \{\text{ad}(j) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \mid j \in J\}$. Алгебра Ли J нильпотентна, т. е.

$$\partial^n(J) = \underbrace{\text{ad}(J) \cdots \text{ad}(J)}_n(J) = 0$$

для некоторого натурального $n \geq 1$. Для всех элементов $b \in J$

$$[\delta, \text{ad}(b)] = [\text{ad}(a), \text{ad}(b)] = \text{ad}([a, b]) \in \partial;$$

отсюда следует, что $\partial\delta \subseteq \delta\partial + \partial$. По условию отображение δ действует нильпотентно на идеале J . Значит, увеличивая (если нужно) число n , можно считать, что $\delta^n(J) = 0$. Чтобы доказать, что $\mathcal{G}$ – нильпотентная алгебра Ли, нужно показать, что $(K\delta + \partial)^{m+1}(\mathcal{G}) = 0$ для некоторого натурального m (из $\mathcal{G} = Ka \oplus J$ следует, что $\text{ad}(\mathcal{G}) = K\delta + \partial$). Достаточно показать, что

$$(K\delta + \partial)^m(J) = 0$$

для некоторого натурального m , так как $(K\delta + \partial)(\mathcal{G}) \subseteq [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = [Ka + J, Ka + J] \subseteq J$. Докажем, что достаточно взять $m = n(n+1)$. Пусть $m = n(n+1)$. Тогда

$$(K\delta + \partial)^m \subseteq \sum_{s=0}^m W_s;$$

здесь W_s – множество конечных линейных комбинаций элементов w_s , где w_s – слово длины m в алфавите $\{\delta, \partial\}$, которое содержит ровно s элементов ∂ и $m-s$ элементов δ в своем произведении. Достаточно показать, что $w_s(J) = 0$ для всех $s = 0, 1, \dots, m$.

Заметим, что $\delta(J) \subseteq J$ и $\delta\partial^i(J) \subseteq \partial^i(J)$ для всех $i \geq 1$. Для всех s таких, что $n \leq s \leq m$, имеем $w_s(J) \subseteq \partial^s(J) = 0$, так как $s \geq n$ и $\partial^n(J) = 0$. Для всех s таких, что $0 \leq s < n$, слово w_s имеет вид $\delta^{n_1}\partial\delta^{n_2}\partial\cdots\delta^{n_s}\partial\delta^{n_{s+1}}$, где $n_1 + \cdots + n_{s+1} = m - s$. Хотя бы одно из чисел n_i не меньше n , так как иначе будем иметь

$$n^2 = m - n \leq m - s = n_1 + \cdots + n_{s+1} \leq (s+1)(n-1) \leq n(n-1).$$

Противоречие. Тогда $\delta^{n_i}\partial\cdots\delta^{n_s}\partial\delta^{n_{s+1}}(J) \subseteq \delta^{n_i}(J) = 0$, так как $n_i \geq n$ и $\delta^n(J) = 0$. Значит, $w_s(J) = 0$.

Пусть $d > 1$. Алгебра Ли $\overline{\mathcal{G}}$ нильпотентна. Зафиксируем идеал, скажем, $\overline{\mathcal{J}}$ из $\overline{\mathcal{G}}$ такой, что $\dim_K(\overline{\mathcal{G}}/\overline{\mathcal{J}}) = 1$. Пусть $\pi: \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}, g \mapsto \overline{g} := g + J$, – канонический эпиморфизм алгебр Ли. Идеал $\mathcal{J} := \pi^{-1}(\overline{\mathcal{J}})$ алгебры Ли $\mathcal{G}$ имеет коразмерность 1 ($\dim_K(\mathcal{G}/\mathcal{J}) = \dim_K(\overline{\mathcal{G}}/\overline{\mathcal{J}}) = 1$), и J – идеал алгебры Ли $\mathcal{J}$. Пара $(\mathcal{J}, J)$ удовлетворяет условиям теоремы, и $\dim_K(\mathcal{J}/J) = \dim_K(\overline{\mathcal{G}}) - 1 < d$. В силу индукции по d алгебра Ли $\mathcal{J}$ нильпотентна. Теперь пара $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ такая же, как в случае $d = 1$, рассмотренном выше. В самом деле, $\dim_K(\mathcal{G}/\mathcal{J}) = 1$, и элемент $a \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{J}$ в разложении $\mathcal{G} = Ka \oplus \mathcal{J}$ действует нильпотентно на $\mathcal{J}$, так как $\overline{\mathcal{G}}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Подробнее, пусть $\delta := \text{ad}(a)$. Тогда $\delta^s(\mathcal{G}) \subseteq J$ для некоторого s , так как $\overline{\mathcal{G}}$ – конечномерная нильпотентная алгебра Ли; $\delta^t(J) = 0$ для некоторого t по условию. Отсюда следует, что $\delta^{s+t}(\mathcal{J}) \subseteq \delta^{s+t}(\mathcal{G}) \subseteq \delta^t(J) = 0$. Значит, $\mathcal{G}$ – нильпотентная алгебра Ли. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. *Алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ локально конечномерны и локально нильпотентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что подалгебра Ли $\mathcal{G}$ алгебры $\mathfrak{u}_n$, порожденная конечным множеством элементов, скажем, $a_1, \dots, a_\nu$, – конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Случай $\nu = 1$ тривиален. Без ограничения общности можно считать, что $\nu \geq 2$, элементы a_i K -линейно независимы и

$$\text{ord}(a_1) < \text{ord}(a_2) < \dots < \text{ord}(a_\nu).$$

Воспользуемся индукцией по ординальному числу $\lambda := \text{ord}(a_\nu) \in [1, \text{ord}(\Omega_n)]$. По определению λ – непредельный ординал. Начальный случай $\lambda = 1$ очевиден, так как $\mathcal{G} = I_1 = K\partial_n$. Итак, пусть λ – непредельный ординал такой, что $\lambda > 1$; предположим, что результат выполнен для всех непредельных ординалов λ' таких, что $\lambda' < \lambda$. Тогда $\lambda'' := \text{ord}(a_{\nu-1})$ – непредельный ординал такой, что $\text{ord}(a_i) \leq \lambda'' < \lambda$ для всех $i = 1, \dots, \nu - 1$. По индукции подалгебра Ли, скажем, V алгебры $\mathfrak{u}_n$, порожденная элементами $a_1, \dots, a_{\nu-1}$, – конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Внутреннее дифференцирование $\delta := \text{ad}(a_\nu)$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ является локально нильпотентным дифференцированием (предложение 2.1, 5)), и $\dim_K(V) < \infty$; отсюда следует, что $\delta^{s+1}(V) = 0$ для некоторого натурального s . Векторное пространство $U := V + \delta(V) + \dots + \delta^s(V)$ является конечномерным δ -инвариантным подпространством идеала $I_{\lambda''}$ (см. (3.3)). По индукции подалгебра Ли, скажем, J алгебры $\mathfrak{u}_n$, порожденная U , – конечномерная нильпотентная алгебра Ли. Тогда $\delta^t(J) = 0$ для некоторого натурального $t \geq 1$. Ясно, что $\delta(J) \subseteq J$, так как $\delta(U) \subseteq U$ и δ – дифференцирование. Видим, что $\mathcal{G} = Ka_\nu + J = Ka_\nu \oplus J$ (ясно, что $\mathcal{G} \supseteq Ka_\nu + J$; с другой стороны, $Ka_\nu + J$ – подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{u}_n$, содержащая элементы $a_1, \dots, a_\nu$, и потому $\mathcal{G} \subseteq Ka_\nu + J$). Воспользуемся следующим утверждением: пара $(\mathcal{G}, J)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Отсюда будет следовать, что $\mathcal{G}$ – нильпотентная алгебра Ли (по теореме 4.1) и $\dim_K(\mathcal{G}) = 1 + \dim_K(J) < \infty$. Чтобы доказать утверждение, достаточно показать, что $(\delta + \partial)^m(J) = 0$ для всех $m \gg 0$, где $\partial = \text{ad}(J)$. Зафиксируем число n такое, что $\delta^n(J) = 0$ и $\partial^n(J) = 0$. В силу схожих причин, как в доказательстве теоремы 4.1, достаточно взять $m = n(n+1)$:

$$(\delta + \partial)^m(J) \subseteq \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{n_1 + \dots + n_{s+1} = m-s} \delta^{n_1} \partial \delta^{n_2} \partial \dots \delta^{n_s} \partial \delta^{n_{s+1}}(J) = 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. Проблема изоморфизма для факторалгебр алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$

Мы уже знаем, что алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{u}_m$ не изоморфны при $n \neq m$. Цель этого параграфа – получить ответ на следующий

ВОПРОС. Пусть I и J – идеалы алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{u}_m$ соответственно. При каких условиях алгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I$ и $\mathfrak{u}_m/J$ изоморфны?

Сначала рассмотрим случай, когда $n = m$ (теорема 5.1), а затем из него выведем общий случай (следствие 5.2). Пусть $\omega^0 := 1$.

ТЕОРЕМА 5.1. 1) Пусть I – идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, т.е. $I = I_\lambda$ для некоторого $\lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)] \cup \{0\}$ (теорема 3.6), где $I_0 := \{0\}$. Тогда алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{u}_n/I_\lambda$ изоморфны, если и только если $\lambda = i\omega^{n-2}$, где $i \in \mathbb{N}$.

2) Пусть I и J – идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, т.е. $I = I_\lambda$ и $J = I_\mu$ для некоторых элементов $\lambda, \mu \in [1, \text{ord}(\Omega_n)] \cup \{0\}$ (теорема 3.6, 1)). Тогда алгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I_\lambda$ и $\mathfrak{u}_n/I_\mu$ изоморфны, если и только если выполнено одно из следующих условий:

- (a) $\lambda = i\omega^{n-2} + \nu$ и $\mu = j\omega^{n-2} + \nu$, где $i, j \in \mathbb{N}$ и $\nu \in [1, \omega^{n-2}) \cup \{0\}$;
- (b) $\lambda = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega^s + i\omega^{s-2} + \nu$ и $\mu = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega^s + j\omega^{s-2} + \nu$, где $2 \leq s \leq n-1$; $i, j \in \mathbb{N}$ и $\nu \in [1, \omega^{s-2}) \cup \{0\}$;
- (c) $\lambda = \mu = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + \varepsilon$, где $\varepsilon = 0, 1$.

Для натуральных чисел n и m таких, что $2 \leq n < m$, имеется естественный изоморфизм алгебр Ли

$$\mathfrak{u}_n \simeq \mathfrak{u}_m / I_{\nu_{mn}}, \quad X_{\alpha, i} \mapsto X_{\alpha, i} + I_{\nu_{mn}}, \quad (5.1)$$

где $X_{\alpha, i} \in \mathcal{B}_n$, $\nu_{mn} := \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \dots + \omega^n$.

Подробнее, $I_{\nu_{mn}} = \mathfrak{u}_{m, n+1} = \bigoplus_{j=n+1}^m P_{j-1} \partial_j$.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть n и m – натуральные числа такие, что $2 \leq n < m$, и пусть I и J – идеалы алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{u}_m$ соответственно. Тогда алгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I$ и $\mathfrak{u}_m/J$ изоморфны, если и только если

$$\begin{aligned} (I, J) \in \{ & (I_\lambda, I_\mu) \mid \lambda = i\omega^{n-2} + \nu, \mu = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \dots + \omega^n + j\omega^{n-2} + \nu, \\ & \nu \in [1, \omega^{n-2}) \cup \{0\}, i, j \in \mathbb{N} \} \\ \cup \bigcup_{s=2}^{n-1} \{ & (I_\lambda, I_\mu) \mid \lambda = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega^s + i\omega^{s-2} + \nu, \\ & \mu = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \dots + \omega^s + j\omega^{s-2} + \nu, \nu \in [1, \omega^{s-2}) \cup \{0\}, i, j \in \mathbb{N} \} \\ \cup \{ & (I_\lambda, I_\mu) \mid \lambda = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + \varepsilon, \mu = \omega^{m-1} + \omega^{m-2} + \dots \\ & \dots + \omega + \varepsilon, \varepsilon = 0, 1 \}. \end{aligned}$$

Напомним, что $\mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}_{n-1} \oplus P_{n-1} \partial_n$, где $\mathfrak{u}_{n-1}$ – подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{u}_n$, а $P_{n-1} \partial_n$ – абелев идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$. Ранее мы ввели K -базис $\mathcal{B}_n = \{X_{\alpha, i}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ (см. (2.1)). Определим K -линейное отображение $f_n: \mathfrak{u}_n \rightarrow \mathfrak{u}_n$ одним из двух равносильных способов:

$$\begin{aligned} f_n(u) &:= \begin{cases} u, & \text{если } u \in \mathfrak{u}_{n-1}, \\ [\partial_{n-1}, u], & \text{если } u \in P_{n-1} \partial_n, \end{cases} \\ f_n(X_{\alpha, i}) &:= \begin{cases} X_{\alpha, i}, & \text{если } \alpha \in \mathbb{N}^{i-1}, i \neq n, \\ \alpha_{n-1} X_{\alpha - e_{n-1}, n}, & \text{если } \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}, i = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

ЛЕММА 5.3. Для каждого натурального $i \geq 1$ K -линейное отображение $f_n^i: \mathfrak{u}_n \rightarrow \mathfrak{u}_n$ является эпиморфизмом алгебр Ли и $\ker(f_n^i) = \sum_{j=0}^{i-1} P_{n-2} x_{n-1}^j \partial_n = I_{i\omega^{n-2}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По самому определению отображения f_n имеем

$$\ker(f_n^i) = \ker_{P_{n-1} \partial_n}(\text{ad}(\partial_{n-1})^i) = \sum_{j=0}^{i-1} P_{n-2} x_{n-1}^j \partial_n = I_{i\omega^{n-2}}.$$

Чтобы завершить доказательство леммы, достаточно показать, что K -линейное отображение f_n – гомоморфизм алгебр Ли, т. е.

$$f_n([u, v]) = [f_n(u), f_n(v)] \quad (5.3)$$

для всех элементов u и v базиса $\mathcal{B}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ (см. (2.1)). Поскольку $\mathfrak{u}_n = \mathfrak{u}_{n-1} \oplus P_{n-1}\partial_n$, имеем $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n-1} \cup \{X_{\alpha,n}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}}$. Равенство (5.3) очевидно, если либо $u, v \in \mathcal{B}_{n-1}$ (так как $f_n(a) = a$ для всех $a \in \mathfrak{u}_{n-1}$), либо $u, v \in \{X_{\alpha,n}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}}$ (так как $f_n(P_{n-1}\partial_n) \subseteq P_{n-1}\partial_n$ и $[P_{n-1}\partial_n, P_{n-1}\partial_n] = 0$). В оставшихся случаях, когда $u \in \mathcal{B}_{n-1}$ и $v = X_{\alpha,n}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, равенство следует из следующих трех фактов: ∂_{n-1} – центральный элемент алгебры Ли $\mathfrak{u}_{n-1}$ (предложение 2.1, 6)), $f_n(P_{n-1}\partial_n) \subseteq P_{n-1}\partial_n$ и $f_n|_{P_{n-1}\partial_n} = \text{ad}(\partial_{n-1})$. В самом деле, применяя внутреннее дифференцирование $\delta := \text{ad}(\partial_{n-1})$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ к равенству $[u, X_{\alpha,n}] = w$, где $w \in P_{n-1}\partial_n$, получаем требуемое равенство

$$\begin{aligned} f_n(w) &= \delta([u, X_{\alpha,n}]) = [\delta(u), X_{\alpha,n}] + [u, \delta(X_{\alpha,n})] = [0, X_{\alpha,n}] + [f_n(u), f_n(X_{\alpha,n})] \\ &= [f_n(u), f_n(X_{\alpha,n})]. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть $n \geq 3$. Идеал $P_{n-1}\partial_n$ – наименьший идеал I алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ такой, что факторалгебра Ли $\mathfrak{u}_n/I$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{u}_{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathfrak{u}_n/P_{n-1}\partial_n \simeq \mathfrak{u}_{n-1}$ и $P_{n-1}\partial_n = I_{\omega^{n-1}}$. Предположим, что $I \neq P_{n-1}\partial_n$, и получим противоречие. Тогда $I = I_\lambda$ для некоторого $\lambda < \omega^{n-1}$. Зафиксируем натуральное $i \geq 1$ такое, что $\lambda < i\omega^{n-2}$. Тогда $I_\lambda \subset I_{i\omega^{n-2}}$. Имеется естественный эпиморфизм алгебр Ли $\mathfrak{u}_n/I \rightarrow \mathfrak{u}_n/I_{i\omega^{n-2}}$; поэтому $\text{u.dim}(\mathfrak{u}_n/I_{i\omega^{n-2}}) \leq \text{u.dim}(\mathfrak{u}_n/I) = \text{u.dim}(\mathfrak{u}_{n-1})$. В силу леммы 5.3 имеем $\mathfrak{u}_n/I_{i\omega^{n-2}} \simeq \mathfrak{u}_n$; отсюда

$$\text{u.dim}(\mathfrak{u}_{n-1}) \geq \text{u.dim}(\mathfrak{u}_n/I_{i\omega^{n-2}}) = \text{u.dim}(\mathfrak{u}_n) > \text{u.dim}(\mathfrak{u}_{n-1}).$$

Противоречие. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Докажем утверждение 1). ($\Leftarrow$) В силу леммы 5.3 для каждого натурального $i \geq 1$ отображение $f_n^i: \mathfrak{u}_n \rightarrow \mathfrak{u}_n$ – эпиморфизм алгебр Ли с ядром $I_{i\omega^{n-2}}$. Значит, $\mathfrak{u}_n \simeq \mathfrak{u}_n/I_{i\omega^{n-2}}$. Импликация ($\Rightarrow$) следует из утверждения 2).

Чтобы доказать утверждение 2), воспользуемся индукцией по $n \geq 2$. Начальный шаг $n = 2$ – непосредственное следствие леммы 5.3 и классификации идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_2$. В силу теоремы 3.6, 1) собственные идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_2$ – это I_n , $n \geq 1$, и $I_\omega = P_1\partial_2$. В силу леммы 5.3 имеем $\mathfrak{u}_2/I_n \simeq \mathfrak{u}_2$ для всех $n \geq 1$; $\dim_K(\mathfrak{u}_2/I_\omega) = \dim_K(K\partial_1) = 1 < \dim_K(\mathfrak{u}_2) = \infty$. Утверждение 2) доказано.

Пусть $n > 2$, и предположим, что результат справедлив для всех $n' < n$. Напомним, что $\mathfrak{u}_{n-1} \simeq \mathfrak{u}_n/I_{\omega^{n-1}}$, $I_{\omega^{n-1}} = P_{n-1}\partial_n$ и $\text{u.dim}(\mathfrak{u}_{n-1}) < \text{u.dim}(\mathfrak{u}_n)$. Алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ – однородная артинова алгебра Ли; отсюда следует, что таковой является каждая из ее факторалгебр Ли. Значит, если $\mathfrak{u}_n/I_\lambda \simeq \mathfrak{u}_n/I_\mu$, то $\text{u.dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) = \text{u.dim}(\mathfrak{u}_n/I_\mu)$.

Шаг 1: $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) = \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n)$ для всех $\lambda < \omega^{n-1}$.

В самом деле, из $\lambda < \omega^{n-1}$ следует, что $\lambda \leq i\omega^{n-2}$ для некоторого $i \geq 1$. Тогда $\mathfrak{u}_n \simeq \mathfrak{u}_n/I_{i\omega^{n-2}}$ (лемма 5.3), и потому

$$\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n) \geq \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) \geq \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_{i\omega^{n-2}}) = \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n),$$

откуда $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n) = \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda)$.

Предположим, что $\mathfrak{u}_n/I_\lambda \simeq \mathfrak{u}_n/I_\mu$ для некоторых λ и μ .

Шаг 2: достаточно рассмотреть случай, когда $\lambda, \mu < \omega^{n-1}$.

Если $\lambda, \mu \geq \omega^{n-1}$, то утверждение 2) следует после применения индукции по n , так как $I_{\omega^{n-1}} \subseteq I_\lambda$, $I_{\omega^{n-1}} \subseteq I_\mu$ и $\mathfrak{u}_n/I_{\omega^{n-1}} \simeq \mathfrak{u}_{n-1}$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda \leq \mu$. Случай, когда $\lambda < \omega^{n-1} \leq \mu$, невозможен в силу шага 1, так как

$$\begin{aligned} \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) &= \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n) > \text{u. dim}(\mathfrak{u}_{n-1}) \\ &= \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_{\omega^{n-1}}) \geq \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\mu) = \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda). \end{aligned}$$

Противоречие. Это завершает доказательство шага 2.

Шаг 3: ввиду леммы 5.3 можно считать, что $\lambda, \mu < \omega^{n-2}$.

Идея доказательства теоремы состоит в том, что для каждой факторалгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I_\lambda$, где $\lambda < \omega^{n-2}$, вводится инвариант относительно изоморфизмов, который *различен* для всех ординальных чисел $\lambda < \omega^{n-2}$. Этот инвариант — это однорядная размерность некоторых идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I_\lambda$. Для каждого ординального числа $\nu \in [1, \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda)]$ пусть I'_ν — единственный идеал однорядной артиновой алгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I_\lambda$ с однорядной размерностью ν . Каждый идеал однорядной артиновой алгебры Ли является характеристическим идеалом. Это решающий факт, используемый в рассуждениях ниже. Ясно, что

$$\begin{aligned} I'_{\omega^{n-2}} &\equiv I_{\omega^{n-2}} \equiv P_{n-2}\partial_n \pmod{I_\lambda}, \\ I'_{\omega^{n-1}+\omega^{n-2}} &\equiv I_{\omega^{n-1}+\omega^{n-2}} \equiv P_{n-2}\partial_{n-1} + P_{n-1}\partial_n \pmod{I_\lambda}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{a} := I'_{\omega^{n-1}+\omega^{n-2}}$ и $\theta := x_{n-1}\partial_n + I_\lambda \in \mathfrak{u}_n/I_\lambda$. Заметим, что $I'_{\omega^{n-2}+1} = K\theta \oplus I'_{\omega^{n-2}}$. Для элемента $v \in \mathfrak{u}_n/I_\lambda$ пусть $\text{Cen}_{\mathfrak{a}}(v) := \{a \in \mathfrak{a} \mid [a, v] = 0\}$.

Шаг 4: для всех $\sigma \in \text{Aut}_K(\mathfrak{u}_n/I_\lambda)$ и $u \in S := I'_{\omega^{n-2}+1} \setminus I'_{\omega^{n-2}}$ выполнено $\text{Cen}_{\mathfrak{a}}(\sigma(u)) = \text{Cen}_{\mathfrak{a}}(\theta) = I'_{\omega^{n-1}+\lambda}$.

Второе равенство следует из двух следующих фактов: $[x_{n-1}\partial_n, I_{\omega^{n-1}}] = [x_{n-1}\partial_n, P_{n-1}\partial_n] = 0$ и $[x^\alpha\partial_{n-1}, x_{n-1}\partial_n] = x^\alpha\partial_n$ для всех $\alpha \in \mathbb{N}^{n-2}$.

Первое равенство следует из того, что $\sigma(u) = \xi\theta + v + I_\lambda$ для некоторых элементов $\xi \in K^*$, $v \in P_{n-2}\partial_n$ и

$$[v, I_{\omega^{n-1}+\omega^{n-2}}] \subseteq [P_{n-2}\partial_n, P_{n-2}\partial_{n-1} + P_{n-1}\partial_n] = 0.$$

По-другому, используя равенство $\text{Cen}_{\mathfrak{a}}(\theta) = I'_{\omega^{n-1}+\lambda}$ и то, что $I'_{\omega^{n-1}+\lambda}$ и $\mathfrak{a}$ — характеристические идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_n/I_\lambda$, видим, что

$$I'_{\omega^{n-1}+\lambda} = \sigma(I'_{\omega^{n-1}+\lambda}) = \sigma(\text{Cen}_{\mathfrak{a}}(\theta)) = \text{Cen}_{\sigma(\mathfrak{a})}(\sigma(\theta)) = \text{Cen}_{\mathfrak{a}}(\sigma(\theta)).$$

Поскольку $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ и $\sigma(S) = S$ для всех автоморфизмов $\sigma \in \text{Aut}_K(\mathfrak{u}_n/I_\lambda)$, шаг 4 означает, что ординальное число

$$\omega^{n-1} + \lambda = \text{u. dim}(I'_{\omega^{n-1}+\lambda}) = \text{u. dim}(\text{Cen}_{\mathfrak{a}}(\sigma(u)))$$

является инвариантом относительно изоморфизмов для алгебры $\mathfrak{u}_n/I_\lambda$, где $\text{u. dim}(I_{\omega^{n-1}+\lambda})$ – однорядная размерность $\mathfrak{u}_n$ -модуля $I_{\omega^{n-1}+\lambda}$. Если $\mathfrak{u}_n/I_\lambda \simeq \mathfrak{u}_n/I_\mu$ для некоторых ординалов $\lambda, \mu < \omega^{n-2}$, то $\omega^{n-1} + \lambda = \omega^{n-1} + \mu$, откуда $\lambda = \mu$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть I_λ – идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, где $\lambda \in [1, \text{ord}(\Omega_n)] \cup \{0\}$, причем $I_0 := 0$. Тогда:

- 1) $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) = \text{u. dim}(\mathfrak{u}_n)$ для всех $\lambda \in [1, \omega^{n-1}) \cup \{0\}$;
- 2) $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) = \text{u. dim}(\mathfrak{u}_s)$ для всех $\lambda \in [\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega^s, \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega^{s-1})$ и s таких, что $2 \leq s \leq n-1$;
- 3) $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) = 1 - \varepsilon$ для всех $\lambda = \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + \varepsilon$, где $\varepsilon = 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) – это шаг 1 в доказательстве теоремы 5.1. Утверждение 2) следует из утверждения 1) и (5.1). Утверждение 3) тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5.2. Заметим, что однорядные размерности $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_i)$, $i \geq 2$, различны, и если $\mathfrak{u}_n/I_\lambda \simeq \mathfrak{u}_m/I_\mu$, то $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_n/I_\lambda) = \text{u. dim}(\mathfrak{u}_m/I_\mu)$. Изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{u}_n \simeq \mathfrak{u}_m/I_{\nu_{mn}}$ (см. (5.1)) индуцирует биекцию из множества $\mathcal{J}(\mathfrak{u}_n)$ всех ненулевых идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ в множество $\mathcal{J}(\mathfrak{u}_m, I_{\nu_{mn}})$ всех идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_m$, которые собственным образом содержат идеал $I_{\nu_{mn}}$:

$$\mathcal{J}(\mathfrak{u}_n) \rightarrow \mathcal{J}(\mathfrak{u}_m, I_{\nu_{mn}}), \quad I_\lambda \mapsto I_{\nu_{mn}+\lambda}. \quad (5.4)$$

Теперь следствие вытекает из теоремы 5.1, следствия 5.5 и (5.4).

§ 6. Алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty$

В этом параграфе подробно изучается алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty$. Многие свойства алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ схожи со свойствами алгебр Ли $\mathfrak{u}_n$, $n \geq 2$, но имеются несколько отличий. Например, алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty$ не разрешима, не артинова, но почти артинова, $\text{u. dim}(\mathfrak{u}_\infty) = \omega^\omega$. Получена классификация всех идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ (теорема 6.2), все они – характеристические идеалы (следствие 6.4, 2)). Дается критерий изоморфности факторалгебр Ли алгебры $\mathfrak{u}_\infty$ (следствие 6.3).

Пусть $P_\infty := \bigcup_{n \geq 1} P_n = K[x_1, x_2, \dots]$ – алгебра многочленов от счетного числа переменных, а $A_\infty := \bigcup_{n \geq 1} A_n = K\langle x_1, x_2, \dots, \partial_1, \partial_2, \dots \rangle$ – бесконечная алгебра Вейля. Алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty$ является подалгеброй Ли алгебры Ли $(A_\infty, [\cdot, \cdot])$. Алгебра многочленов P_∞ является A_∞ -модулем. В частности, алгебра многочленов P_∞ – $\mathfrak{u}_\infty$ -модуль. Алгебра Ли

$$u_\infty := \bigoplus_{i \geq 1} P_{i-1} \partial_i$$

– прямая сумма абелевых (бесконечномерных для $i \geq 2$) подалгебр Ли $P_{i-1}\partial_i$. Для каждого натурального $i \geq 1$

$$\mathfrak{u}_{\infty,i} := \bigoplus_{j \geq i} P_{j-1}\partial_j$$

– идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ в силу (2.3). Ясно, что $\mathfrak{u}_{i,i} \subset \mathfrak{u}_{i+1,i} \subset \dots \subset \mathfrak{u}_{\infty,i} = \bigcup_{n \geq i} \mathfrak{u}_{n,i}$ для всех $i \geq 2$. Имеется строго убывающая цепочка идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$

$$\mathfrak{u}_{\infty,1} = \mathfrak{u}_{\infty} \supset \mathfrak{u}_{\infty,2} \supset \dots \supset \mathfrak{u}_{\infty,n} \supset \dots \supset \bigcap_{i \geq 1} \mathfrak{u}_{\infty,i} = 0, \quad (6.1)$$

причем $\mathfrak{u}_{\infty}/\mathfrak{u}_{\infty,n+1} \simeq \mathfrak{u}_n$ для всех $n \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. 1) Алгебра Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ не разрешима.

2) Алгебра Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ локально нильпотентна и локально конечномерна.

3) Каждый элемент $u \in \mathfrak{u}_{\infty}$ действует локально нильпотентно на $\mathfrak{u}_{\infty}$ -модуле P_{∞} .

4) Цепочка ненулевых идеалов в (6.1) – ряд коммутантов алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$, т.е. $(\mathfrak{u}_{\infty})_{(i)} = \mathfrak{u}_{\infty,i+1}$ для всех $i \geq 0$.

5) Нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ стабилизируется на первом шаге, т.е. $(\mathfrak{u}_{\infty})^{(0)} = \mathfrak{u}_{\infty}$ и $(\mathfrak{u}_{\infty})^{(i)} = \mathfrak{u}_{\infty,2}$ для всех $i \geq 1$.

6) Все внутренние дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ являются локально нильпотентными дифференцированиями.

7) Центр $Z(\mathfrak{u}_{\infty})$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ равен нулю. В частности, $\text{с. dim}(\mathfrak{u}_{\infty}) = 0$.

8) Алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ и $\mathfrak{u}_n$, где $n \geq 2$, не изоморфны.

9) Алгебра Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ содержит копию каждой нильпотентной конечномерной алгебры Ли.

10) Пусть $a \in \mathfrak{u}_{\infty}$. Тогда внутреннее дифференцирование $\text{ad}(a)$ является нильпотентным дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$, если и только если $a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из утверждения 4). Утверждение 2) следует из теоремы 4.2 и того, что $\mathfrak{u}_{\infty} = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{u}_n$. Утверждение 3) следует из предложения 2.1, 4) и того, что $P_{\infty} = \bigcup_{n \geq 1} P_n$ и $\mathfrak{u}_{\infty} = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{u}_n$.

Утверждения 4), 5) следуют из (2.3) и разложения $\mathfrak{u}_{\infty} = \bigoplus_{i \geq 1} P_{i-1}\partial_i$. Утверждение 6) следует из предложения 2.1, 5) и того, что $\mathfrak{u}_{\infty} = \bigcup_{n \geq 2} \mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{u}_2 \subseteq \mathfrak{u}_3 \subseteq \dots$.

Докажем утверждение 7). Если $z \in Z(\mathfrak{u}_{\infty})$, то $z \in \mathfrak{u}_n$ для некоторого n , и потому $z \in Z(\mathfrak{u}_n) = K\partial_n$ (предложение 2.1, 6)). Поскольку $[\partial_n, x_n\partial_{n+1}] = \partial_{n+1}$, должно выполняться $z = 0$.

Докажем утверждение 8). Алгебра Ли $\mathfrak{u}_n$ разрешима (предложение 2.1, 1)), но алгебра Ли $\mathfrak{u}_{\infty}$ не разрешима (утверждение 1)). Значит, $\mathfrak{u}_{\infty} \not\simeq \mathfrak{u}_n$ для всех $n \geq 2$. В силу предложения 2.1, 7) алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, $n \geq 2$, попарно неизоморфны.

Теперь докажем утверждение 9). Любая нильпотентная конечномерная алгебра Ли является подалгеброй алгебры Ли $\text{UT}_n(K)$ для некоторого $n \geq 2$. Теперь результат следует из включений $\text{UT}_n(K) \subseteq \mathfrak{u}_n \subseteq \mathfrak{u}_{\infty}$.

Наконец докажем утверждение 10). Достаточно показать, что если $a \neq 0$, то дифференцирование δ не нильпотентно. Предположим, что это не так для

некоторого a , и получим противоречие. Элемент a можно записать в виде суммы $p_n \partial_n + p_{n+1} \partial_{n+1} + \dots$, где $p_i \in P_{i-1}$ для всех $i \geq n$ и $p_n \neq 0$. Ввиду изоморфизма алгебр Ли $\mathfrak{u}_\infty / \mathfrak{u}_{\infty, n+2} \simeq \mathfrak{u}_{n+1}$ внутреннее дифференцирование $\delta' = \text{ad}(p_n \partial_n + p_{n+1} \partial_{n+1})$, индуцированное δ , является нильпотентным дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{u}_{n+1}$. В силу леммы 2.2 имеем $p_n = 0$. Противоречие.

Следующая теорема перечисляет все идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Множество $\mathcal{J}(\mathfrak{u}_\infty)$ всех ненулевых идеалов алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ равно множеству $\{\mathfrak{u}_\infty, \mathfrak{u}_{\infty, n}, I_{\lambda, n} := I_\lambda(n) + \mathfrak{u}_{\infty, n+1} \mid n \geq 2, \lambda \in [1, \omega^{n-1}]\}$, где $I_\lambda(n)$ – идеал I_λ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, определенный в (3.3), т.е. $I_\lambda(n) = \bigoplus_{(\alpha, n) \leq \lambda} KX_{\alpha, n}$. В частности, каждый ненулевой идеал I алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ содержит идеал $\mathfrak{u}_{\infty, n'+1}$ для некоторого $n' \geq 2$, и если $I = I_{\lambda, n}$, то имеем $n = \min\{n' \geq 2 \mid \mathfrak{u}_{\infty, n'+1} \subseteq I\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – ненулевой идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ и a – ненулевой элемент из I . Тогда

$$a = a_l \partial_l + a_{l+1} \partial_{l+1} + \dots + a_m \partial_m = a_l \partial_l + \dots$$

для некоторых элементов $l \geq 1$, $a_i \in P_{i-1}$ и $a_l \neq 0$. Пусть d – полная степень многочлена $a_l = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{l-1}} \lambda_\alpha x^\alpha \in P_{l-1}$, где $\lambda_\alpha \in K$. Зафиксируем $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^{l-1}$ такое, что $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} = d$. Применение $\text{ad}(\partial)^\alpha := \prod_{i=1}^{l-1} \text{ad}(\partial_i)^{\alpha_i}$ к элементу a дает элемент идеала I типа $\alpha! \lambda_\alpha \partial_l + \dots$. Значит, без ограничения общности с самого начала можно считать, что $a_l = 1$, т.е. $a = \partial_l + a_{l+1} \partial_{l+1} + \dots + a_m \partial_m$. Тогда

$$I \ni [a, x_l \partial_{m+1}] = [\partial_l, x_l \partial_{m+1}] = \partial_{m+1}.$$

Отсюда следует, что $I \supseteq [\partial_{m+1}, P_{s-1} \partial_s] = [\partial_{m+1}, P_{s-1}] \partial_s = P_{s-1} \partial_s$ для всех $s > m+1$. Это означает, что $\mathfrak{u}_{\infty, m+2} \subseteq I$. Рассмотрим эпиморфизм алгебр Ли (где $n = \min\{n' \geq 2 \mid \mathfrak{u}_{\infty, n'+1} \subseteq I\}$)

$$\pi_n : \mathfrak{u}_\infty \rightarrow \mathfrak{u}_\infty / \mathfrak{u}_{\infty, n+1} \simeq \mathfrak{u}_n, \quad u \mapsto \bar{u} := u + \mathfrak{u}_{\infty, n+1}. \quad (6.2)$$

Образ $\pi_n(I)$ идеала I – идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ такой, что $\pi_n(I) \subset \mathfrak{u}_{n, n} = P_{n-1} \partial_n$, по определению числа n . Без ограничения общности можно считать, что $I \neq \mathfrak{u}_\infty, \mathfrak{u}_{\infty, 2}, \dots$. Тогда $I = I_{\lambda, n}$ для некоторого $\lambda \in [1, \omega^{n-1})$ по теореме 3.6, 1). Из двух очевидных фактов:

- (i) $I_{\lambda, n} \supseteq I_{\mu, m}$ тогда и только тогда, когда либо $n < m$, либо, напротив, $n = m$ и $\lambda \geq \mu$,
- (ii) $\mathfrak{u}_{\infty, n-1} \supset I_{\lambda, n} \supset \mathfrak{u}_{\infty, n}$ для всех $n \geq 2$,

следует, что алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty$ является однорядной алгеброй Ли (т.е. для любых двух различных идеалов I и J из $\mathfrak{u}_\infty$ либо $I \subset J$, либо $I \supset J$). Значит, цепочка

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_\infty = \mathfrak{u}_{\infty, 1} \supset \dots \supset I_{\lambda, 2} \supset \dots \supset I_{1, 2} \supset \mathfrak{u}_{\infty, 2} \supset \dots \\ \dots \supset \mathfrak{u}_{\infty, n} \supset \dots \supset I_{\mu, n} \supset \dots \supset I_{1, n} \supset \mathfrak{u}_{\infty, n+1} \supset \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

содержит все ненулевые идеалы алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$. Теорема доказана.

В сочетании с теоремой 5.1 и следствием 5.2 следующее следствие дает критерий изоморфности факторалгебр Ли алгебры Ли u_∞ .

СЛЕДСТВИЕ 6.3. 1) Пусть I – идеал алгебры Ли u_∞ . Тогда $u_\infty/I \simeq u_\infty$, если и только если $I = 0$.

2) Пусть I и J – ненулевые идеалы алгебры Ли u_∞ и $n = \min\{n' \geq 2 \mid u_{\infty, n'+1} \subseteq I, u_{\infty, n'+1} \subseteq J\}$ ($n < \infty$, см. теорему 6.2). Тогда $u_\infty/I \simeq u_\infty/J$, если и только если $u_n/I' \simeq u_n/J'$, где $I' := I/u_{\infty, n+1}$ и $J' := J/u_{\infty, n+1} \subseteq u_n = u_\infty/u_{\infty, n+1}$.

В отличие от алгебр Ли u_n , $n \geq 2$, никакая собственная факторалгебра Ли алгебры u_∞ не изоморфна u_∞ .

Алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется почти артиновой алгеброй Ли, если все ее собственные факторалгебры – артиновы алгебры Ли (т. е. для каждого ненулевого идеала I алгебры Ли $\mathcal{G}$ факторалгебра $\mathcal{G}/I$ – артинова алгебра Ли).

СЛЕДСТВИЕ 6.4. 1) Алгебра Ли u_∞ является однорядной, не артиновой, не нётеровой, почти артиновой алгеброй Ли, и ее однорядная размерность есть $u.\dim(u_\infty) = \omega^\omega$.

2) Все идеалы алгебры Ли u_∞ являются характеристическими идеалами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение 1). Мы только что видели, что алгебра Ли u_∞ однорядна (см. (6.3)). В силу теоремы 6.2 алгебра Ли u_∞ не является ни артиновой, ни нётеровой, но является почти артиновой алгеброй Ли (так как все алгебры Ли u_n артиновы; теорема 3.6, 2)). В силу теоремы 6.2 каждый ненулевой идеал алгебры Ли u_∞ содержит идеал $u_{\infty, n+1}$ для некоторого n , и факторалгебра $u_\infty/u_{\infty, n+1} \simeq u_n$ является однорядной артиновой алгеброй Ли, откуда

$$\begin{aligned} u.\dim(u_\infty) &= \max\{u.\dim(u_\infty/u_{\infty, n+1}) = u.\dim(u_n) \\ &= \omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1 \mid n \geq 2\} = \omega^\omega \end{aligned}$$

по теореме 3.6, 2).

Докажем утверждение 2). Идеалы $u_{\infty, n}$, $n \geq 1$, являются характеристическими идеалами, так как они образуют ряд коммутантов алгебры Ли u_∞ (предложение 6.1, 4)). В силу теоремы 6.2 остается показать, что каждый идеал $I_{\lambda, n}$ – характеристический идеал. Пусть σ – автоморфизм алгебры Ли u_∞ . Поскольку $\sigma(u_{\infty, n+1}) = u_{\infty, n+1}$, автоморфизм σ индуцирует автоморфизм σ_n факторалгебры Ли $u_\infty/u_{\infty, n+1} \simeq u_n$. Тогда $\sigma_n(\pi_n(I_{\lambda, n})) = \pi_n(I_\lambda)$ в силу следствия 3.11, где π_n такое, как в (6.2). Значит, $\sigma(I_{\lambda, n}) = I_{\lambda, n}$, как и требуется.

Пусть $U_\infty := U(u_\infty)$ – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли u_∞ . Цепочка алгебр Ли $u_2 \subset u_3 \subset \dots \subset u_\infty = \bigcup_{n \geq 2} u_n$ дает цепочку универсальных обертывающих алгебр $U_2 \subset U_3 \subset \dots \subset U_\infty = \bigcup_{n \geq 2} U_n$.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. 1) Внутренние дифференцирования $\{\text{ad}(u) \mid u \in u_\infty\}$ универсальной обертывающей алгебры U_∞ алгебры Ли u_∞ являются локально нильпотентными дифференцированиями.

2) Каждое мультипликативное подмножество S из U_∞ , порожденное произвольным множеством элементов из u_∞ , является (левым и правым) множеством Оре в U_∞ . Значит, $S^{-1}U_\infty \simeq U_\infty S^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1), 2) следуют из следствия 2.3 и того, что $U_\infty = \bigcup_{n \geq 2} U_n$.

§ 7. Алгебра Ли $\hat{u}_\infty$

В этом параграфе изучается пополнение $\hat{u}_\infty$ алгебры Ли u_∞ относительно идеальной топологии на u_∞ . Его свойства еще дальше отклоняются от свойств алгебр Ли u_n , $n \geq 2$, и u_∞ . Например, ни одно ненулевое внутреннее дифференцирование алгебры Ли $\hat{u}_\infty$ не является локально нильпотентным дифференцированием; алгебра Ли $\hat{u}_\infty$ не является ни локально нильпотентной, ни локально конечномерной. Основным результатом этого параграфа – классификация всех замкнутых и открытых идеалов топологической алгебры Ли $\hat{u}_\infty$ (теорема 7.2, 1)). В результате доказано, что все открытые и все замкнутые идеалы топологической алгебры Ли $\hat{u}_\infty$ являются топологически характеристическими идеалами (следствие 7.3, 3)).

Алгебра Ли u_∞ – топологическая алгебра Ли, где топология – *идеальная топология* на u_∞ , т.е. множество $\{u + I \mid u \in u_\infty, I \in \mathcal{J}(u_\infty)\}$ является базисом идеальной топологии на u_∞ , где $\mathcal{J}(u_\infty)$ – множество ненулевых идеалов алгебры Ли u_∞ . Напомним, что топологическая алгебра Ли означает, что отображения $K \times u_\infty \rightarrow u_\infty$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$, $u_\infty \times u_\infty \rightarrow u_\infty$, $(u, v) \mapsto u - v$, и $u_\infty \times u_\infty \rightarrow u_\infty$, $(u, v) \mapsto [u, v]$, являются непрерывными отображениями, где топологии на $K \times u_\infty$ и $u_\infty \times u_\infty$ – топологии произведений, а топология на K – дискретная топология. В силу теоремы 6.2 каждый ненулевой идеал алгебры Ли u_∞ содержит идеал $u_{\infty, n}$ для некоторого $n \geq 1$. Значит, в определении топологии на u_∞ вместо всех ненулевых идеалов можно взять идеалы $\{u_{\infty, n}\}_{n \geq 1}$.

Пополнение $\hat{u}_\infty$ топологического пространства u_∞ – это топологическая алгебра Ли

$$\hat{u}_\infty = \left\{ \sum_{i \geq 1} a_i \partial_i \mid a_i \in P_{i-1}, i \geq 1 \right\},$$

где $\sum_{i \geq 1} a_i \partial_i$ – бесконечная сумма, однозначно определяемая ее коэффициентами a_i . Вложение $u_\infty \subseteq \hat{u}_\infty$ является вложением топологических алгебр Ли, а топология на $\hat{u}_\infty$ – это (по определению) наиболее сильная топология на $\hat{u}_\infty$, для которой отображение $u_\infty \rightarrow \hat{u}_\infty$, $a \mapsto a$, непрерывно.

Имеется строго убывающая цепочка идеалов алгебры Ли $\hat{u}_\infty$

$$\hat{u}_{\infty, 1} = \hat{u}_\infty \supset \hat{u}_{\infty, 2} \supset \cdots \supset \hat{u}_{\infty, n} := \left\{ \sum_{i \geq n} a_i \partial_i \in \hat{u}_\infty \right\} \supset \cdots \supset \bigcap_{i \geq 1} \hat{u}_{\infty, i} = 0, \quad (7.1)$$

причем $\hat{u}_\infty / \hat{u}_{\infty, n+1} \simeq u_\infty / u_{\infty, n+1} \simeq u_{n+1} / P_n \partial_{n+1} \simeq u_n$ для всех $n \geq 2$. Алгебру Ли $\hat{u}_\infty$ можно также рассматривать как проективный предел проективной системы эпиморфизмов алгебр Ли

$$\cdots \rightarrow u_{n+1} \rightarrow u_n \rightarrow \cdots \rightarrow u_3 \rightarrow u_2 \rightarrow 0,$$

где эпиморфизм $u_{n+1} \rightarrow u_n$ – это композиция естественного эпиморфизма $u_{n+1} \rightarrow u_{n+1} / P_n \partial_{n+1}$ и изоморфизма $u_{n+1} / P_n \partial_{n+1} \simeq u_n$. Каждый замкнутый

идеал $\hat{u}_{\infty,n}$ алгебры Ли $\hat{u}_{\infty}$ является пополнением/замыканием идеала $u_{\infty,n}$ алгебры Ли u_{∞} . Для каждого элемента $a \in u_{\infty}$ множество $\{a + \hat{u}_{\infty,n}\}_{n \geq 1}$ является базисом всех открытых окрестностей элемента a . Эти множества $a + \hat{u}_{\infty,n}$, $n \geq 1$, являются открытыми и замкнутыми множествами в $\hat{u}_{\infty}$.

Алгебра многочленов $P_{\infty} = \bigcup_{n \geq 1} P_n = K[x_1, x_2, \dots]$ является левым $\hat{u}_{\infty}$ -модулем: $a \cdot p = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i(p)$ для любых $p \in P_n$ и $a = \sum_{i \geq 1} a_i \partial_i \in \hat{u}_{\infty}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. 1) Алгебра Ли $\hat{u}_{\infty}$ не разрешима.

2) Алгебра Ли $\hat{u}_{\infty}$ не локально нильпотентна и не локально конечномерна.

3) Каждый элемент $u \in \hat{u}_{\infty}$ действует локально нильпотентно на $\hat{u}_{\infty}$ -модуле P_{∞} .

4) Цепочка ненулевых идеалов в (7.1) – ряд коммутантов алгебры Ли $\hat{u}_{\infty}$, т.е. $(\hat{u}_{\infty})^{(i)} = \hat{u}_{\infty,i+1}$ для всех $i \geq 0$.

5) Нижний центральный ряд алгебры Ли $\hat{u}_{\infty}$ стабилизируется на первом шаге, т.е. $(\hat{u}_{\infty})^{(0)} = \hat{u}_{\infty}$ и $(\hat{u}_{\infty})^{(i)} = \hat{u}_{\infty,2}$ для всех $i \geq 1$.

6) Все ненулевые внутренние дифференцирования алгебры Ли $\hat{u}_{\infty}$ не являются локально нильпотентными дифференцированиями.

7) Централизатор $\text{Cen}_{\hat{u}_{\infty}}(\partial_1, \partial_2, \dots) = \{\sum_{i \geq 1} \lambda_i \partial_i \in \hat{u}_{\infty} \mid \lambda_i \in K\}$ является максимальной абелевой подалгеброй Ли из $\hat{u}_{\infty}$.

8) Центр $Z(\hat{u}_{\infty})$ алгебры Ли $\hat{u}_{\infty}$ равен нулю.

9) Алгебры Ли u_n , где $n \geq 2$, u_{∞} и $\hat{u}_{\infty}$ попарно неизоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из утверждения 4).

Докажем утверждение 2). Пусть $a = \sum_{n \geq 1} \frac{x_1^n}{n!} \partial_n$. Тогда

$$b_i := (\text{ad } \partial_1)^i(a) = \sum_{n \geq i} \frac{x_1^{n-i}}{(n-i)!} \partial_n \neq 0, \quad i \geq 1.$$

Следовательно, элементы $b_1, b_2, \dots$ K -линейно независимы. Значит, подалгебра Ли $\mathcal{G}$ из $\hat{u}_{\infty}$, порожденная элементами ∂_1 и a , не является ни нильпотентной, ни конечномерной.

Утверждение 3) следует из предложения 6.1, 3).

Докажем утверждение 4). Пусть $\delta_i := \text{ad}(\partial_i)$ для $i \geq 1$. Утверждение вытекает из следующих очевидных фактов: $\partial_i \in \hat{u}_{\infty,i}$ и $[\partial_i, \hat{u}_{\infty,i}] = \hat{u}_{\infty,i+1}$ для всех $i \geq 1$. Отсюда следует, что $(\hat{u}_{\infty})^{(i)} \supseteq \hat{u}_{\infty,i+1}$. Обратное вложение следует из предложения 6.1, 4) и того, что $\hat{u}_{\infty}/\hat{u}_{\infty,i+1} \simeq u_n$.

Утверждение 5) следует из того, что $[\partial_1, \hat{u}_{\infty}] = \hat{u}_{\infty,2}$ и $[\partial_1, \hat{u}_{\infty,2}] = \hat{u}_{\infty,2}$. Первое равенство дает равенство $[\hat{u}_{\infty}, \hat{u}_{\infty}] = \hat{u}_{\infty,2}$, а второе – равенства $(\hat{u}_{\infty})^{(i)} = \hat{u}_{\infty,2}$ для $i \geq 1$.

Докажем утверждение 7). Имеем $C := \text{Cen}_{\hat{u}_{\infty}}(\partial_1, \partial_2, \dots) = \{\sum_{i \geq 1} a_i \partial_i \in \hat{u}_{\infty} \mid a_1 \in K, a_i \in \bigcap_{j=1}^{i-1} \ker_{P_{i-1}}(\partial_j) = K \text{ для всех } i \geq 2\}$. Поскольку централизатор $C = \text{Cen}_{\hat{u}_{\infty}}(C)$ – абелева подалгебра Ли из $\hat{u}_{\infty}$, он автоматически является максимальной абелевой подалгеброй из $\hat{u}_{\infty}$.

Докажем утверждение 8). Пусть $z = \sum_{i \geq 1} \lambda_i \partial_i$ – центральный элемент алгебры Ли $\hat{u}_{\infty}$. В силу утверждения 7) имеем $\lambda_i \in K$ для всех $i \geq 1$. Для всех $i \geq 1$ имеем $\lambda_i \partial_{i+1} = [z, x_i \partial_{i+1}] = 0$, т.е. $z = 0$.

Теперь докажем утверждение 9). Мы уже знаем, что алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, где $n \geq 2$, и $\mathfrak{u}_\infty$ попарно неизоморфны (предложение 6.1, 8)). Алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$ разрешимы (предложение 2.1, 1)), но алгебра Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ не разрешима (утверждение 1)); отсюда следует, что $\hat{\mathfrak{u}}_\infty \not\cong \mathfrak{u}_n$ для всех $n \geq 2$. Алгебра Ли $\mathfrak{u}_\infty$ локально нильпотентна (предложение 6.1, 2)), но алгебра Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ не локально нильпотентна (утверждение 2)); отсюда следует, что $\hat{\mathfrak{u}}_\infty \not\cong \mathfrak{u}_\infty$.

Наконец докажем утверждение 6). Поскольку центр алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ равен нулю (утверждение 8)), необходимо показать, что если a – ненулевой элемент из $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$, то внутреннее дифференцирование $\delta = \text{ad}(a)$ не является локально нильпотентным отображением. Запишем $a = \sum_{i \in I} p_i \partial_i = p_n \partial_n + \dots$, где $p_i \in P_{i-1}$, $I = \{i \geq 1 \mid p_i \neq 0\} \neq \emptyset$ и n – минимальное число в I . Пусть $b = \sum_{m \geq 0} \frac{x_n^m}{m!} \partial_{n+m}$. Тогда

$$\delta^i(b) = p_n^i \sum_{m \geq i} \frac{x_n^{m-i}}{(m-i)!} \partial_{n+m} \neq 0, \quad i \geq 1.$$

Значит, δ не является нильпотентным отображением. Предложение доказано.

Следующая теорема дает классификацию всех открытых и замкнутых идеалов топологической алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$; каждый ненулевой замкнутый идеал из $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ открыт, и наоборот.

ТЕОРЕМА 7.2. 1) Множество $\mathcal{J}(\hat{\mathfrak{u}}_\infty)$ всех открытых идеалов алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ равно множеству всех ненулевых замкнутых идеалов алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ и равно множеству $\{\hat{\mathfrak{u}}_\infty, \hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n}, I_{\lambda, n} := I_\lambda(n) + \hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n+1} \mid n \geq 2, \lambda \in [1, \omega^{n-1})\}$, где $I_\lambda(n)$ – идеал I_λ алгебры Ли $\mathfrak{u}_n$, определенный в (3.3), т.е. $I_\lambda(n) = \bigoplus_{(\alpha, n) \leq \lambda} KX_{\alpha, n}$. В частности, каждый ненулевой замкнутый идеал I алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ содержит идеал $\hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n'+1}$ для некоторого $n' \geq 2$, причем если $I = I_{\lambda, n}$, то $n = \min\{n' \geq 2 \mid \hat{\mathfrak{u}}_{n'+1} \subseteq I\}$.

2) Пусть I – ненулевой идеал алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$. Тогда I – открытый идеал, если и только если I – замкнутый идеал.

3) Топологические алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$ и $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ хаусдорфовы.

4) Нулевой идеал замкнутый, но не открытый идеал топологической алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1) только для открытых идеалов. Для замкнутых оно будет следовать из утверждения 2). Каждый открытый идеал из $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ должен быть ненулевым идеалом. Очевидно, что идеалы $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$, $\hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n}$ и $I_{\lambda, n}$ в утверждении 1) – открытые идеалы. Пусть I – открытый идеал алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$, для которого $I \neq \hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n}$ при всех $n \geq 1$. Необходимо показать, что $I = I_{\lambda, n}$ для некоторых λ и n из утверждения 1). Идеал I содержит открытую окрестность нулевого элемента, т.е. $\hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n+1} \subseteq I$ для некоторого натурального $n \geq 2$. Можно считать, что $n = \min\{n' \mid n' \geq 2, \hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n'+1} \subseteq I\}$. Ввиду изоморфизма алгебр Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty / \hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n+1} \simeq \mathfrak{u}_n$, теоремы 3.6, 1) и минимальности n требуемое равенство и утверждение 1) очевидны.

Докажем утверждение 2). ($\Rightarrow$) Пусть I – открытый идеал. В силу утверждения 1), верного для открытых идеалов, идеал I таков, как в утверждении 1). Все идеалы в утверждении 1), т.е. $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$, $\hat{\mathfrak{u}}_{\infty, n}$ и $I_{\lambda, n}$, очевидно, являются ненулевыми замкнутыми идеалами. Отсюда следует, что I – ненулевой замкнутый

идеал. ($\Leftarrow$) Пусть I – ненулевой замкнутый идеал в $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$. Достаточно показать, что $\hat{\mathfrak{u}}_{\infty,n+1} \subseteq I$ для некоторого $n \geq 1$. Из этого будет автоматически следовать, что I – открытый идеал. Идеал $\hat{\mathfrak{u}}_{\infty,n+1}$ является замыканием идеала $\mathfrak{u}_{\infty,n+1}$ алгебры Ли $\mathfrak{u}_\infty$. Зафиксируем ненулевой элемент из I , скажем $a = \sum_{m \geq n} a_m \partial_m$, где $n \geq 1$, $a_m \in P_{m-1}$ для всех $m \geq n$ и $a_n \neq 0$. Пусть d – полная степень многочлена $a_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}} \lambda_\alpha x^\alpha \in P_{n-1}$, где $\lambda_\alpha \in K$. Зафиксируем $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^{n-1}$ такое, что $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} = d$. Применение $\text{ad}(\partial)^\alpha := \prod_{i=1}^{n-1} \text{ad}(\partial_i)^{\alpha_i}$ к элементу a дает элемент идеала I типа $\alpha! \lambda_\alpha \partial_n + \dots$. Значит, без ограничения общности можно с самого начала считать, что $a_n = 1$, т. е. $a = \partial_n + a_{n+1} \partial_{n+1} + \dots$. Для каждого $\alpha \in \mathbb{N}^n$ имеем

$$I \ni \left[a, \frac{x^{\alpha+e_n}}{\alpha_n + 1} \partial_{n+1} \right] = X_{\alpha,n+1},$$

и потому $P_n \partial_{n+1} \subseteq I$. Для всех натуральных $l \geq n+1$ идеал алгебры Ли $\mathfrak{u}_l$, порожденный ее подпространством $P_n \partial_{n+1}$, равен $\bigoplus_{i=n+1}^l P_{i-1} \partial_i$. Значит, $\mathfrak{u}_{\infty,n+1} = \bigoplus_{i \geq n+1} P_{i-1} \partial_i \subseteq I$. Отсюда следует, что замыкание идеала $\mathfrak{u}_{\infty,n+1}$, которое равно $\hat{\mathfrak{u}}_{\infty,n+1}$, принадлежит I , как и требуется.

Докажем утверждение 3). Пусть $a = \sum_{i \geq 1} a_i \partial_i$ и $b = \sum_{i \geq 1} b_i \partial_i$ – различные элементы из $\mathfrak{u}_\infty$ (соответственно, $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$), где $a_i, b_i \in P_{i-1}$ для всех $i \geq 1$. Тогда $a_n \neq b_n$ для некоторого n , откуда $(a + \mathfrak{u}_{\infty,n+1}) \cap (b + \mathfrak{u}_{\infty,n+1}) = \emptyset$ (соответственно, $(a + \hat{\mathfrak{u}}_{\infty,n+1}) \cap (b + \hat{\mathfrak{u}}_{\infty,n+1}) = \emptyset$). Это означает, что $\mathfrak{u}_\infty$ и $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ хаусдорфовы.

Утверждение 4) очевидно. Теорема доказана.

Топологическая алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется *замкнуто однорядной* (соответственно, *открыто однорядной*), если множество всех замкнутых (соответственно, открытых) идеалов линейно упорядочено по включению. В силу теоремы 7.2, 1) алгебра Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$ является замкнуто и открыто однорядной алгеброй Ли. Значит, цепочка

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{u}}_\infty &= \hat{\mathfrak{u}}_{\infty,1} \supset \dots \supset I_{\lambda,2} \supset \dots \supset I_{1,2} \supset \hat{\mathfrak{u}}_{\infty,2} \supset \dots \\ &\dots \supset \hat{\mathfrak{u}}_{\infty,n} \supset \dots \supset I_{\mu,n} \supset \dots \supset I_{1,n} \supset \hat{\mathfrak{u}}_{\infty,n+1} \supset \dots \end{aligned} \quad (7.2)$$

содержит все открытые и все ненулевые замкнутые идеалы алгебры Ли $\hat{\mathfrak{u}}_\infty$.

Топологическая алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется *открыто артиновой алгеброй Ли* (соответственно, *замкнуто артиновой алгеброй Ли*), если множество открытых (соответственно, замкнутых) идеалов из $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию минимальности. Топологическая алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется *открыто нётеровой алгеброй Ли* (соответственно, *замкнуто нётеровой алгеброй Ли*), если множество открытых (соответственно, замкнутых) идеалов из $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию максимальной. Топологическая алгебра Ли $\mathcal{G}$ называется *открыто почти артиновой алгеброй Ли* (соответственно, *замкнуто почти артиновой алгеброй Ли*), если для всех ненулевых открытых (соответственно, замкнутых) идеалов I из $\mathcal{G}$ факторалгебра Ли $\mathcal{G}/I$ – артинова алгебра Ли. Для топологической алгебры Ли $\mathcal{G}$ пусть

$$\text{Aut}_c(\mathcal{G}) := \text{Aut}_{\text{Lie}}(\mathcal{G}) \cap \text{Aut}_{\text{top}}(\mathcal{G})$$

– ее группа автоморфизмов. Каждый элемент из $\text{Aut}_c(\mathcal{G})$ является изоморфизмом алгебры Ли $\mathcal{G}$ и изоморфизмом топологического пространства $\mathcal{G}$. Идеал I топологической алгебры Ли $\mathcal{G}$ называется *топологически характеристическим идеалом*, если $\sigma(I) = I$ для всех $\sigma \in \text{Aut}_c(\mathcal{G})$.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. 1) *Топологическая алгебра Ли $\hat{u}_\infty$ является открыто однорядной, замкнуто однорядной, открыто почти артиновой и замкнуто почти артиновой алгеброй Ли, которая не является ни открыто, ни замкнуто артиновой и не является ни открыто, ни замкнуто нётеровой.*

2) *Однорядные размерности множеств открытых и замкнутых идеалов топологической алгебры Ли $\hat{u}_\infty$ совпадают и равны $u.\dim(\hat{u}_\infty) = \omega$.*

3) *Все открытые/замкнутые идеалы алгебры Ли $\hat{u}_\infty$ являются топологически характеристическими идеалами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из теоремы 7.2, 1). Утверждение 2) следует из теоремы 7.2, 1) и следствия 6.4, 1).

Докажем утверждение 3). Идеалы $\hat{u}_{\infty,n}$, $n \geq 1$, являются топологически характеристическими идеалами, так как они образуют ряд коммутантов алгебры Ли $\hat{u}_\infty$ (предложение 7.1, 4)). В силу теоремы 7.2, 1) остается показать, что каждый идеал $I_{\lambda,n}$ алгебры $\hat{u}_\infty$ является топологически характеристическим идеалом. Пусть $\sigma \in \text{Aut}_c(\hat{u}_\infty)$. Поскольку $\sigma(\hat{u}_{\infty,n+1}) = \hat{u}_{\infty,n+1}$, автоморфизм σ индуцирует автоморфизм σ факторалгебры Ли $\hat{u}_\infty/\hat{u}_{\infty,n+1} \simeq u_n$. Так как $\hat{u}_{\infty,n+1} \subseteq I_{\lambda,n}$ и каждый идеал алгебры Ли u_n является характеристическим идеалом (следствие 3.11), должно выполняться $\sigma(I_{\lambda,n}) = I_{\lambda,n}$, т. е. $I_{\lambda,n}$ – топологически характеристический идеал алгебры $\hat{u}_\infty$.

Список литературы

1. V. V. Bavula, *The groups of automorphisms of the Lie algebras of triangular polynomial derivations*, arXiv: 1304.4225.
2. V. V. Bavula, “Every monomorphism of the Lie algebra of triangular polynomial derivations is an automorphism”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **350**:11–12 (2012), 553–556.
3. В. В. Бавула, “Конечномерность Ext^n -ов и Tor_n -ов простых модулей над одним классом алгебр”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:3 (1991), 80–82; англ. пер.: V. V. Bavula, “Finite dimensionality of Ext^n and Tor_n of simple modules over one class of algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **25**:3 (1991), 229–230.
4. В. В. Бавула, “Обобщенные алгебры Вейля и их представления”, *Алгебра и анализ*, **4**:1 (1992), 75–97; англ. пер.: V. V. Bavula, “Generalized Weyl algebras and their representations”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:1 (1993), 71–92.
5. B. Rotman, G. T. Kneebone, *The theory of sets and transfinite numbers*, Oldbourne, London, 1966.

В. В. БАВУЛА
(V. V. BAVULA)
Department of Pure Mathematics,
University of Sheffield, UK
E-mail: v.bavula@sheffield.ac.uk

Поступило в редакцию
05.06.2012

Перевод с английского Е. И. Хухро