Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Каледин, Циклотомические комплексы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 5, 3–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:09:59

УДК 512.736

Д. Б. Каледин

Циклотомические комплексы

Построена триангулированная категория циклотомических комплексов, гомологических аналогов циклотомических спектров Бокстеда и Мадсена, а также версия функтора ТС топологических циклических гомологий для циклотомических комплексов и функтор эквивариантных гомологий из циклотомических спектров в циклотомические комплексы, коммутирующий с ТС. Доказано, что, с другой стороны, категория циклотомических комплексов в сущности совпадает со скрученной 2-периодической производной категорией фильтрованных модулей Дьедонне, введенной Фонтенем и Лафэ. Показано, что по модулю некоторых условий функтор ТС на циклотомических комплексах есть функтор синтомических когомологий.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: циклотомический спектр, циклотомический комплекс, фильтрованный модуль Дьедонне.

DOI: 10.4213/im8008

*И.Р. Шафаревичу к девяностолетию,
с почтением и признательностью*

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1]; цель обеих статей – разобраться в том, как некоторые чисто гомологические понятия, использованные в [2], связаны с топологическими циклическими гомологиями работы [3]. Как выяснилось, быстро достичь этой цели нельзя, так как необходимо построить правильные гомологические версии нескольких понятий из стабильной теории гомотопий.

В статье [1] мы рассматриваем производные функторы Макки, гомологические аналоги истинных G -эквивариантных спектров из [4]. Хотя абелева категория функторов Макки хорошо известна в стабильной теории гомотопий и играет важную роль, ее наиболее наивная производная версия ведет себя не вполне правильно. Поэтому в [1] была построена и изучена более правильная производная версия функторов Макки.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 12-01-33024), Программы Правительства РФ (договор 11.G34.31.0023) и фонда “Династия”.

Предметом исследования настоящей статьи являются циклотомические спектры, рассмотренные в [5] и [6]. Чтобы построить их гомологический аналог, надо прежде всего обобщить [1]: по определению циклотомические спектры эквивариантны по отношению к окружности S^1 , в то время как в [1] рассматривались только конечные группы G . Мы не можем построить полный гомологический аналог всех S^1 -спектров, но мы строим категорию $\mathcal{DM}\Lambda(\mathbb{Z})$ “циклических функторов Макки”, включающую в себя те части эквивариантной стабильной категории, которые важны для топологических циклических гомологий. Затем мы вводим триангулированную категорию $\mathcal{DLR}(\mathbb{Z})$ “циклотомических комплексов”.

В идеале связь между циклотомическими комплексами и циклотомическими спектрами должна выражаться коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{DLR}(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Cycl} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{StHom} \end{array} \quad (0.1)$$

“храбрых новых схем”, которые понимаются, например, как тензорные триангулированные категории с некоторым оснащением. Здесь StHom – стабильная гомотопическая категория, $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ – производная категория абелевых групп, а Cycl – категория циклотомических спектров. Диаграмма должна быть “почти декартова”. Точнее, она должна стать декартовой, если заменить Cycl на подкатегорию $\text{Cycl}^0 \subset \text{Cycl}$ циклотомических спектров T с тривиальными геометрическими неподвижными точками $\Phi^{S^1}T$ по отношению ко всей группе S^1 .

В настоящее время такое простое описание кажется недостижимым; помимо очевидных трудностей, связанных с тем, чтобы сделать все “храбрые новые” понятия точными, никто, по-видимому, до сих пор не построил Cycl даже как просто триангулированную категорию¹. Поэтому на практике мы ограничиваемся следующим:

(i) для каждого циклотомического спектра T мы строим циклотомический комплекс $C_\bullet(T)$ его эквивариантных гомологий; это должно отвечать верхней стрелке в диаграмме (0.1);

(ii) мы строим функтор топологических циклических гомологий TC на категории $\mathcal{DLR}(\mathbb{Z})$, причем так, чтобы для любого циклотомического спектра T комплекс $\text{TC}(C_\bullet(T))$ естественно отождествлялся с гомологиями спектра $\text{TC}(T)$.

Затем мы даем другое и очень простое описание категории $\mathcal{DLR}(\mathbb{Z})$. Оказывается, что циклотомические комплексы по сути эквивалентны “фильтрованным модулям Дьедонне” из работы [7]. Фильтрованный модуль Дьедонне – это довольно простой набор линейно алгебраических данных с глубоким смыслом: он представляет собой p -адический аналог введенного Делинем понятия

¹Пока статья готовилась к печати, это было сделано А. Блумбергом и М. Манделом, arXiv:1303.1694.

смешанной структуры Ходжа. Тем самым, теория приобретает определенный мотивный дух. Более подробно это обсуждалось в [8].

Фильтрованные модули Дьедонне естественно появляются как кристалльные когомологии алгебраических многообразий над $\mathbb{Z}_p$, в то время как циклотомические спектры появляются как топологические хохшильдовские гомологии кольцевых спектров A . В силу доказанной нами эквивалентности возникает много ситуаций, в которых обе конструкции можно сравнить. В настоящей статье мы даже не пытаемся этого делать; мы ограничиваемся рассмотрением только чисто линейно алгебраических аспектов и оставляем геометрические приложения наших результатов для последующей работы. Единственная доказанная нами теорема сравнения гласит, что для проконечно полных циклотомических комплексов топологические циклические гомологии ТС совпадают с синтомическими когомологиями из статьи [9], знакомыми по теории модулей Дьедонне.

Статья организована следующим образом. Сначала нам будет нужна модель для S^1 -эквивариантных пространств и их гомологий; мы решили использовать комбинаторный подход через категорию Λ , введенную А. Конном. В § 1 содержатся необходимые факты о категории Λ и связанных с ней категориях. В § 2 мы строим циклические функторы Макки. В § 3 рассмотрены циклотомические комплексы. В § 4 мы строим функторы эквивариантных гомологий из S^1 -спектров в $\mathcal{DM}(\mathbb{Z})$ и циклотомических спектров в $\mathcal{DLR}(\mathbb{Z})$. Затем в § 5 доказана теорема сравнения циклотомических комплексов и фильтрованных модулей Дьедонне. Наконец, в § 6 мы вкратце обсуждаем топологические циклические гомологии и доказываем теорему сравнения для ТС. В приложении, § 7, содержатся некоторые технические факты, в основном, из [1].

Автор благодарен Г. Мерзону за многочисленные вдохновляющие обсуждения тематики статьи, Л. Хесселхолту за его терпеливые объяснения топологических понятий, а также В. Вологодскому за объяснения теории модулей Дьедонне. Выражаю благодарность А. Бейлинсону, В. Дринфельду, В. Гинзбургу, Д. Каждану и Дж. П. Мэю за интерес, проявленный к настоящей работе. Часть работы была завершена во время визита в Еврейский университет в Иерусалиме, а другая часть была выполнена в Университете Чикаго; я благодарен этим учреждениям за гостеприимство.

§ 1. Циклические категории

1.1. Циклическая категория Конна. Напомним, что *циклическая категория* Λ , введенная А. Конном, – это малая категория, объекты которой $[n]$ занумерованы положительными целыми числами n , $n \geq 1$. Отображения из $[n]$ в $[m]$ можно определять разными эквивалентными способами; напомним два из них.

Топологическое описание. Объект $[n]$ мыслится как “колесо” – клеточное разбиение окружности S^1 с n 0-клетками, называемыми *вершинами*, и n

1-клетками, называемыми *ребрами*. Непрерывное отображение $f: S^1 \rightarrow S^1$ индуцирует отображение $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ универсальных накрытий; говорим, что f *монотонно*, если $\tilde{f}(a) \geq \tilde{f}(b)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq b$. Тогда морфизмы из $[n]$ в $[m]$ в категории Λ суть гомотопические классы монотонных непрерывных отображений $f: [n] \rightarrow [m]$ степени 1, которые переводят вершины в вершины.

Комбинаторное описание. Рассмотрим категорию Λ_{big} линейно упорядоченных множеств, снабженных сохраняющим порядок эндоморфизмом τ . Пусть $[n] \in \Lambda_{\text{big}}$ – множество $\mathbb{Z}$ с естественным линейным порядком и эндоморфизмом $\tau: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\tau(a) = a + n$. Пусть $\Lambda_\infty \subset \Lambda_{\text{big}}$ – полная подкатегория, порожденная $[n]$, $n \geq 1$. Для любых $[n], [m] \in \Lambda_\infty$ на множество $\Lambda_\infty([n], [m])$ действует эндоморфизм τ (слева или справа, по определению неважно). Мы определяем множество $\Lambda([n], [m])$ отображений в категории Λ , положив

$$\Lambda([n], [m]) = \Lambda_\infty([n], [m]) / \tau. \quad (1.1)$$

Существуют и другие описания (см. [10, ч. 6] и [11, приложение]).

Для любого $[n] \in \Lambda$ множество $V([n])$ вершин соответствующего разложения окружности можно естественным образом отождествить с множеством $\Lambda([1], [n])$ отображений из $[1]$ в $[n]$, а множество $E([n])$ ребер – с множеством $\Lambda([n], [1])$, в частности $E(-)$ задает контравариантный функтор (геометрически прообраз ребра лежит ровно в одном ребре). Группа автоморфизмов $\text{Aut}([n])$ – циклическая группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, порожденная поворотом по часовой стрелке; мы обозначаем образующую через σ . В комбинаторном описании σ отвечает отображению $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $a \mapsto a + 1$.

Для любого целого числа $p \geq 2$ определяем категорию Λ_p , взяв то же множество объектов $[n]$, $n \geq 1$, и положив

$$\Lambda_p([n], [m]) = \Lambda_\infty([n], [m]) / \tau^p.$$

Категория Λ_p лежит между категориями Λ_∞ и Λ ; в частности, очевидные проекции $\Lambda_\infty([n], [m]) / \tau^p \rightarrow \Lambda_\infty([n], [m]) / \tau$ вместе задают функтор

$$\pi_p: \Lambda_p \rightarrow \Lambda.$$

Функтор π_p – бирасслоение, его слой – $\text{pt}_p = [1/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})]$, группоид, имеющий один объект с группой автоморфизмов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. С другой стороны, $\Lambda_p([n], [m])$ можно отождествить с множеством отображений $f: [np] \rightarrow [mp]$ в Λ таких, что $f \circ \sigma^n = \sigma^m \circ f$; это дает такой канонический функтор

$$i_p: \Lambda_p \rightarrow \Lambda,$$

что на объектах имеем $i_p([n]) = [np]$. Обозначим через

$$\Lambda I = \coprod_{p \geq 1} \Lambda_p \quad (1.2)$$

несвязное объединение всех категорий Λ_p , $p \geq 1$. Тогда все функторы i_p и π_p вместе можно рассмотреть как два функтора

$$i, \pi: \Lambda I \rightarrow \Lambda. \quad (1.3)$$

Категория Λ самодвойственная: эквивалентность $\Lambda \cong \Lambda^{\text{opp}}$ переводит каждый объект в себя, а морфизм $[n] \rightarrow [m]$, представленный отображением $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, переходит в морфизм, представленный отображением $f_{\sharp}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$f_{\sharp}(a) = \max\{b \in \mathbb{Z} \mid f(b) \leq a\}. \quad (1.4)$$

В топологическом описании двойственность меняет местами вершины и ребра и отвечает переходу к двойственному клеточному разбиению.

Для любых $[n], [m] \in \Lambda$ множество отображений $\Lambda([n], [m])$ конечно. Группы $\text{Aut}([n])$ и $\text{Aut}([m])$ действуют на $\Lambda([n], [m])$ композициями, и оба действия эффективны (не имеют стабилизаторов). Нам понадобится следующий немного более общий факт.

ЛЕММА 1.1. *Пусть m, n, l – такие целые числа, что $m, l \geq 1, n \geq 2$, и $f: [nl] \rightarrow [m]$ – отображение в Λ такое, что*

$$f \circ \sigma^l = \sigma^{l_1} \circ f$$

для какого-то $l_1, 0 \leq l_1 < m$. Тогда $m = nl_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем комбинаторное описание Λ . Тогда f представлено таким монотонным отображением $\tilde{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, что

$$\tilde{f}(a + nl) = \tilde{f}(a) + m, \quad \tilde{f}(a + l) = \tilde{f}(a) + l_1 + bm \quad (1.5)$$

для любого $a \in \mathbb{Z}$, где b – фиксированное целое число, не зависящее от a . Поскольку $a \leq a + l \leq a + nl$, из (1.5) следует, что $0 \leq l_1 + bm \leq m$, т.е. или $l_1 = 0$ и $b = 1$, или $b = 0$. Первый случай не возможен, поскольку σ^l действует на $\Lambda([nl], [m])$ без неподвижных точек. Поэтому $b = 0$ и (1.5) немедленно влечет утверждение. Лемма доказана.

Категория $\Lambda/[1]$ объектов $[n] \in \Lambda$, снабженных отображением $[n] \rightarrow [1]$, естественно эквивалентна категории Δ непустых конечных линейно упорядоченных множеств (геометрически $\Lambda/[1]$ – категория колес с фиксированным ребром, и, удалив ребро, получаем канонический линейный порядок “по часовой стрелке” на множестве вершин колеса). Тем самым, имеем естественное дискретное расслоение $\Delta \cong \Lambda/[1] \rightarrow \Lambda$, индуцирующее корасслоение $j^{\circ}: \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \Lambda^{\text{opp}}$. В силу двойственности категория $[1] \setminus \Lambda$ объектов $[n] \in \Lambda$, снабженных отображением $[1] \rightarrow [n]$, эквивалентна Δ^{opp} , так что имеем естественное дискретное расслоение $j: \Delta \rightarrow \Lambda^{\text{opp}}$ (геометрически Δ^{opp} – категория колес с фиксированной вершиной). Та же конструкция подходит для категорий $\Lambda_n, n \geq 2$. В частности, получаем канонический функтор

$$j_n: \Delta \rightarrow \Lambda_n^{\text{opp}},$$

причем $\pi \circ j_n = j$ для любого $n \geq 2$. Пусть $\Delta_n \rightarrow \Delta$ – бирасслоение, заданное декартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \longrightarrow & \Lambda_n^{\text{opp}} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ \Delta & \xrightarrow{j_n} & \Lambda^{\text{opp}} \end{array}$$

Тогда функтор j_n дает расщепление $\Delta \rightarrow \Delta_n$ этого бирасслоения, так что имеем $\Delta_n \cong \Delta \times \text{pt}_n$. Иными словами, это значит, что группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ действует на функторе j_n . Можно также рассмотреть композицию j_n с вложением i_n ; это дает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{j_n} & \Lambda_n^{\text{opp}} \\ r_n \downarrow & & \downarrow i_n \\ \Delta & \xrightarrow{j} & \Lambda^{\text{opp}} \end{array}$$

где $r_n: \Delta \rightarrow \Delta$ – функтор пореберного разбиения, определяемый формулой

$$r_n([m]) = [n] \times [m], \quad (1.6)$$

где $[m]$ и $[n]$ – линейно упорядоченные множества с m и n элементами соответственно, а на $[n] \times [m]$ мы рассматриваем лексикографический порядок “слева направо”.

1.2. Циклотомическая категория. Введем следующее определение, основанное на топологическом описании категории Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Циклотомическая категория ΛR* есть малая категория с теми же объектами $[n]$, $n \geq 1$, что и категория Λ . Если мы рассматриваем $[n]$ как набор n отмеченных точек на окружности S^1 , то морфизмы $[n] \rightarrow [m]$ в категории ΛR суть гомотопические классы монотонных непрерывных отображений $f: [n] \rightarrow [m]$, которые переводят отмеченные точки в отмеченные точки и имеют положительную степень, $\deg f \geq 1$.

Единственное отличие категории ΛR от категории Λ состоит в том, что морфизмы могут иметь степень больше 1. Типичное новое отображение возникает следующим образом. Для любого набора n точек на окружности и любого положительного целого числа $l \geq 1$ рассмотрим l -кратное этальное накрытие $\pi_l: S^1 \rightarrow S^1$ и набор nl прообразов n отмеченных точек. Тогда π задает хорошо определенный морфизм $\pi_{n,l}: [nl] \rightarrow [n]$ в категории ΛR . Более того, любой морфизм $f: [m] \rightarrow [n]$ степени l в категории ΛR разлагается в композицию $f = \pi_{n,l} \circ f'$ для некоторого $f': [m] \rightarrow [nl]$ степени 1, и подобное разложение единственно с точностью до действия группы $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ относительных автоморфизмов накрытия $\pi_l: S^1 \rightarrow S^1$. Тем самым, множество $\Lambda R_l([m], [n])$ морфизмов степени l из $[m]$ в $[n]$ естественно отождествляется с множеством орбит

$$\Lambda R_l([m], [n]) = \Lambda([m], [nl]) / (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \quad (1.7)$$

действия группы $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, порожденной $\sigma^n: [nl] \rightarrow [nl]$. В частности, $\Lambda R_l([m], [n])$ конечно для любых $[m]$, $[n]$ и l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Отображение $f: [m] \rightarrow [n]$ в категории ΛR *горизонтально*, если оно имеет степень 1. Отображение $f: [m] \rightarrow [n]$ степени $l \geq 1$ *вертикально*, если отображение $f': [m] \rightarrow [nl]$ в разложении $f = \pi_{n,l} \circ f'$ обратимо.

Из вышеизложенного следует, что вертикальные и горизонтальные морфизмы образуют факторизационную пару на ΛR в смысле определения П.2 (см. § 7). Подкатегория ΛR_h , образованная горизонтальными отображениями, по определению эквивалентна Λ . Более того, для любой группы G обозначим через O_G категорию *конечных G -орбит*, иными словами, конечных множеств, снабженных транзитивным действием G . Тогда подкатегория $\Lambda R_v \subset \Lambda R$, образованная вертикальными отображениями, очевидным образом эквивалентна категории орбит $O_{\mathbb{Z}}$: эквивалентность переводит $[n] \in \Lambda R$ в орбиту $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (все конечные $\mathbb{Z}$ -орбиты имеют такой вид).

ЛЕММА 1.4. *Для любой пары из горизонтального отображения $h: [m_1] \rightarrow [m]$ и вертикального отображения $v: [m_2] \rightarrow [m]$ в ΛR существует декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} [m_{12}] & \xrightarrow{h_1} & [m_2] \\ v_1 \downarrow & & \downarrow v \\ [m_1] & \xrightarrow{h} & [m] \end{array}$$

с горизонтальным отображением h_1 и вертикальным v_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Взяв композицию функторов i и π из (1.3) с естественными вложениями $\Lambda \cong \Lambda R_h \hookrightarrow \Lambda R$, получаем функторы

$$\tilde{i}, \tilde{\pi}: \Lambda I \rightarrow \Lambda R.$$

Более того, отображения факторизации $\pi_{n,l}$, $n, l \geq 1$, вместе определяют вертикальное отображение

$$\tilde{v}: \tilde{i} \rightarrow \tilde{\pi}. \quad (1.8)$$

Пусть $\widetilde{\Lambda I}$ – категория вертикальных стрелок $v: [m] \rightarrow [m']$ в ΛR , причем морфизмы из $v_1: [m_1] \rightarrow [m'_1]$ в $v_2: [m_2] \rightarrow [m'_2]$ являются коммутативными квадратами

$$\begin{array}{ccc} [m_1] & \xrightarrow{f} & [m_2] \\ v_1 \downarrow & & \downarrow v_2 \\ [m'_1] & \xrightarrow{f'} & [m'_2] \end{array} \quad (1.9)$$

с горизонтальными отображениями f, f' . Тогда, переводя $a \in \Lambda I$ в $\tilde{v}: \tilde{i}(a) \rightarrow \tilde{\pi}(a)$, получаем функтор

$$\Lambda I \rightarrow \widetilde{\Lambda I}. \quad (1.10)$$

ЛЕММА 1.5. *Функтор (1.10) является эквивалентностью категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Переводя колесо $[n] \in \Lambda R$ в множество $V([n])$ его вершин, получаем функтор $\Lambda R \rightarrow \text{Sets}$. Обозначим через

$$\Delta R \xrightarrow{\tilde{j}} \Lambda R^{\text{opp}} \quad (1.11)$$

дискретное расслоение, отвечающее V по конструкции Гротендика.

ЛЕММА 1.6. *Функтор $\delta = \deg \circ \tilde{j}: \Delta R \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]$ – корасслоение со слоем Δ , причем функтор перехода r_m , отвечающий $m \in \mathbb{N}^*$, является функтором по-реберного разбиения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению ΔR – противоположная категория к полной подкатегории в $[1] \setminus \Lambda R$, порожденной горизонтальными отображениями $h: [1] \rightarrow [n]$, $[n] \in \Lambda R$. Кроме того, ΔR наследует из ΛR вертикальную/горизонтальную факторизационную пару. Отсюда следует, что вертикальные морфизмы декартовы по отношению к δ , а слой δ порожден горизонтальными морфизмами.

1.3. Расширенные категории. Пусть $\mathbb{N}^*$ – мультипликативный моноид по умножению положительных целых чисел $l \geq 1$, и пусть $[1/\mathbb{N}^*]$ – категория с одним объектом 1 и

$$\text{Hom}_{[1/\mathbb{N}^*]}(1, 1) = \mathbb{N}^*.$$

Переводя морфизм в его степень, получаем функтор

$$\deg: \Lambda R \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]. \quad (1.12)$$

Этот функтор имеет сечение – полное строгое вложение $\alpha: [1/\mathbb{N}^*] \rightarrow \Lambda R$, переводящее 1 в $[1] \in \Lambda R$ (отображение $[1] \rightarrow [1]$ единственным образом задается своей степенью). Более того, пусть

$$I = 1 \setminus [1/\mathbb{N}^*]$$

– категория объектов $a \in [1/\mathbb{N}^*]$, снабженных отображением $1 \rightarrow a$. Иными словами, I – это множество $\mathbb{N}^*$, снабженное частичным порядком по делимости и стандартным образом превращенное в малую категорию. Тогда имеем естественное корасслоение

$$I \rightarrow [1/\mathbb{N}^*], \quad (1.13)$$

слой которого – множество $\mathbb{N}^*$, рассмотренное как дискретная категория. По конструкции Гротендика это отвечает функтору $[1/\mathbb{N}^*] \rightarrow \text{Sets}$, переводящему 1 в $\mathbb{N}^*$, или, иными словами, действию моноида $\mathbb{N}^*$ на себе; тогда получается действие правыми умножениями.

Пусть теперь $\mathbb{N}^*$ действует на себе и слева, и справа, и пусть $\mathbb{I}$ – соответствующая категория, корасслоенная над $[1/\mathbb{N}^*] \times [1/\mathbb{N}^*]$ со слоем $\mathbb{N}^*$. Эквивалентным образом, $\mathbb{I}$ задается декартовым квадратом

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ [1/\mathbb{N}^*] \times [1/\mathbb{N}^*] & \longrightarrow & [1/\mathbb{N}^*] \end{array}$$

где нижнее отображение индуцировано отображением произведения $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$. Взяв композицию корасслоения $\mathbb{I} \rightarrow [1/\mathbb{N}^*] \times [1/\mathbb{N}^*]$ с проекцией на правый сомножитель $[1/\mathbb{N}^*]$, получаем корасслоение

$$\mathbb{I} \rightarrow [1/\mathbb{N}^*] \quad (1.14)$$

со слоем I . Мы также имеем естественный декартов функтор $I \rightarrow \mathbb{I}$; послонно он задается включением дискретной категории $\mathbb{N}^*$ в I (которое не что иное, как то же $\mathbb{N}^*$, но рассмотренное как частично упорядоченное множество). В явном виде объекты $\mathbb{I}$ суть положительные целые числа $n \geq 1$, а морфизмы порождены морфизмами

$$F_l, R_l: n \rightarrow nl \quad (1.15)$$

для любых $n, l \geq 1$ по модулю соотношений

$$F_n \circ F_m = F_{nm}, \quad R_n \circ R_m = R_{nm}, \quad F_n \circ R_m = R_m \circ F_n$$

для любых $n, m \geq 1$. Категория I противоположна к той, которую Т. Гудвилли определил в [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. *Расширенная циклическая категория $\Lambda\mathbb{Z}$ есть расслоенное произведение*

$$\Lambda\mathbb{Z} = \Lambda R \times_{[1/\mathbb{N}^*]} I,$$

а расширенная циклотомическая категория $\widetilde{\Lambda R}$ – расслоенное произведение

$$\widetilde{\Lambda R} = \Lambda R \times_{[1/\mathbb{N}^*]} \mathbb{I},$$

где $\Lambda R \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]$ – функтор степени $\deg$ из (1.12), а $I \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]$ (соответственно, $\mathbb{I} \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]$) – корасслоение (1.13) (соответственно, (1.14)).

Сечение $\alpha: [1/\mathbb{N}^*] \rightarrow \Lambda R$ функтора степени $\deg: \Lambda R \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]$ индуцирует функтор

$$\tilde{\alpha}: \mathbb{I} \rightarrow \widetilde{\Lambda R}. \quad (1.16)$$

По определению имеем корасслоения

$$\lambda: \Lambda\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda R, \quad \tilde{\lambda}: \widetilde{\Lambda R} \rightarrow \Lambda R, \quad (1.17)$$

слои которых отождествлены с $\mathbb{N}^*$, I соответственно. В явном виде объекты $\Lambda\mathbb{Z}$ или $\widetilde{\Lambda R}$ задаются парами $\langle [n] \in \Lambda R, m \in \mathbb{N}^* \rangle$; будем обозначать такие пары $[n|m]$. Морфизм из $[n|m]$ в $[n'|m']$ в $\Lambda\mathbb{Z}$ (соответственно, $\widetilde{\Lambda R}$) – это такой морфизм $f: [n] \rightarrow [n']$ в ΛR , что $m' = m \deg f$ (соответственно, $m' = lm \deg f$ для какого-то целого числа $l \geq 1$). Вертикальная/горизонтальная факторизационная пара тем самым индуцирует аналогичные вертикальные/горизонтальные факторизационные пары на $\Lambda\mathbb{Z}$ и $\widetilde{\Lambda R}$. Обозначим через $\Lambda\mathbb{Z}_v, \Lambda\mathbb{Z}_h \subset \Lambda\mathbb{Z}$, $\widetilde{\Lambda R}_v, \widetilde{\Lambda R}_h \subset \widetilde{\Lambda R}$ подкатегории, порожденные вертикальными/горизонтальными морфизмами. Тогда $\Lambda\mathbb{Z}_h$ и $\widetilde{\Lambda R}_h$ представляются выражениями

$$\Lambda\mathbb{Z}_h = \coprod_{m \geq 1} \Lambda\mathbb{Z}_h^m \cong \mathbb{N}^* \times \Lambda, \quad \widetilde{\Lambda R}_h = I \times \Lambda, \quad (1.18)$$

где $\Lambda\mathbb{Z}_h^m$ – полная подкатегория, порожденная объектами $[n|m]$, $n \geq 1$, и для любого m категория $\Lambda\mathbb{Z}_h^m$ естественно эквивалентна Λ . С другой стороны, категория $\Lambda\mathbb{Z}_v$ представляется в виде

$$\Lambda\mathbb{Z}_v = \coprod_{n \geq 1} \Lambda\mathbb{Z}_v^n \cong \coprod_{n \geq 1} O_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, \quad (1.19)$$

где $\Lambda\mathbb{Z}_v^n$ – полная подкатегория, порожденная $[n'|m']$ с $n = n'm'$, и для любого n категория $\Lambda\mathbb{Z}_v^n$ естественно эквивалентна категории $O_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. Эти представления индуцированы отождествлениями $\Lambda R_h \cong \Lambda$, $\Lambda R_v \cong O_{\mathbb{Z}}$.

1.4. Дополнительные факты о расширенной циклической категории. Приведем еще несколько простых свойств категории $\Lambda\mathbb{Z}$. По лемме Йонеды категория $\Lambda\mathbb{Z}$ полно и строго вложена в категорию $\text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \text{Sets})$. Ограничивая вложение на $\Lambda = \Lambda\mathbb{Z}_h^1 \subset \Lambda\mathbb{Z}$, получаем

$$Y: \Lambda\mathbb{Z} \rightarrow \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \text{Sets}).$$

Это дает альтернативное чисто комбинаторное описание категории $\Lambda\mathbb{Z}$, поскольку верна следующая

ЛЕММА 1.8. *Функтор Y полный и строгий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $Y([n|1])$ есть функтор $h_{[n]}: \Lambda^{\text{opp}} \rightarrow \text{Sets}$, представленный $[n] \in \Lambda$, а по (1.7) функтор $Y([n|m])$ для $m \geq 2$ есть фактор $h_{[nm]}/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ функтора $h_{[nm]}$ по действию циклической группы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset \text{Aut}([nm])$. Тем самым, имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Y([n|m]), Y([n'|m'])) &= \text{Hom}(h_{[nm]}, h_{[n'm']}/(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \\ &= (\Lambda([nm], [n'm'])/(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}))^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

и по лемме 1.1 это множество непусто, только когда $m' = lm$ для какого-то l , и совпадает с множеством $\Lambda([n, n'l]/(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}))$. Снова применяя (1.7), заключаем, что последнее совпадает с $\Lambda\mathbb{Z}([n|m], [n'|m']) = \Lambda R_l([n], [n'l])$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.9. *Для любой пары из горизонтального отображения $h: [n_1|m] \rightarrow [n|m]$ и вертикального отображения $v: [n'|m'] \rightarrow [n|m]$ существует декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} [n'_1|m'] & \xrightarrow{h'} & [n'|m'] \\ v' \downarrow & & \downarrow v \\ [n_1|m] & \xrightarrow{h} & [n|m] \end{array} \quad (1.20)$$

в $\Lambda\mathbb{Z}$ с горизонтальным h' и вертикальным v' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем лемму 1.4 и замечаем, что $\deg v_1 = \deg v$.

В силу леммы 1.9 мы можем определить новую категорию $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$ следующим образом: объекты те же, что в $\Lambda\mathbb{Z}$, морфизмы из c в c' являются классами изоморфизма диаграмм

$$c \xleftarrow{v} c_1 \xrightarrow{h} c' \quad (1.21)$$

с вертикальным отображением v и горизонтальным h . Композиция задается расслоенным произведением. Отметим, что диаграмма вида (1.21) не имеет нетривиальных автоморфизмов. Поэтому на $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$ существует естественная факторизационная пара, в которой горизонтальные (соответственно, вертикальные) отображения представлены диаграммами с обратимым v (соответственно, h). Как и ранее, обозначим соответствующие подкатегории через $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h$, $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_v \subset \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$. Имеем представления

$$\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_v = \prod_{n \geq 1} O_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, \quad \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h = \mathbb{N}^* \times \Lambda,$$

индуцированные (1.19) и (1.18), так что $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_v \cong \Lambda\mathbb{Z}_v^{\text{opp}}$ и $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h \cong \Lambda\mathbb{Z}_h$. Отметим, что эквивалентность $\Lambda \cong \Lambda^{\text{opp}}$ из (1.4) порождает эквивалентность

$$\Lambda\mathbb{Z}_h \cong \mathbb{N}^* \times \Lambda \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}} \cong \mathbb{N}^* \times \Lambda^{\text{opp}}. \quad (1.22)$$

ЛЕММА 1.10. *Существует эквивалентность категорий*

$$\widehat{\Lambda\mathbb{Z}} \cong \Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}},$$

которая изоморфна тождественному функтору в ограничении на $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_v \cong \Lambda\mathbb{Z}_v^{\text{opp}} \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}_v^{\text{opp}} \subset \Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}$ и индуцирует эквивалентность $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h \cong \Lambda\mathbb{Z}_h \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}} \subset \Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}$ из (1.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вид эквивалентности $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}} \cong \Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}$ предписан условиями: она тождественна на объектах и переводит горизонтальный морфизм h в какой-либо категории $\Lambda\mathbb{Z}_h^m \subset \Lambda\mathbb{Z}$, $\Lambda\mathbb{Z}_h^m \cong \Lambda$ в $h_{\#}$. Чтобы убедиться в том, что это дает корректное определение, необходимо проверить, что для любого декартова квадрата (1.20) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [n'_1|m'] & \xrightarrow{v'} & [n_1|m] \\ h'_{\#} \uparrow & & \uparrow h_{\#} \\ [n'|m'] & \xrightarrow{v} & [n|m] \end{array}$$

коммутативна. Это немедленно вытекает из конструкции: оба отображения h и h' представляются одним и тем же отображением $[n_1m] \rightarrow [nm]$. Лемма доказана.

1.5. Гомологические свойства. Геометрическая реализация $|\Lambda|$ нерва категории Λ гомотопически эквивалентна $BU(1)$ – классифицирующему пространству группы единичной окружности $U(1)$. В частности, когомологии категории $\Lambda \cong \Lambda^{\text{opp}}$ с коэффициентами в постоянном функторе $\mathbb{Z}$ равны

$$H^*(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z}) = H^*(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u],$$

где u – образующая степени 2. Чтобы представить $u \in H^2(\Lambda, \mathbb{Z})$ явно, сопоставим колесу $[n] \in \Lambda$ его комплекс клеточных когомологий $C^{\bullet}([n], \mathbb{Z})$. Поскольку

топологически каждое колесо есть окружность $S^1 \cong U(1)$, имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow C^0([n], \mathbb{Z}) \longrightarrow C^1([n], \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

для любого $[n] \in \Lambda$. Эта последовательность функториально зависит от $[n]$, так что получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{b_0} j_* \mathbb{Z} \xrightarrow{B} j_!^o \mathbb{Z} \xrightarrow{b_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (1.23)$$

функторов в $\text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, где мы ввели отождествления

$$C^1([n], \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[E([n])] \cong (j_!^o \mathbb{Z})([n]), \quad C^0([n], \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[V([n])]^* \cong (j_* \mathbb{Z})([n]),$$

причем $j: \Delta \rightarrow \Lambda^{\text{opp}}$, $j^o: \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \Lambda^{\text{opp}}$ – функторы из п. 1.1. Точная последовательность (1.23) представляет по Йонедэ элемент $u \in \text{Ext}^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; это и есть образующий полиномиальной алгебры $\text{Ext}^\bullet(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = H^\bullet(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$.

Комплексы клеточных когомологий функториальны и по отношению к отображениям степени больше 1, так что точная последовательность (1.23) продолжается на категорию $\text{Fun}(\Lambda R, \mathbb{Z})$. Продолженная последовательность имеет вид

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{b_0} \tilde{j}_* \mathbb{Z} \xrightarrow{B} E \xrightarrow{b_1} \deg^* \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 0, \quad (1.24)$$

где $\tilde{j}$ такое, как в (1.11), $E \in \text{Fun}(\Lambda R^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ обозначает функтор $[n] \mapsto C^1([n], \mathbb{Z})$, а $\mathbb{Z}(1) \in \text{Fun}([1/\mathbb{N}^*], \mathbb{Z})$ – функтор, отвечающий $\mathbb{Z}$, на котором любой элемент $n \in \mathbb{N}^*$ действует умножением на n .

Используя функторы i, π из (1.3), мы можем поднять последовательность (1.23) на категорию ΛI^{opp} двумя различными способами, и отображение (1.8) индуцирует отображение между этими подъемами. Если мы зафиксируем положительное целое число $n \geq 2$ и ограничим все последовательности на $\Lambda_n^{\text{opp}} \subset \Lambda I^{\text{opp}}$, то получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & i_n^* j_* \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_n^* B} & i_n^* j_!^{\text{opp}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \eta_n & & \downarrow v_n & & \downarrow n \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_n^* j_* \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi_n^* B} & \pi_n^* j_!^{\text{opp}} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.25)$$

в которой вертикальные отображения η_n – изоморфизмы. Геометрическая реализация $|\Lambda_n|$ категории Λ_n имеет тот же гомотопический тип, что и $|\Lambda|$, а функтор $i_n: \Lambda_n \rightarrow \Lambda$ индуцирует гомотопическую эквивалентность реализаций. Первая строка в (1.25) представляет по Йонедэ образующую $u \in H^2(\Lambda_n^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ алгебры когомологий

$$H^\bullet(\Lambda_n^{\text{opp}}, \mathbb{Z}) \cong H^\bullet(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u].$$

С другой стороны, функтор $\pi_n: \Lambda_n \rightarrow \Lambda$ не индуцирует гомотопическую эквивалентность реализаций: на уровне реализаций $|\Lambda_n| \cong |\Lambda| \cong BU(1)$ отображение, индуцированное π_n , отвечает n -кратному накрытию $U(1) \rightarrow U(1)$. Вторая строка в (1.25) представляет элемент $\pi_n^* u = \nu \in H^2(\Lambda_n^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$.

1.6. Гомологическое обращение в нуль. Нам также понадобятся некоторые результаты об обращении когомологий в нуль для малых категорий ΔR и ΛR^{opp} . Напомним, что для любого $p \geq 1$ и функтора пореберного разбиения $r_p: \Delta \rightarrow \Delta$ из (1.6) естественное отображение

$$H^\bullet(\Delta, r_p^* M) \rightarrow H^\bullet(\Delta, M)$$

для любого $M \in \mathcal{D}(\Delta, k)$ является изоморфизмом (см., например, [2, лемма 1.14], однако это утверждение, вообще говоря, хорошо известно). В силу сопряженности это значит, что естественное отображение

$$r_{p!} k \rightarrow k \tag{1.26}$$

будет квазиизоморфизмом для любого $p \geq 1$ (здесь через k обозначены постоянные функторы).

ЛЕММА 1.11. Пусть $h: \Delta \cong \Delta R_h \rightarrow \Delta R$ – естественное вложение и $M \in \mathcal{D}(\Delta R^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ – такой объект, что $H^\bullet(\Delta, M) = 0$. Тогда $H^\bullet(\Delta R, M) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta: \Delta R \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]$ – корасслоение из леммы 1.6. Достаточно доказать, что $R^\bullet \delta_* M = 0$. Эквивалентно,

$$H^\bullet(\widetilde{\Delta R}, \kappa^* M) = 0,$$

где $\widetilde{\Delta R}$ – категория объектов $[n] \in \Delta R$, снабженных отображением $\delta([n]) \rightarrow 1$ (т. е. числом $m \in \mathbb{N}^*$), а $\kappa: \widetilde{\Delta R} \rightarrow \Delta R$ – функтор забывания. Для любого $l \geq 1$ обозначим через $\iota_l: \Delta \rightarrow \widetilde{\Delta R}$ вложение, переводящее $[n]$ в себя же и снабженное числом l . Имеем также функтор забывания $\delta: \widetilde{\Delta R} \rightarrow I$, индуцированный $\delta: \Delta R \rightarrow [1/\mathbb{N}^*]$, и по лемме 1.6 он представляет собой корасслоение с функторами перехода r_n . Поэтому если функтор $i_l^* i_{m!}: \mathcal{D}(\Delta, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Delta, k)$ нетривиален, то $m = lp$ для какого-то p и функтор изоморфен $r_{p!}$. Тогда в силу (1.26) отображение сопряжения $i_{l!} k \rightarrow k$ является изоморфизмом на $\iota_p(\Delta) \subset \widetilde{\Delta R}$ для всех p , делящих l . Следовательно,

$$k \cong \lim_{\rightarrow} i_{l!} k,$$

и достаточно доказать, что

$$\text{RHom}^\bullet(i_{l!} k, \kappa^* M) = 0$$

для любого l . В силу сопряженности это значит, что $H^\bullet(\Delta, \iota_l^* \kappa^* M) = 0$, в то время как $\kappa \circ \iota_l = \text{id}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.12. Для любого $M \in \text{Fun}(\Lambda R^{\text{opp}}, k)$ имеем

$$H^\bullet(\Lambda R^{\text{opp}}, M \otimes E) = 0,$$

где $E \in \text{Fun}(\Lambda R^{\text{opp}}, k)$ такое, как в (1.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в [2, лемма 1.10], точная последовательность (1.24) с помощью девиссажа влечет следующее:

$$H^\bullet(\Delta R, \tilde{j}^*(M \otimes E)) = 0,$$

а по лемме 1.11 достаточно доказать, что $H^\bullet(\Delta, j^*h^*(M \otimes E)) = 0$. Это двойственно к [2, лемма 1.10].

По следствию 1.12 точная последовательность (1.24) индуцирует длинную точную последовательность когомологий

$$H^\bullet(\Lambda R^{\text{opp}}, M) \longrightarrow H^\bullet(\Delta R, \tilde{j}^* M) \longrightarrow H^{\bullet-1}(\Lambda R^{\text{opp}}, M \otimes \deg^* \mathbb{Z}(1)) \longrightarrow \quad (1.27)$$

для любого $M \in \text{Fun}(\Lambda R^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. *Предположим, что функтор $M \in \text{Fun}(\Lambda R^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ проконечно полон. Тогда отображение*

$$H^\bullet(\Lambda R^{\text{opp}}, M) \rightarrow H^\bullet(\Delta R, \tilde{j}^* M) \quad (1.28)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле проекции имеем

$$H^\bullet(\Lambda R^{\text{opp}}, M \otimes \deg^* \mathbb{Z}(1)) \cong H^\bullet([1/\mathbb{N}^*], \mathbb{Z}(1) \otimes R^\bullet \deg_* M),$$

и в силу (1.27) надо доказать, что (1.28) тавтологически обращается в нуль. Поскольку $R^\bullet \deg_*$ коммутирует с проконечным пополнением, достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1.14. *Для любого проконечно полного $M \in \text{Fun}([1/\mathbb{N}^*], \mathbb{Z})$ имеем*

$$H^\bullet([1/\mathbb{N}^*], M \otimes \mathbb{Z}(1)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая проконечно полная абелева группа M разлагается в произведение:

$$M = \prod_p M_p,$$

по всем простым p , причем M_p про- p -полно. Поэтому можно предполагать, что M про- p -полно для какого-то простого p . Разложим моноид $\mathbb{N}^*$ в произведение: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\{p\}}^*$, где $\mathbb{N}_p \subset \mathbb{N}$ состоит из всех чисел, взаимно простых с p , а $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ – моноид степеней p^n , $n \geq 0$. Тогда по формуле Кюннета достаточно доказать, что

$$H^\bullet([1/\mathbb{N}], \mathbb{Z}(1) \otimes M) = 0.$$

Однако $H^\bullet([1/\mathbb{N}], M')$ для любого $M' \in \text{Fun}([1/\mathbb{N}], \mathbb{Z})$ можно вычислять с помощью двучленного комплекса

$$M' \xrightarrow{\text{id}-t} M',$$

где $t: M' \rightarrow M'$ – действие образующей $1 \in \mathbb{N}$. В нашем случае $M' = M \otimes \mathbb{Z}(1)$, M' про- p -полно, а t делится на p . Поэтому отображение $\text{id}-t$ обратимо.

§ 2. Циклические функторы Макки

2.1. Определение через категорию частных. Рассмотрим *сплетенное произведение* $\Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma$ расширенной циклической категории $\Lambda\mathbb{Z}$ и категории Γ конечных множеств; в явном виде $\Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma$ отождествляется с полной подкатегорией в $\text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \text{Sets})$, порожденной несвязными объединениями объектов $[n|m] \in \Lambda\mathbb{Z} \subset \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \text{Sets})$ (в частности, имеем естественное полное вложение $\Lambda\mathbb{Z} \subset \Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma$). Морфизм

$$\coprod_{s \in S} [n_s|m_s] \rightarrow \coprod_{s' \in S'} [n_{s'}|m_{s'}]$$

между двумя такими произведениями, индексированными конечными множествами S, S' , состоит из отображения $f: S \rightarrow S'$ и отображения $f_s: [n_s|m_s] \rightarrow [n_{f(s)}|m_{f(s)}]$ для любого $s \in S$. Будем говорить, что $\langle f, \{f_s\} \rangle$ *вертикально*, если f_s вертикально для любого s , и *горизонтально*, если f обратимо, а f_s горизонтально для любого s . Тогда вертикальные и горизонтальные отображения, очевидно, образуют факторизационную пару на $\Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma$ и имеем следующий результат.

ЛЕММА 2.1. *Для любого вертикального отображения $v: [a] \rightarrow [b]$ в $\Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma$ и любого отображения $f: [b'] \rightarrow [b]$ существует декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} [a'] & \xrightarrow{f'} & [a] \\ v' \downarrow & & \downarrow v \\ [b'] & \xrightarrow{f} & [b] \end{array}$$

с вертикальным отображением v' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку вертикальные и горизонтальные отображения задают на $\Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma$ факторизационную пару, можно считать, что f либо горизонтально, либо вертикально. В первом случае утверждение следует из леммы 1.9. Во втором случае достаточно доказать, что в категории $(\Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma)_v = \Lambda\mathbb{Z}_v \wr \Gamma$ существуют расслоенные произведения. Это следует из (1.19), поскольку для любого m категория $O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \wr \Gamma$ имеет расслоенные произведения (она эквивалентна категории конечных множеств, снабженных действием группы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$). Лемма доказана.

Наше определение (производных) циклических функторов Макки повторяет определение производных функторов Макки, данное в [1, § 3, п. 3.4]. Для любых двух объектов $c, c' \in \Lambda\mathbb{Z}$ обозначим через $Q^1\Lambda\mathbb{Z}(c, c')$ категорию диаграмм

$$c \xleftarrow{v} c_1 \xrightarrow{f} c' \quad (2.1)$$

в $\Lambda\mathbb{Z} \wr \Gamma$ с вертикальным v . Морфизмы из диаграммы $c \leftarrow c_1 \rightarrow c'$ в диаграмму $c \leftarrow c_2 \rightarrow c'$ задаются такими отображениями $g = \langle g, \{g_s\} \rangle: c_1 \rightarrow c_2$, что g коммутирует с f и v , а каждая из компонент g_s обратима.

Мы имеем $Q^l \Lambda \mathbb{Z}(c, c') = Q(\Lambda \mathbb{Z}(c, c')) \wr \Gamma$, где $Q \Lambda \mathbb{Z}(c, c') \subset Q^l \Lambda \mathbb{Z}(c, c')$ – подкатегория диаграмм (2.1), в которых $c_1 \in \Lambda \mathbb{Z} \subset \Lambda \mathbb{Z} \wr \Gamma$, и обратимых отображений между такими диаграммами. Это отождествление задает функтор проекции $\rho_{c, c'}: Q^l(c, c') \rightarrow \Gamma$, переводящий диаграмму $c \leftarrow c_1 \rightarrow c'$ в конечное множество S компонент объекта $c_1 = \coprod_{s \in S} [n_s | m_s] \in \Lambda \mathbb{Z} \wr \Gamma$. Обозначим через

$$T_{c, c'} = \rho^* T \in \text{Fun}(Q^l(c, c'), \mathbb{Z})$$

функтор из $\mathcal{Q}^l(c, c')$ в категорию абелевых групп, полученный обратным образом из функтора $T \in \text{Fun}(\Gamma, \mathbb{Z})$, $T(S) = \mathbb{Z}[S]$.

В силу леммы 2.1 для любых $c, c', c'' \in \Lambda \mathbb{Z}$ мы имеем естественный функтор

$$m_{c, c', c'': Q^l(c, c') \times Q^l(c', c'') \rightarrow Q^l(c, c''),$$

заданный расслоенными произведениями. Эта операция ассоциативна, так что получаем 2-категорию $\mathcal{Q} \Lambda \mathbb{Z}$ с теми же объектами, что $\Lambda \mathbb{Z}$, и с категориями морфизмов $Q^l(-, -)$. Аналогично [1, (3.7)] имеем естественные отображения

$$\mu_{c, c', c'': T_{c, c'} \boxtimes T_{c', c''} \rightarrow m_{c, c', c''}^* T_{c, c''},$$

и эти отображения ассоциативны на тройных произведениях. Поэтому в силу [1, п. 1.6] имеем A_∞ -категорию $\mathcal{B}_\bullet$ с теми же объектами, что и $\Lambda \mathbb{Z}$, морфизмы которой равны бар-комплексам категорий $Q^l(c, c')$ с коэффициентами в функторах $T_{c, c'}$:

$$\mathcal{B}_\bullet(c, c') = C_\bullet(Q^l(c, c'), T_{c, c'}),$$

и композиции индуцированы функторами $m_{c, c'}$ и отображениями $\mu_{c, c', c''}$.

Для любой абелевой категории Ab рассмотрим производную категорию $\mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, \text{Ab})$ A_∞ -функторов из противоположной категории $\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}$ в категорию комплексов объектов в Ab . По определению категория $\Lambda \mathbb{Z}$ вкладывается в 2-категорию $\mathcal{Q} \Lambda \mathbb{Z}$: функтор вложения $q: \Lambda \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Q} \Lambda \mathbb{Z}$ тождествен на объектах и переводит морфизм в диаграмму (2.1), где $v = \text{id}$. Для любых $c, c' \in \Lambda \mathbb{Z}$ ограничение $q^* T_{q(c), q(c')}$ является постоянным функтором $\mathbb{Z}$, так что ограничение задает естественный функтор

$$q^*: \mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, \text{Ab}) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}^{\text{opp}}, \text{Ab}). \quad (2.2)$$

Пусть $h: \Lambda \mathbb{Z}_h \rightarrow \Lambda \mathbb{Z}$ – естественное вложение; взяв композицию q^* и h^* , получим функтор ограничения

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, \text{Ab}) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, \text{Ab}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Циклический функтор Макки* со значениями в абелевой категории Ab – это A_∞ -функтор $M \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, \text{Ab})$, ограничение которого $h^* q^* M \in \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, \text{Ab})$ локально постоянно в смысле определения II.1 из § 7.

Циклические функторы Макки образуют полную триангулированную подкатегорию в категории $\mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, \text{Ab})$, которую мы обозначим через $\mathcal{DM}(\text{Ab}) \subset$

$\mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, \text{Ab})$. На самом деле в настоящей статье нам понадобится только случай $\text{Ab} = k\text{-mod}$, где $k\text{-mod}$ – категория модулей над коммутативным кольцом k ; чтобы упростить обозначения, положим $\mathcal{DM}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, k\text{-mod}) = \mathcal{DM}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, k)$.

По определению для любого положительного целого числа $m \geq 1$ вложение $O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \cong \Lambda\mathbb{Z}_v^m \subset \Lambda\mathbb{Z}$ из (1.19) продолжается до 2-функтора

$$i_m: \overline{\mathcal{Q}}^l O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{Q}\Lambda\mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

где $\mathcal{Q}^l O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ – 2-категория из [1, п. 3.4], а $\overline{\mathcal{Q}}^l O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \subset \mathcal{Q}^l O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ – ее полная подкатегория, порожденная $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -орбитами. Этот 2-функтор совместим с коэффициентами $T_{c,c'} \in \text{Fun}(\mathcal{Q}^l(c, c'), \mathbb{Z})$, а потому продолжается до A_∞ -функтора

$$\tilde{\mathcal{B}}_\bullet^{O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}} \rightarrow \mathcal{B}_\bullet,$$

где $\tilde{\mathcal{B}}_\bullet^{O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}}$ такой, как в [1, п. 3.5]. Категория $\tilde{\mathcal{B}}_\bullet^{O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}}$ по определению самодвойственна, поэтому с помощью ограничения для любого коммутативного кольца k мы получаем естественный функтор

$$i_m^*: \mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{DM}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k),$$

где $\mathcal{DM}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k)$ – категория производных $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -функторов Макки, построенная в [1]. Имеем также сопряженный слева функтор

$$i_{m!}: \mathcal{DM}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, k).$$

2.2. Геометрические неподвижные точки. Рассмотрим теперь категорию $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$ из п. 1.4. Эта категория также вложена в $\mathcal{Q}\Lambda\mathbb{Z}$; функтор вложения $\widehat{q}: \widehat{\Lambda\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{Q}\Lambda\mathbb{Z}$ идентичен на объектах и переводит диаграмму (1.21) в соответствующую диаграмму (2.1) (напомним, что диаграммы (1.21) не имеют автоморфизмов, поэтому эта конструкция не зависит от произвольных выборов). Как и функтор q из (2.2), функтор $\widehat{q}$ совместим с коэффициентами $T_{c,c'}$, и мы получаем функтор ограничения

$$\widehat{q}^*: \mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k).$$

Для любого положительного целого числа $m \geq 1$ 2-функтор i_m ограничивается до вложения $O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightarrow \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$, так что имеем функториальный изоморфизм

$$i_m^* \circ \widehat{q}^* \cong \widehat{q}_m^* \circ i_m^*, \quad (2.4)$$

где $\widehat{q}_m^*$ – ограничение вдоль 2-функтора $\widehat{q}_m: O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{Q}^l(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})$, рассмотренного в [1, п. 5.3] (где он обозначался q).

Учтем теперь представления (1.19), (1.18) и отождествление $\Lambda\mathbb{Z}_h \cong \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h \cong \mathbb{N}^* \times \Lambda$. Определим функтор

$$\nu: \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k) = \text{Fun}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h^{\text{opp}}, k) \rightarrow \text{Fun}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k),$$

положив $\nu(M)([n|m]) = M([n|m])$ для любого $M \in \text{Fun}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h^{\text{opp}}, k)$, $[n|m] \in \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$, и

$$\nu(M)(f) = \begin{cases} M(v \circ h), & v \text{ обратим,} \\ 0, & v \text{ не обратим,} \end{cases} \quad (2.5)$$

где $f = v \circ h$ – горизонтальное/вертикальное разложение морфизма f в $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h$. Легко видеть, что это определение корректно и дает точный функтор ν . Мы будем обозначать той же буквой ν его продолжение на производные категории. Имеем сопряженный слева функтор $\varphi: \text{Fun}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k) \rightarrow \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$, и его производный функтор

$$L^\bullet \varphi: \mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$$

сопряжен слева функтору $\nu: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Геометрический функтор неподвижных точек*

$$\Phi: \mathcal{D}(B_\bullet^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$$

задается следующим образом:

$$\Phi = L^\bullet \varphi \circ \widehat{q}^*.$$

Отметим, что по определению функтор неподвижных точек Φ расщепляется на компоненты

$$\Phi_m: \mathcal{D}(B_\bullet^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}((\Lambda\mathbb{Z}_h^m)^{\text{opp}}, k) \cong \mathcal{D}(\Lambda^{\text{opp}}, k),$$

занумерованные положительными целыми числами $m \geq 1$. Нам будут нужны некоторые результаты о совместимости функтора Φ и геометрического функтора неподвижных точек, построенного в [1]. А именно, зафиксируем положительное целое число $m \geq 1$ и рассмотрим вложение i_m из (2.3) и соответствующий функтор ограничения i_m^* . Пусть $\overline{O}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ – категория $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -орбит и их изоморфизмов; определим функтор

$$\nu_m: \text{Fun}(\overline{O}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, k) \rightarrow \text{Fun}(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, k)$$

той же формулой (2.5), что и функтор ν (т.е. $\nu_m(M)(v)$ равен $M(v)$ для обратимых v и равен 0 для не обратимых). Пусть $\varphi_m: \text{Fun}(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, k) \rightarrow \text{Fun}(\overline{O}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, k)$ – левый сопряженный функтор к ν_m , а $L^\bullet \varphi_m$ – производный функтор φ_m . Тогда имеем очевидный изоморфизм

$$i_m^* \circ \nu \cong \nu_m \circ i_m^*. \quad (2.6)$$

В силу сопряженности изоморфизмы (2.4) и (2.6) индуцируют отображения замены базы

$$i_m^* \circ L^\bullet \varphi \rightarrow L^\bullet \varphi_m \circ i_m^*, \quad i_{m!} \circ \widehat{q}_m^* \rightarrow \widehat{q}^* \circ i_{m!}, \quad (2.7)$$

где i_m обозначает и 2-функтор (2.3), и его ограничения

$$i_m: O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightarrow \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, \quad i_m: \overline{O}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightarrow \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h^{\text{opp}}$$

на $\widehat{q}_m(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})$ и $\widehat{q}_m(\overline{O}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})$ соответственно.

ЛЕММА 2.4. Для любого положительного целого числа $m \geq 1$ отображения замены базы (2.7) обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{h}: \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h^{\text{opp}} \rightarrow \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}$, $h_m: \overline{O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}} \rightarrow O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ – тавтологические вложения. Тогда мы очевидным образом имеем $\hat{h}^* \circ \nu \cong \text{id}$, $h_m^* \circ \nu_m^* \cong \text{id}$, так что по сопряженности

$$L^\bullet \varphi \circ \hat{h}_! \cong \text{id}, \quad L^\bullet \varphi_m \circ h_{m!} \cong \text{id}.$$

С другой стороны, имеем горизонтальную/вертикальную факторизационную пару на $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}} \cong \Lambda\mathbb{Z}$, и из леммы П.4 (см. § 7) следует

$$i_m^* \circ \hat{h}_! \cong h_{m!} \circ i_m^*.$$

Поэтому отображение

$$i_m^* \circ L^\bullet \varphi \circ \hat{h}_! \rightarrow L^\bullet \varphi_m \circ i_m^* \circ \hat{h}_!$$

обратимо и, стало быть, первое из отображений (2.7) дает изоморфизм после вычисления на любом объекте $E \in \mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k)$ вида $E = \hat{h}_! E'$, $E' \in \mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h^{\text{opp}}, k)$. Поскольку категория $\mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k)$ порождена объектами такого вида, отображение $i_m^* \circ L^\bullet \varphi \rightarrow L^\bullet \varphi_m \circ i_m^*$ является изоморфизмом.

Для второго из отображений (2.7) положим $\hat{h}' = \hat{q} \circ \hat{h}$, $h'_m = \hat{q}_m \circ h_m$. Тогда вертикальная/горизонтальная факторизационная пара на $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}} \wr \Gamma$ также показывает, что любая диаграмма вида (2.1) представляется как

$$c \xleftarrow{v} c_1 \xrightarrow{v_1} c_2 \xrightarrow{h} c'$$

с вертикальными отображениями v , v_1 и горизонтальным h , что влечет

$$i_m^* \circ \hat{h}'_* \cong h'_{m*} \circ i_m^*.$$

Доказывается это так же, как в лемме П.4, но в выражении (П.3) надо заменить Ном-множества $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}(-, -)$, $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_v^{\text{opp}}(-, -)$ на Ном-категории $Q^i \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}(-, -)$, $Q^i(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})(-, -)$ соответственно. Поэтому отображение замены базы

$$i_m^*(\hat{q}^* E) \rightarrow \hat{q}_m^*(i_m^* E)$$

есть изоморфизм для любого $E \in \mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k)$ вида $E = \hat{h}'_* E'$, $E' \in \mathcal{D}(\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h^{\text{opp}}, k)$. Объекты такого вида порождают производную категорию, так что $i_m^* \circ \hat{q}^* \cong \hat{q}_m^* \circ i_m^*$; в силу сопряженности отсюда следует желаемый результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для любого $M \in \mathcal{D}(B_\bullet^{\text{opp}}, k)$ и любых положительных целых чисел $m, n \geq 1$ имеем естественный изоморфизм

$$\Phi_m(M)([n]) = \Phi(M)([n|m]) \cong \Phi^{[(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})]} i_{mn}^* M,$$

где $[(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] \in O_{\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}}$ понимается как $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ -орбита, а Φ^c , $c \in O_{\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}}$, – геометрический функтор неподвижных точек из [1, п. 5.1]. Кроме

того, для любого производного функтора Макки $M \in \mathcal{DM}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}, k)$ имеем естественный изоморфизм

$$\Phi_m(i_{mn!}M) \cong i_{mn!}(\Phi^{[(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})]}M). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из леммы 2.4 и [1, предложение 6.5].

2.3. Описание через коалгебры. Теперь мы приспособим к нашей ситуации конструкции из [1, § 6] и используем функтор неподвижных точек Φ для того, чтобы получить другое описание категории $\mathcal{DML}(k)$ циклических функторов Макки.

2.3.1. A_∞ -коалгебры. Рассмотрим циклотомическую категорию ΛR из п. 1.2 с ее вертикальной/горизонтальной факторизационной парой. Для любого объекта $[m] \in \Lambda R$ обозначим через $[m] \setminus \Lambda R$ категорию объектов $[m'] \in \Lambda R$, снабженных морфизмом $[m] \rightarrow [m']$. Факторизационная пара на ΛR индуцирует факторизационную пару на $[m] \setminus \Lambda R$ для любого $[m]$.

ЛЕММА 2.6. *Для любого вертикального отображения $v: [a] \rightarrow [b]$ в $[m] \setminus \Lambda R$ и любого отображения $f: [b'] \rightarrow [b]$ существует декартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} [a'] & \xrightarrow{f'} & [a] \\ v' \downarrow & & \downarrow v \\ [b'] & \xrightarrow{f} & [b] \end{array}$$

с вертикальным отображением v' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в доказательстве леммы 2.1, покажем, что сплетенное произведение $\Lambda R \wr \Gamma$ имеет расслоенные квадраты. Поэтому то же верно для категории $[m] \setminus (\Lambda R \wr \Gamma)$. Остается отметить, что вложение $[m] \setminus \Lambda R \rightarrow [m] \setminus (\Lambda R \wr \Gamma)$ имеет сопряженный слева (любой объект $S \in \Lambda R \wr \Gamma$ является несвязным объединением объектов ΛR , и отображение $[m] \rightarrow S$ единственным образом пропускается через один из них). Лемма доказана.

Теперь для любого морфизма $f: [m'] \rightarrow [m]$ в ΛR и любого целого числа $n \geq 0$ рассмотрим все диаграммы

$$[m'] \xrightarrow{g} [m_0] \xrightarrow{v_0} \cdots \xrightarrow{v_{n-1}} [m_n] \xrightarrow{v_n} [m] \quad (2.9)$$

в ΛR такие, что v_i , $0 \leq i \leq n$, вертикальны, v_n не обратим и $f = v_n \circ \cdots \circ v_0 \circ g$. Пусть $V_n(f)$ – группоид всех таких диаграмм и изоморфизмов между ними. Поскольку категория ΛR малая, группоид $V_n(f)$ малый для любых f , n .

Пусть $f = f^{(1)} \circ f^{(2)}$ для некоторого $[m''] \in \Lambda R$ и морфизмов $f^{(1)}: [m''] \rightarrow [m]$, $f^{(2)}: [m'] \rightarrow [m'']$. Тогда для любого $l \geq 1$ и любой диаграммы $\alpha \in V_n(f)$

вида (2.9) можно применить лемму 2.6 и построить коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} [m'] & \xrightarrow{g} & [m_0] & \xrightarrow{v_0} & \cdots & \xrightarrow{v_{n-1}} & [m_n] \xrightarrow{v_n} [m] \\ \parallel & & \uparrow f_0^{(1)} & & & \uparrow f_n^{(1)} & \uparrow f^{(1)} \\ [m'] & \xrightarrow{g'} & [m'_0] & \xrightarrow{v'_0} & \cdots & \xrightarrow{v'_{n-1}} & [m'_n] \xrightarrow{v'_n} [m''] \end{array}$$

где $f^{(2)} = v'_n \circ \cdots \circ v'_0 \circ g'$ и все коммутативные квадраты являются декартовыми квадратами в категории $[m'] \setminus \Lambda R$. Для любого i , $0 \leq i \leq n$, имеем естественное вертикальное отображение $\nu_i = v'_n \circ \cdots \circ v'_i: [m'_i] \rightarrow [m'']$. Возьмем минимальное i , для которого ν_i – изоморфизм, и обозначим через $\alpha^{(2)}$ диаграмму

$$[m'] \xrightarrow{g'} [m'_0] \xrightarrow{v'_0} \cdots \xrightarrow{v'_{i-2}} [m'_{i-1}] \xrightarrow{\nu_i \circ v'_{i-1}} [m'']$$

в $V_i(f^{(2)})$, а через $\alpha^{(1)}$ – диаграмму

$$[m''] \xrightarrow{f_i^{(1)} \circ \nu_i^{-1}} [m_i] \xrightarrow{v_i} \cdots \xrightarrow{v_n} [m]$$

в $V_{n-i}(f^{(1)})$. Тогда, переводя α в $\alpha^{(1)} \times \alpha^{(2)}$, получаем хорошо определенный функтор

$$V_n(f) \rightarrow \coprod_{0 \leq i \leq n} V_i(f^{(1)}) \times V_{n-i}(f^{(2)}). \quad (2.10)$$

Эта конструкция очевидным образом ассоциативна: для любых l компонентных морфизмов $f_1, \dots, f_l$ в ΛR можно взять композицию функторов (2.10) и получить функтор

$$V_n(f_1 \circ \cdots \circ f_l) \times I_l \rightarrow \coprod_{n_1 + \cdots + n_l = n} V_{n_1}(f_1) \times \cdots \times V_{n_l}(f_l), \quad (2.11)$$

где I_l – l -й группоид операды мономиальных категорий из определения П.8. Эти функторы в очевидном смысле совместимы со структурой операды на $I_{\bullet}$.

Для любого i , $1 \leq i \leq n$, забывание объекта $[m_i]$ в диаграмме (2.9) дает функтор $\delta_i: V_n(f) \rightarrow V_{n-1}(f)$, и эти функторы удовлетворяют соотношениям симплициальных отображений граней (не только с точностью до изоморфизма, но и буквально). Поэтому мы можем построить бикомплекс $\mathcal{T}_{\bullet, \bullet}(f)$, положив

$$\mathcal{T}_{\bullet, \bullet}(f) = C_{\bullet}(V_{\bullet}(f), \mathbb{Z}), \quad (2.12)$$

где $C_{\bullet}(V_{\bullet}(f), \mathbb{Z})$ – бар-комплекс группоида $V_{\bullet}(f)$ с коэффициентами в постоянном функторе $\mathbb{Z}$. Один дифференциал в бикомплексе (2.12) приходит из бар-комплекса, а другой есть $d = d_1 - d_2 + \cdots \pm d_n$, где d_i – отображение, индуцированное функтором δ_i . Копроизведения (2.11) строго коммутируют с функторами δ_i , и мы получаем канонические операции

$$C_{\bullet}(I_l, \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{T}_{\bullet}(f_1 \circ \cdots \circ f_l) \rightarrow \mathcal{T}_{\bullet}(f_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_{\bullet}(f_n),$$

снова совместимые со структурой ассиметричной операды на $C_*(I_*, \mathbb{Z})$. Зафиксировав отображение $\text{Ass}_\infty \rightarrow C_*(I_*, \mathbb{Z})$, как в § 7, снабжаем $\mathcal{T}_*(-)$ структурой ΛR -градуированной A_∞ -коалгебры в смысле [1, пп. 1.5.4].

В дальнейшем нам понадобятся некоторые элементарные свойства ΛR -градуированной A_∞ -коалгебры $\mathcal{T}_*$, приведенные в следующей лемме.

ЛЕММА 2.7. (i) A_∞ -коалгебра $\mathcal{T}_*$ аугментирована, и для любого горизонтального отображения f имеем $\mathcal{T}_l(f) = 0$ при $l \geq 1$.

(ii) Для любых компонентных отображений f_1, f_2 с горизонтальным f_1 отображение копроизведения

$$b_2: \mathcal{T}_*(f_2 \circ f_1) \rightarrow \mathcal{T}_*(f_1) \otimes \mathcal{T}_*(f_2) \cong \mathcal{T}_*(f_2)$$

является изоморфизмом.

(iii) Пусть $f_1, \dots, f_n$ – набор n компонентных отображений в ΛR , и пусть f_i горизонтально при $i \geq 2$, причем $n \geq 3$. Тогда соответствующая A_∞ -операция

$$b_n: \mathcal{T}_*(f_n \circ f_1) \rightarrow \mathcal{T}_*(f_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{T}_*(f_n) \cong \mathcal{T}_*(f_n)$$

равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно: для любого f множество $V_0(f)$ по определению состоит из одного элемента, а если f горизонтально, то $V_l(f)$ пусто при $l \geq 1$. Чтобы проверить (ii), отметим, что, поскольку f_1 горизонтально, единственный нетривиальный член в копроизведении (2.10) – это отображение

$$V_l(f_2 \circ f_1) \rightarrow V_l(f_2) \times V_0(f_1) = V_l(f_2), \quad (2.13)$$

а переводя диаграмму $\alpha \in V_n(f_2)$ вида (2.9) в диаграмму

$$[m'] \xrightarrow{g \circ f_1} [m_0] \xrightarrow{v_0} \dots \xrightarrow{v_{n-1}} [m_n] \xrightarrow{v_n} [m],$$

получаем отображение $V_n(f_2) \rightarrow V_n(f_2 \circ f_1)$, строго обратное к (2.13). Более того, данная конструкция строго обратного отображения, очевидно, строго ассоциативна, а потому для любых n компонентных отображений $f_1, \dots, f_n$ с горизонтальными $f_2, \dots, f_n$ при $n \geq 3$ получаем ровно одно отображение

$$V_l(f_n) \rightarrow V_n(f_n \circ \dots \circ f_1).$$

Поэтому копроизведение (2.10) также строго ассоциативно, т.е. отображение (2.11) пропускается через отображение $I_n \rightarrow \text{pt}$. Это по определению значит, что A_∞ -операция b_n обращается в нуль. Отсюда следует доказательство утверждения (iii).

ЛЕММА 2.8. Пусть $h: \Lambda R_h \cong \Lambda \rightarrow \Lambda \mathbb{Z}$, $i: \Lambda R_v \cong O_{\mathbb{Z}} \rightarrow \Lambda \mathbb{Z}$ – тавтологические вложения. Тогда $h^* \mathcal{T}_*$ – тривиальная Λ -градуированная A_∞ -коалгебра, $h^* \mathcal{T}_*(f) \cong \mathbb{Z}$ для любого морфизма f в Λ , а $i_n^* \mathcal{T}_*$ изоморфна $O_{\mathbb{Z}}$ -градуированной A_∞ -коалгебре из [1, пп. 6.3.3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из леммы 2.7. Для доказательства второго утверждения отметим, что если f вертикально, то все диаграммы (2.9) состоят из вертикальных отображений, т. е. совпадают с диаграммами, использованными в [1, пп. 6.3.3].

2.3.2. Теорема сравнения. Рассмотрим теперь естественное корасслоение $\lambda: \Lambda\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda R$ из (1.17), и пусть $\lambda^*\mathcal{T}_\bullet$ – $\Lambda\mathbb{Z}$ -градуированная коалгебра, полученная обратным образом. Для любого кольца k рассмотрим производную категорию $\mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k)$ A_∞ -комодулей над $\lambda^*\mathcal{T}_\bullet$. Согласно лемме 2.8 обратный образ $h^*\lambda^*\mathcal{T}_\bullet$ по отношению к тавтологическому вложению $h: \Lambda\mathbb{Z}_h \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}$ – тривиальная $\Lambda\mathbb{Z}_h$ -градуированная A_∞ -коалгебра, а значит, мы имеем естественный функтор обратного образа

$$h^*: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k).$$

Пусть $\mathcal{DM}_\mathcal{T}(k) \subset \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k)$ – полная подкатегория, порожденная объектами M , ограничение h^*M которых локально постоянно в смысле определения II.1. Мы хотим показать, что категория $\mathcal{DM}_\mathcal{T}(k)$ естественным образом эквивалентна категории $\mathcal{DM}(k)$ k -mod-значных циклических функторов Макки.

Чтобы построить функтор сравнения между двумя категориями, обозначим через $V_l([n|m])$, $[n|m] \in \Lambda\mathbb{Z}$, $l \geq 0$, группоид диаграмм

$$[n_1|m_1] \xrightarrow{v_1} \cdots \xrightarrow{v_{n-1}} [n_l|m_l] \xrightarrow{v_n} [n|m]$$

в $\Lambda\mathbb{Z}$ с вертикальными отображениями $v_1, \dots, v_n$ и необратимым v_n . Пусть $\sigma_l: V_l([n|m]) \rightarrow \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$ – функтор, который переводит такую диаграмму в $[n_1|m_1] \in \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}$ или в $[n|m]$, если $l = 0$. Для любого A_∞ -функтора $E_\bullet$ из $\mathcal{B}_\bullet$ в категорию комплексов k -модулей обозначим через $\Phi_\bullet^{[n|m]}(E_\bullet)$ тотальный комплекс тройного комплекса

$$C_\bullet(V_\bullet([n|m]), \sigma_l^* \widehat{q}^* E_\bullet),$$

где два дифференциала индуцированы дифференциалами в $E_\bullet$ и бар-комплексе, а третий определен так же, как в [1, пп. 6.3.1]. Тогда та же конструкция, что и в [1, пп. 6.3.2], показывает, что набор $\Phi_\bullet^{[n|m]}(E_\bullet)$ имеет естественную структуру A_∞ -комодуля над $\lambda^*\mathcal{T}_\bullet$, и мы получаем функтор

$$\Phi_\bullet: \mathcal{D}(B_\bullet^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k). \quad (2.14)$$

Выберем целое число $m \geq 1$ и рассмотрим вложение $i_m: O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \cong \Lambda\mathbb{Z}_v^m \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}$. Композиция $\lambda \circ i_m: O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightarrow \Lambda R$ пропускается через естественное вложение $O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \subset O_{\mathbb{Z}} = \Lambda R_v \rightarrow \Lambda R$. Поэтому согласно лемме 2.8 $O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ -градуированная A_∞ -коалгебра $i_m^*\lambda^*\mathcal{T}_\bullet$ изоморфна A_∞ -коалгебре из [1, пп. 6.3.3], и мы имеем естественный функтор обратного образа

$$i_m^*: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{DM}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k),$$

где $\mathcal{DM}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k)$ – категория k -значных производных функторов Макки из [1] для группы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Имеем очевидный изоморфизм

$$i_m^* \circ h^* \cong h_m^* \circ i_m^*, \quad (2.15)$$

где $h_m: \overline{O}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \rightarrow O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ – тавтологическое вложение, а $h_m^*: \mathcal{DM}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\overline{O}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, k)$ – соответствующий функтор обратного образа. Отметим, что в силу [1, лемма 6.18] функтор h_m^* допускает сопряженный справа функтор h_{m*} . Кроме того, по построению функтор сравнения $\Phi_\bullet$ из (2.14) дает при ограничении аналогичный функтор для $O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$, иными словами, имеем канонический изоморфизм

$$\Phi_\bullet^{[m]} \circ i_m^* E \cong i_m^* \circ \Phi_\bullet, \quad (2.16)$$

где $\Phi_\bullet^{[m]}$ – функтор $\Phi_\bullet$ из [1, теорема 6.17] для $\mathcal{C} = O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$.

ЛЕММА 2.9. *Функтор $h^*: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$ допускает сопряженный справа*

$$h_*: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k),$$

и для любого $t \geq 1$ морфизм замены базы $i_m^ \circ h_* \rightarrow h_{m*} \circ i_m^*$, индуцированный (2.15), является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно вытекает из лемм П.6, П.7.

ЛЕММА 2.10. *Пусть $\mathcal{D}'$ – триангулированная подкатегория в категории $\mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k)$, которая замкнута относительно любых произведений и содержит все объекты h_*M , $M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$. Тогда $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого целого $n \geq 1$ пусть $h_n: \Lambda \cong \Lambda\mathbb{Z}_h^n \subset \Lambda\mathbb{Z}_h$ – вложение n -й компоненты разложения (1.18). Для любого $M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$ обозначим через $\text{Supp}(M) \subset \mathbb{N}^*$ множество всех таких $n \geq 1$, что h_l^*M не равно нулю для какого-то l , делящего n . Для любого $M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k)$ положим $\text{Supp } M = \text{Supp } h^*M$. Отметим, что для любых двух целых чисел $n, n' \geq 1$ имеем $h_{n'}^* \circ h_* \circ h_{n*} = 0$, если n не делит n' , и $h_n^* \circ h_* \circ h_{n*} \cong \text{id}$ (по лемме 2.9 оба утверждения достаточно проверить после применения функторов i_m^* , $m \geq 1$, и тогда они немедленно следуют из [1, лемма 6.18]). Поэтому, в частности, для любого $n \geq 1$ и любого $M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k)$ имеем

$$\text{Supp}(h_*h_{n*}h_n^*h^*M) \subset \text{Supp}(M).$$

Более того, для любого объекта $M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_\bullet, k)$ обозначим через $M^{[1]}$ конус отображения сопряжения

$$M \rightarrow h_*(h^*M)_m,$$

где m – наименьшее число в $\text{Supp}(M)$. Тогда

$$\text{Supp}(M^{[1]}) = \text{Supp}(M) \setminus \{m\}.$$

По индукции положим $M^{[n]} = (M^{[n-1]})^{[1]}$ для любого $n > 1$. Тогда имеем естественные отображения $M^{[n]} \rightarrow M$, их конусы $\widetilde{M}^{[n]}$ лежат в $\mathcal{D}'$ и образуют

обратную систему. Имеем совместимую систему отображений $\eta_n: M \rightarrow \widetilde{M}^{[n]}$, $n \geq 1$. По индукции для любых $n > n' \geq 1$ отображение перехода $\widetilde{M}^{[n+1]} \rightarrow \widetilde{M}^{[n]}$ становится изоморфизмом после применения h_n^*, h^* , и то же верно для отображения η_n . Положим

$$\widetilde{M} = \operatorname{holim} \widetilde{M}^{[n]},$$

где holim определен конструкцией телескопа, и обозначим через $\eta: M \rightarrow \widetilde{M}$ естественное отображение. Тогда для любого $n \geq 1$ обратная система $h_n^* h^* \widetilde{M}^{[n']}$ стабилизируется при $n' > n$, а $h_n^* h^*(\eta)$ является изоморфизмом. Поэтому η – изоморфизм. Однако по конструкции $\widetilde{M}$ лежит в категории $\mathcal{D}'$.

ЛЕММА 2.11. *Композиция*

$$h^* \circ \Phi_\bullet: \mathcal{D}(B_\bullet^{\operatorname{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\operatorname{opp}}, k)$$

изоморфна функтору неподвижных точек Φ из определения 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению $h^* \Phi_\bullet(E)$ для любого $E \in \mathcal{D}(B_\bullet^{\operatorname{opp}}, k)$ зависит только от ограничения $\widehat{q}^* E \in \mathcal{D}(\widehat{\Lambda \mathbb{Z}}^{\operatorname{opp}}, k)$: конструкция функтора $\Phi_\bullet$ также задает функтор $\varphi_\bullet: \mathcal{D}(\widehat{\Lambda \mathbb{Z}}^{\operatorname{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\operatorname{opp}}, k)$, причем $h^* \circ \Phi_\bullet \cong \varphi_\bullet \circ \widehat{q}^*$. Легко видеть, что для любого объекта $E \in \operatorname{Fun}(\widehat{\Lambda \mathbb{Z}}^{\operatorname{opp}}, k)$ гомологии степени 0 комплекса $\varphi_\bullet(E)$ изоморфны $\varphi(E)$ и этот изоморфизм функториален по E . Поэтому по универсальному свойству производного функтора он продолжается до отображения

$$e: \varphi_\bullet \rightarrow L^\bullet \varphi.$$

Докажем, что $e: \varphi_\bullet(E) \rightarrow L^\bullet \varphi(E)$ – изоморфизм для любого $E \in \mathcal{D}(\widehat{\Lambda \mathbb{Z}}^{\operatorname{opp}}, k)$ вида $E = \widehat{q}^* E'$, $E' \in \mathcal{D}(B_\bullet^{\operatorname{opp}}, k)$. Для этого достаточно доказать, что

$$i_m^*(e): i_m^* \circ h^* \circ \Phi_\bullet \rightarrow i_m^* \circ \Phi \quad (2.17)$$

– изоморфизм для любого $m \geq 1$. В силу (2.16) и (2.15) левая часть (2.17) изоморфна $h_m^* \circ \Phi_\bullet^{[m]} \circ i_m^*$, а по [1, лемма 6.15] функтор $h_m^* \circ \Phi_\bullet^{[m]}$ изоморфен прямой сумме функторов $\Phi_{[(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})]}$ из следствия 2.5. Для завершения доказательства теперь достаточно применить следствие 2.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Функтор $\Phi_\bullet$, заданный в (2.14), есть эквивалентность категорий, и он отождествляет $\mathcal{DML}(k) \subset \mathcal{D}(B_\bullet^{\operatorname{opp}}, k)$ и $\mathcal{DML}_T \subset \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* T_\bullet, k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в лемме П.6, обозначим через $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* T_\bullet, k)$ подкатегорию таких объектов M в категории $\mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* T_\bullet, k)$, что функтор $\operatorname{Hom}(\Phi_\bullet(-), M)$ из $\mathcal{D}(B_\bullet^{\operatorname{opp}}, k)$ в $\mathcal{D}(k)$ представим. Геометрический функтор неподвижных точек Φ , очевидно, имеет правый сопряженный. Поэтому по лемме 2.11 подкатегория $\mathcal{D}'$ удовлетворяет всем предположениям леммы 2.10. Тем самым, $\mathcal{D}'$ есть вся категория $\mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* T_\bullet, k)$, а $\Phi_\bullet$ допускает правый сопряженный функтор

$$\Phi_\bullet^{-1}: \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* T_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(B_\bullet^{\operatorname{opp}}, k).$$

По лемме 2.11 композиция $\Phi_{\bullet}^{-1} \circ h_*$ сопряжена справа геометрическому функтору неподвижных точек Φ из определения 2.3. Более того, для любого $m \geq 1$ функтор $\Phi_{\bullet}^{[m]}$ из (2.16) есть эквивалентность категорий в силу [1, теорема 6.17]. Пусть Φ_m^{-1} – обратная эквивалентность. Тогда по следствию 2.5 отображение замены базы

$$i_m^* \circ \Phi_{\bullet}^{-1} \circ h_* \rightarrow \Phi_m^{-1} \circ h_{m*} \circ i_m^*,$$

будучи сопряжено с прямым произведением изоморфизмов (2.8), является изоморфизмом. Тогда по лемме 2.9 отображение замены базы

$$i_m^*(\Phi_{\bullet}^{-1}(M)) \rightarrow \Phi_m^{-1}(i_m^*(M))$$

есть изоморфизм для любого $M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_{\bullet}, k)$ вида $M = h_*M'$, $M' \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k)$, а по лемме 2.10 отсюда вытекает, что он есть изоморфизм для любого M . Тем самым, имеем

$$i_m^* \circ \Phi_{\bullet} \circ \Phi^{-1} \cong \Phi^{[m]} \circ \Phi_m^{-1} \circ i_m^*, \quad i_m^* \circ \Phi^{-1} \circ \Phi_{\bullet} \cong \Phi_m^{-1} \circ \Phi^{[m]} \circ i_m^*$$

для любого $m \geq 1$. Поскольку $\Phi_{\bullet}^{[m]}$ и Φ_m^{-1} – взаимно обратные эквивалентности категорий, это значит, что отображения сопряжения $\text{Id} \rightarrow \Phi^{-1} \circ \Phi_{\bullet}$, $\Phi^{-1} \circ \Phi_{\bullet} \rightarrow \text{Id}$ становятся изоморфизмами после ограничения на $\Lambda\mathbb{Z}_v$. Поскольку функтор ограничения консервативен, заключаем, что $\Phi_{\bullet}$ и Φ^{-1} – взаимно обратные эквивалентности категорий. Чтобы доказать, что $\Phi_{\bullet}$ отождествляет $\mathcal{D}\mathcal{M}\Lambda(k)$ и $\mathcal{D}\mathcal{M}\Lambda_{\mathcal{T}}(k)$, заметим, что $h^* \circ \Phi_{\bullet} \cong h^*$. Предложение доказано.

2.4. Ограничение и коограничение. Приведем несколько дополнительных наблюдений о циклических функторах Макки, которые нам пригодятся в дальнейшем. Сначала напомним, что мы имеем 2-функторы $q: \Lambda\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Q}\Lambda\mathbb{Z}$, $\hat{q}: \widehat{\Lambda\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{Q}\Lambda\mathbb{Z}$ и они согласованы на горизонтальных морфизмах, $q \circ h \cong \hat{q} \circ \hat{h}$, так что имеем изоморфизм $h^* \circ q^* \cong \hat{h}^* \circ \hat{q}^*$.

ЛЕММА 2.13. *Отображение замены базы*

$$\hat{h}_! \circ h^* \rightarrow \hat{q}^* \circ q_!,$$

индуцированное изоморфизмом $h^* \circ q^* \cong \hat{h}^* \circ \hat{q}^*$, является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По причинам, указанным в доказательстве леммы 2.4, это утверждение может быть доказано так же, как лемма П.4.

В частности, лемма 2.13 показывает, что мы имеем естественные отождествления

$$h^* \circ \Phi_{\bullet} \circ q_! \cong \Phi \circ q_! \cong L^{\bullet} \varphi \circ \hat{q}^* \circ q_! \cong L^{\bullet} \varphi \circ \hat{h}_! \circ h^*, \quad (2.18)$$

а поскольку $L^{\bullet} \varphi \circ \hat{h}_!$ сопряжен $\hat{h}^* \circ \nu = \text{Id}$, правая часть (2.18) есть просто h^* . На самом деле верно большее: композиция

$$\Phi_{\bullet} \circ q_!: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_{\bullet}, k)$$

естественно изоморфна функтору коограничения ξ^* по отношению к отображению аугментации аугментированной $\Lambda\mathbb{Z}$ -градуированной A_{∞} -коалгебры $\lambda^*\mathcal{T}_{\bullet}$.

(чтобы построить изоморфизм, разрешаем функтор $E \in \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k)$ функторами вида $i_{m!}E_m$, $E_m \in \text{Fun}(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}^{\text{opp}}, k)$, и применяем [1, лемма 6.20]). Поэтому функтор коограничения ξ^* допускает правосопряженный функтор ξ_* , задаваемый следующим образом:

$$\xi_* = q^* \circ \Phi_{\bullet}^{-1}: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_{\bullet}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k).$$

Имеем также

$$h^* \circ \xi_* \circ \xi^* \cong h^* \circ q^* \circ q_! \cong \widehat{h}^* \circ \widehat{q}^* \circ q_! \cong \widehat{h}^* \circ \widehat{h}_! \circ h^*. \quad (2.19)$$

Чтобы вычислить правую часть в (2.17) более эффективно, полезно рассмотреть категорию $\Lambda I \cong \widetilde{\Lambda I}$ из леммы 1.5. Рассмотрим также произведение $\Lambda I \times \mathbb{N}^*$ и определим проекции $i, \pi: \Lambda I \times \mathbb{N}^* \rightarrow \widehat{\Lambda\mathbb{Z}}_h^{\text{opp}} \cong \Lambda\mathbb{Z}_h \cong \Lambda \times \mathbb{N}^*$ формулами

$$i = i \times \text{id}, \quad \pi = \pi \times \rho_m \quad \text{на} \quad \Lambda_m \times \mathbb{N}^* \subset \Lambda I \times \mathbb{N}^*, \quad (2.20)$$

где $\rho_m: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ – отображение умножения на целое число $m \geq 1$.

ЛЕММА 2.14. *Имеем естественный изоморфизм*

$$\widehat{h}^* \circ \widehat{h}_! \cong \pi_! \circ i^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При отождествлении $\widehat{\Lambda\mathbb{Z}}^{\text{opp}} \cong \Lambda\mathbb{Z}$ функтор $\widehat{h}$ переходит в тавтологическое вложение $h: \Lambda\mathbb{Z}_h \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}$. Пусть $\overline{\Lambda I}$ – категория вертикальных стрелок $v: a \rightarrow a'$ в $\Lambda\mathbb{Z}$ с отображениями, задаваемыми коммутативными квадратами

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{f} & a_2 \\ v_1 \downarrow & & \downarrow v_2 \\ a'_1 & \xrightarrow{f'} & a'_2 \end{array}$$

с горизонтальным f (и любым f'). Пусть $s: \overline{\Lambda I} \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}_h$ и $t: \overline{\Lambda I} \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}$ – функторы, переводящие стрелку в ее начало и конец соответственно. Тогда t – расслоение, а s имеет левый сопряженный $\iota: \Lambda\mathbb{Z}_h \rightarrow \overline{\Lambda I}$, переводящий объект $a \in \Lambda\mathbb{Z}$ в его единичный эндоморфизм. Имеем $\widehat{h} = t \circ \iota$, так что

$$h_! \cong t_! \circ \iota_! \cong t_! \circ s^*.$$

Остается отметить, что мы имеем естественный декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Lambda I} \times \mathbb{N}^* & \xrightarrow{h} & \overline{\Lambda I} \\ \pi \downarrow & & \downarrow t \\ \Lambda\mathbb{Z}_h & \xrightarrow{h} & \Lambda\mathbb{Z} \end{array}$$

так что $h^* \circ t_! \cong \pi_! \circ h^*$ по замене базы, следовательно, $s \circ h = i$.

§ 3. Циклотомические комплексы

Теперь наконец можно ввести главное понятие статьи – понятие циклотомического комплекса. Зафиксируем коммутативное кольцо k . Рассмотрим циклотомическую категорию ΛR и ΛR -градуированную A_∞ -коалгебру $\mathcal{T}_\bullet$, введенную в п. 2.3. Пусть $\tilde{\lambda}: \widetilde{\Lambda R} \rightarrow \Lambda R$ – корасслоение из (1.17), и пусть $h: \widetilde{\Lambda R}_h \cong \Lambda \times I \rightarrow \widetilde{\Lambda R}$ – естественное вложение. По лемме 2.7 ограничение $h^* \tilde{\lambda}^* \mathcal{T}_\bullet$ есть тривиальная $\widetilde{\Lambda R}_h$ -градуированная A_∞ -коалгебра, $h^* \tilde{\lambda}^* \mathcal{T}_\bullet(f) = \mathbb{Z}$ для любого морфизма f в $\widetilde{\Lambda R}_h$, и мы имеем функтор ограничения

$$h^*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \tilde{\lambda}^* \mathcal{T}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda R_h, k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Циклотомический комплекс над k* – это такой A_∞ -комодуль $M_\bullet$ над $\tilde{\lambda}^* \mathcal{T}_\bullet$ со значениями в категории $k\text{-mod}$, что ограничение $h^* M_\bullet \in \mathcal{D}(\Lambda R_h, k)$ локально постоянно в смысле определения П.1.

Производную категорию циклотомических комплексов над k будем обозначать через $\mathcal{D}\Lambda R(k)$.

3.1. Нормализованные ΛR -градуированные коалгебры. Определение 3.1 недлинное, но не особенно явное и плохо пригодное для вычислений, поскольку A_∞ -коалгебра $\mathcal{T}_\bullet$ задана неявной и довольно громоздкой конструкцией. В этом пункте дадим более явные описания категорий $\mathcal{D}\Lambda R(k)$, а также получим более удобное описание категорий $\mathcal{D}\mathcal{M}\Lambda(k)$ из § 2. Сначала докажем следующий упрощающий результат, напоминающий результаты из [1, ш. 7.5, 7.6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть G – конечная группа. Комплекс $E_\bullet$ $\mathbb{Z}[G]$ -модулей *сильно ацикличен* по отношению к G , если для любой подгруппы $H \subset G$, $H \neq G$, и любого $\mathbb{Z}[H]$ -модуля V имеем

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} H^\bullet(H, V \otimes F^n E_\bullet) = 0,$$

где $F^\bullet E_\bullet$ – глупая фильтрация на комплексе $E_\bullet$. Отображение $f: E_\bullet \rightarrow E'_\bullet$ $\mathbb{Z}[G]$ -модулей есть *сильный квазиизоморфизм* по отношению к G , если его конус сильно ацикличен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. ΛR -градуированная A_∞ -коалгебра $\mathcal{R}_\bullet$ *нормализована*, если она обладает свойствами (i)–(iii) леммы 2.7.

В частности, коалгебра $\mathcal{T}_\bullet$ нормализована (по лемме 2.7). Для любой нормализованной ΛR -градуированной A_∞ -коалгебры $\mathcal{R}_\bullet$ и любого отображения $f: [m] \rightarrow [m']$ в категории ΛR комплекс $\mathcal{R}_\bullet(f)$ по определению снабжен действием циклической группы $\text{Aut}([m])$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. A_∞ -отображение $\xi: \mathcal{R}_\bullet \rightarrow \mathcal{R}'_\bullet$ между нормализованными ΛR -градуированными A_∞ -коалгебрами есть *сильный квазиизоморфизм*, если для любого отображения $f: [m] \rightarrow [m']$ соответствующее отображение $\xi: \mathcal{R}_\bullet(f) \rightarrow \mathcal{R}'_\bullet(f)$ есть сильный квазиизоморфизм по отношению к подгруппе $\text{Aut}(f) \subset \text{Aut}([m])$ таких $g \in \text{Aut}([m])$, что $f \circ g = f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Для любого сильного A_∞ -квазиизоморфизма $\xi: \mathcal{R}_\bullet \rightarrow \mathcal{R}'_\bullet$ нормализованных ΛR -градуированных A_∞ -коалгебр и для любого коммутативного кольца k функторы коограничения

$$\begin{aligned}\xi^*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}_\bullet, k) &\rightarrow \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}'_\bullet, k), \\ \xi^*: \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}_\bullet, k) &\rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}'_\bullet, k)\end{aligned}$$

между производными категориями A_∞ -комодулей – эквивалентности категорий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. И лемма 2.9, и лемма 2.10 верны для любой нормализованной ΛR -градуированной A_∞ -коалгебры вместо $\mathcal{T}_\bullet$ (доказательство то же самое). Более того, они верны и для $\widetilde{\Lambda R}$ вместо $\Lambda \mathbb{Z}$ (доказательство то же самое). Тем самым, как в доказательстве предложения 2.12, функторы ξ^* допускают правые сопряженные функторы

$$\begin{aligned}\xi_*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}'_\bullet, k) &\rightarrow \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}_\bullet, k), \\ \xi_*: \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}'_\bullet, k) &\rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}_\bullet, k).\end{aligned}$$

Более того, для любого целого числа $m \geq 1$ имеем естественное вложение $i_m: O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \cong \Lambda R_v^m \rightarrow \Lambda R$ и соответствующие функторы ограничения

$$\begin{aligned}i_m^*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}_\bullet, k) &\rightarrow \mathcal{D}(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, i_m^* \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}_\bullet, k), \\ i_m^*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}'_\bullet, k) &\rightarrow \mathcal{D}(O_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}, i_m^* \widetilde{\lambda}^* \mathcal{R}'_\bullet, k).\end{aligned}$$

Для $\Lambda \mathbb{Z}$ эти функторы уже рассматривались в § 2; и для $\widetilde{\Lambda R}$ имеем очевидный изоморфизм $\xi_m^* \circ i_m^* \cong i_m^* \circ \xi^*$, где $\xi_m = i_m^*(\xi)$, и соответствующее отображение замены базы $i_m^* \circ \xi_* \rightarrow \xi_{m*} \circ i_m^*$ также является изоморфизмом, как в лемме 2.9. Поэтому достаточно доказать, что ξ_m^* и ξ_{m*} – взаимно обратные эквивалентности категорий для любого m [1, лемма 7.14].

3.2. Приведенные ΛR -градуированные коалгебры. Первое следствие предложения 3.5 аналогично редукции, проведенной в [1, п. 7.5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Нормализованная ΛR -градуированная A_∞ -коалгебра $\mathcal{R}_\bullet$ *приведенная*, если для любого отображения f в ΛR степени $n > 1$ имеем $\mathcal{R}(f) = 0$, если n не простое число. *Редукция* $\mathcal{R}_\bullet^{\text{red}}$ нормализованной ΛR -градуированной A_∞ -коалгебры $\mathcal{R}_\bullet$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{R}_\bullet^{\text{red}}(f) = \begin{cases} \mathcal{R}_\bullet(f), & \text{если степень } f \text{ есть 1 или простое число,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

причем A_∞ -операции те же, что в $\mathcal{R}_\bullet$, когда это имеет смысл, и равны нулю в противном случае.

Для любой нормализованной ΛR -градуированной A_∞ -коалгебры $\mathcal{R}_\bullet$ мы, очевидно, имеем каноническое отображение $\mathcal{R}_\bullet^{\text{red}} \rightarrow \mathcal{R}_\bullet$.

ЛЕММА 3.7. Для любой нормализованной ΛR -градуированной A_∞ -коалгебры $\mathcal{R}_\bullet$ каноническое отображение $\mathcal{R}_\bullet^{\text{red}} \rightarrow \mathcal{R}_\bullet$ индуцирует эквивалентности категорий

$$\mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \tilde{\lambda}^* \mathcal{R}_\bullet^{\text{red}}, k) \cong \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \tilde{\lambda}^* \mathcal{R}_\bullet, k), \quad \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}_\bullet^{\text{red}}, k) \cong \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}_\bullet, k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [1, лемма 7.15, (ii)] отображение $\mathcal{R}_\bullet^{\text{red}} \rightarrow \mathcal{R}_\bullet$ есть сильный квазиизоморфизм в смысле определения 3.4, поэтому утверждение следует из предложения 3.5.

Отметим теперь, что приведенная ΛR -градуированная A_∞ -коалгебра – это по сути линейный объект: все потенциально нелинейные отображения коумножения по определению равны нулю. Чтобы сделать это утверждение точным, положим

$$\Lambda I_{\text{red}} = \prod_{p \text{ простое}} \Lambda_p \subset \Lambda I,$$

где ΛI – категория из (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. A_∞ -функтор из малой категории $\mathcal{C}$ в абелеву категорию Ab нормализован, если для любых n композиемых обратимых морфизмов $f_1, \dots, f_n$ в $\mathcal{C}$, $n \geq 3$, соответствующая A_∞ -операция b_n равна нулю.

ЛЕММА 3.9. Категория приведенных ΛR -градуированных A_∞ -коалгебр и A_∞ -отображений между ними эквивалентна категории нормализованных A_∞ -функторов из $\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}$ в $\mathbb{Z}\text{-mod}$ и A_∞ -отображений между ними.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{R}_\bullet$ – приведенная нормализованная ΛR -градуированная A_∞ -коалгебра. Для любого $[m] \in \Lambda R$ имеем категорию $\Lambda R_h/[m]$ горизонтальных отображений $f: [n] \rightarrow [m]$, $[n] \in \Lambda R$. Поскольку $\mathcal{R}_\bullet$ нормализована, для любого $g: [m] \rightarrow [m']$ мы можем определить функтор $\mathcal{R}_\bullet^g$ из $(\Lambda R_h/[m])^{\text{opp}}$ в комплексы абелевых групп, положив

$$\mathcal{R}_\bullet^g(f) = \mathcal{R}_\bullet(g \circ f).$$

Этот функтор постоянен (все морфизмы переходят в изоморфизмы). Положим

$$P_\bullet(g) = \varprojlim \mathcal{R}_\bullet^g(f),$$

где предел берется по категории $(\Lambda R_h/[m])^{\text{opp}}$. Более того, любое горизонтальное отображение $h: [m] \rightarrow [m']$ индуцирует функтор $\Lambda R_h/[m] \rightarrow \Lambda R_h/[m']$, $f \mapsto h \circ f$; для любого отображения $g: [m'] \rightarrow [m'']$ ограничение по отношению к этому функтору дает естественное отображение

$$h^*: P_\bullet(g) \rightarrow P_\bullet(g \circ h),$$

и эта конструкция ассоциативна.

Напомним, что имеется эквивалентность (1.10). Ограничим ее на $\Lambda I_{\text{red}} \subset \Lambda I$. Для любого объекта $a \in \Lambda I_{\text{red}}$ положим

$$P_\bullet(a) = P_\bullet(v(a)).$$

Тогда $P_\bullet(-)$ имеет естественную структуру нормализованного A_∞ -функтора из $\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}$ в комплексы абелевых групп: для любого набора

$$\begin{array}{ccccccc} i_p(a_0) & \xrightarrow{f_1} & i_p(a_1) & \xrightarrow{f_2} & \cdots & \xrightarrow{f_n} & i_p(a_n) \\ v_0 \downarrow & & v_1 \downarrow & & & & \downarrow v_n \\ \pi_p(a_0) & \xrightarrow{f'_1} & \pi_p(a_1) & \xrightarrow{f'_2} & \cdots & \xrightarrow{f'_n} & \pi_p(a_n) \end{array}$$

n отображений вида (1.9) A_∞ -операция $P_\bullet(a_n) \rightarrow P_\bullet(a_0)$ есть композиция отображения

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)^*: P_\bullet(a_n) \rightarrow P_\bullet(v_n \circ f_n \circ \cdots \circ f_1) = P_\bullet(f'_n \circ \cdots \circ f'_1 \circ v_0)$$

и отображения

$$P_\bullet(f'_n \circ \cdots \circ f'_1 \circ v_0) \rightarrow P_\bullet(v_0) = P_\bullet(a_0),$$

индуцированного A_∞ -операцией на $\mathcal{R}_\bullet$.

Наоборот, пусть $P_\bullet$ – нормализованный A_∞ -функтор из $\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}$ в комплексы абелевых групп. Для любого морфизма $f: [m] \rightarrow [n]$ в ΛR простой степени обозначим через $\mathcal{C}(f)$ категорию диаграмм

$$[m] \xrightarrow{h} [m'] \xrightarrow{v} [n]$$

с вертикальным v , горизонтальным h и $f = v \circ h$. Тогда, переводя такую диаграмму в $P_\bullet(v)$, получаем функтор $P_\bullet(f)$ из $\mathcal{C}(f)$ в комплексы абелевых групп и полагаем

$$\mathcal{R}_\bullet(f) = \varprojlim P_\bullet(f),$$

где предел берется по $\mathcal{C}_f$. Осталось провести проверку того, что структура A_∞ -функтора на $P_\bullet$ индуцирует приведенную нормализованную структуру A_∞ -коалгебры на $\mathcal{R}_\bullet(-)$ и что обе конструкции взаимно обратны. Лемма доказана.

Теперь можно провести последнее упрощение. Будем говорить, что нормализованный A_∞ -функтор $M_\bullet$ из $\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}$ в $\mathbb{Z}\text{-mod}$ *допустим*, если для любого объекта $[a] \in \Lambda_p \subset \Lambda I_{\text{red}}$ имеем

$$M_i([a]) = \begin{cases} 0 & \text{при } i < 0, \\ \mathbb{Z} & \text{при } i = 0, \end{cases}$$

и $M_i([a])$ – свободный $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ -модуль при $i \geq 1$. Будем говорить, что приведенная нормализованная ΛR -градуированная A_∞ -коалгебра $\mathcal{R}_\bullet$ *допустима*, если допустим A_∞ -функтор $E_\bullet$, отвечающий $\mathcal{R}_\bullet$ при эквивалентности леммы 3.9. Отметим, что A_∞ -коалгебра $\mathcal{T}_\bullet$ допустима в силу [1, предложение 7.8].

ЛЕММА 3.10. *Для любых двух допустимых приведенных нормализованных ΛR -градуированных A_∞ -коалгебр $\mathcal{R}_\bullet$, $\mathcal{R}'_\bullet$ и любого кольца k имеем канонические эквивалентности*

$$\mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda^* \mathcal{R}'_\bullet}, k) \cong \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \widetilde{\lambda^* \mathcal{R}_\bullet}, k), \quad \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}'_\bullet, k) \cong \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, \lambda^* \mathcal{R}_\bullet, k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем проективную резольвенту $\tilde{P}_\bullet$ постоянного функтора $\mathbb{Z} \in \text{Fun}(\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ и положим $P_0 = \mathbb{Z}$, $P_i = \tilde{P}_{i-1}$ при $i \geq 1$. Тогда $P_\bullet$ – допустимый нормализованный A_∞ -функтор из $\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}$ в $\mathbb{Z}\text{-mod}$ и $\tilde{P}_\bullet$ h -проективен по лемме II.5. Поэтому для любого другого допустимого нормализованного A_∞ -функтора $P'_\bullet$ имеем A_∞ -отображение

$$\xi: P_\bullet \rightarrow P'_\bullet.$$

Кроме того, для любого $[m] \in \Lambda_p \subset \Lambda I_{\text{red}}$ отображение $\xi([m])$ есть сильный квазиизоморфизм по отношению к $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset \text{Aut}([m])$. Пусть $P'_\bullet$ – A_∞ -функтор, отвечающий A_∞ -коалгебре $R_\bullet$, и пусть $\hat{\mathcal{R}}_\bullet$ – A_∞ -коалгебра, отвечающая A_∞ -функтору $P_\bullet$. Тогда ξ индуцирует отображение

$$\xi: \hat{\mathcal{R}}_\bullet \rightarrow \mathcal{R}_\bullet$$

и это отображение есть сильный квазиизоморфизм в смысле определения 3.4. Поэтому по предложению 3.5 функторы коограничения, отвечающие $\tilde{\lambda}^*\xi$ и $\lambda^*\xi$, суть эквивалентности категорий (аналогично для $\mathcal{R}'_\bullet$).

3.3. Комодули. Рассмотрим теперь категорию $\widetilde{\Lambda R}_h \cong \Lambda \times I$ и произведения $\Lambda I_{\text{red}} \times \mathbb{N}^* \subset \Lambda I_{\text{red}} \times I$. Определим функторы

$$i, \pi: \Lambda I_{\text{red}} \times I \rightarrow \widetilde{\Lambda R}_h$$

той же формулой, что и (2.20). Более того, обозначим через $\tau: \Lambda I_{\text{red}} \times I \rightarrow \Lambda I_{\text{red}}$ тавтологическую проекцию.

Любой комплекс $P_\bullet$ функторов в $\text{Fun}(\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ представляет собой, в частности, нормализованный A_∞ -функтор из $\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}$ в $\mathbb{Z}\text{-mod}$. Зафиксируем комплекс $P_\bullet$ таким образом, чтобы он был допустим в смысле леммы 3.10. Для любого коммутативного кольца k рассмотрим категорию пар $\langle V_\bullet, \varphi \rangle$ из комплекса $V_\bullet$ в $\text{Fun}(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k)$ и отображения

$$\varphi: \pi^* V_\bullet \rightarrow i^* V_\bullet \otimes \tau^* P_\bullet.$$

Обращая в этой категории квазиизоморфизмы, получаем триангулированную категорию, которую обозначаем через $\mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k)$. Забывание отображения φ дает функтор

$$\tilde{h}^*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k).$$

Аналогично, пусть $\mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}, P_\bullet, k)$ – категория пар $\langle V_\bullet, \varphi \rangle$, состоящих из комплекса $V_\bullet$ в $\text{Fun}(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$ и отображения

$$\varphi: \pi^* V_\bullet \rightarrow i^* V_\bullet \otimes \tau^* P_\bullet,$$

с обращенными квазиизоморфизмами, где i и π такие, как в (2.20). Ограничение из $\widetilde{\Lambda R}_h$ на $\Lambda \mathbb{Z}_h$ дает функтор забывания

$$\mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h, P_\bullet, k), \quad (3.1)$$

и мы имеем функтор ограничения

$$h^*: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h, P_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k).$$

Пусть $\mathcal{R}_\bullet$ – приведенная нормализованная $\widetilde{\Lambda R}$ -градуированная A_∞ -коалгебра, отвечающая $P_\bullet$ при эквивалентности из леммы 3.9. Рассмотрим производные категории $\mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \tilde{\lambda}^*\mathcal{R}_\bullet, k)$, $\mathcal{D}(\Lambda R, \tilde{\lambda}^*\mathcal{R}_\bullet, k)$.

ЛЕММА 3.11. *Существуют канонические эквивалентности категорий*

$$\mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h, P_\bullet, k) \cong \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{R}_\bullet, k), \quad \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k) \cong \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}, \tilde{\lambda}^*\mathcal{R}_\bullet, k),$$

коммутирующие с функторами ограничения h^* , $\tilde{h}^*$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы II.5 мы можем изменить определение производной категории $\mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k)$, заменив комплексы в $\text{Fun}(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k)$ на A_∞ -комодули над тривиальной $\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}$ -градуированной A_∞ -коалгеброй (аналогично для $\Lambda\mathbb{Z}$). Тогда получающаяся категория комплексов тавтологически эквивалентна категории A_∞ -комодулей над $\tilde{\lambda}^*\mathcal{R}_\bullet$ (соответственно, $\lambda^*\mathcal{R}_\bullet$), причем эквивалентность коммутирует с $\tilde{h}^*$ (соответственно, h^*). В частности, она сохраняет квазиизоморфизмы, а потому спускается на производные категории. Лемма доказана.

Обозначим теперь через $\mathcal{D}_c(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k) \subset \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k)$ полную подкатегорию, порожденную такими $M \in \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k)$, что $h^*M \in \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k)$ локально постоянно в смысле определения II.1, и обозначим через $\mathcal{D}_c(\Lambda\mathbb{Z}_h, P_\bullet, k) \subset \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h, P_\bullet, k)$ полную подкатегорию, порожденную такими $M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h, P_\bullet, k)$, что h^*M локально постоянно. Тогда леммы 3.11, 3.7, 3.10 вместе дают следующее эффективное описание категорий $\mathcal{DM}\Lambda(k)$, $\mathcal{DLR}(k)$ k -значных циклических функторов Макки и k -значных циклотомических комплексов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. *Для любого допустимого комплекса $P_\bullet$ функторов из ΛI_{red} в $\mathbb{Z}\text{-mod}$ существуют канонические эквивалентности*

$$\mathcal{DM}\Lambda(k) \cong \mathcal{D}_c(\Lambda\mathbb{Z}_h, P_\bullet, k), \quad \mathcal{DLR}(k) \cong \mathcal{D}_c(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k)$$

триангулированных категорий.

Кроме того, ограничивая категории $\widetilde{\Lambda R}$ на категорию $\Lambda\mathbb{Z}$, как в (3.1), получаем функторы ограничения

$$h^*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k), \quad h^*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k).$$

Пусть $\mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k) \subset \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k)$, $\mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k) \subset \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k)$ – полные подкатегории, порожденные такими M , что $h^*M \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, k)$ локально постоянно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. (i) *Функтор ограничения $\tilde{h}^*$ имеет правый сопряженный*

$$\tilde{h}_*: \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k),$$

который переводит подкатегорию $\mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R_h^{\text{opp}}}, k) \subset \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R_h^{\text{opp}}}, k)$ в подкатегорию $\mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R_h}, P_\bullet, k) \subset \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R_h}, P_\bullet, k)$.

(ii) Пусть $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R_h}, P_\bullet, k)$ – триангулированная подкатегория, которая замкнута относительно любых произведений и содержит все объекты h_*M , $M \in \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$. Тогда $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R_h}, P_\bullet, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На уровне категорий комплексов функтор забывания $\tilde{h}^*$ имеет очевидный сопряженный функтор, заданный как

$$\tilde{h}_*V_\bullet = \pi_*(i^*V_\bullet \otimes \tau^*P_\bullet)$$

с тавтологическим отображением φ . Поскольку любой комплекс в $\text{Fun}(\Lambda R_h^{\text{opp}}, k)$ допускает h -инъективную замену, этот функтор спускается на производные категории.

ЛЕММА 3.14. Для любого $l \geq 0$ пусть $F^l P_\bullet \subset P_\bullet$ – l -й член глупой фильтрации на $P_\bullet$ (иными словами, $(F^l P_\bullet)_m$ равен P_m при $m \leq l$ и нулю в остальных случаях). Тогда для любого h -инъективного комплекса $V_\bullet$ в $\text{Fun}(\widetilde{\Lambda R_h^{\text{opp}}}, k)$ естественное отображение

$$\pi_*(i^*V_\bullet \otimes \tau^*P_\bullet) \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ l}} R^\bullet \pi_*(i^*V_\bullet \otimes \tau^*F^l P_\bullet) \quad (3.2)$$

является квазиизоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, имеем

$$i^*V_\bullet \otimes \tau^*P_\bullet \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ l}} i^*V_\bullet \otimes \tau^*F^l P_\bullet,$$

поэтому достаточно доказать, что отображение

$$\pi_*(i^*V_\bullet \otimes \tau^*F^l P_\bullet) \rightarrow R^\bullet \pi_*(i^*V_\bullet \otimes \tau^*F^l P_\bullet)$$

есть квазиизоморфизм для любого $l \geq 0$. Последнее по индукции сводится к проверке того, что для любых целых $m, l \geq 0, n \geq 1$ имеем

$$R^n \pi_*(i^*V_m \otimes \tau^*P_l) = 0.$$

Этот факт можно проверять после вычисления на любом объекте $a \in \widetilde{\Lambda R_h}$; по теореме замены базы достаточно доказать, что

$$H^n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, i^*V_m(b) \otimes P_l(\tau(b))) = 0$$

для любого $b \in \Lambda_p \times I \subset \Lambda I_{\text{red}} \times I$. Поскольку $V_\bullet$ h -инъективно, то $V_\bullet(c)$ – h -инъективный комплекс $\mathbb{Z}[\text{Aut}(c)]$ -модулей для любого $c \in \widetilde{\Lambda R_h}$, так что $i^*V_m(b)$ – свободный $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -модуль. Поэтому таково и произведение $i^*V_m(b) \otimes \tau^*P_l(b)$. Лемма доказана.

Далее, в силу предложения 3.12 категория $\mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, k)$ не зависит от выбора допустимого комплекса $P_\bullet$. Выберем $P_\bullet$ так, чтобы $F^l P_\bullet$ было квазиизоморфно сдвигу $\mathbb{Z}[l]$ постоянного функтора $\mathbb{Z} \in \text{Fun}(\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}, k)$ для любого четного целого числа $l \geq 0$. Пусть $\bar{\pi}: \Lambda I_{\text{red}} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \Lambda \mathbb{Z}_h$ – ограничение функтора π на $\Lambda I_{\text{red}} \times \mathbb{N}^*$. Тогда $h^* \circ R^* \pi_* \cong R^* \bar{\pi}_* \circ h^*$ в силу замены базы и

$$R^* \bar{\pi}_*: \mathcal{D}(\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k),$$

очевидно, переводит $\mathcal{D}_c(\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}, k)$ в $\mathcal{D}_c(\Lambda \mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, k)$. Поэтому, ограничиваясь четными l в правой части (3.2), видим, что для любого $V_\bullet \in \mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k)$

$$\tilde{h}^* \tilde{h}_* V_\bullet \cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} R^* \pi_* i^* V_\bullet[2l]$$

в самом деле лежит в $\mathcal{D}_w(\widetilde{\Lambda R}_h^{\text{opp}}, k)$. Отсюда следует доказательство утверждения (i).

Утверждение (ii) теперь доказывается тем же рассуждением, что и в доказательстве леммы 2.10.

§ 4. Эquivariantные гомологии

4.1. Общие факты об equivariantных гомотопиях. Прежде чем зафиксировать обозначения, напомним некоторые общие факты из equivariantной стабильной теории гомотопий [4] (мы, в основном, следуем изложению в [6], где в сжатом виде имеется все, что нам понадобится).

Пусть G – компактная группа Ли. G -CW-комплекс X – это пунктированный CW-комплекс X , снабженный непрерывным действием G , сохраняющим отмеченную точку и таким, что для любого $g \in G$ подмножество $X^g \subset X$ неподвижных точек есть подкомплекс. Обсудим категорию пунктированных топологических G -пространств и G -equivariantных отображений между ними, рассматриваемых с точностью до G -equivariantной гомотопии, и обозначим через $G\text{-Тор}$ полную подкатегорию, порожденную пространствами, эквивалентными G -CW-комплексам. Отметим, что для любой замкнутой подгруппы Ли $H \subset G$ сопоставление пространству X множества неподвижных точек $X^H \subset X$ дает хорошо определенный функтор

$$G\text{-Тор} \rightarrow W_H\text{-Тор},$$

где $W_H = N_H/H$, а $N_H \subset G$ – нормализатор подгруппы H .

Для любого конечномерного представления V группы G над $\mathbb{R}$ мы обозначаем через S^V одноточечную компактификацию V , причем бесконечность выбирается в качестве отмеченной точки. Для любого $X \in G\text{-Тор}$ пусть $\Sigma^V X = X \wedge S^V$ и $\Omega^V X$ – пространство пунктированных непрерывных отображений S^V в X . Функторы $\Sigma^V, \Omega^V: G\text{-Тор} \rightarrow G\text{-Тор}$ очевидным образом сопряжены.

G -универсум – это $\mathbb{R}$ -векторное пространство U , снабженное непрерывным линейным действием G и G -инвариантным положительно определенным скалярным произведением. Для любого G -универсума U G -предспектр X , индексированный U , это набор G -CW-комплексов $X(V)$, по одному для каждого конечномерного G -инвариантного подпространства $V \subset U$, и G -эквивариантных непрерывных отображений

$$X(V) \rightarrow \Omega^W X(V \oplus W), \quad (4.1)$$

по одному для каждой пары трансверсальных ортогональных друг другу конечномерных G -инвариантных подпространств $V, W \subset U$, удовлетворяющий очевидному условию ассоциативности. Категория G -предспектров, индексированных U , и гомотопических классов отображений между ними обозначается $G\text{-sp}(U)$.

G -предсектр есть *спектр*, если все отображения (4.1) – гомеоморфизмы. Категория G -спектров, индексированных U , и гомотопических классов отображений между ними обозначается $G\text{-Sp}(U)$. Имеем тавтологическое вложение $G\text{-Sp}(U) \rightarrow G\text{-sp}(U)$, и оно допускает сопряженный слева *функтор спектрификации* L , заданный как

$$Lt(V) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ W}} \Omega^W \Sigma^W X(V \oplus W), \quad (4.2)$$

где предел берется по всем конечномерным G -инвариантным подпространствам $W \subset U$, ортогональным V .

Для любого вложения $u: U_1 \subset U_2$ G -универсумов имеем очевидный функтор ограничения $\rho^\#(u): G\text{-sp}(U_2) \rightarrow G\text{-sp}(U_1)$, называемый *заменой универсума*, и этот функтор имеет левый сопряженный $\rho_\#(u): G\text{-sp}(U_1) \rightarrow G\text{-sp}(U_2)$, задаваемый следующим образом:

$$\tilde{\rho}_\#(u)(t)(V) = \Sigma^{V-(V \cap u(U_1))} t(u^{-1}(V)),$$

где $V - (V \cap u(U_1)) \subset V$ – ортогонал к пересечению $V \cap u(U_1) \subset V$. Функтор $\rho^\#(u)$ переводит спектры в спектры; соответствующий функтор $\rho^\#(u): G\text{-Sp}(U_2) \rightarrow G\text{-Sp}(U_1)$ имеет левый сопряженный $\rho_\#: G\text{-Sp}(U_1) \rightarrow G\text{-Sp}(U_2)$, задаваемый выражением

$$\rho_\#(u) = L\tilde{\rho}_\#(u),$$

где L – функтор спектрификации (4.2).

В частности, спектры, индексированные на тривиальном универсуме $U = 0$, это просто G -пространства, а ограничение $G\text{-Sp} \rightarrow G\text{-Тор}$ по вложению $0 \hookrightarrow U$ – функтор забывания, переводящий G -спектр в его значение в нуле. Его правый сопряженный называется *функтором надстроечного спектра* и обозначается $\Sigma^\infty: G\text{-Тор} \rightarrow G\text{-Sp}(U)$. В явном виде запишем $\Sigma^\infty X = L\tilde{\Sigma}^\infty X$, где $\tilde{\Sigma}^\infty X \in G\text{-sp}(U)$ задается следующим образом:

$$\tilde{\Sigma}^\infty X(V) = \Sigma^V X.$$

Среди нетривиальных G -универсумов особенно важны универсумы двух типов:

(i) $U = \mathbb{R}^\infty$ с тривиальным действием G (где ∞ предполагается счетной); тогда G -спектры, индексированные U , называются *наивными* эквивариантными G -спектрами (обозначаем категорию $G\text{-Sp}(U)$ через $G\text{-Sp}^{\text{naive}}$);

(ii) так называемый полный G -универсум (G -универсум называется *полным*, если любое конечномерное представление V компактной группы Ли G входит в U счетное число раз); все полные G -универсумы изоморфны, G -спектр, индексированный полным G -универсумом U , называется *истинным* эквивариантным G -спектром (обозначаем $G\text{-Sp}(U)$ просто через $G\text{-Sp}$).

Отметим, что $G\text{-Sp}^{\text{naive}}$ и $G\text{-Sp}$ – триангулированные категории со сдвигом, заданным следующим образом:

$$X[n](W) = X(W \oplus \mathbb{R}^n).$$

Кроме того, для любого конечномерного представления V на $G\text{-Sp}$ существует автоэквивалентность $\Sigma^V: G\text{-Sp} \rightarrow G\text{-Sp}$, заданная как $\Sigma^V X(W) = X(W \oplus V)$ (чтобы сделать это определение точным, надо зафиксировать изоморфизм $U \oplus V \cong U$ или, в наивном случае, $U \oplus \mathbb{R}^n \cong U$ и применить функтор замены универсума).

Пусть дана замкнутая подгруппа Ли $H \subset G$. Тогда U^H – W_H -универсум для любого G -универсума U и U^H полон, если U полон. Для любого G -спектра $X \in G\text{-Sp}(U)$ спектр неподвижных точек Льюиса–Мэя $X^H \in W_H\text{-Sp}(U^H)$ задается следующим образом:

$$X^H(V) = X(V)^H$$

для любого конечномерного $V \subset U^H \subset U$. Существует и другой функтор неподвижных точек $\Phi^H: G\text{-Sp}(U) \rightarrow H\text{-Sp}(U^H)$, известный как *геометрический функтор неподвижных точек*. Чтобы его определить, выбирают конечномерное G -инвариантное подпространство $W(V) \subset U$ для каждого конечномерного W_H -инвариантного $V \subset U^H$ такое, что $V = W(V)^H$ и

$$\bigcup_{V \subset U^H} W(V) = U,$$

и полагают

$$\varphi^H t(V) = t(W(V))^H \quad (4.3)$$

для любого $t \in G\text{-sp}(U)$ и

$$\Phi^H X = L\varphi^H X$$

для любого G -спектра $X \in G\text{-Sp}(U)$. Здесь φ^H зависит от выбора подпространств $W(V)$, но спектрификация Φ^H от этого выбора не зависит (более инвариантное описание Φ^H , в котором это явно видно, можно найти в [6, лемма 1.1]). Для любого $X \in G\text{-Sp}$ имеем естественное отображение

$$X^H \rightarrow \Phi^H X,$$

и это отображение функториально по X .

Для наивных G -спектров оба функтора неподвижных точек совпадают. В случае истинных спектров зафиксируем полный G -универсум U . Тогда $U^G \subset U$ изоморфно $\mathbb{R}^\infty$, так что $G\text{-Sp}(U^G)$ есть $G\text{-Sp}^{\text{naive}}$, а вложение $u: U^G \rightarrow U$ индуцирует пару сопряженных функторов $\rho^\#(u): G\text{-Sp} \rightarrow G\text{-Sp}^{\text{naive}}$, $\rho_\#(u): G\text{-Sp}^{\text{naive}} \rightarrow G\text{-Sp}$. Тогда имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 G\text{-Top} & \xrightarrow{\Sigma^\infty} & G\text{-Sp}^{\text{naive}} & \xrightarrow{\rho_\#(u)} & G\text{-Sp} \\
 (-)^H \downarrow & & (-)^H \downarrow & & \downarrow \Phi^H \\
 W_H\text{-Top} & \xrightarrow{\Sigma^\infty} & W_H\text{-Sp}^{\text{naive}} & \xrightarrow{\rho_\#(u')} & W_H\text{-Sp} \\
 & & & & \\
 & & G\text{-Sp}^{\text{naive}} & \xleftarrow{\rho^\#(u)} & G\text{-Sp} \\
 & & (-)^H \downarrow & & \downarrow (-)^H \\
 & & W_H\text{-Sp}^{\text{naive}} & \xleftarrow{\rho^\#(u')} & W_H\text{-Sp}
 \end{array} \tag{4.4}$$

где u' – вложение $U^G \subset U^H$ (а W_H -универсум U^H очевидным образом полон).

4.2. Циклические множества. Далее пусть $G = S^1 = U(1)$ – группа единичной окружности. Хорошо известно, что G -пространства связаны с циклическими множествами. Напомним, как именно (подробности и ссылки см., например, в [10]).

Для любого объекта $[n] \in \Lambda$ обозначим через $||[n]||$ его топологическую реализацию – объединение точек, занумерованных вершинами $v \in V([n])$, и открытых интервалов I_e , занумерованных ребрами $e \in E([n])$, с естественной топологией, в которой $||[n]||$ – окружность. Для любой такой функции $a: E([n]) \rightarrow \mathbb{R}$, что $a > 0$, превращаем $||[n]||$ в метрическое пространство $||[n]||_a$, приписывая длину $a(e)$ интервалу I_e . Пусть $R([n])^\circ$ – пространство пар $\langle a, b \rangle$ функции $a: E([n]) \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, и изометричного монотонного непрерывного отображения $b: ||[n]||_a \rightarrow S^1$ в единичную окружность $S^1 \subset \mathbb{C}$. Такое отображение b существует, если и только если $a_1 + \dots + a_n = 2\pi$, а пространство всех таких отображений неканонически отождествлено с S^1 , так что имеем неканонический гомеоморфизм

$$R([n])^\circ \cong S^1 \times T_{n-1}^\circ,$$

где $T_m^\circ \subset T_m$ – внутренность стандартного m -симплекса T_m для любого $m \geq 0$. Вложим $R([n])^\circ$ в компактное пространство $R([n])$, допустив нулевые значения a (и вырожденные метрики на $||[n]||$). Тогда имеем

$$R([n]) \cong S^1 \times T_{n-1}.$$

Это разложение неканоническое, но само по себе пространство $R([n])$ совершенно каноническое, и по определению на нем непрерывно действует G .

Более того, для любых отображения $f: [n] \rightarrow [m]$ и пары $\langle a, b \rangle \in R([m])$ положим

$$f(a)(e) = \sum_{f(e')=e} s(e'),$$

так что мы имеем очевидное изометричное отображение $g: |[n]|(f(a)) \rightarrow |[m]|(a)$, и обозначим через $f(b)$ композицию отображения g с b . Это вводит на $\mathbf{R}$ структуру контравариантного функтора из Λ в $G\text{-Top}$. Превратим его в ковариантный функтор с помощью двойственности $\Lambda^{\text{opp}} \cong \Lambda$. Получаем функтор

$$\mathbf{R}: \Lambda \rightarrow G\text{-Top}. \quad (4.5)$$

С помощью стандартного расширения Кана функтор (4.5) единственным образом продолжается до такого сохраняющего копределы *функтора реализации*

$$\text{Real}: \Lambda^{\text{opp}} \text{Sets} \rightarrow G\text{-Top},$$

что $\text{Real} \circ Y \cong \mathbf{R}$, где $Y: \Lambda \rightarrow \Lambda^{\text{opp}} \text{Sets}$ – вложение Йонеды. Имеем также сопряженный справа функтор

$$S: G\text{-Top} \rightarrow \Lambda^{\text{opp}} \text{Sets}$$

такой, что

$$S(X)([n]) = \text{Maps}_G(\mathbf{R}([n]), X)$$

для любого $X \in G\text{-Top}$, где $\text{Maps}_G(-, -)$ – пространство G -эквивариантных непунктированных отображений.

Хорошо известно, что для любого $A \in \Lambda^{\text{opp}} \text{Sets}$ реализация $\text{Real}(A)$ гомеоморфна обычной геометрической реализации симплицеального множества $j^*A \in \Delta^{\text{opp}} \text{Sets}$ и для любого $X \in G\text{-Top}$ отображение сопряжения

$$\text{Real}(S(X)) \rightarrow X$$

есть гомотопическая эквивалентность (см. [10] или современное изложение в [13]). В частности, если для любого множества A мы обозначим через $\mathbb{Z}[A]$ свободную абелеву группу, порожденную A , и применим эту конструкцию поточечно к $S(X): \Lambda \rightarrow \text{Sets}$, то получим

$$H_*(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z}[S(X)]) \cong H_*(X_{hG}, \mathbb{Z}), \quad (4.6)$$

где X_{hG} – гомотопический фактор X по действию G .

Однако для нашей теории функторы $\mathbb{Z}[S(X)] \in \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ неудобны, поскольку они не локально постоянны в смысле определения II.1. Чтобы исправить это, отметим, что все множества $S(X)([n])$ имеют естественную топологию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для любого $X \in G\text{-Top}$ *цепной комплекс* $C_*(X)$ – это комплекс в $\text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, заданный следующим образом:

$$C_*(X)([n]) = C_*(S(X)([n]), \mathbb{Z}),$$

где $C_*(-, \mathbb{Z})$ – нормализованный сингулярный цепной комплекс с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Поскольку все отображения $R([n]) \rightarrow R([n'])$ – гомотопические эквивалентности, то цепной комплекс $C_\bullet(X)$, в отличие от $\mathbb{Z}[S(X)]$, локально постоянен в смысле определения II.1. Более явно $C_\bullet(X)$ получается следующим образом. Рассматриваем функтор $\tilde{R}: \Lambda \times \Delta \rightarrow G\text{-Top}$, заданный как

$$\tilde{R}([n] \times [m]) = R([n]) \times T_{m-1},$$

где $[m] \in \Delta$ – линейно упорядоченное множество с m элементами. Функтор $\tilde{R}$ продолжается до пары сопряженных функторов

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Real}}: \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}}, \text{Sets}) &\rightarrow G\text{-Top}, \\ \tilde{S}: G\text{-Top} &\rightarrow \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}}, \text{Sets}). \end{aligned}$$

Чтобы получить $C_\bullet(S(X))$, берем $\mathbb{Z}[\tilde{S}(X)] \in \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ и применяем конструкцию нормализованного цепного комплекса послойно по отношению к проекции $\tau: \Lambda \times \Delta \rightarrow \Lambda$.

Для того чтобы объяснить связь между $\mathbb{Z}[S(X)]$ и $C_\bullet(X)$, обозначим через $\iota_m: \Lambda \rightarrow \Lambda \times \Delta$ вложение, заданное как $\iota([n]) = [n] \times [m]$ для любого $m \geq 1$. Тогда ι_1 сопряжено к τ , так что для любого $A \in \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}}, \text{Sets})$ имеем естественное отображение сопряжения

$$\tau^* \iota_1^* A \rightarrow A. \quad (4.7)$$

Применим (4.7) к $\tilde{S}(X)$ для какого-либо $X \in G\text{-Top}$. По определению имеем $\iota_1^* \tilde{S}(X) \cong S(X)$; порождая свободные абелевы группы и переходя к нормализованным цепным комплексам, получаем естественное отображение

$$\mathbb{Z}[S(X)] \rightarrow C_\bullet(X). \quad (4.8)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $A \in \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}}, \text{Sets})$ – такой функтор, что для любого морфизма $f: [m] \rightarrow [n]$ в Δ соответствующее отображение

$$\iota_n^* A \rightarrow \iota_m^* A$$

индуцирует гомотопическую эквивалентность геометрических реализаций. Тогда отображение

$$\text{Real}(\iota^* A) \cong \widetilde{\text{Real}}(\tau^* \iota^* A) \rightarrow \widetilde{\text{Real}}(A),$$

индуцированное (4.7), является гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\text{Real}_\Lambda: \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}}, \text{Sets}) \rightarrow \Delta^{\text{opp}}\text{-Top}$$

– функтор послойной геометрической реализации вдоль проекции $\Lambda \times \Delta \rightarrow \Delta$. Тогда из предположений для A следует, что (4.7) становится гомотопической эквивалентностью уже после применения Real_Λ . Лемма доказана.

Для любого $X \in G\text{-Top}$ имеем $\iota_m^* \tilde{S}(X) \cong S(\text{Maps}(\Delta_{m-1}, X))$, так что $\tilde{S}(X)$ автоматически удовлетворяет условиям леммы 4.2. Поэтому, в частности, естественное отображение $\text{Real}(S(X)) \rightarrow \text{Real}(\tilde{S}(X))$ есть гомотопическая эквивалентность, а отображение

$$H_*(\Lambda, \mathbb{Z}[S(X)]) \rightarrow H_*(\Lambda, C_*(X)), \quad (4.9)$$

индуцированное (4.8), является изоморфизмом. В большей общности если мы обозначим через $C: \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}_c(\Lambda, \mathbb{Z})$ левый сопряженный функтор к вложению $\mathcal{D}_c(\Lambda, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{Z})$, то $C(\mathbb{Z}[S(X)]) \cong C_*(X)$.

Комплексы $C_*(X)$ обычно довольно велики. Нам понадобятся более обозримые модели для стандартных G -орбит G/C_n , где $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset G$ – группа n -х корней из единицы. Для того чтобы получить такие модели, рассмотрим функторы $j_n: \Delta \rightarrow \Lambda_n^{\text{opp}}$ из п. 1.1 с естественным C_n -действием на них. Определим функторы $J_n: \Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \text{Sets}$, положив

$$J_n([m] \times [l]) = \Lambda(i_n j_n([l]), [m])/C_n, \quad (4.10)$$

где C_n действует через свое действие на j_n .

ЛЕММА 4.3. *Для любого $n \geq 1$ имеем естественную гомотопическую эквивалентность*

$$\widetilde{\text{Real}}(J_n) \cong G/C_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.2 достаточно построить эквивалентности $\text{Real}(\iota_l^* J_n) \cong G/C_n$ для любого $[l] \in \Delta$. По определению имеем

$$\iota_l^* J_n \cong Y(j_n([l]))/C_n = Y([nl])/C_n,$$

где $Y([nl]) \subset \Lambda^{\text{opp}} \text{Sets}$ – образ по Йонедэ $[nl] \in \Lambda$. Поскольку Real сохраняет копределы, имеем гомеоморфизмы

$$\text{Real}(Y([nl])/C_n) \cong \text{Real}(Y([nl]))/C_n \cong R([nl])/C_n,$$

и $R([nl])$ в самом деле гомотопически эквивалентно G . Лемма доказана.

Теперь рассмотрим подмножества неподвижных точек. По лемме 1.8 функтор R из (4.5) продолжается до функтора

$$R = \text{Real} \circ Y: \Lambda\mathbb{Z} \rightarrow G\text{-Top},$$

так что мы имеем пару сопряженных функторов

$$\text{Real}: \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \text{Sets}) \rightarrow G\text{-Top}, \quad S: G\text{-Top} \rightarrow \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \text{Sets}).$$

Сохраним прежние обозначения, поскольку эти функторы – прямые продолжения функторов Real и S , рассмотренных выше. Действительно, функтор реализации $\Lambda^{\text{opp}} \text{Sets} \rightarrow \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \text{Sets})$ допускает полный строгий левый сопряженный

$$L: \Lambda^{\text{opp}} \text{Sets} \rightarrow \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \text{Sets}),$$

причем $S \cong L \circ S$, $\text{Real} \cong \text{Real} \circ L$. В явном виде, если ограничить $L(A)$ на $\Lambda \cong \Lambda\mathbb{Z}_h^m \subset \Lambda\mathbb{Z}$, получим

$$L(A)|_{\Lambda\mathbb{Z}_h^m} = \pi_{m*} i_m^* A, \quad (4.11)$$

где сопряженный $\pi_{m*}: \Lambda_m^{\text{opp}} \text{Sets} \rightarrow \Lambda^{\text{opp}} \text{Sets}$ к функтору ограничения π_m^* получается послойным взятием $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -неподвижных точек, а вертикальные морфизмы в $\Lambda\mathbb{Z}$ действуют естественными вложениями неподвижных точек.

Продолжим функторы S и Real на произведение $\Lambda\mathbb{Z} \times \Delta$, как и выше. Для любого $X \in G\text{-Тор}$ определим его *расширенный цепной комплекс* $\tilde{C}_\bullet(X)$ функторов в $\text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, положив

$$\tilde{C}_\bullet(X) = C_\bullet(S(X)) = N(\mathbb{Z}[\tilde{S}(X)]),$$

где N – функтор нормализованного цепного комплекса, примененный послойно вдоль проекции $\Lambda\mathbb{Z} \times \Delta \rightarrow \Lambda\mathbb{Z}$. Кроме того, определим *приведенный цепной комплекс* $\overline{C}_\bullet(X)$ следующим образом:

$$\overline{C}_\bullet(X)([n|m]) = \tilde{C}_\bullet(X)([n|m])/\mathbb{Z}[o],$$

где $o \in \text{Maps}_{S^1}(\mathbb{R}([m|n]), X)$ – отмеченная точка. Тогда обычное отображение шаффла (shuffle map) индуцирует естественный квазиизоморфизм

$$\overline{C}_\bullet(X) \otimes \overline{C}_\bullet(Y) \rightarrow \overline{C}_\bullet(X \wedge Y) \quad (4.12)$$

для любых $X, Y \in G\text{-Тор}$, где $X \wedge Y$ – смэш-произведение, а тензорное произведение в правой части (4.12) есть поточечное тензорное произведение в категории $\text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$.

Функтор приведенного цепного комплекса $\overline{C}_\bullet(-)$ легко продолжается на категорию $G\text{-Sp}^{\text{naive}}$ наивных G -эквивариантных спектров. А именно, для любого $X \in G\text{-Sp}^{\text{naive}}$ и целых чисел $i, j \geq 0$ отображения перехода (4.1) индуцируют по сопряженности отображения

$$\Sigma^i X(\mathbb{R}^{\oplus j}) \rightarrow X(\mathbb{R}^{\oplus i+j}),$$

которые дают отображения

$$\overline{C}_\bullet(X(\mathbb{R}^{\oplus i}))[-i] \cong \overline{C}_\bullet(\Sigma^i X(\mathbb{R}^{\oplus j})) \rightarrow \overline{C}_\bullet(X(\mathbb{R}^{\oplus i+j})). \quad (4.13)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. *Эквивариантный гомологический комплекс* $C_\bullet^{\text{naive}}(X)$ наивного G -спектра $X \in G\text{-Sp}^{\text{naive}}$ задается выражением

$$C_\bullet^{\text{naive}}(X) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} \overline{C}_\bullet(X(\mathbb{R}^{\oplus i}))[i] \in \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \mathbb{Z}),$$

где предел берется по отображениям (4.13).

4.3. Циклические функторы Макки. Чтобы продолжить эквивариантный гомологический комплекс определения 4.4 на истинные G -спектры, необходимо перейти к категории $\mathcal{DM}\Lambda(\mathbb{Z})$ циклических функторов Макки из § 2. Мы будем использовать модель, данную в предложении 3.12, с правильно выбранным комплексом $P_\bullet$.

Сначала заметим следующее. Для любого $n \geq 1$ пусть $P_\bullet^n$ – комплекс в $\text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, полученный как конус естественного отображения аугментации

$$N(L(J_n)) \rightarrow \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z} \in \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ – постоянный функтор, а $J_n: \Lambda^{\text{opp}} \times \Delta^{\text{opp}} \rightarrow \text{Sets}$ таковой, как в (4.10). Отметим, что $P_\bullet^n([m|l])$ – комплекс конечной длины конечно порожденных свободных абелевых групп для любого $[m|l] \in \Lambda\mathbb{Z}$. Пусть теперь $\mathbb{C}(1)$ – стандартное комплексное представление группы $G = U(1)$, и пусть $\mathbb{C}(n) = \mathbb{C}(1)^{\otimes n}$. Ограничивая скаляры, рассматриваем $\mathbb{C}(n)$ как 2-мерное вещественное представление и обозначаем

$$\Sigma_n = \Sigma^{\mathbb{C}(n)}: G\text{-Тор} \rightarrow G\text{-Тор}.$$

ЛЕММА 4.5. *Для любого $X \in G\text{-Тор}$ имеем естественный функториальный квазиизоморфизм*

$$P_\bullet^n \otimes \overline{C}_\bullet(X) \rightarrow \overline{C}_\bullet(\Sigma_n X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $S^{\mathbb{C}(n)}$ гомеоморфно $\Sigma(G/C_n)$ – неэквивариантной надстройке стандартной орбиты G/C_n , $S^{\mathbb{C}(n)} \cong \Sigma(G/C_n)$. Гомотопическая эквивалентность из леммы 4.3 по сопряжению индуцирует отображение

$$J_n \rightarrow \tilde{S}(G/C_n),$$

а это отображение индуцирует квазиизоморфизм

$$P_\bullet^n \rightarrow \overline{C}_\bullet(S^{\mathbb{C}(n)}).$$

Вместе с (4.12) это доказывает утверждение.

Зафиксируем теперь полный G -универсум U , положив

$$U = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}(n)^\infty, \quad (4.14)$$

где ∞ обозначает сумму счетного числа копий (этот универсум полный, поскольку $\mathcal{C}(-n) \cong \mathcal{C}(n)$ как вещественные представления).

Будем говорить, что отображение $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ допустимо, если $\nu(i) \neq 0$ для не более чем конечного числа значений i . Для любой допустимой последовательности ν положим

$$V(\nu) = \bigoplus_i \mathbb{C}(i)^{\oplus \nu(i)} \subset U,$$

и пусть

$$\Sigma_\nu = \Sigma^{V(\nu)} = (\Sigma_{i_1})^{\nu(i_1)} \circ \dots \circ (\Sigma_{i_n})^{\nu(i_n)}, \quad P_\bullet^\nu = \bigotimes_{1 \leq l \leq n} (P_\bullet^{i_l})^{\otimes \nu(i_l)},$$

где $i_1 \leq \dots \leq i_n$ – все такие целые числа, что $\nu(i_l) \neq 0$. Тогда лемма 4.5 немедленно дает канонические квазиизоморфизмы

$$P_\bullet^\nu \otimes \overline{C}_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(\Sigma_\nu(X)). \quad (4.15)$$

Будем называть подпространства $V(\nu) \subset U$ *клеточными*; набор всех клеточных подпространств, очевидно, кофинален в множестве всех конечномерных G -инвариантных подпространств $V \subset U$.

Теперь мы готовы определить комплекс $P_\bullet$ в $\text{Fun}(\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$. Отметим, что для любых $m, l \geq 1$ естественное действие C_m на $i_m^* J_n([l]) = J_n([ml])$ пропускается через свободное действие факторгруппы $C_m/(C_m \cap C_n)$. Поэтому для любого вертикального морфизма $v: a \rightarrow b$ в $\Lambda \mathbb{Z}$ соответствующее отображение

$$v: P_\bullet^n(b) \rightarrow P_\bullet^n(a)$$

является изоморфизмом, если $\deg(v)$ делит n , и естественным вложением $\mathbb{Z} = P_0^n(b) \rightarrow P_\bullet^n(a)$ в противном случае. Более того, для любого простого p , не делящего n , ограничение $i_p^*(P_\bullet^n)$ вдоль функтора $i_p: \Lambda_p \rightarrow \Lambda \cong \Lambda \mathbb{Z}_h^1 \subset \Lambda \mathbb{Z}$ есть постоянный функтор $\mathbb{Z}$ в степени 0, в то время как $i_p^* P_i^n([m])$ – свободный $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -модуль для любого $[m] \in \Lambda_p$ и $i \geq 1$.

Определим теперь комплекс $P_\bullet$ функторов в $\text{Fun}(\Lambda I_{\text{red}}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, положив

$$P_\bullet = \varinjlim i_p^* P_\bullet^\nu \quad \text{на} \quad \Lambda_p \subset \Lambda I_{\text{red}},$$

где предел по естественным вложениям $\mathbb{Z} \rightarrow P_\bullet^n$ берется по всем таким допустимым последовательностям ν , что $\nu(pl) = 0$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда $P_\bullet$ допустим в смысле предложения 3.12 и мы имеем каноническую эквивалентность

$$\mathcal{DM}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h, P_\bullet, \mathbb{Z}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Чтобы представить себе комплекс $P_\bullet$, можно отметить, что на $\Lambda_p \subset \Lambda I_{\text{red}}$ он по сути равен

$$i_p^* \varinjlim_V \overline{C}_\bullet(S^V),$$

где предел берется по всем клеточным подпространствам в U , ортогональным $U^{C_p} \subset U$. Единственное отличие нашей конструкции состоит в том, что мы используем более экономные симплициальные модели для сфер.

По определению комплекс $P_\bullet^\nu$ для любого n дает объект в категории $\mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h, P_\bullet, \mathbb{Z})$. Соответствующий комплекс есть $h^* P_\bullet^\nu$ – ограничение $P_\bullet^\nu$ вдоль вложения $h: \Lambda \mathbb{Z}_h \rightarrow \Lambda \mathbb{Z}$, а отображение $\varphi: \pi^* h^* P_\bullet^\nu \rightarrow i^* h^* P_\bullet^\nu$ индуцировано действием вертикальных отображений на $P_\bullet^{nu}$. Обозначим через ν_p отображение, заданное в явном виде

$$\nu_p(m) = \begin{cases} \nu(m), & m = pl, \, l \geq 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $P^\nu = P_{\bullet}^{\nu_p} \otimes P_{\bullet}^{\nu-\nu_p}$, а Λ_p -компонента φ_p отображения φ есть произведение изоморфизма

$$\pi_p^* h^* P_{\bullet}^{\nu_p} \cong i_p^* h^* P_{\bullet}^{\nu_p}$$

и естественного вложения

$$\mathbb{Z} \cong \pi_p^* h^* P_{\bullet}^{\nu-\nu_p} \rightarrow i_p^* h^* P_{\bullet}^{\nu-\nu_p}.$$

Если мы рассматриваем комплексы $P_{\bullet}^n$ с точностью до квазиизоморфизма, то на $\Lambda\mathbb{Z}_h^m \subset \Lambda\mathbb{Z}_h$ имеем

$$h^* P_{\bullet}^n = \begin{cases} \mathbb{Z}[2], & n = ml, \ l \geq 1, \\ \mathbb{Z} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Зафиксируем теперь проективную резольвенту $Q_{\bullet}$ постоянного функтора $\mathbb{Z} \in \text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ и определим комплекс $Q_{\bullet}^n$, положив

$$Q_{\bullet}^n = \begin{cases} \mathbb{Z}[-2], & n = ml, \ l \geq 1, \\ \mathbb{Z} & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

на $\Lambda\mathbb{Z}_h^m \subset \Lambda\mathbb{Z}_h$. Тогда $Q_{\bullet}^n \otimes h^* P_{\bullet}^n$ квазиизоморфен постоянному функтору $\mathbb{Z}$, а поскольку $Q_{\bullet}$ проективен, существует и настоящий квазиизоморфизм

$$\varepsilon_n: Q_{\bullet} \rightarrow Q_{\bullet}^n \otimes h^* P_{\bullet}^n.$$

Более того, для любого допустимого $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и любого $m \geq 1$ положим

$$d(m, \nu) = \sum_{l \geq 1} \nu(ml)$$

и обозначим через $Q_{\bullet}^{\nu}$ комплекс в $\text{Fun}(\Lambda\mathbb{Z}_h^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, равный $Q_{\bullet}[-2d(m, \nu)]$ на $\Lambda\mathbb{Z}_h^m \subset \Lambda\mathbb{Z}_h$. Тогда, взяв тензорное произведение отображений ε_n , получаем систему квазиизоморфизмов

$$\varepsilon_{\nu}: \mathbb{Z} \rightarrow Q_{\bullet}^{\nu} \otimes h^* P_{\bullet}^{\nu} \quad (4.16)$$

для всех допустимых ν . Для любого простого p имеем естественное отображение

$$\varepsilon_{\nu-\nu_p}: \pi_p^* Q_{\bullet}^{\nu} \rightarrow i_p^* (Q_{\bullet}^{\nu} \otimes P_{\bullet}^{\nu-\nu_p}),$$

и, взяв композицию этих отображений с естественными вложениями $i_p^* P_{\bullet}^{\nu-\nu_p} \rightarrow P_{\bullet}$, мы снабжаем $Q_{\bullet}^{\nu}$ естественной структурой объекта $\mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}_h, P_{\bullet}, \mathbb{Z})$.

Теперь мы готовы определить функтор эквивариантных гомологий. Пусть дан предспектр $t \in G\text{-sp}(U)$. Для любых двух допустимых отображений $\nu, \nu': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ имеем отображение перехода

$$\Sigma_{\nu'} t(V(\nu)) \rightarrow t(V(\nu + \nu')),$$

сопряженное к (4.1). В силу (4.15) эти отображения индуцируют канонические отображения

$$P_{\bullet}^{\nu'} \otimes \overline{C}_{\bullet}(t(V(\nu))) \rightarrow \overline{C}_{\bullet}(V(\nu + \nu')).$$

Пусть теперь $\xi^*: \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}, \lambda^*\mathcal{T}_{\bullet}, \mathbb{Z}) \cong \mathcal{DML}(\mathbb{Z})$ – функтор коограничения по отношению к отображению аугментации A_{∞} -коалгебры $\lambda^*\mathcal{T}_{\bullet}$. Тогда эти отображения в композиции с отображениями (4.16) индуцируют отображения перехода

$$\xi^*\overline{C}_{\bullet}(t(V(\nu))) \rightarrow Q_{\bullet}^{\nu} \otimes \xi^*P_{\bullet}^{\nu} \otimes \xi^*\overline{C}_{\bullet}(t(V(\nu))) \rightarrow Q_{\bullet}^{\nu} \otimes \xi^*\overline{C}_{\bullet}(t(V(\nu + \nu'))). \quad (4.17)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Эквиариантный цепной комплекс $C_{\bullet}(X) \in \mathcal{DML}(\mathbb{Z})$ G -предспектра $t \in G\text{-sp}(U)$ имеет вид

$$C_{\bullet}(t) = \lim_{\nu \rightarrow} Q_{\bullet}^{\nu} \otimes \xi^*\overline{C}_{\bullet}(X(V(\nu))), \quad (4.18)$$

где предел берется по всем допустимым отображениям $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ по отношению к отображениям перехода (4.17).

ЛЕММА 4.8. Для любого $t \in G\text{-sp}(U)$ со спектрификацией Lt отображение сопряжения $t \rightarrow Lt$ индуцирует изоморфизм

$$C_{\bullet}(t) \rightarrow C_{\bullet}(Lt).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку клеточные подпространства кофинальны, в (4.2) достаточно брать предел по ним. Тогда, подставляя (4.2) в (4.18), мы видим, что

$$C_{\bullet}(Lt) = \lim_{\nu \leq \nu'} Q_{\bullet}^{\nu} \otimes \xi^*\overline{C}_{\bullet}(\Omega^{V(\nu' - \nu)}t(V(\nu'))),$$

где предел берется по всем парам $\nu \leq \nu'$ допустимых отображений $\nu, \nu': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Подмножество всех пар при $\nu = \nu'$ кофинально в этом множестве, так что достаточно брать предел по таким парам. Это дает в точности $C_{\bullet}(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Для любого $X \in G\text{-Top}$ имеем

$$C_{\bullet}(\Sigma^{\infty}X) \cong \xi^*\overline{C}_{\bullet}(X),$$

а для любого $X \in G\text{-Sp}^{\text{naive}}$ имеем

$$C_{\bullet}(\rho_{\#}(u)X) \cong C_{\bullet}(X), \quad (4.19)$$

где $\rho_{\#}(u)$ – функтор замены универсума, связанный с вложением $\mathbb{R}^{\oplus \infty} = U^G \subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.8 можно заменить Σ^{∞} на $\tilde{\Sigma}^{\infty}$, а $\rho_{\#}(u)$ – на $\tilde{\rho}_{\#}(u)$. Тогда для $t = \tilde{\Sigma}^{\infty}X$ все отображения перехода в фильтрованном пределе (4.18) – квазиизоморфизмы, а для $t = \tilde{\rho}_{\#}(u)X$ единственные возможно нетривиальные отображения перехода – те, что входят в (4.13).

4.4. Циклотомические комплексы. Далее для любого $m \geq 1$ обозначим через $C_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset G = U(1)$ группу m -х корней из единицы. Отображение возведения в степень m дает изоморфизм $p_m: G/C_m \rightarrow G$, причем $p_m \circ p_n = p_{nm}$, $m, n \geq 1$. Имеем очевидные канонические G -эквивариантные изоморфизмы

$$u_m: U^{C_m} \cong U,$$

где U – полный G -универсум (4.14), причем $u_m \circ u_n = u_{nm}$, $n, m \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Для любого $X \in G\text{-Sp} = G\text{-Sp}(U)$ и $m \geq 1$ *расширенный геометрический спектр неподвижных точек* $\widehat{\Phi}^m(X) \in G\text{-Sp}$ задается выражением

$$\widehat{\Phi}^m(X) = \rho_{\#}(u_m)\Phi^{C_m}(X),$$

а *расширенный спектр неподвижных точек Льюиса–Мэя* $\widehat{\Psi}^m(X) \in G\text{-Sp}$ задается как

$$\widehat{\Psi}^m(X) = \rho_{\#}(u_m)X^{C_m}.$$

Для любого $m \geq 1$ обозначим через $\rho_m: I \rightarrow I$ умножение на m , как в (2.20). Оно коммутирует с действием $\mathbb{N}^*$, поэтому индуцирует эндифунктор

$$\widetilde{\rho}_m: \Lambda\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda\mathbb{Z},$$

коммутирующий с проекцией $\lambda: \Lambda\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda R$. В силу (4.11) имеем

$$\widetilde{\rho}_m^* LA \cong LA^{C_m}$$

для любого $A \in \Lambda^{\text{op}} \text{Sets}$. В частности, для любого $X \in G\text{-Top}$ имеем квази-изоморфизмы

$$\widetilde{\rho}_m^* \overline{C}_{\bullet}(X) \cong \overline{C}_{\bullet}(X^{C_m}), \quad (4.20)$$

а в силу (4.13) они индуцируют квазиизоморфизмы

$$\widetilde{\rho}_m^* C_{\bullet}(X) \cong C_{\bullet}(X^{C_m}) \quad (4.21)$$

для любого наивного G -спектра $X \in G\text{-Sp}^{\text{naive}}$. Нам нужна версия этой конструкции для истинных G -спектров. Поскольку $\lambda \circ \widetilde{\rho}_m = \lambda$, тавтологически имеем $\widetilde{\rho}^* \lambda^* \mathcal{T}_{\bullet} \cong \lambda^* \mathcal{T}_{\bullet}$, так что возникает функтор обратного образа

$$\widetilde{\rho}_m^*: \mathcal{DML}(Z) \rightarrow \mathcal{DML}(Z).$$

ЛЕММА 4.11. Для любых $m \geq 1$ и $X \in G\text{-Sp}$ существует естественный функториальный изоморфизм

$$C_{\bullet}(\widehat{\Phi}^m(X)) \cong \widetilde{\rho}_m^* C_{\bullet}(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого отображения $\nu: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ пусть $r(\nu): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ задано как $r(\nu)(ma + b) = \nu(a)$, $a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq b < n$. Если ν допустимо, то $r(\nu)$ также допустимо.

По лемме 4.8 мы можем заменить $\widehat{\Phi}^m$ функтором $\varphi^m = \tilde{\rho}_\#(u_m) \circ \varphi^{C_m}$. Выберем подпространства $W(V) \subset U$ так, что $W(V(\nu)) = V(r(\nu))$ для любого допустимого $\nu: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Тогда

$$C_\bullet(\varphi^m X) = \lim_{\nu} Q_\bullet^\nu \otimes \xi^* \overline{C}_\bullet(X(V(r\nu)))^{C_m}, \quad (4.22)$$

а поскольку последовательности $r(\nu)$ кофинальны среди всех допустимых последовательностей, то

$$\tilde{\rho}_m^* C_\bullet(X) = \lim_{\nu} \tilde{\rho}_m^* Q_\bullet^{r(\nu)} \xi^* \overline{C}_\bullet(X(V(r\nu))). \quad (4.23)$$

По определению функтор обратного образа коммутирует с коограничением, $\tilde{\rho}_m^* \circ \xi^* \cong \xi^* \circ \tilde{\rho}_m^*$, и мы имеем изоморфизмы (4.20). Остается отметить, что по определению выполнено

$$\tilde{\rho}_m^* Q_\bullet^{r(\nu)} \cong Q_\bullet^\nu$$

для любого допустимого ν . Лемма доказана.

Рассмотрим теперь правый сопряженный $\xi_*: \mathcal{DM}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda\mathbb{Z}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ к функтору коограничения ξ^* , как в п. 2.4. Тогда изоморфизм (4.19) индуцирует отображение замены базы

$$C_\bullet(\rho^\#(u)(X)) \rightarrow \xi_* C_\bullet(X) \quad (4.24)$$

для любого $X \in G\text{-Sp}$. В силу (4.21) и (4.4) имеем естественный изоморфизм

$$\tilde{\rho}_m^* C_\bullet(\rho^\#(u)(X)) \cong C_\bullet(\widehat{\Psi}^m(X))$$

для любого истинного G -спектра $X \in G\text{-Sp}$ и любого $m \geq 1$.

ЛЕММА 4.12. *Отображение замены базы (4.24) есть изоморфизм для любого $X \in G\text{-Sp}$, так что*

$$C_\bullet(\widehat{\Psi}^m(X)) \cong \tilde{\rho}_m^* \xi_* C_\bullet(X)$$

для любого $m \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что отображение (4.24) становится изоморфизмом после вычисления на любом объекте $[n|m] \in \Lambda\mathbb{Z}$. В силу (4.4) и определения эквивариантного гомологического комплекса $C_\bullet(-)$ наивного G -спектра имеем естественный квазиизоморфизм

$$C_\bullet(\rho^\#(u)(X))([n|m]) \cong C_\bullet(X^{C_m}),$$

где X^{C_m} рассматривается как неэквивариантный спектр, а $C_\bullet(-)$ в правой части получается переходом к пределу, как в определении 4.4, из обычного неэквивариантного функтора приведенного сингулярного цепного комплекса $\overline{C}_\bullet(-, \mathbb{Z})$ (здесь n ни на что не влияет, поскольку функторы из определения 4.1

локально постоянны). Поэтому надо доказать, что для любых $n, m \geq 1$ естественное отображение

$$C_{\bullet}(X^{C_m}) \rightarrow (\xi_* C_{\bullet}(X))([n|m]),$$

индуцированное отображением (4.24), есть изоморфизм.

С другой стороны, по определению функтора $C_{\bullet}: G\text{-Sp} \rightarrow \mathcal{DM}(\mathbb{Z})$ имеем изоморфизм

$$\Sigma^V \circ C_{\bullet} \cong C_{\bullet} \circ \Sigma^V$$

для любого $V = V(\nu) \subset U$, и отображение замены базы

$$C_{\bullet} \circ (\Sigma^V)^{-1} \rightarrow (\Sigma^V)^{-1} \circ C_{\bullet}$$

также является изоморфизмом. Поэтому отображение (4.24) – изоморфизм для некоторого $X \in G\text{-Sp}$ тогда и только тогда, когда оно является изоморфизмом для $\Sigma^V X$. Поскольку любое $X \in G\text{-Sp}$ – фильтрованный копредел спектров вида $(\Sigma^V)^{-1} \Sigma^{\infty} Y$, $Y \in G\text{-Тор}$, достаточно доказать, что (4.24) есть изоморфизм для надстроечных спектров $\Sigma^{\infty} Y$. В силу следствия 4.9 имеем квазиизоморфизм

$$C_{\bullet}(\Sigma^{\infty} Y) \cong \xi^* \overline{C}_{\bullet}(Y),$$

поэтому надо доказать, что для любого $Y \in G\text{-Тор}$ и $[n|m] \in \Lambda\mathbb{Z}$ естественное отображение

$$C_{\bullet}((\Sigma^{\infty} Y)^{C_m}) \rightarrow (\xi_* \xi^* \overline{C}_{\bullet}(Y))([n|m]),$$

индуцированное отображением (4.24), есть изоморфизм. Правую часть можно вычислить из (2.19) и леммы 2.14:

$$(\xi_* \xi^* \overline{C}_{\bullet}(Y))([n|m]) \cong \bigoplus_{l, p \geq 1, lp=m} C_{\bullet}(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}, \overline{C}_{\bullet}(Y)([nl|p])),$$

где по определению $\overline{C}_{\bullet}(Y)([nl|p])$ равно приведенному цепному комплексу пространства неподвижных точек Y^{C_p} :

$$\overline{C}_{\bullet}(Y)([nl|p]) \cong \overline{C}_{\bullet}(Y^{C_p}, \mathbb{Z}).$$

Требуемый изоморфизм теперь сводится к расщеплению том Дика–Сигала (см., например, [6, § 1]).

Напомним теперь следующее фундаментальное понятие (мы снова следуем [6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.13. *Циклотомическая структура* на истинном G -спектре $T \in G\text{-Sp}$ задается набором гомотопических эквивалентностей

$$r_m: \widehat{\Phi}^m T \cong T,$$

по одной для каждого целого числа $m \geq 1$, причем $r_1 = \text{id}$, а $r_n \circ r_m = r_{nm}$ для любых двух целых чисел $n, m > 1$.

ПРИМЕР 4.14. Пусть X – пунктированный CW-комплекс, и пусть $LX = \text{Maps}(S^1, X)$ – его пространство свободных петель. Тогда для любой конечной подгруппы $C \subset S^1$ изоморфизм $S^1 \cong S^1/C$ индуцирует гомеоморфизм

$$\text{Maps}(S^1, X)^C = \text{Maps}(S^1/C, X) \cong \text{Maps}(S^1, X)$$

и эти гомеоморфизмы дают каноническую циклотомическую структуру на надстроечном спектре $\Sigma^\infty LX$.

По лемме 4.11 циклотомическая структура $\{r_m\}$ на T индуцирует набор квазиизоморфизмов

$$r_m: \tilde{\rho}_m^* C_\bullet(T) \rightarrow C_\bullet(T), \quad m \geq 1,$$

причем $r_m \circ r_n = r_{nm}$. Если рассматривать эквивариантный цепной комплекс $C_\bullet(T)$ как объект $\langle h^* C_\bullet(T), \varphi \rangle$ категории $\mathcal{D}(\Lambda \mathbb{Z}_h, P_\bullet, \mathbb{Z})$, то отображения r_m продолжают $h^* C_\bullet(T)$ до комплекса в категории $\text{Fun}(\widetilde{\Lambda R}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ и это продолжение будет совместимо с отображением φ . Тем самым, $C_\bullet(T)$ канонически задает объект $\tilde{C}_\bullet(T)$ производной категории $\mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R}_h, P_\bullet, \mathbb{Z})$. По предложению 3.12 это превращает $C_\bullet(T)$ в циклотомический комплекс. Поэтому мы наконец-то можем оправдать наш выбор терминологии, введя следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.15. Циклотомический комплекс $\tilde{C}_\bullet(T) \in \mathcal{D}\Lambda R(\mathbb{Z})$ называется *эквивариантным цепным комплексом* циклотомического спектра T .

§ 5. Фильтрованные модули Дьедонне

5.1. Определения. Теперь мы хотим сравнить циклотомические комплексы с другим более простым алгебраическим понятием, которое появилось раньше и в другом контексте, а именно с понятием фильтрованного модуля Дьедонне.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть k – конечное поле характеристики p с отображением Фробениуса, и пусть W – его кольцо векторов Витта с каноническим подъемом отображения Фробениуса. *Фильтрованный модуль Дьедонне* над W – это конечнопорожденный W -модуль M , снабженный убывающей фильтрацией $F^\bullet M$, занумерованной целыми числами, и набором фробениус-полулинейных отображений $\varphi_i: F^i M \rightarrow M$, по одному для каждого целого числа i , таким, что:

- (i) $\varphi_i|_{F^{i+1}M} = p\varphi^{i+1}_i$;
- (ii) отображение $\sum \varphi_i: \bigoplus_i F^i M \rightarrow M$ сюръективно.

Последнее определение ввели Фонтень и Лафэ в [7] в качестве p -адического аналога понятия структуры Ходжа. При некоторых предположениях когомологии де Рама $H_{DR}^\bullet(X)$ гладкого компактного алгебраического многообразия X/W имеют естественную структуру фильтрованного модуля Дьедонне, в которой $F^\bullet$ – фильтрация Ходжа, а отображения $\varphi^\bullet$ индуцированы эндоморфизмом Фробениуса специального слоя $X_k = X \otimes_W k$.

Категория фильтрованных модулей Дьедонне, очевидно, аддитивна, но вернее: как и для смешанных структур Ходжа, происходит маленькое чудо, и категория оказывается абелевой. В этом ключевую роль играет условие нормализации (ii) определения 5.1. Если не требовать выполнения всех аксиом абелевой категории и работать с точными категориями в смысле Квиллена, то это условие оказывается излишним. Для целей настоящей работы полезно следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. *Обобщенный фильтрованный модуль Дьедонне* (сокращенно gFDM) – это абелева группа M , снабженная:

- (i) убывающей фильтрацией $F^\bullet M$, занумерованной всеми целыми числами и такой, что $M = \bigcup F^i M$;
- (ii) для любого целого числа i , любого положительного целого числа $j \geq 1$ и любого простого числа p отображением $\varphi_{i,j}^p: F^i M \rightarrow M/p^j M$ таким, что $\varphi_{i,j+1}^p = \varphi_{i,j}^p \bmod p^j$ и $\varphi_{i,j}^p = p\varphi_{i+1,j}^p$ на $F^{i+1} M \subset F^i M$.

Отличие определения 5.2 от определения 5.1 состоит в том, что мы больше не требуем условия нормализации (ii), рассматриваем простые поля вместо всех конечных и собираем вместе структуры над всеми простыми числами. Отметим, однако, что если M конечно порождено над $\mathbb{Z}_p$, то все прочие простые действуют на M обратимыми отображениями, а потому все дополнительные отображения $\varphi_{\bullet,\bullet}^l$, $l \neq p$, обращаются в нуль. На самом деле, для любого простого p и любого целого i мы можем собрать все отображения $\varphi_{i,\bullet}^p$ в единое отображение

$$\varphi_i^p: F^i M \rightarrow (\widehat{M})_p,$$

где $(\widehat{M})_p$ обозначает про- p -пополнение абелевой группы M . Если M конечно порождено над $\mathbb{Z}_p$, то $(\widehat{M})_p \cong M$ и $(\widehat{M})_l = 0$ при $l \neq p$.

Комплексы gFDM определяются очевидным образом. Отображение между такими комплексами – квазиизоморфизм, если оно индуцирует квазиизоморфизм на присоединенных градуированных факторах gr^F . Обращая квазиизоморфизмы, получаем триангулированную “производную категорию gFDM”, которую мы будем обозначать $\mathcal{FDM}$.

Для любого gFDM M и любого целого числа i мы обозначаем через $M(i)$ то же M , но с фильтрацией $F^\bullet$, сдвинутой на i , т.е. мы полагаем $F^j M(i) = F^{j-i} M$. Имея в виду это соглашение, мы вводим следующую “скрученную 2-периодическую” версию категории $\mathcal{FDM}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Триангулированная категория $\mathcal{FDM}^{\mathrm{per}}$ получается обращением квазиизоморфизмов в категории комплексов gFDM $M_\bullet$, снабженных изоморфизмом $M \cong M[2](1)$.

Теперь мы можем сформулировать главный результат настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 5.4. *Существует естественная эквивалентность*

$$\mathcal{FDM}^{\mathrm{per}} \cong \mathcal{D}\Lambda R(\mathbb{Z})$$

между скрученной 2-периодической производной категорией gFDM , с одной стороны, и производной категорией циклотомических комплексов абелевых групп в смысле определения 3.1 – с другой.

Мы докажем это утверждение в п. 5.5 в более точной форме, даваемой предложением 5.17, после того как приведем все необходимые предварительные сведения. Сначала приведем общие факты о фильтрованных объектах.

5.2. Фильтрованные объекты. Под *фильтрованным объектом* в абелевой категории Ab мы будем понимать объект $E \in \text{Ab}$, снабженный убывающей фильтрацией $F^\bullet$, занумерованной всеми целыми числами. Отображения и комплексы фильтрованных объектов определяются очевидным способом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. Отображение $f: E_\bullet \rightarrow E'_\bullet$ между двумя комплексами фильтрованных объектов в Ab есть *фильтрованный квазиизоморфизм*, если индуцированное отображение

$$f: F^i E_\bullet / F^{i+1} E_\bullet \rightarrow F^i E'_\bullet / F^{i+1} E'_\bullet$$

– квазиизоморфизм для любого целого i .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Фильтрованный квазиизоморфизм не обязан индуцировать квазиизоморфизм ни самих комплексов $E_\bullet$, $E'_\bullet$ объектов в Ab , ни индивидуальных членов фильтрации $F^i E_\bullet$, $F^i E'_\bullet$.

Фильтрованная производная категория $\mathcal{DF}(\text{Ab})$ получается обращением фильтрованных квазиизоморфизмов в категории фильтрованных комплексов и фильтрованных отображений. *Периодическая фильтрованная производная категория* $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\text{Ab})$ точно так же получается из категории комплексов фильтрованных объектов $V_\bullet$ в Ab , снабженных изоморфизмом

$$u: V_\bullet \cong V_{\bullet-2}(1),$$

где под $V(1)$ понимается сдвиг фильтрации. В явном виде такой комплекс задается двумя фильтрованными объектами V_0 , V_1 и двумя фильтрованными отображениями

$$d_1: V_1 \rightarrow V_0, \quad d_0: V_0 \rightarrow V_1(1) \cong V_{-1}$$

такими, что $d_1 \circ d_0 = 0 = d_0 \circ d_1$; остальные члены комплекса тогда имеют вид $V_{2\bullet} = V_0$, $V_{2\bullet+1} = V_1$ с теми же дифференциалами d_0 , d_1 .

Если Ab – категория абелевых групп, мы получаем периодическую фильтрованную производную категорию $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$ фильтрованных абелевых групп. Для любого целого числа n обозначим через $\mathbb{Z}(n) \in \mathcal{DF}^{\text{per}}$ объект V , заданный как $V_0 = \mathbb{Z}$, $V_1 = 0$ с фильтрациями $F^n V_0 = V_0$, $F^{n+1} V_0 = 0$. Тогда объекты $\mathbb{Z}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, порождают категорию $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$ в следующем смысле.

ЛЕММА 5.7. *Триангулированная подкатегория $\mathcal{D}' \subset \mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$, замкнутая относительно произвольных сумм и произведений и содержащая $\mathbb{Z}$ с тривиальной фильтрацией $F^0 \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $F^1 \mathbb{Z} = 0$, совпадает со всей категорией $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку подкатегория $\mathcal{D}'$ замкнута относительно взятия конусов, она содержит любой фильтрованный комплекс $\langle V_\bullet, F^\bullet \rangle$ с ограниченной фильтрацией $F^\bullet$ (т.е. $F^i V_\bullet = 0$, $F^j V_\bullet = V_\bullet$ для каких-то целых i, j). Пусть дан произвольный фильтрованный комплекс $\langle V_\bullet, F^\bullet \rangle$. Тогда естественные отображения

$$V_\bullet \longleftarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} F^{-i} V_\bullet \longrightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ j}} F^{-i} V_\bullet / F^j V_\bullet. \quad (5.1)$$

индуцируют изоморфизмы на gr^F , а следовательно, становятся изоморфизмами в $\mathcal{DF}^{\mathrm{per}}(\mathbb{Z})$. Поэтому $V_\bullet$ можно заменить на двойной предел в правой части (5.1). Прямой предел вычисляется конструкцией телескопа. Кроме того, для любого i обратная система $F^i V_\bullet / F^\bullet V_\bullet$ удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера, так что обратный предел также можно вычислять конструкцией телескопа. Поскольку подкатегория $\mathcal{D}'$ замкнута относительно сумм и произведений, она также замкнута относительно телескопов и потому содержит $V_\bullet$.

Отметим, что в силу (5.1) любой объект в $\mathcal{DF}^{\mathrm{per}}(\mathbb{Z})$ можно представить фильтрованным комплексом $\langle V_\bullet, F^\bullet \rangle$, *допустимым* в следующем смысле: оба естественных отображения

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} F^{-i} V_\bullet \rightarrow V_\bullet, \quad V_\bullet \rightarrow \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} V_\bullet / F^i V_\bullet$$

– изоморфизмы комплексов.

Рассматривая фильтрованные абелевы группы, удобно использовать объекты Риса. Рассмотрим алгебру $\mathbb{Z}[t]$ полиномов от одной переменной t . Будем говорить, что модуль M над $\mathbb{Z}[t]$ *t-адически полон*, если естественное отображение

$$M \rightarrow \lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} M/t^i M$$

– изоморфизм (тем самым, в нашей терминологии полнота предполагает делимость). Превратим $\mathbb{Z}[t]$ в градуированное кольцо, присвоив степень -1 образующей t .

ЛЕММА 5.8. *Фильтрованная производная категория $\mathcal{DF}(\mathbb{Z})$ эквивалентна полной подкатегории в производной категории абелевой категории $\mathbb{Z}$ -градуированных $\mathbb{Z}[t]$ -модулей $M_\bullet$, порожденной t -адически полными модулями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой фильтрованной абелевой группы $\langle M, F^\bullet \rangle$ соответствующий градуированный $\mathbb{Z}[t]$ -модуль $\widetilde{M}_\bullet$, называемый *объектом Риса* $M_\bullet$, задается в виде

$$\widetilde{M}_\bullet = \bigoplus_{\substack{\longrightarrow \\ i}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ j}} F^\bullet M / F^{*+i} M,$$

причем t индуцировано естественными вложениями $F^\bullet M \rightarrow F^{*+1} M$. Отметим, что $\widetilde{M}_\bullet$ автоматически t -адически полон, а фильтрованный квазиизоморфизм комплексов абелевых групп индуцирует квазиизоморфизм объектов Риса.

Чтобы получить обратное соответствие, отметим, что любой градуированный $\mathbb{Z}[t]$ -модуль $M_\bullet$ имеет конечную резольвенту модулями без t -кручения, так что достаточно рассматривать модули $M_\bullet$ с инъективным t . Такой модуль $M_\bullet$ переходит в

$$\widetilde{M} = \varinjlim_t M_\bullet,$$

причем $F^i \widetilde{M} \subset \widetilde{M}$ – образ естественного вложения $M_i \rightarrow \widetilde{M}$ для любого целого i . Лемма доказана.

Эквивалентность леммы 5.8 имеет очевидную периодическую версию: модель категории $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$ через объекты Риса получается обращением квази-изоморфизмов в категории пар $\langle \widetilde{M}_{\bullet,\bullet}, u \rangle$, состоящих из комплекса $\widetilde{M}_{\bullet,\bullet}$ градуированных t -адически полных $\mathbb{Z}[t]$ -модулей $M_\bullet$ и изоморфизма

$$\widetilde{u}: \widetilde{M}_{\bullet,\bullet} \cong \widetilde{M}_{\bullet+1,\bullet-2}. \quad (5.2)$$

5.3. Циклическая развертка и подразбиение. Пусть теперь $\text{Ab} = \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ – категория циклических абелевых групп. Пусть $I_0 = j_!^\circ \mathbb{Z}$, $I_1 = j_* \mathbb{Z}$, как в (1.23), и положим $d_1 = B: I_1 \rightarrow I_0$, $d_0 = b_0 \circ b_1: I_0 \rightarrow I_1$, где b_0 , b_1 и B такие же, как в (1.23). Тогда, поскольку последовательность (1.23) точна, имеем $d_1 \circ d_0 = 0 = d_0 \circ d_1$. Кроме того, если мы определим фильтрации $F^\bullet$ на I_0 и I_1 , положив $F^0 I_l = I_l$, $F^1 I_l = 0$, $l = 0, 1$, то и d_0 , и d_1 – фильтрованные отображения, и мы имеем периодический фильтрованный комплекс $I_\bullet$ объектов $\text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.9. Для любого объекта $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$, представленного периодическим комплексом $V_\bullet$ допустимых фильтрованных абелевых групп, *циклическая развертка* $\text{Exp}(V_\bullet)$ – это комплекс циклических абелевых групп

$$\text{Exp}(V_\bullet) = F^0(V_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[u]} I_\bullet),$$

где u – отображение периодичности на $V_\bullet$ и $I_\bullet$, а F^0 берется по отношению к произведению фильтратов.

В терминах соответствующего периодического комплекса $\widetilde{V}_{\bullet,\bullet}$ объектов Риса циклическая развертка выражается формулой

$$\text{Exp}(V_\bullet)_i = (\widetilde{V}_{0,\bullet} \otimes I_1)[1] \oplus (\widetilde{V}_{0,\bullet} \otimes I_0) \quad (5.3)$$

с дифференциалом $d = d_V \otimes \text{id} + d_I$, где d_V – дифференциал на $\widetilde{V}_{0,\bullet}$, а d_I равно $\text{id} \otimes d_1$ на первом слагаемом и $\widetilde{u} \otimes d_0$ на втором, где $\widetilde{u}: \widetilde{V}_{\bullet,\bullet} \cong \widetilde{V}_{\bullet+1,\bullet-2}$, как в (5.2). В частности, для любого объекта $[n] \in \Lambda$ комплекс $\text{Exp}(V_\bullet)([n])$ – сумма конечного числа копий комплекса $\widetilde{V}_{0,\bullet}$ и его сдвига $\widetilde{V}_{0,\bullet}[1]$, поэтому циклическая развертка коммутует с произвольными суммами и произведениями.

ЛЕММА 5.10. Циклическая развертка дает эквивалентность категорий

$$\text{Exp}: \mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{D}_c(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$$

между $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$ и полной подкатегорией $\mathcal{D}_c(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, порожденной объектами, локально постоянными в смысле определения П.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку последовательность (1.23) точна, то $F^1 I_\bullet = I_{<0}$ – резольвента постоянного функтора $\mathbb{Z} \in \text{Fun}(\Lambda, \mathbb{Z})$. По индукции из этого немедленно следует, что для любого периодического фильтрованного комплекса $V_\bullet$ гомологии $\mathcal{H}_\bullet(\text{Exp}(V_\bullet)) \in \text{Fun}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ комплекса функторов выражаются в виде

$$\mathcal{H}_i(\text{Exp}(V_\bullet)) \cong (F^0 V_i / F^1 V_i) \otimes \mathbb{Z}.$$

В частности, фильтрованный квазиизоморфизм периодических фильтрованных комплексов индуцирует квазиизоморфизм их циклических разверток, так что Exp индуцирует триангулированный функтор из категории $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$ в полную подкатегорию $\mathcal{D}_c(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$. Кроме того, для любого целого n имеем

$$\text{Exp}(\mathbb{Z}(n)) \cong \mathbb{Z}[2n].$$

Поскольку фундаментальная группа $\pi_1(|\Lambda|) \cong \pi_1(BU(1))$ тривиальна, каждый локально постоянный функтор $\Lambda^{\text{opp}} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$ постоянен, поэтому $\mathbb{Z}$ порождает триангулированную категорию $\mathcal{D}_c(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ в том же смысле, что и в лемме 5.7. Поскольку Exp коммутирует с произвольными суммами и произвольными произведениями, достаточно доказать, что Exp полный и строгий на объектах $\mathbb{Z}(n)$, иными словами, что естественное отображение

$$\text{Exp}: \text{RHom}_{\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})}^\bullet(\mathbb{Z}(n), \mathbb{Z}(m)) \rightarrow \text{RHom}_{\mathcal{D}(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z})}^\bullet(\mathbb{Z}[2n], \mathbb{Z}[2m])$$

является квазиизоморфизмом для любых целых чисел n, m . Это немедленно вытекает из изоморфизма $H^*(\Lambda^{\text{opp}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]$. Лемма доказана.

Пусть теперь $n \geq 1$ – целое число, и пусть $\delta^n: \mathbb{Z}[t] \rightarrow \mathbb{Z}[t]$ – отображение, переводящее t в nt . Поскольку идеал $(nt) \subset \mathbb{Z}[t]$ лежит внутри $(t) \subset \mathbb{Z}[t]$, прямой образ $\delta_*^n M$ t -адически полного $\mathbb{Z}[t]$ -модуля M автоматически t -адически полон.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11. Для любого положительного целого числа $n \geq 1$ и фильтрованной абелевой группы M с соответствующим допустимым объектом Риса $M_\bullet$, как в лемме 5.8, n -е подразбиение $\text{Div}_n(M)$ – это фильтрованная абелева группа, отвечающая градуированной абелевой группе $\delta_*^n M_\bullet$.

Иными словами, $M_\bullet$ не меняется как градуированная абелева группа, но отображение t заменяется на его кратное nt . Отметим, что сама фильтрованная абелева группа M при подразбиении может измениться; например, если $M = \mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, то

$$\text{Div}_n(M) \cong \mathbb{Q}$$

с фильтрацией $F^1 \mathbb{Q} = 0$, $F^i \mathbb{Q} = n^i \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ для $i \leq 0$.

Очевидно, Div_n дает эндифунктор категории фильтрованных абелевых групп для любого n , и он спускается до эндифунктора

$$\text{Div}_n: \mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$$

периодической производной категории $\mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$.

Зафиксируем целое число $n \geq 1$ и рассмотрим функторы $i_n, \pi_n: \Lambda_n \rightarrow \Lambda$ из п. 1.1.

ЛЕММА 5.12. *Для любого периодического комплекса $V_\bullet$ допустимых фильтрованных абелевых групп имеем функториальный изоморфизм*

$$\pi_{n*} i_n^* \text{Exp}(V_\bullet) \cong \text{Exp}(\text{Div}_n(V_\bullet)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I'_l = \pi_{n*} i_n^* I_l$, $d'_l = \pi_{n*} i_n^* d_l$, $l = 0, 1$. Применяя функтор $\pi_{n*} i_n^*$ к выражению (5.3), видим, что комплекс $\pi_{n*} i_n^* \text{Exp}(V_\bullet)$ задается следующим образом:

$$\pi_{n*} i_n^* \text{Exp}(V_\bullet)_i = (\tilde{V}_{0,\bullet} \otimes I_1)[1] \oplus (\tilde{V}_{0,\bullet} \otimes I_0)$$

с дифференциалом $d = d_V \otimes \text{id} + d_I$, где d_V – дифференциал на $\tilde{V}_{0,\bullet}$, а d_I равно $\text{id} \otimes d'_1$ на первом слагаемом и $t\tilde{u} \otimes d'_0$ на втором. В силу (1.25) имеем канонические изоморфизмы $I'_0 \cong I_0$, $I'_1 \cong I_1$, и при этих изоморфизмах $d'_1 = d_1$ и $d'_0 = nd_0$. Поэтому $t\tilde{u} \otimes d'_0 = nt\tilde{u} \otimes d_0$ и $\pi_{n*} i_n^* \text{Exp}(V_\bullet)$ в точности изоморфно выражению (5.3) для комплекса $\text{Exp}(\text{Div}_n(V_\bullet))$. Лемма доказана.

5.4. Стабилизация. Для любой фильтрованной абелевой группы M с допустимым объектом Риса $M_\bullet$ имеем тавтологическое отображение $M \rightarrow M(1)$; применяя функтор подразделения Div_n , получаем естественное отображение

$$\text{Div}_n(M) \rightarrow \text{Div}_n(M(1)). \quad (5.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.13. В ситуации определения 5.11 *стабилизированное n -е подразделение* $\text{Stab}_n(M)$ задается выражением

$$\text{Stab}_n(M) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ l}} \text{Div}_n(M(l)),$$

где предел берется по тавтологическим отображениям (5.4).

ЛЕММА 5.14. *Для любой фильтрованной абелевой группы M , допустимой в смысле п. 5.2, и любого простого $p \geq 2$ имеем*

$$\text{Stab}_p(M) \cong \widehat{M}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

с фильтрацией

$$F^l \widehat{M}_p = p^l \widehat{M}_p,$$

где $\widehat{M}_p = \varprojlim M/p^l M$ – про- p -полнение группы M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На уровне объектов Риса

$$M_\bullet = \varinjlim \text{Div}_p(M).$$

изоморфно M в каждой степени l , $M_l \cong M$, а $t \in \mathbb{Z}[t]$ действует умножением на p . Однако этот модуль не t -адически полный. Поэтому, если мы применим эквивалентность из леммы 5.8, получится

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ l}} M/t^l M_\bullet \cong \widehat{M}_p,$$

что и требовалось доказать.

Как следствие, получаем, что периодическая производная категория $\mathcal{FDM}^{\text{per}}$ обобщенных фильтрованных модулей Дьедонне из п. 5.1 эквивалентна категории фильтрованных периодических комплексов $V_{\bullet}$ абелевых групп, снабженных отображением

$$\varphi_p: V_{\bullet} \rightarrow \text{Stab}_p(V_{\bullet})$$

для любого простого $p \geq 2$.

Пусть теперь $I_{\bullet}$ – периодический комплекс функторов в $\text{Fun}(\Lambda, \mathbb{Z})$, введенный в п. 5.3, и пусть $P_{\bullet} \subset I_{\bullet}$ – его каноническое обрезание в нуле. В явном виде P_0 изоморфно $\mathbb{Z}$ – постоянному функтору, $P_0 = \mathbb{Z}$, и

$$P_{2l-1} = I^1, \quad P_{2l} = I^0$$

для всех $l \geq 1$. Комплекс $P_{\bullet}$ ацикличен. Более того, обратный образ $i^*P_{\bullet}$ по отношению к функтору $i: \Lambda_{\text{red}} \rightarrow \Lambda$ из п. 3.3 допустим в смысле леммы 3.10.

Пусть $\eta^+: \mathbb{Z} \rightarrow F^0 I_{\bullet}$, $\eta^-: \mathbb{Z} \cong P_0 \rightarrow P_{\bullet}$ – естественные вложения. Определим отображение

$$\eta: I_{\bullet} \rightarrow P_{\bullet} \otimes (F^0 I_{\bullet})$$

следующим образом:

$$\eta = \begin{cases} \eta^- \otimes \text{id} & \text{на } I_l, l \leq 0, \\ \text{id} \otimes \eta^+ & \text{на } I_l, l \geq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Пусть $F^l P_{\bullet}$, $l \geq 0$, – глупая фильтрация на комплексе $P_{\bullet}$. Тогда для любого $l \geq 0$ отображение η индуцирует отображение

$$\eta: F^{-l} I_{\bullet} \rightarrow F^0 I_{\bullet} \otimes F^{2l} P_{\bullet} \quad (5.6)$$

и это отображение – квазиизоморфизм (обе части квазиизоморфны $\mathbb{Z}[2l]$).

ЛЕММА 5.15. *Для любых $n \geq 1$, $l \geq 0$ и комплекса $V \in \text{Fun}(\Lambda_n^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ естественное отображение*

$$\eta: \pi_{n*}(V \otimes i_n^* F^{-l} I_{\bullet}) \rightarrow \pi_{n*}(V \otimes i_n^* F^0 I_{\bullet} \otimes i_n^* F^{2l} P_{\bullet}) \quad (5.7)$$

есть квазиизоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части отображения (5.7) – комплексы конечной длины в $\text{Fun}(\Lambda_n^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$, причем после вычисления на объекте $[m] \in \Lambda_n$ они дают комплексы свободных $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ -модулей. Поэтому π_{n*} можно заменить на его производный функтор $R^{\bullet} \pi_{n*}$. Теперь утверждение следует из того факта, что (5.6) – квазиизоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 5.16. *Для любого целого числа $n \geq 1$ и любого скрученного периодического комплекса $V_{\bullet}$ фильтрованных абелевых групп отображение η из (5.5) индуцирует квазиизоморфизм*

$$\text{Exp}(\text{Stab}_n(V_{\bullet})) \xrightarrow[\downarrow]{\sim} \lim_{\downarrow} \pi_{n*} i_n^*(\text{Exp}(V_{\bullet}) \otimes F^l P_{\bullet}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.12 и определению 5.13 имеем

$$\mathrm{Exp}(\mathrm{Stab}_n(V_\bullet)) \cong \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \downarrow}} \pi_{n*} i_n^* \mathrm{Exp}(V_\bullet(l))$$

и по определению циклической развертки получаем

$$\mathrm{Exp}(V_\bullet(l)) = F^0(V_\bullet \otimes F^{-l}I_\bullet)$$

для любого целого числа $l \geq 0$. Следствие доказано.

5.5. Сравнение. Рассмотрим категорию $\mathcal{D}(\Lambda R_h, i^*P_\bullet, k)$ из п. 3.3 с конкретным выбором комплекса $P_\bullet$, как в п. 5.4. Пусть $\tau: \Lambda R_h \cong \Lambda \times I \rightarrow \Lambda$ – тавтологическая проекция. Тогда для любого скрученного периодического комплекса $V_\bullet$ абелевых групп набор отображений $\varphi_p: V_\bullet \rightarrow \mathrm{Stab}_p(V_\bullet)$ для всех простых p индуцирует отображение

$$\eta \circ \tau^* \mathrm{Exp}(\varphi): \tau^* \mathrm{Exp}(V_\bullet) \rightarrow \pi_* i^* \tau^*(\mathrm{Exp}(V_\bullet) \otimes P_\bullet),$$

которое по сопряженности дает отображение

$$\tilde{\varphi}: \pi^* \tau^* \mathrm{Exp}(V_\bullet) \rightarrow i^*(\tau^* \mathrm{Exp}(V_\bullet) \otimes i^* P_\bullet).$$

Переводя $\langle V_\bullet, \{\varphi_p\} \rangle$ в $\langle \tau^* \mathrm{Exp}(V_\bullet), \tilde{\varphi} \rangle$, получаем функтор сравнения

$$\mathrm{Exp}: \mathcal{FDM}^{\mathrm{per}} \rightarrow \mathcal{D}_c(\Lambda R_h, P_\bullet, \mathbb{Z}). \quad (5.8)$$

По предложению 3.12 следующий результат немедленно влечет теорему 5.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.17. *Функтор Exp из (5.8) – эквивалентность категорий.*

Чтобы доказать этот результат, мы его обобщим. Рассмотрим скрученную периодическую производную категорию $\mathcal{DF}^{\mathrm{per}}(I^{\mathrm{opp}}, \mathbb{Z})$ функторов из I^{opp} в абелевы группы. Функтор циклической развертки дает функтор

$$\mathrm{Exp}: \mathcal{DF}^{\mathrm{per}}(I^{\mathrm{opp}}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}_w(\Lambda R_h^{\mathrm{opp}}, \mathbb{Z}), \quad (5.9)$$

где $\mathcal{D}_w(\Lambda R_h^{\mathrm{opp}}, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(\Lambda R_h^{\mathrm{opp}}, \mathbb{Z})$, как в предложении 3.13. Лемма 5.10 немедленно показывает, что функтор Exp – эквивалентность категорий. Более того, для любого $n \geq 1$ обозначим через $\nu_n: I \rightarrow I$ функтор, заданный умножением на n , как в (2.20), и для любого скрученного периодического фильтрованного комплекса $M \in \mathcal{DF}^{\mathrm{per}}(I^{\mathrm{opp}}, \mathbb{Z})$ положим

$$\widetilde{\mathrm{Stab}}_n(M) = \nu_n^* \mathrm{Stab}_n(M).$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{FDM}}^{\mathrm{per}}$ – производная категория таких комплексов M , снабженных набором отображений

$$\varphi_p: M \rightarrow \widetilde{\mathrm{Stab}}_p(M)$$

для всех простых p . Обозначим через $\widetilde{h}^*: \widetilde{\mathcal{FDM}}^{\text{per}} \rightarrow \mathcal{DF}^{\text{per}}(I^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ функтор забывания. Он имеет очевидный правый сопряженный $\widetilde{h}_*$, заданный выражением

$$\widetilde{h}_*(M)(n) = M \oplus \prod_{p|n} \text{Stab}_p(M), \quad (5.10)$$

где произведение берется по всем простым делителям целого числа $n \in I$. Более того, конструкция функтора Exp из (5.8) также дает функтор

$$\widetilde{\text{Exp}}: \widetilde{\mathcal{FDM}}^{\text{per}} \rightarrow \mathcal{D}_w(\Lambda R_h, i^* P_*, \mathbb{Z}), \quad (5.11)$$

и по построению имеем

$$\widetilde{h}^* \circ \widetilde{\text{Exp}} \cong \text{Exp} \circ \widetilde{h}^*, \quad (5.12)$$

где $\widetilde{h}^*$ в левой части – функтор ограничения из предложения 3.13.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.18. *Функтор (5.11) – эквивалентность категорий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в доказательстве предложения 2.12, предложение 3.13, (ii), показывает, что функтор $\widetilde{\text{Exp}}$ имеет правый сопряженный функтор

$$K: \mathcal{D}_w(\Lambda R_h, i^* P_*, \mathbb{Z}) \rightarrow \widetilde{\mathcal{FDM}}^{\text{per}}.$$

Более того, в силу (5.10), следствия 5.16 и леммы 3.14 отображение замены базы

$$\widetilde{\text{Exp}} \circ \widetilde{h}_* \rightarrow \widetilde{h}_* \circ \text{Exp},$$

индуцированное (5.12), является изоморфизмом. Поэтому по сопряженности имеем

$$\widetilde{h}^* \circ K \cong \text{Exp}^{-1} \circ \widehat{t}^*,$$

где Exp^{-1} – эквивалентность, обратная к (5.9). Заключаем, что

$$\widetilde{h}^* \circ K \circ \widetilde{\text{Exp}} \cong \text{Exp}^{-1} \circ \text{Exp} \circ \widetilde{h}^*, \quad \widetilde{h}^* \circ \widetilde{\text{Exp}} \circ K \cong \text{Exp}^{-1} \circ \text{Exp} \circ \widetilde{h}^*.$$

Как в доказательстве предложения 2.12, функтор $\widetilde{h}^*$ консервативен, так что Exp и Exp^{-1} – взаимно обратные эквивалентности категорий. Поэтому таковы и функторы $\widetilde{\text{Exp}}$, K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.17. Тавтологическая проекция $\tau: I \rightarrow \text{pt}$ индуцирует функтор

$$\tau^*: \mathcal{DF}^{\text{per}}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{DF}^{\text{per}}(I^{\text{opp}}, \mathbb{Z}).$$

Это полное вложение на полную подкатегорию, порожденную локально постоянными функторами; сопряженный функтор задается в виде

$$\tau_* = R^* \lim_{I^{\text{opp}}}.$$

По лемме 5.14 взятие стабилизированного подразделения коммутирует с произвольными произведениями, так что $\tau_* \circ \text{Stab}_p \cong \text{Stab}_p \circ \tau_*$. Поэтому τ^* и τ_*

продолжаются до пары сопряженных функторов между $\mathcal{FDM}^{\text{per}}$ и $\widetilde{\mathcal{FDM}}^{\text{per}}$ и, тем самым, $\mathcal{FDM}^{\text{per}}$ отождествляется с полной подкатегорией в категории $\widetilde{\mathcal{FDM}}^{\text{per}}$, порожденной объектами M с локально постоянным $\tilde{h}^*M$. В силу (5.12) эквивалентность предложения 5.18 отождествляет эту подкатегорию с $\mathcal{DLR}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{D}_c(\Lambda R_h, i^*P_\bullet, \mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}_w(\Lambda R_h, i^*P_\bullet, \mathbb{Z})$.

§ 6. Топологические циклические гомологии

Завершим статью коротким обсуждением топологических циклических гомологий (мы снова следуем [6]).

Зафиксируем G -универсум U , как в п. 4.4, и напомним, что для любого $m \geq 1$ мы имеем канонические эндифункторы $\hat{\Psi}^m, \hat{\Phi}^m$ категории $G\text{-Sp} = G\text{-Sp}(U)$. Имеем также естественные отображения $\text{can}: \hat{\Psi}^m \rightarrow \hat{\Phi}^m$. Для любого $T \in G\text{-Sp}$ и пары целых чисел $r, s > 1$ существует каноническое неэквивариантное отображение

$$F_{r,s}: T^{C_{rs}} \rightarrow T^{C_r}.$$

С другой стороны, предположим, что T снабжен циклотомической структурой. Тогда имеется естественное отображение

$$R_{r,s}: T^{C_{rs}} \cong (\hat{\Psi}^s(T))^{C_r} \xrightarrow{\text{can}} (\hat{\Phi}^s(T))^{C_r} \xrightarrow{r_s} T^{C_r},$$

где r_s приходит из циклотомической структуры на T . Отображения $F_{r,s}$ и $R_{r,s}$ вместе задают функтор $I(T)$ из категории $\mathbb{I}^{\text{opp}}$ (см. п. 1.3) в категорию неэквивариантных спектров: мы полагаем $I(T)(n) = T^{C_n}$ для любого $n \in \mathbb{I}$, а морфизмы $F_r, R_r: s \rightarrow rs$ действуют отображениями $F_{r,s}, R_{r,s}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. *Топологические циклические гомологии* $\text{TC}(T)$ циклотомического спектра T – это неэквивариантный спектр:

$$\text{TC}(T) = \text{holim}_{\mathbb{I}^{\text{opp}}} I(T).$$

Пусть $M \in \mathcal{DLR}(\mathbb{Z})$ – циклотомический комплекс, и рассмотрим функтор $\tilde{\alpha}: \mathbb{I} \rightarrow \widetilde{\Lambda R}$ из (1.16).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. *Топологические циклические гомологии* $\text{TC}_\bullet(M)$ циклотомического комплекса $M \in \mathcal{DLR}(\mathbb{Z})$ равны $H^\bullet(\mathbb{I}^{\text{opp}}, \tilde{\alpha}^* \xi_* M)$, где

$$\xi_*: \mathcal{DLR}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{D}_c(\widetilde{\Lambda R}, \tilde{\lambda}^* T_\bullet, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{D}_c(\widetilde{\Lambda R}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$$

– правый сопряженный к функтору коограничения.

В частности, пусть дан G -спектр T , и рассмотрим его эквивариантный цепной комплекс $C_\bullet(T) \in \mathcal{DML}(\mathbb{Z})$, определенный в п. 4.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Для любого циклотомического спектра T имеется естественный изоморфизм*

$$\text{TC}_\bullet(C_\bullet(T)) \cong H_\bullet(\text{TC}(T), \mathbb{Z}),$$

где $H_\bullet(-, \mathbb{Z})$ обозначает гомологии неэквивариантного спектра с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.12 имеем

$$\tilde{\alpha}^* \xi_* C_\bullet(T)(m) \cong C_\bullet(T^{C_m})$$

для любого $m \in \mathbb{I}$, так что $\tilde{\alpha}^* \xi_* C_\bullet(T) \in \mathcal{D}(\mathbb{I}^{\text{opp}}, \mathbb{Z})$ изоморфно $C_\bullet(I(T), \mathbb{Z})$ – неэквивариантному цепному гомологическому комплексу системы спектров $I(T)$, использованной в определении 6.1.

С точки зрения эквивалентности, доказанной в теореме 5.4, было бы желательно выразить функтор топологических циклических гомологий $\text{TC}_\bullet$ определения 6.2 в терминах фильтрованных модулей Дьедонне. Естественное понятие гомологий для фильтрованных модулей Дьедонне дается следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. *Синтомические когомологии* обобщенного фильтрованного модуля Дьедонне $M \in \mathcal{FDM}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$ равны $\text{RHom}^\bullet(\mathbb{Z}, M)$, где $\mathbb{Z} \in \mathcal{FDM}^{\text{per}}$ является тривиальным фильтрованным модулем Дьедонне.

Вообще говоря, синтомические когомологии и топологические циклические гомологии различаются. Тем не менее, мы имеем следующий сравнивающий их результат.

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть $M \in \mathcal{DLR}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{FDM}^{\text{per}}(\mathbb{Z})$ проконечно полон. Тогда существует естественный изоморфизм*

$$\text{TC}_\bullet(M) \cong \text{RHom}^\bullet(\mathbb{Z}, M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В терминах циклотомических комплексов тривиальный модуль Дьедонне $\mathbb{Z}$ отвечает коограничению $\tilde{\xi}^* \mathbb{Z}$ постоянного функтора $\mathbb{Z} \in \text{Fun}(\widetilde{\Lambda R^{\text{opp}}}, \mathbb{Z})$. По сопряженности имеем

$$\text{RHom}^\bullet(\mathbb{Z}, M) \cong H^\bullet(\widetilde{\Lambda R^{\text{opp}}}, \xi_* M).$$

Поэтому достаточно доказать, что для любого проконечно полного $M \in \mathcal{D}(\widetilde{\Lambda R^{\text{opp}}}, \mathbb{Z})$ естественное отображение

$$H^\bullet(\mathbb{I}^{\text{opp}}, \tilde{\alpha}^* M) \rightarrow H^\bullet(\widetilde{\Lambda R^{\text{opp}}}, M)$$

является изоморфизмом. Эквивалентным образом, надо доказать, что отображение

$$H^\bullet([1/\mathbb{N}^*], \tilde{\lambda}_* \tilde{\alpha}^* M) \rightarrow H^\bullet(\Lambda R^{\text{opp}}, \tilde{\lambda}_* M)$$

– изоморфизм. По замене базы имеем $\tilde{\lambda}_* \tilde{\alpha}^* \cong \alpha^* \tilde{\lambda}_*$, а поскольку правые расширения Кана коммутируют с проконечным пополнением, можно применить предложение 1.13 и заменить ΛR на ΔR . Однако мы знаем, что $\tilde{j}^* \tilde{\lambda}_* M$ локально постоянно после ограничения на $\Delta \subset \Delta R$, и утверждаем, что для любого $M' \in \mathcal{D}(\Delta R, \mathbb{Z})$ с локально постоянным $h^* M' \in \mathcal{D}(\Delta, k)$ отображение

$$H^\bullet([1/\mathbb{N}^*], \alpha^* M') \rightarrow H^\bullet(\Delta R, M')$$

является изоморфизмом. В самом деле, по лемме 1.6 прямой образ $\delta_!$ можно вычислять послойно, а поскольку h^*M' локально постоянно, отображение сопряжения

$$\delta^*\delta_!M' \rightarrow M'$$

– изоморфизм. Тогда

$$H^\bullet(\Delta R, M') \cong H^\bullet(\Delta R, \delta^*\delta_!M') \cong H^\bullet([1/\mathbb{N}^*], \delta_!M'),$$

и поскольку $\delta \circ \alpha = \text{id}$, правая часть в точности равна $H^\bullet([1/\mathbb{N}^*], \alpha^*M')$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что для того, чтобы получить аналогичную теорему сравнения для произвольного циклотомического спектра T , надо изменить определение топологических циклических гомологий $\text{ТС}(T)$, заменив в системе $I(T)$ спектры неподвижных точек T^{C_m} на их гомотопические неподвижные точки $(T^{C_m})^{hG}$ по отношению к остаточному действию группы $G = U(1)$ (результат этой операции должен быть связан с обычным ТС точным треугольником, аналогичным (1.27)). Я не знаю, насколько это осмысленно с точки зрения топологии. Выражаю благодарность Л. Хесселхолту, который объяснил, почему в проконечно полном случае этого можно не делать.

§ 7. Приложение

Здесь собраны некоторые факты, которые мы использовали в статье; большинство из них хорошо известны, но наша терминология может оказаться нестандартной.

Сначала немного abstract nonsense. Пусть дан квадрат категорий и функторов

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{b} & B \\ a \downarrow & & \downarrow c \\ C & \xrightarrow{d} & D \end{array}$$

Предположим, что a и c допускают левые сопряженные $a_!$, $c_!$. Тогда изоморфизм $d \circ a \cong c \circ b$ индуцирует по сопряженности отображение

$$c_! \circ b \rightarrow a_! \circ a.$$

Мы называем это отображение и разнообразные сопряженные к нему *отображением замены базы*, индуцированным изоморфизмом $d \circ a \cong c \circ b$.

Для любой категории $\mathcal{C}$ с объектами $c, c' \in \mathcal{C}$ мы обозначаем через $\mathcal{C}(c, c')$ множество морфизмов из c в c' и через $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ – противоположную категорию, $\mathcal{C}^{\text{opp}}(c, c') = \mathcal{C}(c', c)$. Для любой малой категории $\mathcal{C}$ и категории A мы обозначаем через $\text{Fun}(\mathcal{C}, A)$ категорию функторов из $\mathcal{C}$ в A . Для любого функтора $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $f^*: \text{Fun}(\mathcal{C}', A) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, A)$ означает обратный образ вдоль f , а $f_!$, f_* – левое и правое расширения Кана (когда они существуют). Если

A абелева, мы обозначаем через $\mathcal{D}(\mathcal{C}, A)$ производную категорию категории $\text{Fun}(\mathcal{C}, A)$ и используем те же обозначения $f_!$ и f_* для производных функторов от расширений Кана. Если $A = k\text{-mod}$ – категория модулей над кольцом k , мы сокращаем $\text{Fun}(\mathcal{C}, k\text{-mod})$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}, k\text{-mod})$ до $\text{Fun}(\mathcal{C}, k)$, $\mathcal{D}(\mathcal{C}, k)$. Гомологии $H_*(\mathcal{C}, k)$ и когомологии $H^*(\mathcal{C}, k)$ малой категории $\mathcal{C}$ по определению даются производными расширениями Кана по отношению к проекции $\mathcal{C} \rightarrow \text{pt}$. Как обычно, $H^*(\mathcal{C}, k)$ – алгебра, а $H_*(\mathcal{C}, k)$ – модуль над $H^*(\mathcal{C}, k)$. Гомологии можно вычислять с помощью явного *бар-комплекса* $C_*(\mathcal{C}, k)$.

Мы также вводим следующее несколько нестандартное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П.1. Пусть $\mathcal{C}$ – малая категория. Объект $E_* \in \mathcal{D}(\mathcal{C}, k)$ *локально постоянен*, если для любого морфизма $f: a \rightarrow b$ в $\mathcal{C}$ отображение $E_*(f): E_*(a) \rightarrow E_*(b)$ – квазиизоморфизм.

Мы свободно пользуемся понятиями из [14]: декартово отображение, расслоение, корасслоение, бирасслоение и т.д.; краткий обзор с обозначениями такими, как в настоящей статье, можно найти в [2, § 1]. Мы также свободно пользуемся изоморфизмом замены базы и формулой проекции [2, лемма 1.7] и используем следующее понятие из [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П.2. *Факторизационная пара* (factorization system) на категории $\mathcal{C}$ задается такими двумя подкатегориями $\mathcal{C}_v, \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}$, что все объекты и все изоморфизмы $\mathcal{C}$ лежат и в $\mathcal{C}_v$, и в $\mathcal{C}_h$, любой морфизм f в $\mathcal{C}$ разлагается в композицию: $f = v \circ h$, $v \in \mathcal{C}_v$, $h \in \mathcal{C}_h$, и такое разложение единственно с точностью до единственного изоморфизма.

ПРИМЕР П.3. Если $\gamma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ – расслоение, то послойные и декартовы морфизмы задают факторизационную пару на $\mathcal{C}$.

Факторизационные пары – это на самом деле очень полезное техническое средство, хотя по традиции (которой мы следуем) его прячут в приложения и введения. Определение П.2 имеет несколько следствий и/или эквивалентных переформулировок. Например, можно показать, что $\mathcal{C}_v \cap \mathcal{C}_h$ состоит в точности из изоморфизмов $\mathcal{C}$; кроме того, морфизмы $\mathcal{C}_v$ удовлетворяют условию единственного подъема по отношению к морфизмам $\mathcal{C}_h$, и наоборот (см. [15]). Нам понадобится один результат, которого в [15] нет. Пусть категория $\mathcal{C}$ малая, и пусть $\bar{\mathcal{C}}$ – категория всех объектов $\mathcal{C}$ и всех изоморфизмов между ними, так что имеем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\bar{v}} & \mathcal{C}_h \\ \bar{h} \downarrow & & \downarrow h \\ \mathcal{C}_v & \xrightarrow{v} & \mathcal{C} \end{array}$$

где $v, h, \bar{v}, \bar{h}$ – функторы вложения. Тогда изоморфизм $\bar{v}^* \circ h^* \cong \bar{h}^* \circ v^*$ индуцирует отображение замены базы

$$\bar{h}_! \circ \bar{v}^* \rightarrow v^* \circ h_! \quad (\text{П.1})$$

функторов из $\mathcal{D}(\mathcal{C}_h, k)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{C}_v, k)$.

ЛЕММА П.4. *Отображение замены базы (П.1) – изоморфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку категория $\mathcal{D}(\mathcal{C}_h, k)$ порождена представимыми функторами вида

$$k_c(c') = k[\mathcal{C}_h(c, c')], \quad c, c' \in \mathcal{C}_h,$$

достаточно доказать, что (П.1) дает изоморфизм после применения к какому-либо такому функтору $k_c \in \text{Fun}(\mathcal{C}_h, k)$, $c \in \mathcal{C}_h$. В самом деле, $h_!$ переводит представимые функторы в представимые, так что имеем

$$v^* h_! k_c(c') = h_! k_c(c') = k[\mathcal{C}(c, c')] \quad (\text{П.2})$$

для любого $c' \in \mathcal{C}$. Однако по определению факторизационной пары имеем естественный изоморфизм

$$\mathcal{C}(c, c') = \coprod_{c'' \in \mathcal{C}} (\mathcal{C}_h(c, c'') \times \mathcal{C}_v(c'', c')) / \text{Aut}(c''), \quad (\text{П.3})$$

причем действия групп $\text{Aut}(c'')$ свободны. Поэтому (П.2) изоморфно

$$\bar{h}_! \left(\bigoplus_{c'' \in \bar{\mathcal{C}}} k[\mathcal{C}_h(c, c'')] \right),$$

а выражение в скобках в точности равно $\bar{v}^* k_c$. Лемма доказана.

Мы также используем технику A_∞ -алгебр; короткое введение в нужные нам разделы этой техники содержится в [1, п. 1.5]. Здесь мы просто напомним, что A_∞ -алгебра – это алгебра над некоторой асимметрической операдой Ass_∞ комплексов абелевых групп, являющейся кофибранным разрешением ассоциативной асимметрической операды Ass . A_∞ -коалгебра – это A_∞ -алгебра в противоположной категории. Поскольку операды асимметрические, алгебры над ними можно определять в любой тензорной категории. В частности, для любого множества S можно рассмотреть категорию абелевых групп, градуированных $S \times S$, с тензорным произведением

$$(V \otimes V')_{s, s'} = \bigoplus_{s'' \in S} V_{s, s''} \otimes V'_{s'', s'}.$$

A_∞ -алгебра в этой категории – это малая A_∞ -категория с множеством объектов S . В большей общности, если дана малая категория $\mathcal{C}$ с множеством объектов $\mathcal{C}_0$ и множеством морфизмов $\mathcal{C}_1$, можно рассмотреть категорию $\mathcal{C}_1$ -градуированных абелевых групп с тензорным произведением

$$(V \otimes V')_f = \bigoplus_{f=f' \circ f''} V_{f'} \otimes V_{f''}.$$

$\mathcal{C}$ -градуированная A_∞ -коалгебра – это A_∞ -коалгебра в этой категории.

Производную категорию $\mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet, \text{Ab})$ A_∞ -функторов из малой A_∞ -категории $\mathcal{B}_\bullet$ в категорию комплексов объектов абелевой категории Ab строят, рассматривая DG-категорию всех таких функторов и A_∞ -отображений между

ними и обращая квазиизоморфизмы. Процедура обращения не представляет проблем, поскольку DG-категория ведет себя хорошо (по крайней мере, если Ab достаточно велика, например $\text{Ab} = k\text{-mod}$ для какого-нибудь кольца k). Каждый объект имеет h -проективную и h -инъективную замену. Для любого A_∞ -морфизма $f: \mathcal{B}_\bullet \rightarrow \mathcal{B}'_\bullet$ мы имеем функтор обратного образа $f^*: \mathcal{D}(\mathcal{B}'_\bullet, \text{Ab}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet, \text{Ab})$, и он допускает левый и правый сопряженные функторы

$$f_*, f_!: \mathcal{D}(\mathcal{B}_\bullet, \text{Ab}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B}'_\bullet, \text{Ab}).$$

Если дана $\mathcal{C}$ -градуированная A_∞ -коалгебра $\mathcal{R}_\bullet$, можно рассмотреть DG-категорию $\mathcal{C}$ -градуированных k -значных A_∞ -комодулей над $\mathcal{R}_\bullet$. В ней по-прежнему можно обратить квазиизоморфизмы и получить триангулированную производную категорию $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{R}_\bullet, k)$. Для любого A_∞ -отображения $f: \mathcal{R}_\bullet \rightarrow \mathcal{R}'_\bullet$ мы имеем функтор коограничения

$$f^*: \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{R}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{R}'_\bullet, k).$$

Для любого функтора $f: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ обратный образ дает $\mathcal{C}'$ -градуированную A_∞ -коалгебру $f^*\mathcal{R}_\bullet$ и функтор обратного образа

$$f^*: \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{R}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}', f^*\mathcal{R}_\bullet, k).$$

Однако h -проективных замен обычно вообще нет, а для построения h -инъективных никакой общей процедуры не существует. Поэтому существование сопряженных функторов не автоматически. Один случай, в котором сопряженный существует, это случай функтора вложения $i: \text{pt} \rightarrow \mathcal{C}$ точечной категории на объект $c \in \mathcal{C}$. В этом случае сопряженный к функтору обратного образа $i^*: \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(k)$ дается функтором косвободного A_∞ -комодуля, переводящим $M \in \mathcal{D}(k)$ в A_∞ -комодуль M_c , имеющий вид

$$M_c(c') \cong M \otimes \bigoplus_{f: c' \rightarrow c} \mathcal{T}_\bullet(f).$$

Другим случаем, когда все просто, является случай *тривиальной $\mathcal{C}$ -градуированной A_∞ -коалгебры* $\mathcal{R}_\bullet$, заданной как $\mathcal{R}_0(f) = \mathbb{Z}$ для любого $f \in \mathcal{C}_1$, и $R_i = 0$ при $i \neq 0$.

ЛЕММА П.5. Пусть дана малая категория $\mathcal{C}$, и пусть $\mathcal{R}$ – тривиальная $\mathcal{C}$ -градуированная A_∞ -коалгебра. Тогда любой h -проективный комплекс функторов из $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ в $k\text{-mod}$ h -проективен как A_∞ -комодуль над $\mathcal{R}$, а естественное вложение

$$\mathcal{D}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{R}, k)$$

– эквивалентность категорий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}_\bullet(c, c') = \mathbb{Z}[\mathcal{C}(c, c')]$ – свободная аддитивная категория, порожденная $\mathcal{C}$, рассмотрим ее как A_∞ -категорию. Тогда по определению A_∞ -комодуль над тривиальной A_∞ -коалгеброй $\mathcal{R}$ – это то же самое, что A_∞ -функтор из $\mathcal{B}_\bullet^{\text{opp}}$ в комплексы k -модулей. Поэтому утверждение достаточно проверить для A_∞ -категорий, а для них оно хорошо известно.

ЛЕММА П.6. Пусть даны малая категория $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ -градуированная A_∞ -коалгебра $\mathcal{T}_\bullet$ и такой функтор $\rho: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ из малой категории $\mathcal{C}'$, что $\rho^*\mathcal{T}_\bullet$ изоморфно тривиальной $\mathcal{C}'$ -градуированной A_∞ -коалгебре. Тогда функтор обратного образа $\rho^*: \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_\bullet, k) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}', k)$ допускает правый сопряженный функтор

$$\rho_*: \mathcal{D}(\mathcal{C}', k) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_\bullet, k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению надо доказать, что для любого объекта $M \in \mathcal{D}(\mathcal{C}', k)$ функтор

$$N \mapsto \text{Hom}(\rho^*N, M) \quad (\text{П.4})$$

из $\mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_\bullet, k)$ в категорию k -модулей представим. В силу кобар-конструкции каждый объект $M \in \mathcal{D}(\mathcal{C}', k)$ есть конус эндоморфизма объекта $M' \in \mathcal{D}(\mathcal{C}', k)$ вида

$$M' = \prod M_i,$$

где каждый $M_i = M'_a$ – копредставимый функтор из $\mathcal{C}'$ в $k\text{-mod}$, отвечающий какому-либо объекту $a \in \mathcal{C}'$ и модулю $M' \in k\text{-mod}$. Поэтому достаточно доказать, что (П.4) представим для $M = M'_a$. Представляющий объект дается косвободным A_∞ -комодулем $M'_{\rho(a)} \in \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{T}_\bullet, k)$.

ЛЕММА П.7. Пусть малая категория $\mathcal{C}$ снабжена факторизационной парой, как в лемме П.4. Более того, пусть дана такая $\mathcal{C}$ -градуированная A_∞ -коалгебра $\mathcal{T}_\bullet$, что $h^*\mathcal{T}_\bullet$ – тривиальная $\mathcal{C}_h$ -градуированная A_∞ -коалгебра, как в лемме П.6. Тогда отображение замены базы

$$v^* \circ h_* \rightarrow \bar{h}_* \circ \bar{v}^*$$

функторов из $\mathcal{D}(\mathcal{C}_h^{\text{opp}}, k)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{C}_v, v^*\mathcal{T}_\bullet, k)$, индуцированное очевидным изоморфизмом $\bar{v}^* \circ h^* \cong \bar{h}^* \circ v^*$, является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО то же, что и в лемме П.4, а сопряженные функторы строятся по лемме П.6.

В принципе, все рассматриваемые нами категории A_∞ -комодулей должны бы быть симметрическими тензорными категориями. Однако для того, чтобы построить тензорное произведение, надо снабдить A_∞ -коалгебры какой-либо версией структуры алгебры Хопфа, а это технически слишком тяжеловесно. Поэтому, вообще говоря, мы не рассматриваем тензорные произведения. Один простой частный случай нам все же нужен. Будем говорить, что $\mathcal{C}$ -градуированная A_∞ -коалгебра $\mathcal{R}_\bullet$ аугментирована, если $\mathcal{R}_i = 0$ при $i < 0$, а $\mathcal{R}_0(f) = \mathbb{Z}$ для любого морфизма f в $\mathcal{C}$. В таком случае имеем очевидное отображение аугментации $\xi: \mathbb{Z}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{R}_\bullet$ и соответствующий функтор коограничения

$$\xi^*: \mathcal{D}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, k) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}, \mathcal{R}_\bullet, k).$$

Однако имеет место большее: для любого комплекса $M_\bullet$ в $\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{opp}}, k)$ и любого A_∞ -комодуля $E_\bullet$ над $\mathcal{R}_\bullet$ мы определяем тензорное произведение $E_\bullet \otimes \xi^*M_\bullet$, полагая

$$(E_\bullet \otimes \xi^*M_\bullet)(c) = E_\bullet(c) \otimes M_\bullet(c), \quad c \in \mathcal{C},$$

причем A_∞ -операции суть произведения A_∞ -операций в $E_\bullet$ и структурных отображений функтора $M_\bullet$. Эта конструкция очевидным образом ассоциативна по отношению к $M_\bullet$.

Наконец, заметим, что для построения A_∞ -категорий и A_∞ -коалгебр мы используем разные категорные конструкции, ассоциативные “с точностью до изоморфизма”. Приведем прототип этой конструкции (подробности см. в [1, п. 1.6]). Пусть дана малая моноидальная категория $\mathcal{C}$, причем изоморфизм ассоциативности удовлетворяет обычной аксиоме пятиугольника. Тогда по сути $\mathcal{C}$ является алгеброй над следующей асимметрической операдой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П.8. *Операда моноидальных категорий I_n* – это операда группоидов, заданная следующим образом:

- (i) на уровне объектов I_n – свободная операда, порожденная единственной бинарной операцией;
- (ii) при этом между любыми двумя объектами группоида I_n существует ровно один морфизм.

Бар-комплекс $C_\bullet(\mathcal{C}, k)$ тогда автоматически будет алгеброй над операдой $C_\bullet(I_\bullet, \mathbb{Z})$. Однако операда $C_\bullet(I_\bullet, \mathbb{Z})$ – резольвента ассоциативной операды Ass , а A_∞ -операда Ass_∞ – другая ее резольвента, причем кофибрантная. Поэтому отображение аугментации $\text{Ass}_\infty \rightarrow \text{Ass}$ пропускается через отображение $\text{Ass} \rightarrow C_\bullet(I_\bullet, \mathbb{Z})$. Зафиксировав такое разложение, мы превращаем бар-комплекс $C_\bullet(\mathcal{C}, k)$ в A_∞ -алгебру над k .

Список литературы

1. D. Kaledin, “Derived Mackey functors”, *Mosc. Math. J.*, **11**:4 (2011), 723–803.
2. D. Kaledin, “Non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration via the method of Deligne–Illusie”, *Pure Appl. Math. Q.*, **4**:3 (2008), 785–875.
3. M. Bökstedt, W. C. Hsiang, I. Madsen, “The cyclotomic trace and algebraic K -theory of spaces”, *Invent. Math.*, **111**:1 (1993), 465–539.
4. L. G. Lewis, J. P. May, M. Steinberger, *Equivariant stable homotopy theor*, Lecture Notes in Math., **1213**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
5. M. Bökstedt, I. Madsen, “Topological cyclic homology of the integers”, *K-theory* (Strasbourg, 1992), Astérisque, **226**, Soc. Math. de France, Paris, 1994, 57–143.
6. L. Hesselholt, I. Madsen, “On the K -theory of finite algebras over Witt vectors of perfect fields”, *Topology*, **36**:1 (1997), 29–101.
7. J.-M. Fontaine, G. Lafaille, “Construction de représentations p -adiques”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **15**:4 (1982), 547–608.
8. D. Kaledin, “Motivic structures in non-commutative geometry”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. II, Hindustani Book Agency, New Delhi, 2010, 461–496.
9. J.-M. Fontaine, W. Messing, “ p -adic periods and p -adic étale cohomology”, *Current trends in arithmetical algebraic geometry* (Arcata, CA, 1985), Contemp. Math., **67**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 179–207.
10. J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren Math. Wiss., **301**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

11. B. Feigin, B. L. Tsygan, “Additive K -theory”, *K-theory, arithmetic and geometry* (Moscow, 1984–1986), Lecture Notes in Math., **1289**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 67–209.
12. T. G. Goodwillie, “Relative algebraic K -theory and cyclic homology”, *Ann. of Math.* (2), **124**:2 (1986), 347–402.
13. V. Drinfeld, “On the notion of geometric realization”, *Mosc. Math. J.*, **4**:3 (2004), 619–626.
14. A. Grothendieck, “Exposé VI: Catégories fibré et descente”, *SGA I: Revêtements étales et groupe fondamental*, Lect. Notes in Math., **224**, Springer, Berlin, 145–194.
15. A. K. Bousfield, “Constructions of factorization systems in categories”, *J. Pure Appl. Algebra*, **9**:2–3 (1976–77), 207–220.

Д. Б. КАЛЕДИН

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Лаборатория алгебраической геометрии НИУ ВШЭ
E-mail: kaledin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

14.06.2012