Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, Локальные теоремы
о двух радиусах на многомерной сфере, *Изв. РАН. Сер.
матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:13:19

УДК 517.988.28

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Локальные теоремы о двух радиусах на многомерной сфере

Изучаются функции на n -мерной сфере, имеющие нулевые интегралы по всем геодезическим шарам с центрами на заданном множестве E . Получено описание таких функций в случае, когда E является геодезической сферой на $\mathbb{S}^n$. Найден критерий существования ненулевых функций с указанным условием в случае, когда множество центров является объединением двух геодезических сфер. Получены аналоги этих результатов для квазианалитических классов функций.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: теоремы о двух радиусах, функции Лежандра, сферические гармоники, квазианалитические классы.

DOI: 10.4213/im8010

§ 1. Введение

Функции с нулевыми шаровыми или сферическими средними на сфере изучались многими авторами, начиная с Г. Минковского, П. Функа и И. Радона. В § 6 своей знаменитой работы [1] Радон рассмотрел и по существу решил задачу об описании функций на двумерной сфере с нулевыми интегралами по всем окружностям фиксированного радиуса. Этот результат получил дальнейшее развитие и уточнение в работах П. Унгара, Р. Шнейдера, К. А. Беренстейна, Л. Зальцмана и других (см. [2]–[8]). В частности, была доказана следующая так называемая “freak theorem” (см. [2], [4]).

ТЕОРЕМА А. Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, $f \in L^1(\mathbb{S}^n)$ и

$$\int_B f d\omega_n = 0, \quad (1)$$

где B – произвольный геодезический шар фиксированного радиуса r на $\mathbb{S}^n$ и $d\omega_n$ – поверхностная мера, индуцируемая мерой Лебега в $\mathbb{R}^{n+1}$. Если $P_{m+\frac{n}{2}-1}^{-\frac{n}{2}}(\cos r) \neq 0$ при $m = 1, 2, \dots$, где $P_{m+\frac{n}{2}-1}^{-\frac{n}{2}}$ – функция Лежандра первого рода на $(-1, 1)$, то $f = 0$.

Более общо, если (1) выполнено для всех геодезических шаров с радиусами $r_1, r_2, \dots, r_s$ и уравнения

$$P_{m+\frac{n}{2}-1}^{-\frac{n}{2}}(\cos r_j) = 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad (2)$$

не имеют общего решения $m \in \mathbb{N}$, то $f = 0$. Если же уравнения (2) имеют общее решение, то подходящая сферическая гармоника удовлетворяет (1).

Множество тех r , для которых $P_{m+\frac{n}{2}-1}^{-\frac{n}{2}}(\cos r) \neq 0$ при $m = 1, 2, \dots$, а также его дополнение всюду плотны на отрезке $[0, \pi]$ (см. [9]).

В “двойственной” ситуации, когда радиусы не являются фиксированными, а центры шаров или сфер, по которым ведется интегрирование, принадлежат заданному множеству, имеет место следующее утверждение (см. [10]).

ТЕОРЕМА В. Пусть $f \in C(\mathbb{S}^n)$ и

$$\int_{\{v \in \mathbb{S}^n : w \cdot v = t\}} f d\omega_{n-1} = 0 \quad (3)$$

для всех $t \in (-1, 1)$ и $w \in E$, где E – множество на $\mathbb{S}^n$, которое не содержится во множестве нулей произвольной сферической гармоник. Тогда $f = 0$.

Более общо, если f имеет разложение:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} Y^{(m)}, \quad (4)$$

в ряд по сферическим гармоникам, то равенство (3) выполняется для любого $t \in (-1, 1)$ в том и только в том случае, когда $Y^{(m)}(w) = 0$ при всех m .

Теоремы А, В носят глобальный характер, и их доказательства существенно используют инвариантность пространства решений уравнения (1) относительно ортогональной группы $O(n+1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. При переходе от глобального случая к локальному, в частности, когда f задана в некотором шаре B_R на $\mathbb{S}^n$ и равенство (1) выполнено для любого $B \subset B_R$, сложность исследования аналогичных задач существенно возрастает. При этом появляются новые эффекты; например, в отличие от теоремы А, функции на $\mathbb{S}^n \setminus \{\xi\}$ (где ξ – произвольная точка сферы), имеющие нулевые интегралы по всем шарам из $\mathbb{S}^n \setminus \{\xi\}$ любого фиксированного радиуса, образуют бесконечномерное пространство. В связи с этим возникают следующие проблемы, касающиеся локальных аналогов теорем А, В.

ПРОБЛЕМА 1. Пусть $0 < R \leq \pi$, $B_R = \{\xi \in \mathbb{S}^n : d(o, \xi) < R\}$, где $o = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$, $d(\cdot, \cdot)$ – внутренняя метрика на $\mathbb{S}^n$. Найти необходимые и достаточные условия существования ненулевой функции $f \in L^{1, \text{loc}}(B_R)$ такой, что

$$\int_{\tau B_{r_i}} f d\omega_n = 0 \quad \forall \tau \in O(n+1) : \tau \bar{B}_{r_i} \subset B_R, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где r_1, r_2 – различные фиксированные числа из $(0, R)$, $\bar{B}_{r_i}$ – замыкание B_{r_i} .

ПРОБЛЕМА 2. Найти необходимые и достаточные условия существования ненулевой функции $f \in L^{1, \text{loc}}(B_R)$ такой, что

$$\int_{S_t(\eta)} f d\omega_{n-1} = 0 \quad \forall \eta \in S_{r_i} \quad \text{и п. в.} \quad t \in (0, R - r_i), \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

где $S_t(\eta) = \{\xi \in \mathbb{S}^n : d(\xi, \eta) = t\}$, $S_{r_i} = S_{r_i}(o)$.

Полные решения проблем 1, 2 (точнее, их естественных аналогов) для евклидова пространства содержатся в [11], [12] (см. также [13]–[16], где получены некоторые предварительные результаты). Однако методы из [11]–[16] не подходят в компактном случае. Решение проблемы 1 для $\mathbb{S}^n$ было найдено сравнительно недавно в [17]. В настоящей работе на основе значительного развития методов из [17] получено решение проблемы 2. Наши основные результаты формулируются следующим образом.

Для $r_1, r_2 \in (0, \pi)$ положим

$$\mathcal{N}(r_1, r_2) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)),$$

$$\mathcal{N}_k(r_i) = \left\{ \nu > k : P_{\nu + \frac{n}{2} - 1}^{-\frac{n}{2} - k + 1}(\cos r_i) = 0 \right\}, \quad i = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\max\{r_1, r_2\} < R \leq \pi$. Тогда:

- (i) если $R \geq r_1 + r_2$, $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \emptyset$ и функция $f \in L^{1, \text{loc}}(B_R)$ удовлетворяет (6), то $f = 0$;
- (ii) если $R < r_1 + r_2$, то существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$ с условием (6);
- (iii) если $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \emptyset$, то существует ненулевая вещественно аналитическая в B_R функция f с условием (6).

Основные сведения о нулях ν функции $P_{\nu + \frac{n}{2} - 1}^{-\frac{n}{2} - k + 1}(\cos r)$ приводятся далее в §3. Отметим, что для любых $r \in (0, \pi)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ множество $\mathcal{N}_k(r)$ является счетным и не имеет конечных предельных точек. Сравнение теоремы 1 с теоремой о двух радиусах, полученной в [17], показывает, что ответы в проблемах 1, 2 существенно отличаются. Например, в отличие от [17, теорема 2.1], исключительное множество $\mathcal{N}(r_1, r_2)$ в теореме 1 связано с нулями бесконечного семейства целых функций.

Пусть L – оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathbb{S}^n$ (см., например, [18, гл. 9]). Следующие результаты являются аналогом теоремы 1 для квазианалитических классов функций.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < r_1 < r_2 < R \leq \pi$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) если $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \emptyset$, $f \in C^\infty(B_R)$, выполнено условие (6) и $\{M_q\}_{q=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq j} M_q^{1/(2q)} \right)^{-1} = \infty, \quad (7)$$

$$\sup_{x \in B_{r_1}} |(L^q f)(x)| \leq M_q \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

то $f = 0$;

- (ii) если $R < \min\{r_1 + r_2, \pi\}$, то для любой последовательности положительных чисел $\{M_q\}_{q=1}^\infty$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq j} M_q^{1/(2q)} \right)^{-1} < \infty, \quad (9)$$

существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$ с условием (6) такая, что

$$\sup_{x \in B_R} |(L^q f)(x)| \leq M_q \quad \forall q \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Утверждение (ii) теоремы 2 показывает, что условие (7) в утверждении (i) ослабить нельзя. Нетрудно показать также, что утверждение (i) теоремы 2 станет, вообще говоря, неверным, если в условии (8) заменить B_{r_1} на $B_{r_1-\varepsilon}$, где ε – любое положительное число, меньшее r_1 . Для этого достаточно положить $R = r_1 + \varepsilon/2$ и рассмотреть ненулевую функцию $f \in C^\infty(B_R)$, равную нулю в $B_{r_1-\varepsilon} \cup (B_R \setminus B_{r_1-\varepsilon/2})$.

В случае $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \emptyset$ положим

$$\lambda = \min \mathcal{N}(r_1, r_2), \quad \varkappa = \min \{k \in \mathbb{Z}_+ : \lambda \in \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)\}.$$

Следующий результат показывает, что условие $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \emptyset$ в утверждении (i) теоремы 2 убрать нельзя.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < r_1 < r_2 < R \leq \pi$, $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \emptyset$. Тогда выполнены следующие утверждения:

(i) если $\frac{n-3}{2} + \varkappa \neq 0$, функция $f \in C^\infty(B_R)$ удовлетворяет условию (6), для некоторой последовательности $\{M_q\}_{q=1}^\infty$ положительных чисел выполнены условия (7), (8) и для некоторого $\varepsilon \in (0, R)$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \lambda^{-2q} \sup_{x \in B_\varepsilon} |(L^q f)(x)| = 0, \quad (11)$$

то $f = 0$;

(ii) если $R < \pi$, то существует ненулевая вещественно-аналитическая функция f в B_R с условием (6), для которой

$$\sup_{x \in B_R} |(L^q f)(x)| = O(\lambda^{2q}). \quad (12)$$

Вопрос о необходимости условия $\frac{n-3}{2} + \varkappa \neq 0$ в утверждении (i) теоремы 3 остается открытым. Это условие не выполнено тогда и только тогда, когда $n = 3$ и $\varkappa = 0$. Из известного равенства

$$P_{\nu+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}(\cos \theta) = \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin(\nu+1)\theta}{\nu+1}$$

следует (см. [19, гл. 3, § 3.7, формула (27)]), что в этом случае $\frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{Q}$, т. е. $\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b}$ для некоторых взаимно простых натуральных чисел a, b . Метод доказательства теоремы 3 показывает, что при $\frac{n-3}{2} + \varkappa = 0$ утверждение (i) теоремы 3 будет выполнено, если в условии (11) взять $\varepsilon = \frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{b}$.

Методика доказательства теорем 1–3 дает и другие точные результаты о сферических средних на $\mathbb{S}^n$ (см. далее теорему 4).

§ 2. Вспомогательные конструкции

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$, $\sigma = \xi'/|\xi'| \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\theta_1, \dots, \theta_n$ – сферические координаты точки ξ , $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_k \leq \pi$, $k \neq 1$, и $\xi_1 = \sin \theta_n \cdots \sin \theta_1$, $\xi_2 = \sin \theta_n \cdots \sin \theta_2 \cos \theta_1$, $\dots$, $\xi_{n+1} = \cos \theta_n$. В сферических координатах оператор Лапласа–Бельтрами имеет вид

$$L = \frac{1}{\sin^{n-1} \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \sin^{n-1} \theta_n \frac{\partial}{\partial \theta_n} + \frac{1}{\sin^2 \theta_n \sin^{n-2} \theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} \sin^{n-2} \theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \theta_n \cdots \sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \quad (13)$$

(см. [18, гл. 9, § 5, п. 1]). Он инвариантен относительно группы $\mathrm{SO}(n+1)$ и является сужением на $\mathbb{S}^n$ сферической части оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Кроме того, оператор L симметричен, т. е.

$$\int_{\mathbb{S}^n} f_1(\xi)(Lf_2)(\xi) d\omega_n(\xi) = \int_{\mathbb{S}^n} (Lf_1)(\xi)f_2(\xi) d\omega_n(\xi), \quad f_i \in C^\infty(\mathbb{S}^n), \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Всякой функции $f(\xi) = f(\sigma \sin \theta_n, \cos \theta_n) \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \theta_n \in (0, R), \quad (15)$$

где $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$, $1 \leq l \leq a_k$, – фиксированный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^{n,k}$ сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$f_{k,l}(\theta_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\zeta \sin \theta_n, \cos \theta_n) \overline{Y_l^{(k)}(\zeta)} d\omega_{n-1}(\zeta) \quad (16)$$

(см. [17, § 3]). Для $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l, p \leq a_k$ положим

$$f^{k,l,p}(\xi) = f_{k,l}(\theta_n) Y_p^{(k)}(\sigma).$$

Пусть $d\mathcal{T}_{n+1}$ – нормированная мера Хаара на $\mathrm{O}(n+1)$. Для функций f, g на $\mathbb{S}^n$ их свертка $f * g$ определяется равенством

$$(f * g)(\xi) = \int_{\mathrm{O}(n+1)} f(\tau o) g(\tau^{-1} \xi) d\mathcal{T}_{n+1}(\tau), \quad (17)$$

когда этот интеграл существует (см. [20, введение, § 3, п. 1]). Если функция g является инвариантной относительно группы $\mathrm{O}(n) = \{\tau \in \mathrm{O}(n+1) : \tau o = o\}$, то выполнено равенство

$$(f * g)(\tau o) = \int_{\mathbb{S}^n} f(\xi) g(\tau^{-1} \xi) d\omega_n(\xi). \quad (18)$$

Это определение естественным образом распространяется для функций, а также для распределений, заданных на открытых подмножествах $\mathbb{S}^n$. Например,

если $0 < r < R \leq \pi$, $f, g \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$ и носитель $\text{supp } g$ функции g лежит в B_r , то $f * g \in L^{1,\text{loc}}(B_{R-r})$. Далее, если не оговорено противное, указанные условия для r и R будут всегда предполагаться выполненными.

Пусть $T^{n,k}(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $O(n)$ на пространство $\mathcal{H}^{n,k}$, $\{t_{l,p}^{n,k}(\tau)\}$ – матрица $T^{n,k}(\tau)$ в базисе $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$ [18, гл. 1, § 1]. Из неприводимости $T^{n,k}(\tau)$ и соотношений ортогональности для $\{t_{l,p}^{n,k}(\tau)\}$ [18, гл. 1, § 4] следует формула

$$h^{k,l,p}(\xi) = a_k \int_{O(n)} h(\tau^{-1}\xi) \overline{t_{l,p}^{n,k}(\tau)} dT_n(\tau), \quad (19)$$

где h – произвольная функция из $L^{1,\text{loc}}(B_R)$.

Пусть теперь $f, g \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$ и $\text{supp } g \subset B_r$. Используя равенство (17) и формулу (19) при $h = f * g$ и $h = f$, имеем в шаре B_{R-r} равенства

$$(f * g)^{k,l,p} = f^{k,l,p} * g. \quad (20)$$

Следуя [18, гл. 9, § 3], введем канонический базис в пространстве $\mathcal{H}^{n+1,\ell}$. Обозначим через K набор целых чисел $(k_1, \dots, k_{n-2}, \pm k_{n-1})$ с условием $\ell \geq k_1 \geq \dots \geq k_{n-1} \geq 0$. Положим

$$A_K^\ell = \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \times \prod_{j=0}^{n-2} \frac{2^{2k_{j+1}+n-j-3} (k_j - k_{j+1})! (n-j+2k_j-1) \Gamma^2\left(\frac{n-j-1}{2} + k_{j+1}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(k_j + k_{j+1} + n-j-1)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $k_0 = \ell$ и Γ – гамма-функция. Отметим, что

$$A_O^\ell = \left(\frac{\ell! \Gamma(n-1)(n+2\ell-1)}{\Gamma(n+\ell-1)(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

$$A_M^\ell = 2^{m+n-3} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + m\right) \times \left(\frac{(\ell-m)! m! (n+2\ell-1)(n+2m-2)}{\pi \Gamma(\ell+m+n-1) \Gamma(m+n-2)(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

где $O = (0, \dots, 0)$, $M = (m, 0, \dots, 0)$ (см. [18, гл. 9, § 3, п. 6, формула (6) и § 4, п. 2]).

Функции

$$\Xi_K^\ell(\xi) = A_K^\ell \prod_{j=0}^{n-2} C_{k_j - k_{j+1}}^{\frac{n-j-1}{2} + k_{j+1}} (\cos \theta_{n-j}) (\sin \theta_{n-j})^{k_{j+1}} e^{\pm i k_{n-1} \theta_1}, \quad (23)$$

где C_m^p – многочлены Гегенбауэра, образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^{n+1,\ell} \subset L^2(\mathbb{S}^n)$, и

$$\int_{\mathbb{S}^n} |\Xi_K^\ell(\xi)|^2 d\omega_n(\xi) = \omega_n \quad (24)$$

(см. [18, гл. 9, § 3, п. 6]).

Из определения канонического базиса и ортогональности многочленов Гегенбауэра [18, гл. 9, § 3, п. 4] следует, что

$$\int_{B_t} \Xi_K^\ell(\xi) d\omega_n(\xi) = \begin{cases} \omega_{n-1} A_O^\ell \int_0^t C_{\ell}^{\frac{n-1}{2}}(\cos \theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta, & \text{если } K = O, \\ 0, & \text{если } K \neq O. \end{cases} \quad (25)$$

Пусть a_r – вращение в плоскости (x_{n+1}, x_n) на угол r , т. е.

$$a_r x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \cos r + x_{n+1} \sin r, -x_n \sin r + x_{n+1} \cos r). \quad (26)$$

Для $K' = (k, 0, \dots, 0)$ имеем (см. [18, гл. 9, § 4, п. 1, формула (1)])

$$\Xi_{K'}^\ell(a_r \xi) = \sum_K t_{KK'}^{n+1, \ell}(a_r^{-1}) \Xi_K^\ell(\xi). \quad (27)$$

Из равенств (25) и (27) находим

$$\int_{B_t} \Xi_{K'}^\ell(a_r \xi) d\omega_n(\xi) = \omega_{n-1} A_O^\ell t_{OK'}^{n+1, \ell}(a_r^{-1}) \int_0^t C_{\ell}^{\frac{n-1}{2}}(\cos \theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta. \quad (28)$$

Выражения для $\Xi_{K'}^\ell(\xi)$ и $t_{OK'}^{n+1, \ell}(a_r^{-1})$ имеют вид (см. (23) и [18, гл. 9, § 4, п. 1, формула (9)])

$$\begin{aligned} \Xi_{K'}^\ell(\xi) &= A_{K'}^\ell C_k^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_{n+1}^2}} \right) C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k}(\xi_{n+1}) (1 - \xi_{n+1}^2)^{\frac{k}{2}}, \\ t_{OK'}^{n+1, \ell}(a_r^{-1}) &= \frac{2^k \Gamma(\frac{n-1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \\ &\times \left(\frac{\ell! (\ell - k)! (n + 2k - 2) \Gamma(n - 1) \Gamma(n + k - 2)}{k! \Gamma(\ell + k + n - 1) \Gamma(\ell + n - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} (\sin r)^k C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k}(\cos r). \end{aligned} \quad (29)$$

$$(30)$$

Далее, имеет место равенство

$$L(\Xi_K^\ell) = \ell(1 - \ell - n) \Xi_K^\ell \quad (31)$$

(см. (23) и (13)). Кроме того,

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in \mathbb{S}^n} |\Xi_K^\ell(\xi)| &\leq \sqrt{\dim \mathcal{H}^{n+1, \ell}} = \left(\frac{(n + 2\ell - 1)(n + \ell - 2)!}{\ell! (n - 1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= O(\ell^{\frac{n-1}{2}}), \quad \ell \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (32)$$

(см. [21, гл. 4, следствие 2.9, (b) и доказательство теоремы 2.10]). Для $f \in L^1(\mathbb{S}^n)$ положим

$$a_K^\ell(f) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}^n} f(\xi) \overline{\Xi_K^\ell(\xi)} d\omega_n(\xi).$$

Если $f \in C^m(\mathbb{S}^n)$, из (31) и (14) имеем

$$a_K^\ell(f) = \frac{1}{(\ell(1-\ell-n))^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} a_K^\ell(L^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} f), \quad (33)$$

где $[\cdot]$ – целая часть. Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая (24), получаем оценку

$$a_K^\ell(f) = O(\ell^{-2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}), \quad \ell \rightarrow +\infty. \quad (34)$$

Следующий результат является обобщением классической формулы умножения для многочленов Гегенбауэра (см. [18, гл. 9, § 4, п. 3, формулы (2), (5)]).

ЛЕММА 1. *Пусть числа t, r и $t+r$ принадлежат $[0, \pi)$. Тогда справедливы формулы*

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi C_k^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\sin t \cos r \cos \theta + \cos t \sin r}{\sqrt{1 - (\cos t \cos r - \sin t \sin r \cos \theta)^2}} \right) C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k} \\ & \times (\cos t \cos r - \sin t \sin r \cos \theta) (1 - (\cos t \cos r - \sin t \sin r \cos \theta)^2)^{\frac{k}{2}} (\sin \theta)^{n-2} d\theta \\ & = \frac{\pi \Gamma(n-1) \Gamma(n+k-2) \ell!}{2^{n-3} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n-2}{2}) k! \Gamma(\ell+n-1)} (\sin r)^k C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k} (\cos r) C_\ell^{\frac{n-1}{2}} (\cos t), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \int_{|t-r|}^{t+r} C_k^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\cos t - \cos \gamma \cos r}{\sin r \sin \gamma} \right) ((\cos \gamma - \cos(t+r))(\cos(t-r) - \cos \gamma))^{\frac{n-3}{2}} \\ & \times C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k} (\cos \gamma) (\sin \gamma)^{k+1} d\gamma \\ & = \frac{\pi \Gamma(n-1) \Gamma(n+k-2) \ell!}{2^{n-3} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n-2}{2}) k! \Gamma(\ell+n-1)} (\sin r)^{n+k-2} \\ & \times C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k} (\cos r) (\sin t)^{n-2} C_\ell^{\frac{n-1}{2}} (\cos t). \end{aligned} \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (28)–(30) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi A_{K'}^\ell C_k^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\sin \theta_n \cos \theta_{n-1} \cos r + \cos \theta_n \sin r}{\sqrt{1 - (\cos \theta_n \cos r - \sin \theta_n \sin r \cos \theta_{n-1})^2}} \right) \\ & \times C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k} (\cos \theta_n \cos r - \sin \theta_n \sin r \cos \theta_{n-1}) \\ & \times (1 - (\cos \theta_n \cos r - \sin \theta_n \sin r \cos \theta_{n-1})^2)^{\frac{k}{2}} \\ & \times (\sin \theta_n)^{n-1} (\sin \theta_{n-1})^{n-2} \cdots (\sin \theta_3)^2 \sin \theta_2 d\theta_1 \cdots d\theta_n \\ & = \omega_{n-1} A_O^\ell \frac{2^k \Gamma(\frac{n-1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{\ell! (\ell-k)! (n+2k-2) \Gamma(n-1) \Gamma(n+k-2)}{k! \Gamma(\ell+k+n-1) \Gamma(\ell+n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times (\sin r)^k C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k} (\cos r) \int_0^t C_\ell^{\frac{n-1}{2}} (\cos \theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta. \end{aligned} \quad (37)$$

Дифференцируя (37) по t и учитывая (21), (22), приходим к формуле (35). Делая в интеграле (35) замену переменной $\cos t \cos r - \sin t \sin r \cos \theta = \cos \gamma$, получаем (36).

§ 3. Свойства некоторых специальных функций

Для $\nu \in \mathbb{C}$ положим

$$\psi_{\nu,k}(\theta) = (\sin \theta)^{1-\frac{n}{2}} P_{\nu+\frac{n}{2}-1}^{-\frac{n}{2}-k+1}(\cos \theta), \quad \theta \in (0, \pi),$$

$$\Psi_{\nu}^{k,l}(\xi) = \psi_{\nu,k}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \xi \in B_{\pi}.$$

Ряд свойств функций $\psi_{\nu,k}$ и $\Psi_{\nu}^{k,l}$ содержится в работе [17, § 3–5]. Здесь мы напомним основные из них и приведем новые свойства этих функций.

Отметим, что

$$\psi_{\nu,k}(\theta) = 2^{1-k-\frac{n}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right) \right)^{-1} (\sin \theta)^k F\left(\nu + n + k - 1, k - \nu; \frac{n}{2} + k; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

где F – гипергеометрическая функция (см. [19, гл. 3, § 3.5, формула (8)]). Кроме того, по формуле Мелера–Дирихле имеем

$$\psi_{\nu,k}(\theta) = \frac{(\sin \theta)^{2-n-k}}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(k + \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\theta}^{\theta} (\cos t - \cos \theta)^{\frac{n-3}{2}+k} e^{i(\nu+\frac{n-1}{2})t} dt \quad (38)$$

(см. [19, гл. 3, § 3.7, формула (27)]).

Для $m \in \mathbb{Z}$ обозначим через d_m дифференциальный оператор, заданный на пространстве $C^1(0, \pi)$ следующим образом:

$$(d_m u)(\theta) = (\sin \theta)^m \frac{d}{d\theta} (u(\theta) (\sin \theta)^{-m}), \quad u \in C^1(0, \pi). \quad (39)$$

Отметим, что

$$d_{1-k-n} d_k - k(n+k-1) \text{Id} = d_{k-1} d_{2-n-k} - (k-1)(n+k-2) \text{Id} = l_k, \quad (40)$$

где Id – тождественный оператор,

$$l_k = \frac{d^2}{d\theta^2} + (n-1) \text{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{k(n+k-2)}{\sin^2 \theta} \text{Id}.$$

ЛЕММА 2. (i) *Имеют место равенства*

$$d_k \psi_{\nu,k} = (k-\nu)(k+\nu+n-1) \psi_{\nu,k+1}, \quad d_{1-n-k} \psi_{\nu,k+1} = \psi_{\nu,k}, \quad (41)$$

$$(L - c_{\nu} \text{Id}) \Psi_{\nu}^{k,l} = 0, \quad (42)$$

где $c_{\nu} = \nu(1-n-\nu)$.

(ii) Пусть $h(\xi) = u(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma) \in C^{\infty}(B_R)$ и $(L - c_{\lambda_1} \text{Id}) \cdots (L - c_{\lambda_m} \text{Id}) h = 0$ в B_R , где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – произвольные комплексные числа, удовлетворяющие при $m \geq 2$ условию $(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i + \lambda_j + n - 1) \neq 0, i \neq j$. Тогда

$$h = \sum_{j=1}^m \gamma_j \Psi_{\lambda_j}^{k,l}, \quad \text{где } \gamma_j \in \mathbb{C}.$$

(iii) Пусть $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $a, b \in [0, \pi)$. Тогда

$$(\mu - \nu)(\mu + \nu + n - 1) \int_a^b \psi_{\mu,k}(\theta) \psi_{\nu,k}(\theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta = (\sin \theta)^{n-1} \left(\psi_{\mu,k}(\theta) \frac{d}{d\theta} \psi_{\nu,k}(\theta) - \psi_{\nu,k}(\theta) \frac{d}{d\theta} \psi_{\mu,k}(\theta) \right) \Big|_a^b. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (41), (42) содержатся в [17, § 3]. Докажем утверждение (ii). Оператор L действует на функцию h по правилу

$$(Lh)(\xi) = (l_k u)(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma) \quad (44)$$

(см. [17, формула (3.5)]). Далее, равенство

$$c_\nu - c_\mu = (\nu - \mu)(1 - n - \nu - \mu) \quad (45)$$

и условия для λ_j показывают, что все числа c_{λ_j} различны. Применим теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Тогда, учитывая гладкость функции h и равенство (42), приходим к требуемому утверждению индукцией по m .

Утверждение (iii) при $k = 1$ получено в [17, § 4]. Для произвольного $k \in \mathbb{Z}_+$ доказательство проводится аналогично (см. (44) и (40)). Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{D}(B_R)$ пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций в B_R .

ЛЕММА 3. (i) Пусть $\xi \in B_{\pi/2}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (\xi_{n+1} + i(\zeta, \xi'))^\nu Y_l^{(k)}(\zeta) d\omega_n(\zeta) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} i^k \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - k + 1)} \Psi_\nu^{k,l}(\xi), \quad (46)$$

где (ζ, ξ') – евклидово скалярное произведение векторов $\zeta, \xi' \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Пусть $0 < r < \pi$, $t \in (0, \pi - r)$, $\eta \in S_r$. Тогда

$$\int_{S_{t(\eta)}} \Psi_\nu^{k,l}(\xi) d\omega_{n-1}(\xi) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \omega_{n-1}(\sin t)^{n-1} \psi_{\nu,0}(t) \Psi_\nu^{k,l}(\eta). \quad (47)$$

(iii) Для любой функции $\psi \in \mathcal{D}(B_\pi)$

$$\int_{\mathbb{S}^n} \Psi_\nu^{k,l}(\xi) \psi(\xi) d\omega_n(\xi) = O\left(\frac{1}{\nu^m}\right) \quad (48)$$

при $\nu \rightarrow +\infty$ и любом $m > 0$.

(iv) Пусть $r \in (0, \pi)$. Тогда при $\nu \rightarrow +\infty$ имеют место оценки

$$\psi_{\nu,k}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sin r)^{\frac{1-n}{2}} \frac{\cos\left((\nu + \frac{n-1}{2})r - \frac{\pi}{4}(n + 2k - 1)\right)}{(\nu + \frac{n-1}{2})^{k + \frac{n-1}{2}}} + O\left(\frac{1}{\nu^{k + \frac{n+1}{2}}}\right), \quad (49)$$

$$\max_{t \in [0, r]} \left| \frac{d^s \psi_{\nu,k}(t)}{dt^s} \right| = O(\nu^{s-k}). \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) содержится в [17, формула (4.5)]. Используя (42) и [17, доказательство леммы 7.1], получаем (ii). Утверждение (iii) вытекает из (i) и равенства

$$\int_{\mathbb{S}^n} \Psi_{\nu}^{k,l}(\xi) \psi(\xi) d\omega_n(\xi) = \frac{1}{(\nu(1-n-\nu))^m} \int_{\mathbb{S}^n} \Psi_{\nu}^{k,l}(\xi) (L^m \psi)(\xi) d\omega_n(\xi) \quad (51)$$

(см. (42) и доказательство (33)). Утверждение (iv) следует из [17, формулы (3.8), (4.2) и (4.7)].

ЛЕММА 4. (i) Пусть $r \in (0, \pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $\psi_{\nu,k}(r)$ имеет бесконечно много нулей ν . Все эти нули являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $(1-n)/2$. Кроме того,

$$\psi_{\nu,k}(r) > 0 \quad \text{при} \quad -k-n+1 \leq \nu \leq k, \quad (52)$$

$$\sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r)} \frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (53)$$

(ii) Для всех достаточно больших нулей $\nu \in \mathcal{N}_k(r)$ справедлива оценка

$$|\psi_{\nu,k+1}(r)| \geq \frac{c}{\nu^{k+\frac{n+1}{2}}}, \quad (54)$$

где $c > 0$ не зависит от ν .

(iii) Пусть $u \in L^1[0, r]$ и

$$v(z) = \int_0^r u(\theta) \psi_{z,k}(\theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta.$$

Тогда если $v(\nu) = 0$ при всех $\nu \in \mathcal{N}_k(r)$, то $u = 0$.

(iv) Пусть

$$\delta(\mu, \nu) = \int_0^r \psi_{\mu,k}(\theta) \psi_{\nu,k}(\theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta$$

и $\mu, \nu \in \mathcal{N}_k(r)$. Тогда $\delta(\mu, \nu) = 0$ при $\mu \neq \nu$ и

$$\delta(\nu, \nu) > \frac{c}{\nu^{n+2k}}, \quad (55)$$

где константа $c > 0$ не зависит от ν .

(v) Пусть $0 < a < b < \pi$, $r \in [a, b]$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu_j = \nu_j(r, k, n)$ – последовательность всех положительных нулей функции $\psi_{\nu,k}$, занумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$r \left(\nu_j + \frac{n-1}{2} \right) = \pi \left(\frac{n+2k+1}{4} + j + q(r, k, n) \right) - \frac{(n+2k-2)^2 - 1}{8(\nu_j + \frac{n-1}{2})} \operatorname{ctg} r + O(\nu_j^{-3}),$$

где $q(r, k, n) \in \mathbb{Z}$ зависит только от r, k, n и постоянная в знаке O не зависит от j, r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i), (iii), (iv) и (v) при $k = 1$ доказаны в [17, § 5]. Общий случай получается незначительной модификацией этих рассуждений. Утверждение (ii) легко следует из леммы 3, (iv).

ЛЕММА 5. Пусть $r_1, r_2 \in (0, \pi)$, $r_1 \neq r_2$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $n + 2k \neq 3$ и множество $\mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)$ является бесконечным. Пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ – последовательность всех элементов множества $\mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)$, занумерованных в порядке возрастания. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) = +\infty. \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\zeta_m = \lambda_m + (n - 1)/2$. Из леммы 4, (v) имеем

$$r_i \zeta_m = \pi \left(\frac{n + 2k + 1}{4} + q_{m,i} \right) + \frac{1 - (n + 2k - 2)^2}{8\zeta_m} \operatorname{ctg} r_i + O(\zeta_m^{-3}), \quad i = 1, 2, \quad (57)$$

где $q_{m,i} \in \mathbb{Z}$ и постоянная в знаке O не зависит от m . Отсюда получаем

$$\frac{r_1}{r_2} - \frac{n + 2k + 1 + 4q_{m,1}}{n + 2k + 1 + 4q_{m,2}} = \frac{c(r_1, r_2)}{\zeta_m(n + 2k + 1 + 4q_{m,2})} + O(\zeta_m^{-4}), \quad (58)$$

где

$$c(r_1, r_2) = \frac{1 - (n + 2k - 2)^2}{2\pi r_2} (r_2 \operatorname{ctg} r_1 - r_1 \operatorname{ctg} r_2).$$

Кроме того, из (57) следует, что

$$r_i(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = \pi \alpha_{m,i} + o(1) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad (59)$$

где $\alpha_{m,i} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$. Предположим, что равенство (56) не выполнено. Тогда из соотношения (59) получаем, что существуют $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, такие, что

$$r_i(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = \pi \alpha_i + o(1), \quad i = 1, 2,$$

при $m \rightarrow \infty$ для некоторой бесконечной последовательности значений m . Отсюда $r_1/r_2 = \alpha_1/\alpha_2$. Из этого равенства и (58) заключаем, что $c(r_1, r_2) = 0$. Поскольку $n + 2k \neq 3$ и функция $\frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ убывает на $(0, \pi)$, это противоречит тому, что $r_1 \neq r_2$. Таким образом, лемма доказана.

Пусть функция $f(\xi) = u(\theta_n)$ принадлежит $L(\mathbb{S}^n)$ и ее носитель $\operatorname{supp} f$ содержится в шаре $\overline{B}_\varepsilon$ при некотором $\varepsilon \in (0, \pi)$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda) &= \int_{\mathbb{S}^n} f(\xi) \psi_{\lambda + \frac{1-n}{2}, 0}(\arccos \xi_{n+1}) d\omega_n(\xi) \\ &= \omega_{n-1} \int_0^\varepsilon u(t) \psi_{\lambda + \frac{1-n}{2}, 0}(t) \sin^{n-1} t dt. \end{aligned} \quad (60)$$

Тогда из (38) следует, что $\tilde{f}$ является четной целой функцией экспоненциального типа не выше ε . Функция $\tilde{f}$ является аналитическим продолжением сферического преобразования функции f . Свойства преобразования $f \rightarrow \tilde{f}$ подробно изучены в [8, гл. 11]. В частности, для этого преобразования имеет место аналог теоремы Пэли–Винера (см. [8, теорема 11.2]).

ЛЕММА 6. Пусть $0 < r_1 < r_2 < \pi$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, a_k\}$, и пусть $\mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2) \neq \emptyset$, $n + 2k \neq 3$, $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $\nu \in \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)$ существует функция $g_\nu \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{B_\varepsilon} \Psi_\mu^{k,l}(\xi) g_\nu(\xi) d\omega_n(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \in \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2), \mu \neq \nu, \\ 1, & \text{если } \mu = \nu. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta = \varepsilon/3$. Из леммы 5 следует, что множество $\mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)$ содержится в некоторой возрастающей последовательности $\{\eta_m\}_{m=1}^\infty$ положительных чисел, удовлетворяющей условиям

$$\inf_m (\eta_{m+1} - \eta_m) > 0, \quad \sup_m \left| \eta_m - \frac{\pi m}{\delta} \right| < +\infty.$$

Рассмотрим целую функцию

$$h(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\eta_m^2} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Стандартные рассуждения (см. [22, § 27]) с использованием принципа Фрагмена–Линделефа показывают, что существуют константы $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ такие, что

$$|h(z)| \leq \gamma_1 (1 + |z|)^{\gamma_2} e^{\delta |\operatorname{Im} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\nu \in \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)$ и $\widehat{\varphi}$ – преобразование Фурье ненулевой четной функции $\varphi \in \mathcal{D}(-\delta, \delta)$ такой, что $\widehat{\varphi}(\nu) \neq 0$. Тогда функция

$$u(z) = \frac{h(z)\widehat{\varphi}(z)}{z^2 - \nu^2}$$

является четной целой функцией экспоненциального типа не выше ε , убывающей на действительной оси быстрее любой фиксированной степени $1/|z|$. Кроме того, $u(\nu) \neq 0$, и $u(\mu) = 0$ для всех $\mu \in \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)$, отличных от ν . По теореме Пэли–Винера для преобразования $f \rightarrow \widetilde{f}$ (см. [8, теорема 11.2]) существует функция $g_\nu \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$ такая, что $\widetilde{g}_\nu(z) = u(z)/u(\nu)$. Отсюда и из определения (60) следует утверждение леммы.

§ 4. Функции класса $\mathcal{V}_r(B_R)$

Обозначим через $\mathcal{V}_r(B_R)$ класс функций $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$, удовлетворяющих равенству (6) для всех $\eta \in S_r$ и почти всех $t \in (0, R - r)$. Для $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ положим

$$\mathcal{V}_r^s(B_R) = (\mathcal{V}_r \cap C^s)(B_R).$$

В этом параграфе получим описание класса $\mathcal{V}_r(B_R)$. Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Обозначим через $\mathcal{D}_{\natural}(B_R)$ совокупность $O(n)$ -инвариантных функций из $\mathcal{D}(B_R)$. Пусть $\mathcal{D}'_{\natural}(B_R)$ – множество $O(n)$ -инвариантных распределений на B_R .

ЛЕММА 7. (i) Если $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$ и $f * g = 0$ на S_r для любой функции $g \in \mathcal{D}_{\natural}(B_{R-r})$, то $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$.

(ii) Если $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$, $\varepsilon \in (0, R - r)$, $g \in \mathcal{D}'_{\natural}(B_R)$, $\operatorname{supp} g \subset B_\varepsilon$ и $f * g \in C(B_{R-\varepsilon})$, то $f * g = 0$ на S_r . В частности, если $f \in \mathcal{V}_r^0(B_R)$, то $f = 0$ на S_r .

(iii) Если $f \in \mathcal{V}_r^s(B_R)$ и $s \geq 2$, то $Lf \in \mathcal{V}_r^{s-2}(B_R)$.

(iv) Если $f \in \mathcal{V}_r^s(B_R)$, то $f^{k,l,p} \in \mathcal{V}_r^s(B_R)$ при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l, p \leq a_k$. Аналогичное утверждение имеет место и для класса $\mathcal{V}_r(B_R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (i). Обозначим через χ_t индикатор шара B_t . Аппроксимируя χ_t функциями $g \in \mathcal{D}_\natural(B_{R-r})$, получаем, что $f * \chi_t = 0$ на S_r для всех $t \in (0, R-r)$. Ввиду равенства

$$\int_{B_t(\eta)} f(\xi) d\omega_n(\xi) = \int_0^t \int_{S_\varrho(\eta)} f(\xi) d\omega_{n-1}(\xi) d\varrho,$$

где $B_t(\eta) = \{\xi \in \mathbb{S}^n : d(\xi, \eta) < t\}$, функция f из $L^{1,\text{loc}}(B_R)$ принадлежит $\mathcal{V}_r(B_R)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{B_t(\eta)} f(\xi) d\omega_n(\xi) = 0 \quad \text{на} \quad S_r$$

для любого $t \in (0, R-r)$. Отсюда $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$.

Далее, если $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$ и $g(\xi) = h(\theta_n) \in \mathcal{D}_\natural(B_{R-r})$, то согласно (18) при $\tau o \in S_r$ имеем

$$\begin{aligned} (f * g)(\tau o) &= \int_{B_{R-r}} f(\tau\xi)g(\xi) d\omega_n(\xi) = \int_0^{R-r} \int_{S_\varrho} f(\tau\xi)g(\xi) d\omega_{n-1}(\xi) d\varrho \\ &= \int_0^{R-r} h(\varrho) \int_{d(\tau o, \xi)=\varrho} f(\xi) d\omega_{n-1}(\xi) d\varrho = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения свертки распределений следует аналогичный результат для $g \in \mathcal{D}'_\natural(B_R)$ с носителем в B_ε . Применяя полученное утверждение для случая, когда $f \in \mathcal{V}_r^0(B_R)$ и g — мера Дирака на $\mathbb{S}^n$, сосредоточенная в точке $o = (0, \dots, 0, 1)$, получим $f = 0$ на S_r . Таким образом, утверждение (ii) полностью доказано.

Утверждение (iii) является следствием (i) и (ii), поскольку оператор L инвариантен относительно свертки и переводит $\mathcal{D}'_\natural(B_R)$ в $\mathcal{D}'_\natural(B_R)$.

Утверждение (iv) вытекает из (19) и определения классов $\mathcal{V}_r^s(B_R)$ и $\mathcal{V}_r(B_R)$.

ЛЕММА 8. Пусть $f \in \mathcal{V}_r^\alpha(B_R)$ при $\alpha = [(n+9)/2]$ и $f = 0$ в B_r . Тогда $f = 0$ в B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение леммы при $R < 2r$. По лемме 7, (iv) функция $f_{k,l}(\theta_n)C_k^{\frac{n-2}{2}}(\cos \theta_{n-1})$ принадлежит $\mathcal{V}_r^\alpha(B_R)$ и $f_{k,l} = 0$ на $[0, r]$ (см. (19)). Продолжим $f_{k,l}$ нулем на $[R, \pi]$. Для $\theta \in [0, \pi]$ положим $g = f_{k,l}w_\varepsilon$, где функция w_ε , $\varepsilon \in (0, R-r)$, удовлетворяет условиям $w_\varepsilon \in C^\infty[0, \pi]$, $w_\varepsilon = 1$ на $[0, R-\varepsilon]$ и $w_\varepsilon = 0$ на $[-\varepsilon/2 + R, \pi]$. Определим

$$F(\xi) = g(\theta_n)C_k^{\frac{n-2}{2}}(\cos \theta_{n-1}), \quad (61)$$

$$a_K^\ell(F) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}^n} F(\xi) \overline{\Xi_K^\ell(\xi)} d\omega_n(\xi), \quad (62)$$

$$b_l = \int_r^\pi g(\theta)C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k}(\cos \theta)(\sin \theta)^{k+n-1} d\theta.$$

Из (61), (23) и соотношений ортогональности для многочленов Гегенбауэра находим, что $a_{K'}^{\ell}(F) = 0$, если $\ell < k$ или $\ell \geq k$ и $K \neq K' = (k, 0, \dots, 0)$. Следовательно,

$$F(\xi) = \sum_{\ell=k}^{\infty} a_{K'}^{\ell}(F) \Xi_{K'}^{\ell}(\xi), \quad (63)$$

где

$$a_{K'}^{\ell}(F) = \frac{2^k \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(\frac{(n-1)(\ell-k)! (n+2\ell-1) \Gamma(n+k-2)}{\pi(n+2k-2)k! \Gamma(\ell+k+n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} b_l,$$

ряд (63) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{S}^n$, причем $F \in C^{\alpha}(\mathbb{S}^n)$ (см. (32), (34)).

Пусть a_r – отображение, определенное в (26). Из условия и (63) имеем

$$\sum_{\ell=k}^{\infty} a_{K'}^{\ell}(F) \int_{B_t} \Xi_{K'}^{\ell}(a_r \xi) d\omega_n(\xi) = \int_{B_t} F(a_r \xi) d\omega_n(\xi) = 0, \quad 0 < t < R - r - \varepsilon. \quad (64)$$

После дифференцирования по t равенство (64) влечет соотношение

$$\sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{\ell! (\ell-k)! \left(\ell + \frac{n-1}{2}\right) b_l}{\Gamma(\ell+k+n-1) \Gamma(\ell+n-1)} C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k}(\cos r) C_{\ell}^{\frac{n-1}{2}}(\cos t) = 0, \quad (65)$$

$$0 < t < R - r - \varepsilon$$

(см. доказательство леммы 1 и (62)). Рассмотрим теперь функцию $W(\theta, t)$, определенную следующим образом: $W(\theta, t) = 0$, если $\theta \in [0, \pi] \setminus [|t-r|, t+r]$ и

$$W(\theta, t) = C_k^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\cos t - \cos \theta \cos r}{\sin r \sin \theta} \right) ((\cos t - \cos(\theta+r))(\cos(\theta-r) - \cos t))^{\frac{n-3}{2}},$$

если $|t-r| \leq \theta \leq t+r$. Для $m \in \mathbb{Z}_+$, $0 < t < R - r - \varepsilon$ положим

$$h_m(t) = \frac{m! (2m+2k+n-1)}{\Gamma(m+2k+n-1)} \int_0^{\pi} W(\theta, t) C_m^{\frac{n-1}{2}+k}(\cos \theta) (\sin \theta)^k d\theta.$$

Из определения W и леммы 1 получаем

$$h_m(t) = \lambda_{n,k,r} \frac{m! (m+k)! (2m+2k+n-1)}{\Gamma(m+2k+n-1) \Gamma(m+k+n-1)} C_m^{\frac{n-1}{2}+k}(\cos r) C_{m+k}^{\frac{n-1}{2}}(\cos t),$$

где постоянные $\lambda_{n,k,r} \in \mathbb{C}$ не зависят от m и t . Отсюда и из (65) видим, что

$$\sum_{\ell=k}^{\infty} b_l h_{\ell-k}(t) = 0, \quad 0 < t < R - r - \varepsilon.$$

Замечая, что

$$(\cos \theta - \cos(t+r))(\cos(t-r) - \cos \theta) = (\cos t - \cos(\theta+r))(\cos(\theta-r) - \cos t),$$

и используя сходимость ряда по многочленам $C_{\ell-k}^{\frac{n-1}{2}+k}$ в пространстве L^p (см. [19, т. 2, с. 209, (7)]), нетрудно показать, что это равенство эквивалентно уравнению

$$\int_r^{t+r} g(\theta) W(\theta, t) d\theta = 0, \quad 0 < t < R - r - \varepsilon. \quad (66)$$

Стандартные рассуждения, используемые при решении классического интегрального уравнения Абеля (см., например, [20, доказательство теоремы 2.6]), показывают, что уравнение (66) сводится к однородному интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ограниченным ядром. Это означает (см., например, [23, гл. 9, §2, п. 5]), что $g = 0$ на $[0, R - \varepsilon]$. В силу произвольности $\varepsilon \in (0, R - r)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \{1, \dots, a_k\}$ заключаем, что $f = 0$ в B_R при $R \in (r, 2r)$. Рассмотрим теперь общий случай.

Пусть $R' = \sup\{\rho > 0: f = 0 \text{ в } B_\rho\}$. Через $WF_A(u)$ обозначим аналитический волновой фронт распределения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^n)$ (см. [24, п. 8.5]). Предположим, что $R' < R$. В этом случае существует точка $x \in S_{R'} \cap \text{supp } f$. Поскольку $f = 0$ в $B_{R'}$, отсюда имеем $(x, xt) \in WF_A(f)$ для любого ненулевого $t \in \mathbb{R}^1$ (см. [24, теорема 8.5.6]). В силу условия (6) это означает, что $(y, xt) \in WF_A(f)$, где $y = \frac{x}{|x|}(2r - |x|)$ (см. [25]). Однако множество $WF_A(f)$ не содержит пар вида (y, ξ) , где $y \in B_{R'}$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, поскольку $f = 0$ в $B_{R'}$. Полученное противоречие показывает, что $R' = R$; таким образом, лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $s \geq n + \alpha + 3$ и $f \in C^s(B_R)$. Тогда f принадлежит $\mathcal{V}_r(B_R)$ в том и только в том случае, когда для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имеет место разложение

$$f^{k,l,l} = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r)} c_{\nu,k,l} \Psi_\nu^{k,l}, \quad (67)$$

где

$$c_{\nu,k,l} = \frac{1}{\delta(\nu, \nu)} \int_0^r f_{k,l}(\theta) \psi_{\nu,k}(\theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta, \quad (68)$$

$$c_{\nu,k,l} = O(\nu^{n+k-2[s/2]}) \quad \text{при } \nu \rightarrow +\infty \quad (69)$$

и ряд (67) сходится равномерно на компактах из B_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{V}_r^s(B_R)$ и k, l фиксированы. Ввиду леммы 7 и (44) функция $f^{k,l,l}$ принадлежит $\mathcal{V}_r^s(B_R)$ и

$$(l_k^m f_{k,l})(r) = 0, \quad 0 \leq m \leq \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor. \quad (70)$$

Для $\nu \in \mathcal{N}_k(r)$ определим $c_{\nu,k,l}$ равенством (68). Произведем в (68) интегрирование по частям $2[s/2]$ раз с использованием равенств (39)–(41) и краевых условий (70). В результате получим

$$c_{\nu,k,l} = \frac{1}{\delta(\nu, \nu)(\nu(1-n-\nu))^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor}} \int_0^r (l_k^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} f_{k,l})(\theta) \psi_{\nu,k}(\theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta. \quad (71)$$

Данное представление и оценки (50), (53) показывают, что выполнена оценка (69) и функция φ , заданная равенством

$$\varphi(\theta) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r)} c_{\nu,k,l} \psi_{\nu,k}(\theta), \quad (72)$$

принадлежит $C^\alpha[0, R]$. Из (72) и леммы 4, (iv) находим

$$c_{\nu,k,l} = \frac{1}{\delta(\nu, \nu)} \int_0^r \varphi(\theta) \psi_{\nu,k}(\theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta. \quad (73)$$

Сравнивая (73), (68) и применяя лемму 4, (iii), делаем вывод, что $f_{k,l} = \varphi$ на $[0, r]$. При этом $(f_{k,l}(\theta_n) - \varphi(\theta_n))Y_l^{(k)}(\sigma) \in \mathcal{V}_r^\alpha(B_R)$ (см. (72) и (47)). Тогда по лемме 8 справедливо разложение (67).

Обратно, если имеет место (67) с оценкой коэффициентов (69), то, как и выше, ряд (67) сходится равномерно на компактах из B_R и $f^{k,l,l} \in \mathcal{V}_r(B_R)$. Отсюда следует, что $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$. Лемма доказана.

Следующий результат дает описание класса $\mathcal{V}_r(B_R)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имели место равенства (67) и (68), где ряд (67) сходится в пространстве $\mathcal{D}'(B_R)$ и $c_{\nu,k,l} = O(\nu^{n+k})$ при $\nu \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть функция φ_ε , $0 < \varepsilon < \pi$, удовлетворяет следующим условиям: $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ и $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon$; φ_ε является $O(n)$ -инвариантной; $\varphi_\varepsilon \geq 0$ и

$$\int_{\mathbb{S}^n} \varphi_\varepsilon(\xi) d\omega_n(\xi) = 1.$$

Пусть также $h \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$. Тогда для любого $r < R$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_r} |(h * \varphi_\varepsilon)(\xi) - h(\xi)| d\omega_n(\xi) = 0 \quad (74)$$

(см., например, [26, гл. 1, § 1]).

Для фиксированных k, l положим $F = f^{k,l,l}$, $F_\varepsilon = F * \varphi_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, R - r)$ (см. § 3). Поскольку свертка $O(n)$ -инвариантных функций на $\mathbb{S}^n$ также $O(n)$ -инвариантна, равенство (74) и лемма 7 показывают, что $F_\varepsilon \in \mathcal{V}_r^\infty(B_{R-\varepsilon})$ и $(F_\varepsilon)^{k,l,l} = F_\varepsilon$. Тогда по лемме 9 имеем

$$F_\varepsilon = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r)} c_{\nu,k,l}(F_\varepsilon) \Psi_\nu^{k,l} \quad \text{в } B_{R-\varepsilon}, \quad (75)$$

где

$$c_{\nu,k,l}(F_\varepsilon) = \frac{1}{\delta(\nu, \nu)} \int_{B_r} F_\varepsilon(\xi) \overline{\Psi_\nu^{k,l}(\xi)} d\omega_n(\xi) = O(\nu^{-m}) \quad \text{при } \nu \rightarrow +\infty$$

для любого $m > 0$. Теперь необходимость в теореме получается переходом в (75) к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в пространстве $\mathcal{D}'(B_R)$ (см. (74), (48) и (50)).

Достаточность. Требуемое утверждение легко следует из (47), леммы 7 и формулы (15).

§ 5. Доказательство основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для краткости обозначим через $\mathcal{V}_{r_1, r_2}(B_R)$ совокупность всех функций $f \in L^{1, \text{loc}}(B_R)$ с условием (6). Пусть $r_1 + r_2 \leq R$, $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \emptyset$ и $f \in \mathcal{V}_{r_1, r_2}(B_R)$. Покажем, что $f = 0$ в B_R , или, что равносильно, $f^{k, l, l} = 0$ при любых k, l . По теореме 4 имеем

$$f^{k, l, l} = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_1)} \alpha_{\nu, k, l} \Psi_{\nu}^{k, l} = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_2)} \beta_{\nu, k, l} \Psi_{\nu}^{k, l},$$

где ряды сходятся в $\mathcal{D}'(B_R)$ и

$$|\alpha_{\nu, k, l}| + |\beta_{\nu, k, l}| = O\left(\frac{1}{\nu^k \delta(\nu, \nu)}\right) = O(\nu^{n+k}) \quad \text{при } \nu \rightarrow +\infty. \quad (76)$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n + k + 2$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Положим $\lambda_j = -(1 + j)^{-1}$, $y_j = \frac{n(1+j)-j}{(1+j)^2}$ и

$$h = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_1)} \frac{\alpha_{\nu, k, l} \Psi_{\nu}^{k, l}}{(c_{\nu} - y_1) \cdots (c_{\nu} - y_m)} - \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_2)} \frac{\beta_{\nu, k, l} \Psi_{\nu}^{k, l}}{(c_{\nu} - y_1) \cdots (c_{\nu} - y_m)}, \quad (77)$$

где $c_{\nu} = \nu(1 - n - \nu)$ (см. (45), (52)). Из (76), (46), (50), (53) и (42) следует, что ряд в левой части (77) сходится равномерно на компактах из B_R , $h \in C(B_R)$ и

$$(L - y_1 \text{Id}) \cdots (L - y_m \text{Id})h = 0 \quad (78)$$

в пространстве $\mathcal{D}'(B_R)$. В силу эллиптичности оператора L функция h принадлежит $C^{\infty}(B_R)$ и (78) справедливо в обычном смысле (см. [24, гл. 8.6]). Поскольку функция h является гладкой в нуле и числа y_j различны, из равенств (78) и (44) имеем представление

$$h = \sum_{j=1}^m \gamma_j \Psi_{\lambda_j}^{k, l}, \quad \gamma_j \in \mathbb{C}. \quad (79)$$

Приравнивая правые части разложений (77), (79) и интегрируя их по сфере $S_t(\eta)$, где $\eta \in S_{r_2}$, $0 < t < r_1$, при использовании (47) получаем

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j \Psi_{\lambda_j}^{k, l}(\eta) \psi_{\lambda_j, 0}(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_1)} \frac{\alpha_{\nu, k, l} \Psi_{\nu}^{k, l}(\eta) \psi_{\nu, 0}(t)}{(c_{\nu} - y_1) \cdots (c_{\nu} - y_m)}. \quad (80)$$

Рассмотрим сначала случай $k = 0$. По лемме 4, (iv) из (80) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{\delta(\nu, \nu) \alpha_{\nu, 0, l} \Psi_{\nu}^{0, l}(\eta)}{(c_{\nu} - y_1) \cdots (c_{\nu} - y_m)} \\ &= (\sin r_1)^{n-1} \nu(1 - \nu - n) \psi_{\nu, 1}(r_1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j \Psi_{\lambda_j}^{0, l}(\eta) \psi_{\lambda_j, 0}(r_1)}{(\lambda_j - \nu)(\lambda_j + \nu + n - 1)}. \end{aligned} \quad (81)$$

Отметим, что согласно (52) имеем $\psi_{\lambda_j, 0}(r_1) \neq 0$ для любого $j = 1, \dots, m$.

Предположим, что не все числа $\gamma_j \Psi_{\lambda_j}^{0,l}(\eta)$ равны нулю. Тогда из (54) видно, что при всех достаточно больших $\nu \in \mathcal{N}_0(r_1)$ модуль правой части в равенстве (81) оценивается снизу величиной $c\nu^{-2m-\frac{n-3}{2}}$, где $c > 0$. С другой стороны, в соответствии с (76) и (49) модуль левой части в (81) есть $O(\nu^{-2m-\frac{n-1}{2}})$. Сравнивая обе оценки, получаем противоречивое соотношение $\nu = O(1)$, $\nu \in \mathcal{N}_0(r_1)$. Итак, $\gamma_j \Psi_{\lambda_j}^{0,l}(\eta) = 0$ для любого $j = 1, \dots, m$, и ввиду произвольности $\eta \in S_{r_2}$ в (81) имеем $\alpha_{\nu,0,l} \psi_{\nu,0}(r_2) = 0$ при $\nu \in \mathcal{N}_0(r_1)$. Поскольку $\mathcal{N}_0(r_1, r_2) = \emptyset$, это возможно только в случае, когда $\alpha_{\nu,0,l} = 0$, $\nu \in \mathcal{N}_0(r_1)$. Поэтому $f^{0,l,l} = 0$ в B_R .

Если $k \geq 1$, то, применяя к обоим частям (80) оператор $d_{k-1} \dots d_0$ и повторяя рассуждения для случая $k = 0$, с учетом (41), (76) и (50) имеем $f^{k,l,l} = 0$, что и утверждалось.

Пусть теперь $r_1 + r_2 > R$ и $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \emptyset$. В этом случае существует ненулевая функция $f(\xi) = \varphi(\theta_n) \in C^\infty(B_R)$ такая, что $f * \chi_{r_i} = 0$ в B_{R-r_i} , $i = 1, 2$ (см. [17, доказательство теоремы 2.1, (5)]). Тогда φ не является тождественной константой и

$$\varphi(\theta_n) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_1(r_1)} \alpha_\nu \psi_{\nu,0}(\theta_n) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_1(r_2)} \beta_\nu \psi_{\nu,0}(\theta_n),$$

где $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| = O(\nu^{-m})$ при $\nu \rightarrow +\infty$ и любом $m > 0$ (см. [17, лемма 8.3]). Используя (41) и утверждение леммы 9 при $k = 1$, отсюда заключаем, что ненулевая функция $\varphi'(\theta_n) Y_1^{(1)}(\sigma)$ принадлежит $(\mathcal{V}_{r_1, r_2} \cap C^\infty)(B_R)$. Таким образом, утверждение (ii) доказано.

Далее, пусть $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \emptyset$. Тогда $\mathcal{N}_k(r_1, r_2) \neq \emptyset$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $\nu \in \mathcal{N}_k(r_1, r_2)$, то ненулевая вещественно аналитическая в B_π функция $\Psi_\nu^{k,l}$ принадлежит $\mathcal{V}_{r_1, r_2}(B_\pi)$. Отсюда следует утверждение (iii), и теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $f \in C^\infty(B_R)$ и выполнены условия (6)–(8). Докажем, что $f = 0$. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$. По лемме 9 для $r = r_1$ имеет место разложение (67), в котором коэффициенты $c_{\nu,k,l}$ удовлетворяют равенству (71). Из (71), (44) и (8) следует, что при любом $q \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|c_{\nu,k,l}| \leq c\nu^{n+k-2q} M_q \quad (82)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от q . Используя оценку (50), продолжим $f^{k,l,l}$ на B_π с помощью равенства (67). Для $\eta \in S_{r_2}$, $t \in (0, \pi)$ положим

$$\begin{aligned} U_\eta(t) &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_1)} c_{\nu,k,l} \Psi_\nu^{k,l}(\eta) \psi_{\nu,0}(t), \\ W_\eta(t) &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_1)} c_{\nu,k,l} \Psi_\nu^{k,l}(\eta) \cos\left(\nu + \frac{n-1}{2}\right)t. \end{aligned} \quad (83)$$

Поскольку $f \in \mathcal{V}_{r_2}(B_R)$, из леммы 7, (iv) имеем $U_\eta(t) = 0$ при всех $\eta \in S_{r_2}$, $t \in (0, R - r_2)$. Согласно формуле Мелера–Дирихле (см. (38)) отсюда и из

равенства (83) находим

$$\int_0^\theta (\cos t - \cos \theta)^{\frac{n-3}{2}} W_\eta(t) dt = 0$$

при $\theta \in (0, R - r_2)$. Это уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ограниченным ядром, откуда $W_\eta(t) = 0$ при $\eta \in S_{r_2}$, $t \in (0, R - r_2)$. Оценки (82) и (49) показывают, что W_η принадлежит квазианалитическому классу функций на $\mathbb{R}^1$ (см. [24, теорема 1.3.8]), откуда $W_\eta = 0$ на $\mathbb{R}^1$. Снова применяя формулу Мелера–Дирихле, получаем $U_\eta(t) = 0$ при всех $\eta \in S_{r_2}$, $t \in (0, \pi)$. Тогда из равенства (68) имеем $c_{\nu,k,l} \Psi_\nu^{k,l}(\eta) = 0$ при всех $\nu \in \mathcal{N}_k(r_1)$, $\eta \in S_{r_2}$. Учитывая, что $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \emptyset$, отсюда заключаем, что $c_{\nu,k,l} = 0$. Таким образом, $f = 0$, и утверждение (i) теоремы доказано.

Докажем утверждение (ii). Пусть $R < R' < \min\{r_1 + r_2, \pi\}$. Из теоремы 1 следует, что существует ненулевая функция $f_1 \in C^\infty(B_{R'})$, удовлетворяющая (6). Пусть $0 < \varepsilon < R' - R$ и $\{M_q\}_{q=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющая (9). Для функции $\varphi \in \mathcal{D}_\natural(B_\varepsilon)$ обозначим через $\mathcal{Z}(\tilde{\varphi})$ множество всех комплексных нулей $\tilde{\varphi}$. Тогда существуют функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_\natural(B_\varepsilon)$ такие, что $\mathcal{Z}(\tilde{\varphi}_1) \cap \mathcal{Z}(\tilde{\varphi}_2) = \emptyset$ и

$$|(L^q \varphi_1)(\xi)| + |(L^q \varphi_2)(\xi)| \leq M_q \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \xi \in \mathbb{S}^n$$

(см. [8, следствие 19.2]). Используя лемму 7, получаем, что для достаточно малого $\delta > 0$ функции $\delta f_1 * \varphi_1$ и $\delta f_1 * \varphi_2$ удовлетворяют (6) и (10). Кроме того, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ эти функции не могут быть нулевыми одновременно, поскольку $\mathcal{Z}(\tilde{\varphi}_1) \cap \mathcal{Z}(\tilde{\varphi}_2) = \emptyset$ (см. [8, теорема 21.3]). Следовательно, хотя бы одна из этих функций удовлетворяет требуемым условиям; таким образом, теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $f \in C^\infty(B_R)$ и выполнены условия (6)–(8), (11). Покажем, что $f = 0$. Из доказательства теоремы 2 видно, что для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имеет место разложение

$$f^{k,l,l} = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)} c_{\nu,k,l} \Psi_\nu^{k,l}, \quad (84)$$

где ряд сходится равномерно на компактах из B_R . Пусть $\nu \in \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2)$, и пусть $g_\nu \in \mathcal{D}(B_\varepsilon)$ – функция из леммы 6. Тогда для любого $q \in \mathbb{Z}_+$ из соотношений (84) и (42) имеем

$$\int_{B_\varepsilon} (L^q f^{k,l,l})(\xi) g_\nu(\xi) d\omega_n(\xi) = c_{\nu,k,l} (\nu(1 - n - \nu))^q \int_{B_\varepsilon} \Psi_\nu^{k,l}(\xi) g_\nu(\xi) d\omega_n(\xi).$$

Учитывая (16), отсюда и из (11) получаем $c_{\nu,k,l} = 0$. В силу произвольности ν, k, l это означает, что $f = 0$ и утверждение (i) теоремы доказано.

Далее, рассмотрим функцию $f = \Psi_\lambda^{k,1}$ при $k = \infty$. Из леммы 9 и (42) следует, что f удовлетворяет (6) и выполнено (12). Таким образом, теорема полностью доказана.

Список литературы

1. J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten", *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl.*, **69** (1917), 262–277.
2. P. Ungar, "Freak theorem about functions on a sphere", *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 100–103.
3. R. Schneider, "Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres", *J. Math. Anal. Appl.*, **26** (1969), 381–384.
4. C. A. Berenstein, L. Zalcman, "Pompeiu's problem on spaces of constant curvature", *J. Analyse Math.*, **30**:1 (1976), 113–130.
5. C. A. Berenstein, L. Zalcman, "Pompeiu's problem on symmetric spaces", *Comment. Math. Helv.*, **55**:1 (1980), 593–621.
6. L. Zalcman, "A bibliographic survey of the Pompeiu problem", *Approximation by solutions of partial differential equations* (Hanstholm, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **365**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, 185–194.
7. V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
8. V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, London, 2009.
9. E. Badertscher, "The Pompeiu problem on locally symmetric spaces", *J. Anal. Math.*, **57** (1991), 250–281.
10. M. L. Agranovsky, V. V. Volchkov, L. A. Zalcman, "Conical uniqueness sets for the spherical Radon transform", *Bull. London Math. Soc.*, **31**:2 (1999), 231–236.
11. В. В. Волчков, "Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах", *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 15–34; англ. пер.: V. V. Volchkov, "A definitive version of the local two-radii theorem", *Sb. Math.*, **186**:6 (1995), 783–802.
12. В. В. Волчков, "О множествах инъективности преобразования Радона на сферах", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 63–76; англ. пер.: V. V. Volchkov, "Injectivity sets for the Radon transform over a sphere", *Izv. Math.*, **63**:3 (1999), 481–493.
13. L. Zalcman, "Analyticity and the Pompeiu problem", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **47**:3 (1972), 237–254.
14. J. D. Smith, "Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72**:3 (1972), 403–416.
15. L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor, "Spectral synthesis and the Pompeiu problem", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **23**:3 (1973), 125–154.
16. C. A. Berenstein, R. Gay, "A local version of the two-circles theorem", *Israel J. Math.*, **55**:3 (1986), 267–288.
17. Вит. В. Волчков, "Локальная теорема о двух радиусах на сфере", *Алгебра и анализ*, **16**:3 (2004), 24–55; англ. пер.: Vit. V. Volchkov, "A local two-radii theorem on the sphere", *St. Petersburg Math. J.*, **16**:3 (2005), 453–475.
18. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1991; англ. пер.: N. Ya. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
19. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, 2, Наука, М., 1973–1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vols. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
20. С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.

21. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
22. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964; пер. с англ.: R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19**, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
23. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 4-е изд., Наука, М., 1976; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. I, II, Graylock Press, Albany, NY, 1957, 1961.
24. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vol. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
25. M. L. Agranovsky, E. T. Quinto, “Geometry of stationary sets for the wave equation in $\mathbb{R}^n$. The case of finitely supported initial data”, *Duke Math. J.*, **107**:1 (2001), 57–84.
26. С. Ленг, $SL_2(\mathbb{R})$, Мир, М., 1977; пер. с англ.: S. Lang, $SL_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley, Reading, MA, 1975.

ВАЛЕРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ВОЛЧКОВ
 (VALERIY V. VOLCHKOV)
 Донецкий национальный университет, Украина
 E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Поступило в редакцию
 18.06.2012

ВИТАЛИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ВОЛЧКОВ
 (VITALY V. VOLCHKOV)
 Донецкий национальный университет, Украина
 E-mail: v.volchkov@mail.donnu.edu.ua