Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, Неразветвленное двумерное соответствие
Ленгландса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, вы-
пуск 4, 73–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8013>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:14:44

УДК 512.75+512.585

Д. В. Осипов

Неразветвленное двумерное соответствие Ленглендса

Описано неразветвленное соответствие Ленглендса для двумерных локальных полей, построен категорный аналог неразветвленных представлений основной серии и изучены его свойства. Для этого используется конструкция некоторого центрального расширения, для которого (и других центральных расширений) доказаны некоммутативные законы взаимности (т. е. расщепление центральных расширений над некоторыми подгруппами) для арифметических поверхностей и проективных поверхностей над конечным полем, связывающие центральные расширения, построенные локально и глобально.

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: 2-векторные пространства, двумерные локальные поля, высшие адели, обобщение программы Ленглендса, двумерные некоммутативные законы взаимности.

DOI: 10.4213/im8013

Посвящается И. Р. Шафаревичу по случаю его девяностолетия

§ 1. Введение

М. М. Капранов в 1995 г. предложил в [1] гипотетическое обобщение программы Ленглендса на двумерный случай. В классическом соответствии Ленглендса рассматривается одномерная база: числовые поля или поля функций алгебраических кривых, определенных над конечным полем. В работе [1] ставился вопрос о существовании аналога программы Ленглендса для арифметических поверхностей или алгебраических поверхностей, определенных над конечным полем. В [1] не было конструкций, но был разобран случай абелева двумерного (локального) соответствия Ленглендса.

Основная идея, предлагаемая в [1], состоит в том, что n -мерному представлению группы $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ должно некоторым образом соответствовать (категорное) представление группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, если K – двумерное локальное поле¹, или группы $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A})$, если K – поле рациональных функций арифметической поверхности либо проективной алгебраической поверхности над конечным

¹В настоящей работе под двумерным локальным полем K мы подразумеваем полное поле дискретного нормирования с полем вычетов $\overline{K}$, при этом $\overline{K}$ – одномерное локальное поле, т. е. являющееся полным полем дискретного нормирования с конечным полем вычетов $\mathbb{F}_q$. (Начальный обзор базовых понятий двумерных локальных полей и двумерных аделей содержится в [2].)

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00145-а, 11-01-12098-офи-м-2011, 12-01-33024 мол_а_вед), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-5139.2012.1).

полем, в 2-векторном пространстве. (Здесь $\mathbb{A}$ – кольцо двумерных аделей Паршина–Бейлинсона [3] рассматриваемой арифметической поверхности или проективной алгебраической поверхности над конечным полем. Это кольцо в случае арифметической поверхности должно учитывать слои над бесконечными (архимедовыми) точками базы; см. [4, пример 11], [5].)

Существование одномерного (классического) соответствия Ленглендса в случае $n = 1$ есть утверждение одномерной (обычной) теории полей классов. Двумерная теория полей классов была развита А. Н. Паршиным, К. Като и другими (см. обзор [6]). В локальном случае она сводится к описанию абелевой части группы Галуа двумерного локального поля. Это описание основано на построении отображения взаимности

$$K_2(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K), \quad (1)$$

где K^{ab} – максимальное абелево расширение двумерного локального поля K .

Отметим, что недавно А. Н. Паршин сформулировал в [5] гипотезу о прямом образе автоморфных форм, которая связывает абелево двумерное соответствие Ленглендса с классическим соответствием Ленглендса в размерности один. Из этой гипотезы вытекает классическая гипотеза Хассе–Вейля о существовании функционального уравнения для L -функций арифметических поверхностей.

В настоящей статье мы описываем неразветвленное соответствие Ленглендса для двумерных локальных полей, строим категорный аналог неразветвленных представлений основной серии для группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, где K – двумерное локальное поле и группа $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ действует на абелевой $\mathbb{C}$ -линейной категории, и изучаем свойства построенных категорных представлений. Основным инструментом для этого является конструкция некоторого центрального расширения группы $\mathrm{GL}_2(K)$ группой $\mathbb{R}_+^*$. Для этого (и других) центральных расширений мы доказываем некоммутативные законы взаимности (т. е. расщепление центральных расширений над некоторыми подгруппами) для арифметических поверхностей и проективных поверхностей над конечным полем. Эти законы взаимности связывают центральные расширения, построенные локально и глобально.

Статья организована следующим образом.

В § 2 напомним абелев случай двумерного локального соответствия Ленглендса. В п. 2.1 устанавливается связь между одномерными 2-представлениями группы и центральными расширениями этой же группы. В п. 2.2 вычисляются вторые когомологии группы $\mathrm{GL}_n(K)$ для бесконечного поля K .

В § 3 рассматриваются центральные расширения, построенные по C_2 -пространствам. В п. 3.1 напомним определение категории C_2^{fin} . Примерами объектов этой категории являются двумерные локальные поля, кольца аделей арифметических поверхностей или поверхностей над конечным полем. В п. 3.2 строятся некоторые центральные расширения группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$, где $\mathbb{A}_\Delta$ – подкольцо в кольце аделей арифметической поверхности или поверхности над конечным полем. В п. 3.3 построенные центральные расширения изучаются для случая, когда $\mathbb{A}_\Delta$ – конечное произведение двумерных локальных полей. В п. 3.4 строятся и изучаются некоторые центральные расширения групп

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}((t)))$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}((t)))$. Эти центральные расширения используются для построения центральных расширений группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}})$, где $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ – арифметическое кольцо аделей арифметической поверхности X (т. е. кольцо аделей, учитывающее архимедовы слои). В п. 3.5 мы доказываем некоммутативные законы взаимности: в теореме 1 мы доказываем, что центральные расширения, построенные по всему кольцу аделей $\mathbb{A}$ проективной поверхности над конечным полем или арифметической поверхности, расщепляются над некоторыми подгруппами группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Эти подгруппы играют важную роль при описании полулокальной ситуации на рассматриваемой схеме и связаны либо с замкнутыми точками, либо с целыми одномерными подсхемами на этой схеме.

В § 4 рассматривается неразветвленное соответствие Ленглендса для двумерных локальных полей. В п. 4.1 напомним классическую конструкцию этого соответствия для одномерного локального поля. В п. 4.2 напомним известные факты, нужные нам далее, о действии группы на k -линейной категории, где k – поле. В п. 4.3 строится категорный аналог неразветвленных представлений основной серии для группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, где K – двумерное локальное поле. Здесь же определяется понятие гладкого действия группы $\mathrm{GL}_l(K)$ на k -линейной абелевой категории (которую мы называем *обобщенным 2-векторным пространством*), так что построенный категорный аналог представлений основной серии будет гладким (в этом случае $k = \mathbb{C}$). Это и другие свойства данных представлений доказываются в теореме 2. Отметим, что для построения категорных представлений основной серии для группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ используется аналог индуцированного представления (для категорий), а также центральное расширение группы $\mathrm{GL}_2(K)$, построенное в § 3 и связанное с неразветвленной теорией полей классов для поля K . В п. 4.4 обсуждается некоторая гипотеза о связи гладкого сферического действия группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ на произвольной $\mathbb{C}$ -линейной абелевой категории и категорного представления основной серии группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ (это представление было построено в п. 4.3).

Настоящая статья была в значительной степени написана в течение визита автора в Математический институт им. Макса Планка в Бонне в марте 2012 г. Автор выражает глубокую признательность этому институту за превосходные условия для работы. Я благодарен также С. О. Горчинскому и А. Н. Паршину за ценные замечания после моего доклада на семинаре по арифметической алгебраической геометрии в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

§ 2. Абелев случай двумерного соответствия Ленглендса

2.1. Центральные расширения и одномерные 2-векторные пространства. Напомним, что конечномерное 2-векторное пространство $\mathcal{C}$ над полем k – это полупростая абелева k -линейная категория с конечным множеством классов изоморфизма простых объектов, так что для любого простого объекта $E \in \mathcal{C}$ выполнено $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, E) \simeq k$ (см. [7]). (Под k -линейной категорией мы подразумеваем категорию $\mathcal{C}$, в которой для любых двух объектов A и B множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ есть k -векторное пространство, так что композиция морфизмов билинейна. Категория полупроста, если любой объект в ней есть конечная прямая сумма простых объектов.) Количество элементов в множестве классов

изоморфизма простых объектов называется *размерностью* 2-векторного пространства. Легко понять, что n -мерное 2-векторное пространство эквивалентно категории $(\text{Vect}_k^{\text{fin}})^n$, где $\text{Vect}_k^{\text{fin}}$ – категория конечномерных k -векторных пространств.

Рассмотрим одномерное 2-векторное пространство $\mathcal{C}$, в котором все простые объекты изоморфны и любой k -линейный эндифунктор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ с точностью до изоморфизма задается конечномерным векторным пространством над полем k :

$$V = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F(E)),$$

где E – простой объект в $\mathcal{C}$. Обратно, одномерное 2-векторное пространство эквивалентно категории $\text{Vect}_k^{\text{fin}}$. Поэтому любое конечномерное векторное пространство $V \in \text{Vect}_k^{\text{fin}}$ задает k -линейный эндифунктор на категории $\text{Vect}_k^{\text{fin}}$ по правилу

$$X \mapsto V \otimes_k X, \quad X \in \text{Vect}_k^{\text{fin}}.$$

Пусть G – группа. Тогда *представлением группы G в 2-векторном пространстве $\mathcal{C}$ (произвольной размерности)* называется сильно моноидальный функтор из дискретной категории G (с объектами, являющимися элементами из G и только единичными морфизмами объектов) в моноидальную категорию функторов, которые являются k -линейными эквивалентностями категории $\mathcal{C}$ (см. [8], [1, п. 5.3], а также п. 4.2 далее). Поэтому любое 2-представление группы G в одномерном 2-векторном пространстве с точностью до эквивалентности определяется заданием 1-мерных k -векторных пространств V_g для каждого элемента g группы G вместе с естественными изоморфизмами

$$V_{g_1} \otimes_k V_{g_2} \longrightarrow V_{g_1 g_2},$$

удовлетворяющими условию ассоциативности для любых элементов g_1, g_2, g_3 из группы G . Эти данные соответствуют центральному расширению группы G

$$1 \longrightarrow k^* \longrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1,$$

где k^* -торсор $\pi^{-1}(g)$ равен $V_g \setminus 0$. Отсюда получается, что множество классов эквивалентностей одномерных 2-представлений группы G совпадает с множеством $H^2(G, k^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Категория представлений произвольной группы (даже более, произвольной 2-группы) в конечномерном 2-векторном пространстве подробно изучалась в [9].

2.2. Вторые кохомологии группы $\text{GL}_n(K)$. Пусть A – любая абелева группа, K – произвольное бесконечное поле. Следуя работе [10, § 1] (см. также [11]), построим явное отображение

$$\text{Hom}(K_2(K), A) \longrightarrow H^2(\text{GL}_2(K), A). \quad (2)$$

Рассмотрим универсальное центральное расширение

$$1 \longrightarrow K_2(K) \longrightarrow \text{St}(K) \longrightarrow \text{SL}(K) \longrightarrow 1, \quad (3)$$

где $\text{St}(K)$ – группа Стейнберга поля K и $\text{SL}(K) = \varinjlim_n \text{SL}_n(K)$, и центральное расширение, которое получается обратным образом из центрального расширения (3) при вложении группы $\text{SL}_2(K)$ в группу $\text{SL}(K)$:

$$1 \longrightarrow K_2(K) \longrightarrow \widehat{\text{SL}_2(K)} \longrightarrow \text{SL}_2(K) \longrightarrow 1.$$

При этом имеем

$$K_2(K) = H_2(\text{SL}(K), \mathbb{Z}) = H_2(\text{SL}_2(K), \mathbb{Z})_{K^*}. \quad (4)$$

Выполнено $\text{GL}_2(K) = \text{SL}_2(K) \rtimes K^*$, где группа $K^* = \text{GL}(1, K) \hookrightarrow \text{GL}_2(K)$ (вложенная в левый верхний угол) действует на группе $\text{SL}_2(K)$ посредством сопряжений, которые являются внутренними автоморфизмами в группе $\text{GL}_2(K)$. Группа K^* действует также сопряжениями на группе $\text{SL}(K)$. В силу универсальности центрального расширения (3) получаем подъем действия группы K^* на $\text{St}(K)$, ограничение которого на ядро $K_2(K)$ будет тривиальным по формуле (4). Отсюда получаем центральное расширение

$$1 \longrightarrow K_2(K) \longrightarrow \widehat{\text{GL}_2(K)} \xrightarrow{\pi} \text{GL}_2(K) \longrightarrow 1, \quad (5)$$

которое расщепляется над подгруппой K^* , и $\widehat{\text{GL}_2(K)} = \widehat{\text{SL}_2(K)} \rtimes K^*$. Универсальный символ $(x, y) \in K_2(K)$ получается при этом следующим образом (см. [10, § 1.9]):

$$(x, y) = \left\langle \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (6)$$

где для любых коммутирующих матриц A и B из $\text{GL}(2, K)$ определен элемент $\langle A, B \rangle = [\hat{A}, \hat{B}]$ из $K_2(K)$, $\pi(\hat{A}) = A$, $\pi(\hat{B}) = B$, который не зависит от выбора подходящих элементов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ из группы $\widehat{\text{GL}_2(K)}$. Теперь, применяя элемент из $\text{Hom}(K_2(K), A)$ к ядру центрального расширения (5), получаем явное описание отображения (2).

С другой стороны, из спектральной последовательности Хохшильда–Серра получается точная последовательность:

$$0 \longrightarrow H^2(K^*, A) \longrightarrow H^2(\text{GL}_2(K), A) \xrightarrow{\alpha} H^2(\text{SL}_2(K), A)^{K^*}.$$

(Заметим, что $H^1(\text{SL}_2(K), A) = \text{Hom}(\text{SL}_2(K), A) = 0$, так как группа $\text{SL}_2(K)$ совершенна.)

По формуле универсальных коэффициентов и так как группа $\text{SL}_2(K)$ совершенна, получаем

$$H^2(\text{SL}_2(K), A) = \text{Hom}(H_2(\text{SL}_2(K), \mathbb{Z}), A).$$

Следовательно,

$$H^2(\text{SL}_2(K), A)^{K^*} = \text{Hom}(H_2(\text{SL}_2(K), \mathbb{Z})_{K^*}, A) = \text{Hom}(K_2(K), A).$$

Кроме того, отображение (2) является сечением отображения α . Суммируя изложенное выше, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – абелева группа, K – бесконечное поле. Тогда

$$H^2(\mathrm{GL}_2(K), A) = H^2(K^*, A) \oplus \mathrm{Hom}(K_2(K), A).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично можно доказать более общее утверждение для любого $n \geq 2$ и бесконечного поля K :

$$H^2(\mathrm{GL}_n(K), A) = H^2(K^*, A) \oplus \mathrm{Hom}(K_2(K), A). \quad (7)$$

Комбинируя полученный результат из предложения 1 с отображением взаимности (1), получаем отображение из характеров группы Галуа двумерного локального поля K в одномерные 2-представления группы $\mathrm{GL}(2, K)$. Отсюда, с учетом топологии на группе $K_2(K)$, получаем полное описание абелева двумерного соответствия Ленглендса.

§ 3. C_2 -пространства и центральные расширения

3.1. Категория C_2^{fin} . В работах [12] и [4, п. 3.1] были построены категории C_n^{fin} для $n \geq 0$. Нас будут интересовать категории C_2^{fin} . Они строятся индуктивно.

Категория C_0^{fin} – это категория конечных абелевых групп.

Категория C_1^{fin} состоит из объектов (I, F, V) – фильтрованных абелевых групп. При этом V – абелева группа; I – частично упорядоченное множество, так что для любых элементов $i, j \in I$ существуют элементы $k, l \in I$ такие, что $k \leq i \leq l$, $k \leq j \leq l$; F – функция из множества I в множество подгрупп группы V , так что $F(i) \subset F(j)$, если $i \leq j$. Кроме того, потребуем, чтобы $\bigcap_{i \in I} F(i) = 0$ и $\bigcup_{i \in I} F(i) = V$. Индуктивный шаг заключается в том, что группа $F(j)/F(i)$ для любых $j \geq i \in I$ должна быть конечной, т. е. объектом категории C_0^{fin} . Морфизмы между построенными объектами копируют определение непрерывных морфизмов в одномерных локальных полях. Более точно, если $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ – объекты из C_1^{fin} , то $\mathrm{Hom}_{C_1^{\mathrm{fin}}}(E_1, E_2)$ состоит из тех гомоморфизмов абелевых групп $f: V_1 \rightarrow V_2$, для которых выполнено условие: для любого элемента $j \in I_2$ существует элемент $i \in I_1$ с условием $f(F_1(i)) \subset F_2(j)$. Примерами объектов из категории C_1^{fin} являются одномерные локальные поля, кольца аделей кривых над конечными полями, а также кольца конечных аделей числовых полей.

Категория C_2^{fin} состоит из объектов (I, F, V) – фильтрованных абелевых групп, но мы требуем, чтобы для любых элементов $i \leq j \in I$ на группе $F(j)/F(i)$ была задана структура объекта из категории C_1^{fin} , кроме того, необходимо некоторое согласование структур объектов из категории C_1^{fin} для любых $i \leq j \leq k \in I$ (см. точное определение в [4, определение 4]). Морфизмы между объектами в категории C_2^{fin} определяются индуктивно при помощи морфизмов из категории C_1^{fin} , заданных на факторгруппах фильтраций (см. точное определение в [4, определение 5]). Примерами объектов из категории C_2^{fin} являются двумерные локальные поля, кольца аделей алгебраических поверхностей над конечным полем и кольца аделей арифметических поверхностей (без учета слов над архимедовыми точками); см. [12, теорема 2.1], [4, пример 1].

3.2. Центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$. Пусть K – одномерное локальное поле с конечным полем вычетов $\mathbb{F}_q$. Тогда существует гомоморфизм

$$\mathrm{GL}(n, K) \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad A \mapsto q^{\nu(\det(A))}, \quad (8)$$

где ν – дискретное нормирование поля K . Видно, что этот гомоморфизм возникает из гомоморфизма $K^* \rightarrow \mathbb{Z}$, т.е. из элемента $H^1(K^*, \mathbb{Z})$. Кроме того, существует гомоморфизм $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}^{\mathrm{fin}}) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, где $\mathbb{A}^{\mathrm{fin}}$ – кольцо конечных аделей числового поля или кривой над конечным полем, который получается перемножением локальных отображений (8).

Пусть теперь X – целая нормальная двумерная схема конечного типа над $\mathbb{Z}$ (например, поверхность над конечным полем или арифметическая поверхность). Пусть Δ – некоторое подмножество в множестве всех пар $x \in C$, где $x \in X$ – замкнутая точка и C – целая одномерная подсхема на X , содержащая точку x . Определим внутри кольца $\prod_{x \in C} K_{x,C}$ следующие подкольца:

$$\mathbb{A}_\Delta = \mathbb{A}_X \cap \prod_{\{x \in C\} \in \Delta} K_{x,C}, \quad \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta} = \mathbb{A}_X \cap \prod_{\{x \in C\} \in \Delta} \mathcal{O}_{K_{x,C}},$$

где $\mathbb{A}_X$ – кольцо аделей схемы X , кольцо $^2 K_{x,C} = \prod_i K_i$ – конечное произведение двумерных локальных полей K_i , построенное по паре $x \in C$, $\mathcal{O}_{K_{x,C}} = \prod_i \mathcal{O}_{K_i}$, где $\mathcal{O}_{K_i}$ – кольцо дискретного нормирования ранга 1 поля K_i . Отметим, что если $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ и $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\Delta &= \mathbb{A}_{\Delta_1} \times \mathbb{A}_{\Delta_2}, & \mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta} &= \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\Delta_1}} \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\Delta_2}}, \\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta) &= \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\Delta_1}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\Delta_2}). \end{aligned} \quad (9)$$

Мы построим для любого $n \geq 1$ центральное расширение

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*} \xrightarrow{\theta} \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta) \longrightarrow 1. \quad (10)$$

Рассмотрим на $\mathbb{A}_\Delta^n$ следующую C_2^{fin} -структуру $(I, F, \mathbb{A}_\Delta^n)$, где множество

$$I = \{\mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta}\text{-подмодули } T \subset \mathbb{A}_\Delta^n \mid T = g\mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta}^n \text{ для некоторого } g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)\}$$

упорядочено вложениями подмодулей, функция F отображает элемент из I в соответствующий подмодуль из $\mathbb{A}_\Delta^n$. Для любых элементов $i \leq j \in I$ имеем, что $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta}$ -модуль $F(j)/F(i)$ является локально компактной абелевой группой, где топология получается как индуцированная, а затем как фактортопология с топологической группой $\mathbb{A}_\Delta^n$. (Группа $\mathbb{A}_\Delta$ наделена естественной топологией итерированных индуктивных и проективных пределов в силу своей конструкции.) Рассмотрим на $F(j)/F(i)$ фильтрацию, задаваемую открытыми компактными подгруппами. Эта фильтрация задает на $F(j)/F(i)$ структуру объекта из категории C_1^{fin} . Эти структуры будут согласованы в смысле C_2^{fin} -структуры для различных $i \leq j \leq k \in I$.

Для любой локально компактной абелевой группы E пусть $\mu(E)$ – это канонический $\mathbb{R}_+^*$ -торсор ненулевых мер Хаара на E . Для любых элементов $i, j \in I$ рассмотрим $\mathbb{R}_+^*$ -торсор $\mu(F(i) \mid F(j))$, который канонически определяется следующими условиями:

²См. также далее начало п. 3.3, где подробно описывается это кольцо.

- 1) $\mu(F(i) \mid F(j)) \otimes \mu(F(j) \mid F(k)) = \mu(F(i) \mid F(k))$ для любых $i, j, k \in I$;
- 2) $\mu(F(i) \mid F(j)) = \mu(F(j)/F(i))$ для любых $i \leq j \in I$.

Любой элемент $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$ переводит $\mathbb{R}_+^*$ -торсор $\mu(F(i) \mid F(j))$ в $\mathbb{R}_+^*$ -торсор $\mu(gF(i) \mid gF(j))$. Определим группу

$$\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*} = \{(g, \mu) \mid g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta), \mu \in \mu(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta}^n \mid g\mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta}^n)\}.$$

Закон умножения в этой группе определяется как

$$(g_1, \mu_1)(g_2, \mu_2) = (g_1 g_2, \mu_1 \otimes g_1(\mu_2))$$

с очевидными единичным элементом и конструкцией обратного элемента. Отображение $\theta: (g, \mu) \mapsto g$ задает центральное расширение (10).

Имеем $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_\Delta) \rtimes \mathbb{A}_\Delta^*$ (группа $\mathbb{A}_\Delta^*$ вложена в левый верхний угол группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$; см. также п. 2.2). При помощи центрального расширения (10) действие группы $\mathbb{A}_\Delta^*$ однозначно поднимается до действия на группе $\theta^{-1}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_\Delta))$ (при помощи внутренних сопряжений в группе $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*}$). Ограничение этого действия на ядро $\mathbb{R}_+^*$ есть тривиальное действие. Определим группу

$$\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*} = \theta^{-1}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_\Delta)) \rtimes \mathbb{A}_\Delta^*.$$

Получаем центральное расширение

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta) \longrightarrow 1, \quad (11)$$

которое расщепляется над подгруппой $\mathbb{A}_\Delta^*$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*}$ не изоморфно центральному расширению $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*}$, так как первое центральное расширение расщепляется над подгруппой $\mathbb{A}_\Delta^*$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$, а второе центральное расширение не расщепляется над этой же подгруппой. Последнее следует, например, из явного вычисления коммутатора подъема некоторых элементов из коммутативной подгруппы $\mathbb{A}_\Delta^*$. Этот коммутатор будет не равен нулю на некоторых элементах, но был бы тождественно равен нулю на всех элементах в случае расщепимости центрального расширения.

Для определения центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*}$ мы вкладывали группу $\mathbb{A}_\Delta^*$ в левый верхний угол группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$. Если вложить эту группу в любое другое i -е (где $2 \leq i \leq n$) место на диагонали, то вновь полученное центральное расширение группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$ будет канонически изоморфно центральному расширению $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*}$ той же группы. Покажем это, предположив для простоты $n = 2$. Зафиксируем матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, которая сопрягает матрицы $\mathrm{diag}(b, 1)$ и $\mathrm{diag}(1, b)$ в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\Delta)$. Пусть ϕ_A – внутренний автоморфизм группы $\theta^{-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\Delta))$, задаваемый подъемом $\bar{A}$ элемента A в эту группу (автоморфизм ϕ_A не зависит от выбора подъема). Гомоморфизмы $\mathbb{A}_\Delta^* \rightarrow \mathrm{Aut}(\theta^{-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\Delta)))$, построенные из вложений группы $\mathbb{A}_\Delta^*$ в различные места на диагонали группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\Delta)$, отличаются на сопряжение элементом ϕ_A

в группе $\text{Aut}(\theta^{-1}(\text{SL}_2(\mathbb{A}_\Delta)))$. Поэтому отображение $\{x, b\} \mapsto \{\phi_A(x), b\}$, где $\{x, b\} \in \theta^{-1}(\text{SL}_2(\mathbb{A}_\Delta)) \rtimes \mathbb{A}_\Delta^*$, задает изоморфизм двух полупрямых произведений, полученных из вложений группы $\mathbb{A}_\Delta^*$ в различные места на диагонали. Этот изоморфизм индуцирует внутренний автоморфизм группы $\text{GL}_2(\mathbb{A}_\Delta)$, задаваемый элементом A . Остается заметить, что любой внутренний автоморфизм группы индуцирует канонический автоморфизм центрального расширения этой же группы.

Отметим, что из конструкции центральных расширений сразу следует, что центральные расширения $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ канонически расщепляются над подгруппой $\text{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_\Delta})$ группы $\text{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Построенные центральные расширения удовлетворяют следующим свойствам:

- 1) если $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ и $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, то центральное расширение $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ есть сумма Бэра центральных расширений $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_{\Delta_1})_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_{\Delta_2})_{\mathbb{R}_+^*}$ (относительно проекций на прямые слагаемые в разложении (9));
- 2) центральные расширения $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$, $n \geq 1$, корректно задают центральное расширение $\widetilde{\text{GL}}(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ группы $\text{GL}(\mathbb{A}_\Delta) = \varinjlim_n \text{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно доказать аналогичные утверждения для центральных расширений (и групп) $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$. Свойство 1) следует из конструкции центрального расширения (10) и следующих свойств. Если

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

– точная тройка локально компактных абелевых групп, где все морфизмы непрерывны, и $V_1 \hookrightarrow V$ – замкнутое вложение, то существует канонический изоморфизм $\mathbb{R}_+^*$ -торсоров

$$\mu_{V_1, V_2} : \mu(V_1) \otimes \mu(V_2) \rightarrow \mu(V).$$

При этом если $V = V_1 \oplus V_2$, то для любых элементов $v_1 \in \mu(V_1)$, $v_2 \in \mu(V_2)$ выполнено равенство³

$$\mu_{V_1, V_2}(v_1 \otimes v_2) = \mu_{V_2, V_1}(v_2 \otimes v_1). \quad (12)$$

Для доказательства свойства 2) достаточно показать, что если $1 \leq n_1 \leq n_2$, то центральное расширение $\widetilde{\text{GL}}_{n_1}(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ получается из центрального расширения $\widetilde{\text{GL}}_{n_2}(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ ограничением в образе отображения θ на подгруппу $\text{GL}_{n_1}(\mathbb{A}_\Delta)$ группы $\text{GL}_{n_2}(\mathbb{A}_\Delta)$. Это следует из конструкции центрального расширения. Предложение доказано.

³Отметим, что если предположить, что V_i , $1 \leq i \leq 2$, – конечномерные векторные пространства над полем, и заменить $\mu(V_i)$ на $\det V_i = \wedge^{\max}(V_i)$, то аналог равенства (12) будет выполнен лишь с точностью до знака.

3.3. Случай, когда множество Δ состоит из одного элемента. Если множество Δ состоит из одного элемента $\{x \in C\}$, то $\mathbb{A}_\Delta = K_{x,C}$ – конечное произведение двумерных локальных полей. Локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ замкнутой точки x на X и его пополнение $\widehat{\mathcal{O}}_x$ по максимальному идеалу являются нормальными кольцами без делителей нуля⁴. Пусть η_C – простой идеал высоты 1 в кольце $\mathcal{O}_x$, определяемый кривой C . Пусть η_i , $1 \leq i \leq m$, – все простые идеалы высоты 1 в кольце $\widehat{\mathcal{O}}_x$, которые содержат идеал $\eta_C \widehat{\mathcal{O}}_x$. Пусть K_i , $1 \leq i \leq m$, – двумерное локальное поле, которое определяется как пополнение поля $\text{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x)$ по дискретному нормированию, связанному с идеалом η_i . Тогда имеем

$$\mathbb{A}_\Delta = K_{x,C} = \prod_{i=1}^m K_i. \quad (13)$$

Пусть K – двумерное локальное поле, которое является одним из сомножителей в произведении (13). Пусть $\mathbb{F}_q$ – последнее поле вычетов поля K . Рассматривая соответствующие фильтрации в группе K^n и на ее подфакторах, нетрудно понять, что $\mathbb{R}_+^*$ -торсоры, возникающие при конструкции центрального расширения (10) (после его ограничения на подгруппу $\text{GL}_n(K)$), приходят из $q^\mathbb{Z}$ -торсоров. Поэтому ограничения центральных расширений (10) и (11) на подгруппу $\text{GL}_n(K)$ возникают из элементов⁵ $H^2(\text{GL}_n(K), \mathbb{Z})$ после применения отображения $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $a \mapsto q^a$. Отметим, что, в отличие от случая одномерного локального поля, для двумерного локального поля K центральные расширения (10) и (11) при $n > 1$ не получаются из случая $n = 1$ при помощи отображения $\det: \text{GL}_n(K) \rightarrow K^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если X – поверхность над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и Δ любое, то центральные расширения (10) и (11) тоже получаются из элементов $H^2(\text{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta), \mathbb{Z})$, как и выше, так как для построения этих центральных расширений достаточно рассматривать фильтрации $\mathbb{F}_q$ -пространствами на пространстве $\mathbb{A}_\Delta^n$ и его подфакторах (см. также [13]).

Обозначим через $\widehat{\text{GL}}_n(K)_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widetilde{\text{GL}}_n(K)_{\mathbb{R}_+^*}$ соответственно ограничения центральных расширений (10) и (11) на подгруппу $\text{GL}_n(K)$ группы $\text{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta)$. (Отметим, что из конструкции сразу следует, что если $\mathbb{A}_\Delta = \prod_{i=1}^m K_i$, то $\text{GL}_n(\mathbb{A}_\Delta) = \prod_{i=1}^m \text{GL}_n(K_i)$ и центральные расширения $\widehat{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widetilde{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_\Delta)_{\mathbb{R}_+^*}$ являются суммами Бэра по всем $1 \leq i \leq m$ центральных расширений $\widehat{\text{GL}}_n(K_i)_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widetilde{\text{GL}}_n(K_i)_{\mathbb{R}_+^*}$ соответственно.) Выясним теперь, какому элементу из группы $\text{Hom}(K_2(K), \mathbb{R}_+^*)$ соответствует центральное расширение $\widehat{\text{GL}}_2(K)_{\mathbb{R}_+^*}$ для двумерного локального поля K в силу изоморфизма из предложения 1. Определим отображение $\nu_K(\cdot, \cdot): K^* \times K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ по следующей формуле:

$$\nu_K(f, g) = \nu_{\overline{K}}\left(\frac{f^{\nu_K(g)}}{g^{\nu_K(f)}}\right), \quad (14)$$

⁴Напомним, что мы предположили, что X – целая нормальная двумерная схема конечного типа над $\mathbb{Z}$.

⁵Более точное утверждение будет получено далее, в предложении 3.

где $\nu_K: K^* \rightarrow \mathbb{Z}$ и $\nu_{\bar{K}}: \bar{K}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ – дискретные нормирования. Поскольку выражение в скобках из (14) есть ручной символ без знака, то $\nu_K(\cdot, \cdot)$ является отображением из группы $K_2(K)$ в группу $\mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть K – двумерное локальное поле с последним полем вычетов $\mathbb{F}_q$. Центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ получается из центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}$ (см. точную последовательность (5)) при помощи отображения $q^{-\nu_K(\cdot, \cdot)}: K_2(K) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (6) достаточно проверить, что для любых $x, y \in K^*$ выполнено

$$\langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(1, x) \rangle = q^{\nu_K(y, x)} = q^{-\nu_K(x, y)},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – коммутатор подъема в группу $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ коммутирующих элементов из группы $\mathrm{GL}_2(K)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(1, x) \rangle &= \langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(x, 1) \mathrm{diag}(x^{-1}, x) \rangle \\ &= \langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(x, 1) \rangle \langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(x^{-1}, x) \rangle \\ &= \langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(x^{-1}, x) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали бимультипликативность отображения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (см., например, [13, предложение 6]). Кроме того, $\langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(x, 1) \rangle = 1$, так как центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ расщепляется над подгруппой K^* группы $\mathrm{GL}_2(K)_{\mathbb{R}_+^*}$. Поскольку по конструкции группа $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ – полупрямое произведение, то $\langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(x^{-1}, x) \rangle$ можно вычислять в группе $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ (ответ будет тот же самый). Из конструкции центрального расширения (10) и формулы (12) ясно, что коммутатор подъема диагональных матриц можно вычислять покомпонентно (для каждого места на диагонали) и потом брать произведение по обоим компонентам для ответа. Поэтому

$$\langle \mathrm{diag}(y, 1), \mathrm{diag}(x^{-1}, x) \rangle = \langle y, x^{-1} \rangle,$$

где $\langle y, x^{-1} \rangle$ вычисляется в группе $\widehat{\mathrm{GL}_1(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$. Теперь

$$\langle y, x^{-1} \rangle = q^{\nu_K(y, x)}, \quad (15)$$

что проверяется при помощи бимультипликативности отображения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и разложения $K^* = t^{\mathbb{Z}} \cdot \mathcal{O}_K^*$, где t – локальный параметр в поле K (ср. также с доказательством теоремы 1 из [13]). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Нетрудно понять, что для $n \geq 2$ переход от центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_n(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ к центральному расширению $\widehat{\mathrm{GL}_n(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ (см. конструкцию в п. 3.2) соответствует на уровне вторых групп когомологий проекции на второе прямое слагаемое из правой части формулы (7). Более конкретные вычисления на уровне K -групп будут сделаны в процессе доказательства теоремы 1 далее.

3.4. Центральные расширения на арифметических поверхностях с учетом архимедовых нормирований. Любое числовое поле имеет точки на бесконечности: архимедовы нормирования. Полное (арифметическое) кольцо аделей числового поля учитывает эти нормирования.

Пусть X – двумерная нормальная целая схема конечного типа над $\mathbb{Z}$, так что имеется собственный сюръективный морфизм на $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$. В этом случае будем называть X *арифметической поверхностью*. Пусть $X_{\mathbb{Q}} = X \otimes_{\mathrm{Spec} \mathbb{Z}} \mathrm{Spec} \mathbb{Q}$ – общий слой морфизма. Для любой замкнутой точки $p \in X_{\mathbb{Q}}$ определим кольца

$$K_p \widehat{\otimes} \mathbb{R} = (\mathbb{Q}(p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})((t_p)), \quad \mathcal{O}_{K_p} \widehat{\otimes} \mathbb{R} = (\mathbb{Q}(p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})[[t_p]],$$

где $\mathbb{Q}(p)$ – поле вычетов точки p на кривой $X_{\mathbb{Q}}$ и t_p – локальный параметр в точке p на кривой $X_{\mathbb{Q}}$ (отметим, что локальное кольцо точки p на одномерной схеме $X_{\mathbb{Q}}$ является кольцом дискретного нормирования). Определим теперь арифметическое кольцо аделей $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ (см. также [4, пример 11]) в виде

$$\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}} = \mathbb{A}_X \times \mathbb{A}_{X,\infty}, \quad \mathbb{A}_{X,\infty} = \prod'_{p \in X_{\mathbb{Q}}} (K_p \widehat{\otimes} \mathbb{R}), \quad (16)$$

где кольцо $\mathbb{A}_{X,\infty}$ – ограниченное произведение по отношению к подкольцам $\mathcal{O}_{K_p} \widehat{\otimes} \mathbb{R}$. Отметим, что замкнутые точки $p \in X_{\mathbb{Q}}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми одномерными подсхемами на X , которые сюръективно отображаются на $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ (горизонтальные арифметические кривые на X). Кроме того, $\mathbb{Q}(p) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \prod_i L_i$, где произведение берется по всем классам эквивалентности архимедовых нормирований поля $\mathbb{Q}(p)$ и поле L_i изоморфно либо полю $\mathbb{R}$, либо полю $\mathbb{C}$. (Заметим также, что кольцо $\mathbb{A}_{X,\infty}$ – это такое подкольцо в кольце аделей кривой $X_{\mathbb{R}} = X_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, что ненулевые компоненты этого подкольца соответствуют в точности тем компонентам кольца аделей кривой $X_{\mathbb{R}}$, которые отвечают алгебраическим (не трансцендентным) точкам кривой $X_{\mathbb{R}}$, т. е. тем замкнутым точкам кривой $X_{\mathbb{R}}$, которые отображаются в замкнутые точки при естественном отображении $X_{\mathbb{R}} \rightarrow X_{\mathbb{Q}}$.) Поэтому определение кольца $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ можно интерпретировать как добавление к схемным аделям на X полей $\mathbb{R}((t_p))$ или $\mathbb{C}((t_p))$, отвечающих классам эквивалентности архимедовых нормирований на неприводимых горизонтальных арифметических кривых и подчиняющихся аделевому условию вдоль кривой $X_{\mathbb{Q}}$.

Пусть Δ – любое подмножество в множестве замкнутых точек на $X_{\mathbb{Q}}$, и пусть

$$\mathbb{A}_{\Delta,\infty} = \prod'_{p \in \Delta} (K_p \widehat{\otimes} \mathbb{R}), \quad \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\Delta,\infty}} = \prod_{p \in \Delta} (\mathcal{O}_{K_p} \widehat{\otimes} \mathbb{R}).$$

Аналогично конструкциям из п. 3.2 определяются центральные расширения⁶ $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{A}_{\Delta,\infty})_{\mathbb{R}^*_{+}}$ и $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{A}_{\Delta,\infty})_{\mathbb{R}^*_{+}}$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\Delta,\infty})$ группой $\mathbb{R}^*_{+}$. Из конструк-

⁶Отметим, что центральное расширение $\widetilde{\mathrm{GL}}_n(\mathbb{A}_{\Delta,\infty})_{\mathbb{R}^*_{+}}$ получается также из центрального расширения группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\Delta,\infty})$ группой $\mathbb{R}^*$, построенного Э. Арбарелло, К. Де Кончини и В. Г. Кацем в [14], при помощи отображения $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*_{+}$, $x \mapsto |x|^{-1}$, примененного к ядру центрального расширения. Для этого надо рассмотреть пространство $\mathbb{A}_{\Delta,\infty}^n$ как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ с каноническим действием группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\Delta,\infty})$, потом заметить, что для любого конечномерного $\mathbb{R}$ -векторного пространства V имеется каноническое отождествление $\mathbb{R}^*_{+}$ -торсоров $|\det(V)^* \setminus 0|$ и $\mu(V)$ при помощи интегрирования дифференциальных форм, где первый $\mathbb{R}^*_{+}$ -торсор получен из $\mathbb{R}^*$ -торсора $\det(V)^* \setminus 0$ при помощи отображения нормы между структурными группами торсоров.

ции следует каноническое расщепление этих центральных расширений над подгруппой $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\Delta,\infty}})$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\Delta,\infty})$. Кроме того, для этих центральных расширений выполнены предложение 2 и замечание 5 по аналогичным причинам. Аналог предложения 3 формулируется следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Центральные расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}((t)))}_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widehat{\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}((t)))}_{\mathbb{R}_+^*}$ получаются из центральных расширений (5) при помощи отображений*

$$\begin{aligned} K_2(\mathbb{R}((t))) &\rightarrow \mathbb{R}_+^*, & (f, g) &\mapsto \left| \frac{f^{\nu(g)}}{g^{\nu(f)}} \right|_{\mathbb{R}}, \\ K_2(\mathbb{C}((t))) &\rightarrow \mathbb{R}_+^*, & (f, g) &\mapsto \left| \frac{f^{\nu(g)}}{g^{\nu(f)}} \right|_{\mathbb{C}}^2 \end{aligned}$$

соответственно, где ν – дискретное нормирование, $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ или $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ – обычные абсолютные значения в полях $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 3.

Определим центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}})}_{\mathbb{R}_+^*}$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}})$ группой $\mathbb{R}_+^*$ как сумму Бэра центральных расширений $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_X)}_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{X,\infty})}_{\mathbb{R}_+^*}$ относительно разложения (16). Аналогично определяется центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}})}_{\mathbb{R}_+^*}$.

3.5. Некоммутативные законы взаимности. Пусть X – двумерная нормальная целая схема конечного типа над $\mathbb{Z}$. Для замкнутой точки $x \in X$ определим *кольцо* K_x как локализацию кольца $\hat{\mathcal{O}}_x$ по мультипликативной системе $\mathcal{O}_x \setminus 0$ (напомним, что $\mathcal{O}_x$ и $\hat{\mathcal{O}}_x$ – локальное кольцо точки x на X и его пополнение по максимальному идеалу соответственно). Для любой целой одномерной подсхемы C на X определим *поле* K_C как пополнение поля рациональных функций на X по дискретному нормированию, задаваемому кривой C . Кольца K_x и K_C естественно возникают в теории двумерных аделей при описании полулокальной ситуации на X (см. [15]). Имеем диагональные вложения кольца K_x в кольцо $\mathbb{A}_X$ через вложение во все двумерные локальные поля, возникающие из целых одномерных подсхем на X , проходящих через точку x . Имеется также диагональное вложение поля K_C в кольцо $\mathbb{A}_X$ (или в кольцо $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$, если X – арифметическая поверхность) через вложение во все двумерные локальные поля, возникающие из точек на кривой C (при этом в случае арифметической поверхности X и горизонтальной арифметической кривой C нужно также вкладывать поле K_C в архимедову часть $\mathbb{A}_{X,\infty}$, которая учитывает архимедовы точки на C). Кроме того, поле рациональных функций $\mathbb{F}_q(X)$ (в случае поверхности X над полем $\mathbb{F}_q$) или поле рациональных функций $\mathbb{Q}(X)$ (в случае арифметической поверхности X) вкладываются диагональным образом в кольцо $\mathbb{A}_X$ или кольцо $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ соответственно. Обозначим это поле рациональных функций через K_X .

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X – целая нормальная двумерная схема конечного типа над $\mathbb{Z}$, которая является или проективной поверхностью над $\mathbb{F}_q$, или арифметической поверхностью. Пусть $\mathbb{A}$ – кольцо $\mathbb{A}_X$ (в случае поверхности над*

полем $\mathbb{F}_q$) или кольцо $\mathbb{A}_X^{\text{ar}}$ (в случае арифметической поверхности). Тогда выполнены следующие некомутативные законы взаимности. Для любого $n \geq 1$ центральное расширение $\widehat{\text{GL}}_n(\mathbb{A})_{\mathbb{R}_+^*}$ группы $\text{GL}_n(\mathbb{A})$ группой $\mathbb{R}_+^*$ канонически расщепляется над подгруппами $\text{GL}_n(K_X)$, $\text{GL}_n(K_x)$, $\text{GL}_n(K_C)$, где x – любая замкнутая точка на X и C – любая целая одномерная подсхема на схеме X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала расщепление центрального расширения $\widehat{\text{GL}}_n(\mathbb{A})_{\mathbb{R}_+^*}$ над группой $\text{GL}_n(K_x)$.

Рассмотрим кольцо аделей $\mathbb{A}_x$ схемы $\text{Spec } \mathcal{O}_x$. Это кольцо аделей содержит только те двумерные локальные поля, которые приходят из целых одномерных подсхем на X , проходящих через точку x . Отметим, что для построения ограничения центрального расширения на $\text{GL}_n(K_x)$ мы по сути используем только кольцо $\mathbb{A}_x$. Рассмотрим теперь кольцо аделей $\hat{\mathbb{A}}_x$ схемы $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_x$. Кольцо $\hat{\mathbb{A}}_x$ содержит кольцо $\mathbb{A}_x$ в качестве прямого сомножителя. Однако в кольце $\hat{\mathbb{A}}_x$ присутствуют еще двумерные локальные поля, которые получаются из простых идеалов η высоты 1 в кольце $\hat{\mathcal{O}}_x$, так что $\eta \cap \mathcal{O}_x = 0$. Отметим, что если K_η – такое двумерное локальное поле, то $K_x \subset \mathcal{O}_{K_\eta}$ (напомним, что $\mathcal{O}_{K_\eta}$ – кольцо дискретного нормирования поля K_η).

Так же, как в п. 3.2, строятся два центральных расширения $\widehat{\text{GL}}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ и $\widehat{\text{GL}}_n(\mathbb{A}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ группы $\text{GL}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)$ группой $\mathbb{R}_+^*$. Докажем, что второе центральное расширение расщепляется над подгруппой $\text{GL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$, где $\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x)$ – поле частных кольца $\hat{\mathcal{O}}_x$. Из конструкции центрального расширения и того, что группа $\text{SL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$ совершенна, следует, что достаточно доказать ⁷ расщепление центрального расширения $\widehat{\text{GL}}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ после ограничения на подгруппу $\text{SL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$.

Обозначим ограничение центрального расширения $\widehat{\text{GL}}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ на подгруппу $\text{SL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$ как $\widehat{\text{SL}}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))_{\mathbb{R}_+^*} = \widehat{\text{SL}}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))_{\mathbb{R}_+^*}$. Построенные центральные расширения корректно определяют центральное расширение $\widehat{\text{SL}}(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))_{\mathbb{R}_+^*} = \widehat{\text{SL}}(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))_{\mathbb{R}_+^*}$ группы $\text{SL}(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$ группой $\mathbb{R}_+^*$. В силу универсальности центрального расширения (3) центральное расширение $\widehat{\text{SL}}(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))_{\mathbb{R}_+^*}$ получается из $\text{St}(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$ при помощи некоторого отображения $K_2(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x)) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Чтобы вычислить это отображение, достаточно

⁷ Действительно, группа $\widehat{\text{GL}}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ – это полупрямое произведение группы, которая является ограничением центрального расширения $\widehat{\text{GL}}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ на подгруппу $\text{SL}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)$, и группы $\hat{\mathbb{A}}_x^*$. Из совершенности группы $\text{SL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$ следует, что любое сечение центрального расширения над подгруппой $\text{SL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x))$ будет инвариантно при действии автоморфизмом, задаваемым элементом из группы $\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x)^*$ и нужным для определения полупрямого произведения. Поэтому такое сечение в композиции с тождественным сечением над группой $\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x)^*$ будет задавать сечение центрального расширения $\widehat{\text{GL}}_n(\hat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ над подгруппой $\text{GL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x)) = \text{SL}_n(\text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x)) \rtimes \text{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_x)^*$.

посчитать в группе $\widetilde{\mathrm{SL}(\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x))_{\mathbb{R}_+^*}}$ выражение $\langle \mathrm{diag}(u, u^{-1}, 1), \mathrm{diag}(v, 1, v^{-1}) \rangle$ для любого элемента $(u, v) \in K_2(\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x))$ (см. [16, замечание после следствия 11.3]).

Из конструкции центрального расширения и того, что коммутатор подъема диагональных матриц можно вычислять отдельно для каждого места на диагонали и потом брать произведение, имеем

$$\langle \mathrm{diag}(u, u^{-1}, 1), \mathrm{diag}(v, 1, v^{-1}) \rangle = \langle u, v \rangle,$$

где $\langle u, v \rangle$ вычислен в группе $\widetilde{\mathrm{GL}_1(\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x))_{\mathbb{R}_+^*}} \subset \widetilde{\mathrm{GL}_1(\widehat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}}$. Для вычисления⁸ $\langle u, v \rangle$ разложим кольцо $\widehat{\mathbb{A}}_x$ в прямую сумму двух подколец:

$$\widehat{\mathbb{A}}_x = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_2, \quad (17)$$

где подкольцо $\mathbb{A}_1$ – конечное произведение двумерных локальных полей, при ограничении на каждое из которых дискретное нормирование хотя бы одного из элементов u и v не равно нулю, а подкольцо $\mathbb{A}_2$ – адельное произведение всех оставшихся двумерных локальных полей из кольца $\widehat{\mathbb{A}}_x$. Из аналога утверждения 1) предложения 2 для разложения (17) следует, что $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_1 \cdot \langle u, v \rangle_2$, где коммутатор $\langle u, v \rangle_i$, $1 \leq i \leq 2$, вычислен в группе $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_i)_{\mathbb{R}_+^*}$. Поскольку $u, v \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}_2}^*$ и центральное расширение $\widetilde{\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_2)_{\mathbb{R}_+^*}}$ расщепляется над подгруппой $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_2}^*$, то $\langle u, v \rangle_2 = 1$. Опять же из аналога утверждения 1) предложения 2 следует, что $\langle u, v \rangle_1$ – конечное произведение коммутаторов, вычисленных отдельно для каждого двумерного локального поля, входящего в кольцо $\mathbb{A}_1$.

Теперь, используя вычисление (15) из доказательства предложения 3, а также равенство $\nu_K(v, u) = 0$ для элементов $u, v \in \mathcal{O}_K^*$, где K – двумерное локальное поле, получаем

$$\langle u, v \rangle = \prod_K q_K^{\nu_K(v, u)},$$

где K пробегает все двумерные локальные поля, присутствующие как компоненты кольца $\widehat{\mathbb{A}}_x$, и q_K – количество элементов в последнем поле вычетов поля K .

Поскольку $\nu_K(\cdot, \cdot)$ – композиция граничных отображений в K -теории Милнора, из аналога комплекса Герстена–Квиллена для K -теории Милнора (см. [17, предложение 1]) следует закон взаимности вокруг точки x :

$$\sum_K \nu_K(v, u) \log_{q_x}(q_K) = 0,$$

где q_x – количество элементов в поле вычетов точки x . Поэтому центральное расширение $\widetilde{\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}}$ расщепляется над подгруппой $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x))$.

Теперь отметим, что из конструкции следует, что ограничение центрального расширения $\widetilde{\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{A}})_{\mathbb{R}_+^*}}$ на подгруппу $\mathrm{GL}_n(K_x)$ совпадает с ограничением

⁸Ср. также с доказательством теоремы 2 из [13].

центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}}_n(\widehat{\mathbb{A}}_x)_{\mathbb{R}_+^*}$ на эту же подгруппу. Как только что доказано, последнее центральное расширение расщепляется над этой подгруппой, так как $\mathrm{GL}_n(K_x) \subset \mathrm{GL}_n(\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x))$. Значит, и центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}}_n(\widehat{\mathbb{A}})_{\mathbb{R}_+^*}$ расщепляется над подгруппой $\mathrm{GL}_n(K_x)$.

Доказательство расщепления центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}}_n(\widehat{\mathbb{A}})_{\mathbb{R}_+^*}$ над подгруппой $\mathrm{GL}_n(K_C)$ проводится аналогично предыдущему случаю. Оно сводится к доказательству расщепления центрального расширения $\widehat{\mathrm{SL}}(\widehat{K_C})_{\mathbb{R}_+^*}$ над группой $\mathrm{SL}(K_C)$. Для этого используется группа $\mathrm{St}(K_C)$ и вычисление выражения $\langle u, v \rangle$ в группе $\widehat{\mathrm{GL}}_1(\widehat{K_C})_{\mathbb{R}_+^*}$ для $(u, v) \in K_2(K_C)$. Используя бимультпликативность выражения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, свойство $\langle t, t \rangle = \langle -1, t \rangle$ (следствие свойства Стейнберга), а также конструкцию центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}}_1(\widehat{K_C})_{\mathbb{R}_+^*}$, легко видеть, что единственный нетривиальный случай, который необходимо вычислить, это $\langle a, t \rangle$, где t – локальный параметр в поле K_C и $\nu_t(a) = 0$ (ν_t – дискретное нормирование в поле K_C). В этом случае легко видеть, что элемент $\langle a, t \rangle$ совпадает с произведением по всем нормализованным абсолютным значениям поля рациональных функций на одномерной подсхеме C , примененных к образу элемента a в этом поле (ср. с предложениями 3, 4). Поэтому формула произведения влечет $\langle a, t \rangle = 1$. Следовательно, $\langle u, v \rangle = 1$ для любых $(u, v) \in K_2(K_C)$. Таким образом, получили, что центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}}_n(\widehat{\mathbb{A}})_{\mathbb{R}_+^*}$ расщепляется над подгруппой $\mathrm{GL}_n(K_C)$.

Доказательство расщепления центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}}_n(\widehat{\mathbb{A}})_{\mathbb{R}_+^*}$ над подгруппой $\mathrm{GL}_n(K_X)$ проводится аналогично только что разобранному случаю, только надо использовать группу $\mathrm{St}(K_X)$, а для доказательства равенства $\langle u, v \rangle = 1$ (где $(u, v) \in K_2(K_X)$) необходимо использовать формулы произведения по нормализованным абсолютным значениям для полей рациональных функций конечного числа одномерных целых подсхем на X , а именно те подсхемы, вдоль которых функции u и v имеют нули или полюсы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из теоремы 1 следует, что существует расщепление центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}}_n(\widehat{\mathbb{A}})_{\mathbb{R}_+^*}$ над подгруппами $\mathrm{GL}_n(K_x)$, $\mathrm{GL}_n(K_C)$ и $\mathrm{GL}_n(K_X)$. (В случае группы $\mathrm{GL}_n(K_x)$ надо, как и в доказательстве теоремы 1, сначала рассмотреть центральные расширения над группой $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_x))$.) Действительно, согласно замечаниям 2, 5 данное утверждение сводится к случаю $n = 1$. Тогда из законов взаимности вокруг точки и вдоль одномерной целой подсхемы, использованных выше, следует абелевость группы (в которой вычисляется коммутатор и для которой мы доказываем расщепимость). Далее замечаем, что $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\cdot, \mathbb{R}_+^*) = 0$, так как $\mathbb{R}_+^*$ – делимая группа.

§ 4. Неразветвленное соответствие Ленглендса для двумерных локальных полей

4.1. Неразветвленное соответствие Ленглендса для одномерных локальных полей. Напомним сначала конструкцию для одномерного локального поля K (см. обзоры [18] и [19]).

Пусть K – одномерное локальное поле с конечным полем вычетов $\mathbb{F}_q$. Пусть K^{nr} – максимальное неразветвленное расширение поля K . Тогда группа Галуа $\text{Gal}(K^{\text{nr}}/K) = \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \widehat{\mathbb{Z}}$ топологически порождается автоморфизмом Фробениуса Fr . Отображение взаимности устроено следующим образом:

$$K^* \rightarrow \text{Gal}(K^{\text{nr}}/K), \quad f \mapsto \text{Fr}^{\nu_K(f)},$$

где ν_K – дискретное нормирование на поле K .

Пусть теперь ρ – неразветвленное n -мерное полупростое комплексное представление группы Вейля $W_K \subset \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$. Тогда это представление есть полупростое представление группы $\mathbb{Z}$ и с точностью до изоморфизма оно определяется набором n ненулевых комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, которые являются собственными числами подъема автоморфизма Фробениуса Fr .

С другой стороны, рассмотрим группу $\text{GL}_n(K)$. Пусть $B \subset \text{GL}_n(K)$ – борелевская подгруппа верхнетреугольных матриц. Определим характер $\chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}: B \rightarrow \mathbb{C}^*$ следующим образом:

$$\chi \left(\begin{pmatrix} b_1 & * & * & * \\ & b_2 & * & * \\ & & \dots & \dots \\ & & & b_n \end{pmatrix} \right) = \alpha_1^{\nu_K(b_1)} \dots \alpha_n^{\nu_K(b_n)} = (q^{-\nu_K(b_1)})^{a_1} \dots (q^{-\nu_K(b_n)})^{a_n},$$

где элемент $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}^n$ определяется при помощи равенств $q^{-a_i} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$.

Для любого $m \geq 1$ определим нормальную подгруппу C_m в группе $\text{GL}_n(\mathcal{O}_K)$:

$$C_m = 1 + t_K^m M_n(\mathcal{O}_K).$$

(Выражение в правой части последней формулы рассматривается в кольце $(n \times n)$ -матриц $M_n(\mathcal{O}_K)$, при этом $\mathcal{O}_K$ – кольцо дискретного нормирования поля K и t_K – локальный параметр.) Обозначим также $C_0 = \text{GL}_n(\mathcal{O}_K)$.

Определим теперь представление, которое называется *представлением основной серии* группы $\text{GL}_n(K)$, следующим образом:

$$\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{Ind}_B^{\text{GL}_n(K)}(\chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}),$$

где пространство индуцированного представления $\text{Ind}_B^{\text{GL}_n(K)}(\chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ есть

$$\left\{ f: \text{GL}_n(K) \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} 1) f(bg) = \chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(b)f(g) \quad \forall b \in B, \quad \forall g \in \text{GL}_n(K) \\ 2) \exists n_f \geq 1: f(hu) = f(h) \quad \forall h \in \text{GL}_n(K), \quad \forall u \in C_{n_f} \end{array} \right\}.$$

Группа $\text{GL}_n(K)$ действует на этом пространстве правыми сдвигами, т.е. для любых $g \in \text{GL}_n(K)$ и $f \in \text{Ind}_B^{\text{GL}_n(K)}(\chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ имеем $(gf)(x) = f(xg)$ для любого элемента $x \in \text{GL}_n(K)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Мы использовали не нормализованную индукцию в определении представления $\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Обычно для нормализованной индукции к характеру $\chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ добавляется характер, учитывающий неунимодулярность группы B .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Определение индуцированного представления можно переписать следующим образом (это будет важно нам в дальнейшем). Для любого $m \geq 0$ определим бесконечномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство $V_m = \prod_{g \in \mathrm{GL}_n(K)/C_m} \mathbb{C}$, где векторы из V_m – это любые функции f из множества левых классов смежности $\mathrm{GL}_n(K)/C_m$ в поле $\mathbb{C}$. Тогда группа B действует на пространстве V_m следующим способом:

$$b(f)(x) = \chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(b) f(b^{-1}x),$$

где $b \in B$, $f \in V_m$, $x \in \mathrm{GL}_n(K)/C_m$. Теперь ясно, что

$$\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bigcup_{m \geq 0} V_m^B,$$

где V_m^B – пространство B -инвариантных элементов. Группа $\mathrm{GL}_n(K)$ действует на пространстве $\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ следующим образом: $g(f)(x) = f(xg)$, где $f \in V_m^B$, $g, x \in \mathrm{GL}_n(K)$, $g(f) \in V_l$ для некоторого $l \geq 0$ (зависящего от $m \geq 0$ и g).

Представление группы $\mathrm{GL}_n(K)$ в векторном пространстве W называется *гладким*, если $W = \bigcup_{n \geq 0} W^{C_n}$.

Неприводимое представление группы $\mathrm{GL}_n(K)$ в векторном пространстве W называется *сферическим* (или *неразветвленным*), если $W^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)} \neq 0$.

Отметим, что по конструкции представление $\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является гладким представлением группы $\mathrm{GL}_n(K)$. Кроме того,

$$\dim_{\mathbb{C}} \pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)} = 1.$$

Представление $\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ группы $\mathrm{GL}_n(K)$ всегда допускает единственное сферическое подфакторпредставление, которое переходит в изоморфное ему при перестановке чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. (Более того, всегда можно переставить числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ так, что это подфакторпредставление будет факторпредставлением.) Теперь неразветвленное соответствие Ленгланда сопоставляет представлению ρ (см. начало этого параграфа) описанное выше факторпредставление группы $\mathrm{GL}_n(K)$, и все сферические допустимые⁹ представления группы $\mathrm{GL}_n(K)$ получаются таким образом.

Отметим, что неприводимые допустимые представления группы $\mathrm{GL}_n(K)$ – это в точности неприводимые гладкие представления той же группы (см. [20, теорема 3.25]). Поэтому в предыдущем абзаце можно заменить сферические допустимые представления группы $\mathrm{GL}_n(K)$ на сферические гладкие представления той же самой группы.

4.2. Действие группы на k -линейной категории. Напомним следующее определение действия группы G на k -линейной категории $\mathcal{B}$, где k – поле (см. также [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Действие группы G на k -линейной категории $\mathcal{B}$ состоит из следующих данных:

- 1) k -линейного функтора $\tau(g): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ для каждого элемента $g \in G$;

⁹Мы не напоминаем здесь определение допустимого представления.

2) изоморфизма функторов $\psi_{g,h}: \tau(g) \circ \tau(h) \Rightarrow \tau(gh)$ для любой пары элементов $g, h \in G$;

3) изоморфизма функторов $\psi_1: \tau(1) \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{B}}$.

При этом должны выполняться следующие условия:

- (i) для любых $g, h, k \in G$ выполнена ассоциативность $\psi_{gh,k}(\psi_{g,h} \circ \tau(k)) = \psi_{g,hk}(\tau(g) \circ \psi_{h,k})$;
- (ii) для любого $g \in G$ выполнено $\psi_{1,g} = \psi_1 \circ \tau(g)$ и $\psi_{g,1} = \tau(g) \circ \psi(1)$.

Будем использовать также обозначения $\tau_{\mathcal{B}}(g)$, $\psi_{\mathcal{B},g,h}$ и $\psi_{\mathcal{B},1}$, чтобы указать, какую категорию мы рассматриваем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – k -линейные категории с G -действием. G -линейный функтор $\mathfrak{T} = (T, \varepsilon)$ из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$ состоит из следующих данных:

- 1) k -линейного функтора $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$;
- 2) изоморфизма функторов $\varepsilon_g: T \circ \tau_{\mathcal{B}}(g) \Rightarrow \tau_{\mathcal{C}}(g) \circ T$ для любого элемента $g \in G$.

При этом выполнены следующие условия:

- (i) для любых элементов $g, h \in G$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 T \circ \tau_{\mathcal{B}}(g) \circ \tau_{\mathcal{B}}(h) & \xRightarrow{T \circ \psi_{\mathcal{B},g,h}} & T \circ \tau_{\mathcal{B}}(gh) \\
 \varepsilon_g \circ \tau_{\mathcal{B}}(h) \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{gh} \\
 \tau_{\mathcal{C}}(g) \circ T \circ \tau_{\mathcal{B}}(h) & \xRightarrow{\tau_{\mathcal{C}}(g) \circ \varepsilon_h} \tau_{\mathcal{C}}(g) \circ \tau_{\mathcal{C}}(h) \circ T \xRightarrow{\psi_{\mathcal{C},g,h} \circ T} & \tau_{\mathcal{C}}(gh) \circ T
 \end{array}$$

коммутативна;

- (ii) выполнено $(\psi_{\mathcal{C},1} \circ T)\varepsilon_1 = T \circ \psi_{\mathcal{B},1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. G -линейные функторы из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$ – это все объекты естественной k -линейной категории, которую мы обозначим $\mathcal{H}om_G(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Если (L, ε) и (M, ϵ) – объекты категории $\mathcal{H}om_G(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, то по определению k -векторное пространство $\text{Hom}_{\mathcal{H}om_G(\mathcal{B}, \mathcal{C})}((L, \varepsilon), (M, \epsilon))$ состоит из морфизмов функторов $\varphi: L \Rightarrow M$, для которых следующая диаграмма коммутативна для любого элемента $g \in G$:

$$\begin{array}{ccc}
 L \circ \tau_{\mathcal{B}}(g) & \xRightarrow{\varepsilon_g} & \tau_{\mathcal{C}}(g) \circ L \\
 \varphi \circ \tau_{\mathcal{B}}(g) \downarrow & & \downarrow \tau_{\mathcal{C}}(g) \circ \varphi \\
 M \circ \tau_{\mathcal{B}}(g) & \xRightarrow{\epsilon_g} & \tau_{\mathcal{C}}(g) \circ M
 \end{array}$$

Если $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ являются k -линейными категориями с G -действием и $(L, \varepsilon) \in \text{Ob}(\mathcal{H}om_G(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$, $(N, \zeta) \in \text{Ob}(\mathcal{H}om_G(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$, то

$$(N, \zeta) \circ (L, \varepsilon) = (N \circ L, \eta) \in \text{Ob}(\mathcal{H}om_G(\mathcal{B}, \mathcal{D})),$$

где для любого $g \in G$ морфизм функторов $\eta_g: N \circ L \circ \tau_{\mathcal{B}}(g) \Rightarrow \tau_{\mathcal{D}}(g) \circ N \circ L$ определяется как композиция морфизмов функторов

$$N \circ L \circ \tau_{\mathcal{B}}(g) \xRightarrow{N \circ \varepsilon_g} N \circ \tau_{\mathcal{C}}(g) \circ L \xRightarrow{\zeta_g \circ L} \tau_{\mathcal{D}}(g) \circ N \circ L.$$

Теперь можно сказать, что k -линейные категории $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ с G -действием G -эквивалентны, если существуют G -линейный функтор $\mathfrak{L}$ из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$ и G -линейный функтор $\mathfrak{N}$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{B}$ такие, что G -линейные функторы $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{L}$ и $(\text{Id}_{\mathcal{B}}, \text{id})$ изоморфны как объекты категории $\text{Hom}_G(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ и G -линейные функторы $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{N}$ и $(\text{Id}_{\mathcal{C}}, \text{id})$ изоморфны как объекты категории $\text{Hom}_G(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.

Нетрудно понять, что для установления G -эквивалентности категорий $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ достаточно только построить G -линейный функтор $(L, \varepsilon): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ и проверить, что функтор L является эквивалентностью категорий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{B}$ – k -линейная категория с G -действием. Категория G -эквивариантных объектов $\mathcal{B}^G$ определяется следующим образом:

1) объект категории $\mathcal{B}^G$ состоит из объекта E категории $\mathcal{B}$ и системы изоморфизмов $\theta_g: E \rightarrow \tau(g)(E)$ для любого $g \in G$ таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta_g} & \tau(g)(E) \\ \theta_{gh} \downarrow & & \downarrow \tau(g)(\theta_h) \\ \tau(gh)(E) & \xleftarrow[\psi_{g,h,E}]{} & \tau(g)(\tau(h)(E)) \end{array} \quad (18)$$

коммутативна для любых элементов $g, h \in G$;

2) морфизмом эквивариантных объектов $(E, \theta) \rightarrow (D, \vartheta)$ является морфизм $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(E, D)$ такой, что выполнено $\tau(g)(f)\theta_g = \vartheta_g f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если $(E, \theta) \in \text{Ob}(\mathcal{B}^G)$, то на любом изоморфном объекту E объекте D существует очевидная G -эквивариантная структура ϑ .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Пусть (E, θ) и (D, ϑ) – объекты из категории $\mathcal{B}^G$. Тогда на k -векторном пространстве $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(E, D)$ действует группа G по правилу $f \mapsto \vartheta_g^{-1} \tau(g)(f) \theta_g$. (То, что это – действие группы, следует из диаграммы (18).) Теперь легко получить $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(E, D)^G = \text{Hom}_{\mathcal{B}^G}((E, \theta), (D, \vartheta))$.

4.3. Категорный аналог неразветвленных представлений основной серии. Пусть теперь (и до конца статьи) K – двумерное локальное поле с последним конечным полем вычетов $\mathbb{F}_q$. Пусть $\mathcal{O}_K$ – кольцо дискретного нормирования ранга 1 двумерного локального поля K и t_K – локальный параметр относительно этого дискретного нормирования. По аналогии с п. 4.1 определим для любого $m \geq 1$ нормальные подгруппы (конгруэнц-подгруппы) группы $\text{GL}_l(\mathcal{O}_K)$, $l \geq 1$:

$$\mathbb{C}_m = 1 + t_K^m M_l(\mathcal{O}_K).$$

Обозначим также $\mathbb{C}_0 = \text{GL}_l(\mathcal{O}_K)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем категорию $\mathcal{B}$ обобщенным 2-векторным пространством над полем k , если $\mathcal{B}$ – k -линейная абелева категория. Скажем, что категория $\mathcal{B}$ имеет конечную размерность r , если категория $\mathcal{B}$ эквивалентна категории $(\text{Vect}_k^{\text{fin}})^r$.

Введем категорный аналог гладкого представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Действие группы $\mathrm{GL}_l(K)$ на обобщенном 2-векторном пространстве $\mathcal{B}$ называется *гладким*, если выполнено следующее условие. Для любых E, D – объектов из $\mathcal{B}$ – и любого морфизма $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(E, D)$ существуют целое число $m \geq 0$, объекты (E, θ) и (D, ϑ) из категории $\mathcal{B}^{\mathrm{C}^m}$ такие, что $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathrm{C}^m}}((E, \theta), (D, \vartheta))$.

В частности, рассматривая в определении 5 тождественный морфизм, получаем, что для любого объекта из $\mathcal{B}$ существует $\mathbb{C}_m$ -эквивариантная структура для некоторого $m \geq 0$.

Для двумерного локального поля K с последним полем вычетов $\mathbb{F}_q$ пусть K^{nr} – максимальное неразветвленное расширение поля K как двумерного локального поля, а именно поле K^{nr} неразветвлено относительно дискретного нормирования на поле K и поле вычетов $\bar{K}^{\mathrm{nr}}$ поля K^{nr} неразветвлено относительно дискретного нормирования на поле вычетов $\bar{K}$ поля K . Тогда группа Галуа $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K) = \hat{\mathbb{Z}}$ топологически порождается автоморфизмом Фробениуса Fr . Двумерное неразветвленное отображение взаимности задается следующим образом (см. [21, теорема 1]):

$$K_2(K) \rightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K), \quad (f, g) \longmapsto \mathrm{Fr}^{\nu_K(f, g)}, \quad (19)$$

где отображение $\nu_K(\cdot, \cdot)$ определено формулой (14).

Назовем *группой Вейля*¹⁰ W_K двумерного локального поля K группу, которая является образом всего отображения взаимности $K_2(K) \rightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$. Тогда любое n -мерное неразветвленное полупростое комплексное представление ρ группы Вейля W_K пропускается через группу $\mathbb{Z}$. Поэтому оно с точностью до изоморфизма определяется набором n ненулевых комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Теперь элемент $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}^n$ определяется следующим образом: $q^{-a_i} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$.

Рассмотрим произвольный *упорядоченный* набор $(a_1, \dots, a_n)$ как элемент из $\mathbb{C}^n / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}^n$. Пусть A – произвольный $\mathbb{R}_+^*$ -торсор, b – произвольный элемент из $\mathbb{C}$. Построим одномерное $\mathbb{C}$ -векторное пространство

$$A^b = (A \otimes_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{C}^*) \cup 0,$$

где $\mathbb{C}^*$ -торсор $A \otimes_{\mathbb{R}_+^*} \mathbb{C}^*$ определяется при помощи гомоморфизма

$$\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad x \longmapsto x^b.$$

Напомним, что в § 3 мы построили центральное расширение

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*} \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}_2(K) \longrightarrow 1. \quad (20)$$

Отметим, что из конструкции этого центрального расширения следует, что существует его каноническое расщепление над подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. Для любого

¹⁰Из двумерной локальной теории полей классов следует, что группа W_K – это плотная подгруппа в проконечной группе $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$. Образ группы W_K при отображении $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \rightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K) = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}}$ есть группа $\mathbb{Z}$.

элемента $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ определим $\mathbb{R}_+^*$ -торсор $A_g = \pi^{-1}(g)$. Тогда для любого элемента $b \in \mathbb{C}$ и любых элементов $g, h \in \mathrm{GL}_2(K)$ при помощи центрального расширения (20) получаем канонический изоморфизм одномерных $\mathbb{C}$ -векторных пространств

$$(A_g)^b \otimes_{\mathbb{C}} (A_h)^b \rightarrow (A_{gh})^b, \quad (21)$$

удовлетворяющий условию ассоциативности для любых элементов g, h, k из группы $\mathrm{GL}_2(K)$.

Для любого целого $n \geq 1$ рассмотрим в группе $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ стандартную параболическую подгруппу P , задаваемую блочными верхнетреугольными матрицами:

$$P = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_1 & * & * & * \\ & g_2 & * & * \\ & & \dots & \dots \\ & & & g_n \end{pmatrix} : g_i \in \mathrm{GL}_2(K) \right\}.$$

По элементу $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}^n$ определим действие группы P на $\mathbb{C}$ -линейной категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$ следующим образом. Для любого элемента $g \in P$ зададим $\mathbb{C}$ -линейный функтор $\tau_{a_1, \dots, a_n}(g) : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}} \rightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$,

$$\tau_{a_1, \dots, a_n}(g)(Y) = (A_{g_1})^{a_1} \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} (A_{g_n})^{a_n} \otimes_{\mathbb{C}} Y, \quad Y \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}. \quad (22)$$

Изоморфизмы функторов $\tau_{a_1, \dots, a_n}(g) \circ \tau_{a_1, \dots, a_n}(h) \Rightarrow \tau_{a_1, \dots, a_n}(gh)$, где $g, h \in P$, и $\tau_{a_1, \dots, a_n}(1) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}}$ получаются очевидным образом из отображений (21), так что для этих изоморфизмов выполнены все условия из определения 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Построенное действие группы P на категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$ действительно зависит только от элемента из группы $\mathbb{C}^n / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}^n$ (а не от элемента из группы $\mathbb{C}^n$), так как центральное расширение (20) возникает из элемента $H^2(\mathrm{GL}_2(K), \mathbb{Z})$ после применения гомоморфизма $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $a \mapsto q^a$ (см. п. 3.3).

Построим теперь категорный аналог $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ представлений основной серии группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$. Для любого $m \geq 0$ рассмотрим $\mathbb{C}$ -линейную категорию

$$\mathcal{V}_m = \prod_{g \in \mathrm{GL}_{2n}(K)/\mathbb{C}_m} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}},$$

объектами которой являются все отображения f из множества левых смежных классов $\mathrm{GL}_{2n}(K)/\mathbb{C}_m$ в объекты категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$, морфизмы в категории $\mathcal{V}_m$ очевидны. На категории $\mathcal{V}_m$ имеется следующее действие $\xi_{a_1, \dots, a_n}$ группы P :

$$\xi_{a_1, \dots, a_n}(p)(f)(x) = \tau_{a_1, \dots, a_n}(p)(f(p^{-1}x)), \quad (23)$$

где $p \in P$, $x \in \mathrm{GL}_{2n}(K)/\mathbb{C}_m$ и $f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_m)$. (Это действие очевидным образом определяется также на морфизмах в $\mathcal{V}_m$.) Отметим, что для любых целых $m_2 \geq m_1 \geq 0$ имеется естественный P -линейный функтор $\mathcal{V}_{m_1} \rightarrow \mathcal{V}_{m_2}$, возникающий из отображения множеств $\mathrm{GL}_{2n}(K)/\mathbb{C}_{m_2} \rightarrow \mathrm{GL}_{2n}(K)/\mathbb{C}_{m_1}$. Этот функтор индуцирует естественный функтор $Q_{m_1, m_2} : (\mathcal{V}_{m_1})^P \rightarrow (\mathcal{V}_{m_2})^P$ на категориях P -эquivариантных объектов. (Отметим также, что в нашем случае

имеется строгое равенство функторов $Q_{m_2, m_3} \circ Q_{m_1, m_2} = Q_{m_1, m_3}$ для любых $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$). Определим теперь $\mathbb{C}$ -линейную категорию

$$\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n} = \varinjlim_{m \geq 0} (\mathcal{V}_m)^P, \quad (24)$$

где объекты категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ – это все пары (m, f) (целое $m \geq 0$ и $f \in \text{Ob}((\mathcal{V}_m)^P)$), а морфизмы имеют вид

$$\text{Hom}_{\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}}((m_1, f_1), (m_2, f_2)) = \varinjlim_{m \geq \max(m_1, m_2)} \text{Hom}_{(\mathcal{V}_m)^P}(Q_{m_1, m}(f_1), Q_{m_2, m}(f_2)).$$

(Определение категорного прямого предела $\varinjlim$, использованное в формуле (24), взято из [22, приложение].)

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}^n$. Выполнено следующее:

1) категория $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ является обобщенным 2-векторным пространством над полем $\mathbb{C}$, существует естественное гладкое действие группы $\text{GL}_{2n}(K)$ на категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$;

2) обобщенное 2-векторное пространство $(\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n})^{\text{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)}$ содержит в качестве полной подкатегории категорию размерности 1 (т.е. категорию, эквивалентную категории $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$);

3) пусть $n = 1$, и рассмотрим действие группы $\text{GL}_2(K)$ на категории $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$, зависящее от параметра $a_1 \in \mathbb{C} / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}$ и возникающее из неразветвленного характера группы $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ (как описано формулой (19) и в § 2); тогда существует $\text{GL}_2(K)$ -линейный функтор $\mathfrak{T} = (T, \varepsilon)$ из категории $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$ в категорию $\mathcal{V}_{a_1}$ такой, что функтор T вполне строгий.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Функторы из категории $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$, которые возникают в утверждении 2), 3) теоремы 2, являются точными функторами, так как категория $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$ полупроста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Категория $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ абелева, так как категория $\prod_{g \in X} \text{Vect}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$ является абелевой, где X – любое множество, следовательно, категории P -эквивариантных объектов $(\mathcal{V}_m)^P$ для любого $m \geq 0$ являются абелевыми. Кроме того, категорный прямой предел $\varinjlim$ множества абелевых категорий с точными функторами перехода является абелевой категорией.

Действие σ группы $\text{GL}_{2n}(K)$ на категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ определяется следующим образом. (Оно является категорным аналогом соответствующего действия для одномерных локальных полей; см. замечание 8.) Пусть

$$(m, \tilde{f}) \in \text{Ob}(\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}), \quad g \in \text{GL}_{2n}(K).$$

Учитывая отображение $\text{GL}_{2n}(K) \rightarrow \text{GL}_{2n}(K)/\mathbb{C}_m$, мы рассмотрим $\tilde{f} = (f, \theta)$, где f – отображение из множества $\text{GL}_{2n}(K)$ в объекты категории $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^{\text{fin}}$ и $\theta = \{\theta_{p, x}\}$, $p \in P$, $x \in \text{GL}_{2n}(K)$, задает структуру P -эквивариантного объекта на f при действии группы P по формуле (23). Тогда положим по определению, что $\sigma(g)(m, (f, \theta)) = (l, (g(f), g(\theta)))$, где $g(\{\theta_{p, x}\}) = \{\theta_{p, xg}\}$, $g(f)(x) = f(xg)$ для любого $x \in \text{GL}_{2n}(K)$ и $l \geq 0$ – это наименьшее неотрицательное целое число со свойством $g\mathbb{C}_m g^{-1} \supset \mathbb{C}_l$. (Существование такого целого l следует,

например, из разложения Картана для группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ над полем дискретного нормирования K .) При этом отображение $g(f)$ можно рассматривать как корректно определенное отображение из множества $\mathrm{GL}_{2n}(K)/\mathbb{C}_l$ в объекты категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$, а $g(\theta)$ задает структуру P -эквивариантного объекта на $g(f)$. Определяется очевидным образом действие функтора $\sigma(g)$ на морфизмах в категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$. Ясно, что получаем корректное действие σ группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ на категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$.

Гладкость действия σ сразу следует из определения 5 и конструкции категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ как 2-индуктивного предела. (Для любого $m \geq 0$ группа $\mathbb{C}_m$ действует тождественно на категории $(\mathcal{V}_m)^P$, поэтому на любом объекте из этой категории всегда существует $\mathbb{C}_m$ -эквивариантная структура, заданная тождественными морфизмами.) Таким образом, мы доказали утверждение 1) теоремы.

Построим функтор L из категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$ в категорию $(\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n})^{\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)}$. Отметим, что из разложения Ивасава для группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ над полем дискретного нормирования K следует, что $\mathrm{GL}_{2n}(K) = P \cdot \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$. Зафиксируем для каждого смежного класса $x \in \mathrm{GL}_{2n}(K)/\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$ его представитель $g_x \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ и некоторое разложение $g_x = p_x h_x$, где $p_x \in P$, $h_x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}})$. Тогда определим $f_V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_0)$ как $f_V(x) = \tau_{a_1, \dots, a_n}(p_x)(V)$ (см. формулу (22)). Существует каноническое расщепление центрального расширения (20) над подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$, которое дает каноническую тривиализацию действия $\tau_{a_1, \dots, a_n}$, ограниченного на группу $P \cap \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$, на категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$. Эта тривиализация дает однозначный подъем объекта f_V до объекта $\widetilde{f_V}$ из категории $(\mathcal{V}_0)^P$. Поскольку группа $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$ действует тождественно на категории $(\mathcal{V}_0)^P$, имеем очевидный подъем объекта $(0, \widetilde{f_V})$ из категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ до объекта $L(V)$ из категории $(\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n})^{\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)}$ при помощи тождественных отображений. Очевидным образом L определяется на морфизмах в категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$. Нетрудно понять, что L – вполне строгий функтор из категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$ в абелеву категорию $(\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n})^{\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)}$. Утверждение 2) теоремы доказано.

Функтор T из утверждения 3) теоремы есть композиция только что построенного функтора L (см. доказательство утверждения 2) теоремы) и функтора забывания $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ -эквивариантной структуры. А именно, по $V \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}})$ мы строим $T(V) = (0, \widetilde{f_V}) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{a_1})$. Отметим, что функтор T вполне строгий, так как функтор L вполне строгий, и $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ -эквивариантная структура была задана тождественными морфизмами, поэтому функтор забывания такой структуры также вполне строгий.

Из описания неразветвленного отображения взаимности для двумерного локального поля K (см. формулу (19)), конструкции из § 2 и предложения 3 следует, что действие группы $\mathrm{GL}_2(K)$ на категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$, зависящее от параметра $a_1 \in \mathbb{C}/(2\pi i/\ln q)\mathbb{Z}$ и возникающее из неразветвленного характера группы $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$, описывается функторами $\tau_{a_1}(g)$ по формуле (22), где $g \in P = \mathrm{GL}_2(K)$. Теперь $\mathrm{GL}_2(K)$ -линейная структура ε на функторе T строится при помощи канонического расщепления центрального расширения (20) над подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. В теореме 2, 2), 3) мы не получаем утверждения об эквивалентности категорий по следующей причине. Например, в 2) мы используем то, что группа $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$ действует тождественно на категории $(\mathcal{V}_0)^P$, и берем тождественные морфизмы в $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$ -эквивариантной структуре. В этом случае, кроме $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$ -эквивариантной структуры, заданной тождественными морфизмами, существует много других, не изоморфных тождественной, $\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)$ -эквивариантных структур на объектах категории $(\mathcal{V}_0)^P$. В 3) мы получаем похожие проблемы в силу того, что $P \cap \mathbb{C}_m \neq \{1\}$ для любого $m \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Категория $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ с $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ -действием – это категорный аналог индуцированного представления из п. 4.1. Для конечных групп $H \subset G$ и категории $\mathcal{B}$ с H -действием категория индуцированного G -представления $\mathrm{ind}_H^G(\mathcal{B})$ как категория H -эквивариантных объектов некоторой категории строилась и изучалась в [8]. (См. также [23], где изучение G -эквивариантных объектов было продолжено.)

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Аналогичные категорные индуцированные представления, зависящие от $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, можно определять для группы $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_\Delta)$, где $\mathbb{A}_\Delta$ – некоторое подкольцо в кольце аделей $\mathbb{A}_X$ или $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ двумерной нормальной целой схемы X конечного типа над $\mathbb{Z}$ (см. § 3). В этом случае надо использовать центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}_+^*}$ группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\Delta)$ группой $\mathbb{R}_+^*$, которое было построено в § 3. Вместо групп $\mathbb{C}_m$ надо брать следующие подгруппы $\mathbb{C}_{\{m_C\}}$ группы $\prod_{x \in C} \mathrm{GL}_{2n}(K_{x,C})$:

$$\mathbb{C}_{\{m_C\}} = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_\Delta) \cap \left(1 + \prod_{C \subset X} t_C^{m_C} \prod_{x \in C} M_{2n}(\mathcal{O}_{K_{x,C}}) \right),$$

где C пробегает множество всех одномерных целых подсхем на X , t_C – локальный параметр в поле K_C и набор $\{m_C\}$ состоит из целых чисел $m_C \geq 0$ таких, что $m_C = 0$ для почти всех C (при этом не все числа m_C равны нулю). Если $m_C = 0$ для любой целой одномерной подсхемы C , то

$$\mathbb{C}_{\{0\}} = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_\Delta) \cap \prod_{x \in C} \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_{K_{x,C}}).$$

В случае, когда $\mathbb{A}_\Delta$ совпадает с двумерным локальным полем K , получающееся категорное представление группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ будет в точности построенным выше категорным представлением $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. В силу замечания 11 для любой подгруппы $H \subset \mathrm{GL}_{2n}(K)$ возникает действие группы H на $\mathbb{C}$ -векторном пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}}(E, D)$ для любых объектов (E, θ) , (D, ϑ) из категории $(\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n})^H$. Было бы интересно сравнить эти действия с действиями групп из [24], где теория представлений редутивных групп над двумерными локальными полями была построена в категории $\mathrm{Pro\,Vect}_{\mathbb{C}}$, где $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ – категория всех векторных пространств над полем $\mathbb{C}$.

4.4. Некоторая гипотеза. По аналогии с п. 4.1 сформулируем некоторую гипотезу о сферических гладких действиях группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ на обобщенных 2-векторных пространствах над полем $\mathbb{C}$, где K – двумерное локальное поле.

Пусть $\mathcal{B}$ – абелева k -линейная категория с G -действием, где G – группа и k – поле.

Назовем G -подпредставлением категории $\mathcal{B}$ пару $(\mathcal{A}, \mathfrak{T})$, где $\mathcal{A}$ – абелева k -линейная категория с G -действием, $\mathfrak{T} = (T, \varepsilon)$ – G -линейный функтор из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, так что функтор T вполне строгий и точный.

Будем говорить, что действие группы G на категории $\mathcal{B}$ неприводимо, если для любого G -подпредставления $(\mathcal{A}, \mathfrak{T})$ категории $\mathcal{B}$ либо категория $\mathcal{A}$ эквивалентна категории, состоящей только из нулевых объектов, либо функтор T существенно сюръективен (в последнем случае функтор T является эквивалентностью категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, т. е. категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будут G -эквивалентны; см. замечание 9).

Назовем G -факторпредставлением категории $\mathcal{B}$ пару $(\mathcal{C}, \mathfrak{P})$, где $\mathcal{C}$ – абелева k -линейная категория с G -действием, $\mathfrak{P} = (P, \varepsilon)$ – G -линейный функтор из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$. При этом потребуем, чтобы $P = Q \circ R$, где R – функтор из категории $\mathcal{B}$ в категорию $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ для некоторой подкатегории Серра $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ и Q является эквивалентностью категорий $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. (Отметим, что P – точный функтор.)

Определение сферического (или неразветвленного) действия должно быть сильнее, чем требование неприводимости действия группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, где $n \geq 1$ и K – двумерное локальное поле, на категории $\mathcal{B}$ с условием, что абелева категория $\mathcal{B}^{\mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_K)}$ не эквивалентна категории, состоящей только из нулевых объектов. Это объясняется тем, что подкольцо $\mathcal{O}_K \hookrightarrow K$ не учитывает дискретное нормирование на поле вычетов, в то время как рассматриваемые нами неразветвленные расширения поля K неразветвлены в том числе и относительно дискретного нормирования на поле вычетов $\overline{K}$. Поэтому надо также учитывать дискретное нормирование на поле вычетов $\overline{K}$.

Правильное определение сферического (неразветвленного) действия группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ позволило бы высказать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Любое гладкое сферическое действие группы $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ на $\mathbb{C}$ -линейной абелевой категории $\mathcal{B}$ можно получить из подфакторпредставления (т. е. как факторпредставление от подпредставления) категории $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_n}$ для некоторых $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n / (2\pi i / \ln q) \mathbb{Z}^n$. (Мы опустили здесь указание на $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ -линейные функторы, которые задают факторпредставление и подпредставление.)

Рассмотрим далее случай, когда $n = 1$ и категория $\mathcal{B}$ эквивалентна категории $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{fin}}$, т. е. является одномерным 2-векторным пространством. В этом случае легко понять, что любое действие группы $\mathrm{GL}_2(K)$ на категории $\mathcal{B}$ будет неприводимо. Согласно п. 2.1 действие группы $\mathrm{GL}_2(K)$ на категории $\mathcal{B}$ с точностью до эквивалентности соответствует некоторому центральному расширению (это является взаимно обратным соответствием)

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(K) \longrightarrow 1. \quad (25)$$

Ясно, что условие сферичности действия группы $\mathrm{GL}_2(K)$ на категории $\mathcal{B}$ должно соответствовать тому, что центральное расширение (25) получается из центрального расширения

$$1 \longrightarrow K_2(K) \longrightarrow \widehat{\mathrm{GL}_2(K)} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(K) \longrightarrow 1$$

при помощи отображения

$$K_2(K) \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad (f, g) \mapsto q^{-av_K(f, g)}, \quad (26)$$

где q – количество элементов в последнем поле вычетов поля K и параметр a принадлежит $\mathbb{C}/(2\pi i/\ln q)\mathbb{Z}$. При выполнении этого условия действие группы $\mathrm{GL}_2(K)$ на категории $\mathcal{B}$ будет гладким, так как центральное расширение $\widehat{G}$ будет расщепляться над подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$. (Действительно, при выполнении этого условия из предложения 3 следует, что центральное расширение $\widehat{G}$ получается из центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ при помощи отображения $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}^*, x \mapsto x^a$. По конструкции центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ расщепляется над подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$.) Кроме того, согласно утверждению 3) теоремы 2 категория $\mathcal{B}$ будет $\mathrm{GL}_2(K)$ -подпредставлением категории $\mathcal{V}_a$ (мы опустили здесь указание на $\mathrm{GL}_2(K)$ -линейный функтор, который задает подпредставление).

Рассмотрим теперь двумерное локальное поле K , которое изоморфно одному из следующих полей (см. также [2, § 2], где описано, как эти поля возникают из алгебраических поверхностей и арифметических поверхностей):

$$\mathbb{F}_q((u))((t)), \quad L((t)), \quad L\{\{u\}\}, \quad (27)$$

где L – одномерное локальное поле характеристики нуль и $L\{\{u\}\}$ – пополнение поля $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_L[[u]])$ по дискретному нормированию, задаваемому простым идеалом $m_L\mathcal{O}_L[[u]]$ высоты 1 кольца $\mathcal{O}_L[[u]]$ (идеал m_L – максимальный в кольце $\mathcal{O}_L$). Рассмотрим подкольцо B в поле K , которое задается в зависимости от изоморфизма (27) одним из следующих способов:

$$\mathbb{F}_q[[u]]((t)), \quad \mathcal{O}_L((t)), \quad L \cdot \mathcal{O}_L[[u]].$$

Отметим, что подкольцо B зависит от выбора изоморфизма (27). Поэтому мы зафиксируем для поля K некоторое такое подкольцо B .

Пусть E – простой объект в категории $\mathcal{B}$. Предположим, что

$$(E, \theta) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}), \quad (E, \vartheta) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{GL}_2(B)}), \quad (E, v) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{K^*})$$

для некоторых θ, ϑ и v , где $K^* \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(K)$ (вложение в верхний левый угол). Тогда нетрудно видеть, что θ, ϑ и v задают расщепления группы $\widehat{G}$ над подгруппами $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$, $\mathrm{GL}_2(B)$ и K^* соответственно. Это предположение будет задавать условие сферичности действия группы $\mathrm{GL}_2(K)$ на категории $\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ – одномерное 2-векторное пространство, так как выполнено следующее предположение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть двумерное локальное поле K изоморфно одному из полей вида (27). Центральное расширение $\widehat{G}$ получается из центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}$ при помощи отображения (26) (для некоторого элемента $a \in \mathbb{C}/(2\pi i/\ln q)\mathbb{Z}$), если и только если центральное расширение $\widehat{G}$ расщепляется над подгруппами $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$, $\mathrm{GL}_2(B)$ и K^* группы $\mathrm{GL}_2(K)$ (подгруппа K^* вложена в верхний левый угол).

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Хотя подкольцо B зависит от выбора изоморфизма (27), получающийся результат об описании центрального расширения $\widehat{G}$ посредством отображения (26) не зависит от выбора этого изоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Пусть центральное расширение $\widehat{G}$ получается из центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}$ при помощи отображения $K_2(K) \rightarrow \mathbb{C}^*$, $(f, g) \mapsto q^{-a\nu_K(f, g)}$. Поскольку по конструкции центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}$ расщепляется над подгруппой K^* группы $\mathrm{GL}_2(K)$, то и центральное расширение $\widehat{G}$ также будет расщепляться над этой подгруппой. Из предложения 3 следует, что центральное расширение $\widehat{G}$ получается из центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ при помощи отображения $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $x \mapsto x^a$. (Для построения центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ надо получить поле K из схемы $\mathrm{Spec} R$, где кольцо R есть либо $\mathbb{F}_q[[u, t]]$, либо $\mathcal{O}_L[[t]]$, либо $\mathcal{O}_L[[u]]$.) Поэтому достаточно доказать, что центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ расщепляется над подгруппами $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ и $\mathrm{GL}_2(B)$ группы $\mathrm{GL}_2(K)$. Для подгруппы $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ это сразу следует из конструкции центрального расширения.

Докажем расщепление центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ над подгруппой $\mathrm{GL}_2(B)$ группы $\mathrm{GL}_2(K)$. Покажем сначала, что центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ (см. п. 3.2) расщепляется над подгруппой $\mathrm{GL}_2(B)$. Для любого $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ однозначно определен элемент $\mu_{B, g} \in \mu(\mathcal{O}_K^2 \mid g\mathcal{O}_K^2)$ как $\mu_{B, g} = \mu_1^{-1} \otimes \mu_2$, где $\mu_1 \in \mu(\mathcal{O}_K^2/h\mathcal{O}_K^2)$, $\mu_2 \in \mu(g\mathcal{O}_K^2/h\mathcal{O}_K^2)$, элемент $h \in \mathrm{GL}_2(K)$ любой с условием $h\mathcal{O}_K^2 \subset \mathcal{O}_K^2$, $h\mathcal{O}_K^2 \subset g\mathcal{O}_K^2$. Элементы μ_1 и μ_2 определяются следующим образом:

$$\mu_1\left(\frac{B^2 \cap \mathcal{O}_K^2}{B^2 \cap h\mathcal{O}_K^2}\right) = 1, \quad \mu_2\left(\frac{B^2 \cap g\mathcal{O}_K^2}{B^2 \cap h\mathcal{O}_K^2}\right) = 1$$

(это определение имеет смысл, так как пространства, выписанные в скобках при μ_1 и μ_2 , — это открытые компактные подгруппы в локально компактных группах $\mathcal{O}_K^2/h\mathcal{O}_K^2$ и $g\mathcal{O}_K^2/h\mathcal{O}_K^2$ соответственно). Получившийся элемент $\mu_{B, g}$ не зависит от выбора элемента $h \in \mathrm{GL}_2(K)$. Теперь из конструкции нетрудно видеть, что сечение $g \mapsto (g, \mu_{B, g})$, где $g \in \mathrm{GL}_2(B)$, задает расщепление центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ над подгруппой $\mathrm{GL}_2(B)$ (необходимо использовать то, что $gB^2 = B^2$ для любого $g \in \mathrm{GL}_2(B)$), $\mathrm{GL}_2(B) = \mathrm{SL}_2(B) \rtimes B^*$. Отсюда следует, что центральное расширение $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}_{\mathbb{R}_+^*}$ расщепляется над подгруппой $\mathrm{GL}_2(B)$. (Действие группы B^* не меняет только что построенное сечение над подгруппой $\mathrm{SL}_2(B)$. Это очевидно, если выбрать над подгруппой B^* такое же построенное сечение.)

Пусть теперь центральное расширение $\widehat{G}$ расщепляется над подгруппами $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$, $\mathrm{GL}_2(B)$ и K^* группы $\mathrm{GL}_2(K)$. Из предложения 1 и расщепления центрального расширения $\widehat{G}$ над подгруппой K^* следует, что центральное расширение $\widehat{G}$ получается из центрального расширения $\widehat{\mathrm{GL}_2(K)}$ при помощи некоторого отображения $\phi \in \mathrm{Hom}(K_2(K), \mathbb{C}^*)$. Из описания отображения $\nu_K(\cdot, \cdot): K_2(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ как композиции граничных отображений в K -теории Милнора следует, что группа $\mathrm{Ker} \nu_K(\cdot, \cdot)$ порождается элементами (f, g) , где

f и g из $\mathcal{O}_K^*$, а также (f, g) , где f и g из B^* . (Действительно, $\nu_K(\cdot, \cdot) = \partial_1 \circ \partial_2$, и последовательности

$$1 \longrightarrow K_2(\mathcal{O}_K) \longrightarrow K_2(K) \xrightarrow{\partial_2} \overline{K}^* \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}^* \longrightarrow \overline{K}^* \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

точны, где ∂_2 – ручной символ, ассоциированный с дискретным нормированием на поле K , $\partial_1 = \nu_{\overline{K}}$.)

Из формулы (6) следует, что если центральное расширение $\widehat{G}$ расщепляется над подгруппой $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$, то элементы (f, g) , где f и g из $\mathcal{O}_K^*$, принадлежат группе $\mathrm{Ker} \phi$. Аналогично, из расщепления центрального расширения $\widehat{G}$ над подгруппой $\mathrm{GL}_2(B)$ следует, что элементы (f, g) , где f и g из B^* , принадлежат группе $\mathrm{Ker} \phi$. Отсюда получаем, что $\phi = \varphi \circ \nu_K(\cdot, \cdot)$ для некоторого гомоморфизма φ из группы $\mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{C}^*$. Найдем такое $a \in \mathbb{C}/(2\pi i/\ln q)\mathbb{Z}$, что $q^{-a} = \varphi(1)$. Тогда $\phi = q^{-a\nu_K(\cdot, \cdot)}$. Предложение доказано.

Список литературы

1. M. M. Kapranov, “Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory”, *Functional analysis on the eve of the 21st century*, v. 1 (New Brunswick, NJ, 1993), *Progr. Math.*, **131**, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, 119–151.
2. D. V. Osipov, “ n -dimensional local fields and adeles on n -dimensional schemes”, *Surveys in contemporary mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 131–164.
3. A. Huber, “On the Parshin–Beilinson Adeles for schemes”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61**:1 (1991), 249–273.
4. Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, “Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 91–164; англ. пер.: D. V. Osipov, A. N. Parshin, “Harmonic analysis on local fields and adelic spaces. II”, *Izv. Math.*, **75**:4 (2011), 749–814.
5. А. Н. Паршин, “Вопросы и замечания к программе Ленглендса”, *УМН*, **67**:3 (2012), 115–146; англ. пер.: A. N. Parshin, “Questions and remarks to the Langlands programme”, *Russian Math. Surveys*, **67**:3 (2012), 509–539.
6. W. Raskind, “Abelian class field theory of arithmetic schemes”, *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), *Proc. Sympos. Pure Math.*, **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 85–187.
7. M. M. Kapranov, V. A. Voevodsky, “2-categories and Zamolodchikov tetrahedra equations”, *Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods* (University Park, PA, 1991), *Proc. Sympos. Pure Math.*, **56**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 177–259.
8. N. Ganter, M. Kapranov, “Representation and character theory in 2-categories”, *Adv. Math.*, **217**:5 (2008), 2268–2300.
9. J. Elgueta, “Representation theory of 2-groups on Kapranov and Voevodsky’s 2-vector spaces”, *Adv. Math.*, **213**:1 (2007), 53–92.
10. P. Deligne, “Sommes de Gauss cubiques et revêtements de $\mathrm{SL}(2)$, d’après S. J. Patterson”, *Séminaire Bourbaki 1978/79*, Exp. No. 539, *Lecture Notes in Math.*, **770**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 244–277.

11. Р. Я. Будылин, “Адельное построение класса Черна”, *Матем. сб.*, **202**:11 (2011), 75–96; англ. пер.: R. Ya. Budylin, “An adelic construction of Chern classes”, *Sb. Math.*, **202**:11 (2011), 1637–1659.
12. D. Osipov, “Adeles on n -dimensional schemes and categories C_n ”, *Internat. J. Math.*, **18**:3 (2007), 269–279.
13. Д. В. Осипов, “Центральные расширения и законы взаимности на алгебраических поверхностях”, *Матем. сб.*, **196**:10 (2005), 111–136; англ. пер.: D. V. Osipov, “Central extensions and reciprocity laws on algebraic surfaces”, *Sb. Math.*, **196**:10 (2005), 1503–1527.
14. E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Кас, “The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves”, *Theta functions – Bowdoin 1987*, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 171–190.
15. T. Fimmel, A. N. Parshin, *An introduction to the higher adelic theory*, Preprint, 1999.
16. Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
17. K. Kato, “Milnor K -theory and the Chow group of zero cycles”, *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory* (Boulder, CO, 1983), Contemp. Math., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 241–253.
18. D. Prasad, A. Raghuram, “Representation theory of $GL(n)$ over non-Archimedean local fields”, *School on Automorphic Forms on $GL(n)$* , ICTP Lect. Notes, **21**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2008, 159–205.
19. T. Wedhorn, “The local Langlands correspondence for $GL(n)$ over p -adic fields”, *School on Automorphic Forms on $GL(n)$* , ICTP Lect. Notes, **21**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2008, 237–320.
20. И. Н. Бернштейн, А. В. Зелевинский, “Представления группы $GL(n, F)$, где F – локальное неархимедово поле”, *УМН*, **31**:3 (1976), 5–70; англ. пер.: I. N. Bernshtein, A. V. Zelevinskii, “Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-archimedean local field”, *Russian Math. Surveys*, **31**:3 (1976), 1–68.
21. А. Н. Паршин, “Локальная теория полей классов”, *Алгебраическая геометрия и ее приложения*, Тр. МИАН СССР, **165**, Наука, М., 1984, 143–170; англ. пер.: A. N. Parshin, “Local class field theory”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **165** (1985), 157–185.
22. M. Kapranov, “Double affine Hecke algebras and 2-dimensional local fields”, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**:1 (2001), 239–262.
23. N. Ganter, *Inner products of 2-representation*, arXiv: 1110.1711.
24. D. Gaiitgory, D. Kazhdan, “Representations of algebraic groups over a 2-dimensional local field”, *Geom. Funct. Anal.*, **14**:3 (2004), 535–574.

Д. В. Осипов (D. V. OSIPOV)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: d_osipov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 22.06.2012