Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, О бирациональных инволюциях $\mathbb{P}^3$,
Изв. РАН. Сер. матем., 2013, том 77, выпуск 3, 199–
222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 03:54:15

УДК 512.76

Ю. Г. Прохоров

О бирациональных инволюциях $\mathbb{P}^3$

Изучаются элементы τ порядка два в группах бирациональных автоморфизмов рационально связных трехмерных алгебраических многообразий таких, что множество τ -неподвижных точек имеет бирационально нелинейчатую компоненту. Получена грубая классификация таких элементов.

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: рациональное отображение, группа Кремоны, многообразие Фано.

DOI: 10.4213/im8014

Посвящается Игорю Ростиславовичу Шафаревичу с глубоким уважением

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. *Группа Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ – это группа бирациональных преобразований проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\mathbb{k}}$, или, эквивалентно, группа $\mathbb{k}$ -автоморфизмов поля $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$. Для $n = 2$ группа Кремоны и ее подгруппы интенсивно изучались в классической литературе, а также во многих современных работах. В частности, классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{k})$ была начата в работах Э. Бертини и почти завершена недавно И. В. Долгачевым и В. А. Исковских [1]. Для групп Кремоны от трех переменных ситуация становится более сложной, имеется лишь немного результатов в данном направлении (см., например, [2], [3]).

Современный подход к классификации конечных подгрупп группы Кремоны основан на том простом наблюдении, что любая конечная подгруппа $G \subset \mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ сопряжена *бирегулярному* действию на некотором рациональном многообразии X . Для любого бирегулярного действия конечной циклической группы $G = \langle \tau \rangle$ на неособом проективном трехмерном многообразии X можно определить подмногообразие $F(\tau) \subset X$ – неунилинейчатую компоненту коразмерности 1 множества неподвижных точек. Бирациональный тип $F(\tau)$ (если это множество непусто) не зависит от выбора модели X и, таким образом, является инвариантом подгруппы $G \subset \mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ с точностью до сопряженности.

Для $n = 2$, инвариант $F(\tau)$ достаточен для того, чтобы различать классы сопряженности инволюций τ в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{k})$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00336-а, 11-01-92613-КО а), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант № НШ-4713.2010.1), стипендии Фонда Саймонса в Независимом университете и Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (грант Правительства РФ, договор 11.G34.31.0023).

ТЕОРЕМА 1.1 [4]. *Любой элемент $\tau \in \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ порядка 2 сопряжен одной и только одной из следующих инволюций:*

- (i) *линейной инволюции, действующей на $\mathbb{P}^2$; здесь $F(\tau) = \emptyset$;*
- (ii) *инволюции де Жонкьера; здесь $F(\tau)$ – гиперэллиптическая (или эллиптическая) кривая рода $g \geq 1$;*
- (iii) *инволюции Гейзера; здесь $F(\tau)$ – негиперэллиптическая кривая рода 3;*
- (iv) *инволюции Бертини; здесь $F(\tau)$ – негиперэллиптическая кривая рода 4, каноническая модель которой лежит на особой квадрике.*

Более того, два элемента $\tau, \tau' \in \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ порядка 2 сопряжены тогда и только тогда, когда $F(\tau) \simeq F(\tau')$. В частности, инволюция $\tau \in \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ линеаризуется (т. е. сопряжена линейной инволюции, действующей на проективной плоскости) тогда и только тогда, когда $F(\tau) = \emptyset$.

В высших размерностях последнее утверждение теоремы 1.1 неверно: $F(\tau)$ не различает классы сопряженности (см. пример 4.6). В частности, поле инвариантов $\mathbb{k}(x_1, x_2, x_3)^\tau$ необязательно рационально. Таким образом, класс изоморфизма этого поля – другой инвариант, различающий классы сопряженности инволюций.

В настоящей статье мы дадим грубую классификацию элементов τ порядка 2 таких, что $F(\tau) \neq \emptyset$, в группах бирациональных изоморфизмов не только рациональных, но и произвольных рационально связных многообразий (не обязательно рациональных). Наш основной результат – следующая

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть Y – трехмерное рационально связанное многообразие, и пусть $\tau \in \text{Bir}(Y)$ – элемент порядка 2 такой, что $F(\tau) \neq \emptyset$. Тогда τ сопряжен одному из следующих действий на трехмерном многообразии X (бirationально эквивалентному Y):*

(C) *X задано уравнением $\varphi_0(u, v)x_0^2 + \varphi_1(u, v)x_1^2 + \varphi_2(u, v)x_2^2 = 0$ в $\mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2}^2 \times \mathbb{A}_{u, v}^2$ и τ действует как $(x_0, x_1, x_2, u, v) \mapsto (-x_0, x_1, x_2, u, v)$;*

(D) *X – τ -эquivариантное расслоение на поверхности дель Пеццо над рациональной кривой с тривиальным действием τ ; действие на общем слое X_η удовлетворяет условию $\text{Pic}(X_\eta)^\tau \simeq \mathbb{Z}$ и сопряжено одной из следующих инволюций:*

(a) *инволюции Бертини $\tau_\eta: X_\eta \rightarrow X_\eta$ и $K_{X_\eta}^2 = 1$;*

(b) *инволюции Гейзера $\tau_\eta: X_\eta \rightarrow X_\eta$ и $K_{X_\eta}^2 = 2$;*

(c) *действие $\tau_\eta: X_\eta \rightarrow X_\eta$, для которого $\text{Fix}(\tau_\eta, X_\eta) = C_\eta \cup \Lambda_\eta$, где C_η – эллиптическая кривая, $C_\eta \in |-K_{X_\eta}|$, Λ_η – 0-цикл степени $4 - K_{X_\eta}^2$ и $1 \leq K_{X_\eta}^2 \leq 4$;*

(F^q) *X – трехмерное многообразие Фано с терминальными $G\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, $\text{Pic}(X)^\tau \simeq \mathbb{Z}$, и имеет место одно из следующих условий:*

(a) *$\dim |-K_X| \leq 0$;*

(b) *$\dim |-K_X| = 1$ и $|-K_X|$ определяет бирациональную структуру расслоения на поверхности типа КЗ над $\mathbb{P}^1$ (см. предложение 6.4);*

(c) *$\dim |-K_X| = 2$ и $|-K_X|$ определяет бирациональную структуру расслоения на эллиптические кривые над $\mathbb{P}^2$ (см. предложение 6.4);*

(F^c) X – трехмерное многообразие Фано с каноническими горништейновыми особенностями:

(a) $X = X_6 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$ задано уравнением $y^2 = \varphi_6(x_1, \dots, x_4)$, особенности X имеют тип cDV и τ действует по одному из следующих правил:

(i) $y \mapsto -y$;

(ii) $x_1 \mapsto -x_1$ (и x_1 входит в φ_6 только в четных степенях);

(b) X – двойное накрытие неособой квадрики $W_2 \subset \mathbb{P}^4$, разветвленное в поверхности $B \subset W_2$ степени 8, особенности X терминальные и τ является одной из следующих:

(i) инволюцией Галуа $X \rightarrow W_2$;

(ii) инволюцией из примера 7.5;

(c) $X \subset \mathbb{P}^4$ – кватрика с терминальными особенностями, τ – инволюция из примера 7.6;

(d) $X \subset \mathbb{P}^5$ – неособое пересечение квадрики и кубического конуса, τ – инволюция из примера 7.7;

(e) $X \subset \mathbb{P}^6$ – неособое пересечение трех квадрик, τ – инволюция из примера 7.8.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Во всех случаях, за исключением случая (F^q) из теоремы 1.2, мы можем описать поверхность $F(\tau)$:

Тип	$F(\tau)$ (с точностью до бирациональной эквивалентности)
(C)	двойное накрытие $\mathbb{P}^2$
(D), (a)	расслоения над $\mathbb{P}^1$ на негиперэллиптические кривые рода 4, каноническая модель которых содержится в особой квадрике
(D), (b)	расслоения над $\mathbb{P}^1$ на негиперэллиптические кривые рода 3
(D), (c)	расслоение на эллиптические кривые над $\mathbb{P}^1$
(F^c) , (a), (i)	$\{\varphi_6 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$
(F^c) , (b), (i)	$B = W_2 \cap U_4 \subset \mathbb{P}^4$, где U_4 – кватрика
(F^c) (остальные случаи)	поверхность типа K3

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Примеры, данные в соответствующих параграфах, показывают, что все случаи (C); (D), (a)–(c); (F^q) , (a)–(c); (F^c) , (a)–(e) реализуются.

Отметим, что наша классификация, действительно, “грубая”. Во-первых, мы не даем детального описания, особенно в случае (F^q) . Причина состоит в отсутствии классификации особых трехмерных многообразий Фано. На самом деле инволюции типа (F^q) , (a) наиболее трудны для изучения. Далее, наши случаи могут пересекаться, и в настоящий момент мы не можем это контролировать. Наконец, во многих случаях мы не можем выбрать рациональные многообразия из нашего списка для того, чтобы получить классификацию инволюций в группе Кремоны. Например, общий элемент X серий (F^c) , (a)–(d) и любой

элемент серии (F^c) , (e) не является рациональным [5], [6]. Однако имеется много примеров специальных (особых) трехмерных многообразий Фано таких, как в (F^c) , (a) – (c) , являющихся рациональными.

Статья организована следующим образом. В § 2 помещены предварительные сведения. В § 3 доказаны некоторые простые технические факты, касающиеся множества $F(\tau)$. В § 4–6 и § 8 доказывается теорема 1.2 в случаях (C) , (D) , (F^c) и (F^c) соответственно. В § 7 приведены некоторые примеры инволюций типа (F^c) .

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Обозначения. Введем следующие обозначения: $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ – взвешенное проективное пространство; $X_d \subset \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ – гиперповерхность взвешенной степени d ; $X_{d_1 d_2 \dots d_r} \subset \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ – взвешенное полное пересечение типа $(d_1, d_2, \dots, d_r)$.

Все объекты определены над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Когда мы говорим, что многообразие имеет, например, терминальные особенности, это означает, что особенности не хуже, чем указанные.

2.2. G -многообразия. Пусть G – конечная группа. В нашей статье G -многообразие – это алгебраическое многообразие X над $\mathbb{k}$ с бигулярным действием конечной группы G . Любой морфизм (соответственно, рациональное отображение) между G -многообразиями обычно предполагается G -эквивариантным. Мы говорим, что нормальное G -многообразие X $G\mathbb{Q}$ -факториально, если любой G -инвариантный дивизор Вейля на X является $\mathbb{Q}$ -картье.

G -расслоением Фано–Мори называется проективный G -эквивариантный морфизм $f: X \rightarrow Z$ такой, что $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$, $\dim Z < \dim X$, X имеет лишь терминальные $G\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, антиканонический дивизор $-K_X$ обилен над Z и относительное G -инвариантное число Пикара $\rho(X/Z)^G$ равно 1. В случае $\dim X = 3$ мы имеем следующие возможности:

- (C) Z – рациональная поверхность и общий слой X_η – коника;
- (D) $Z \simeq \mathbb{P}^1$ и общий слой X_η – неособая поверхность дель Пеццо;
- (F) Z – точка и X – так называемое *трехмерное $G\mathbb{Q}$ -многообразие Фано*.

В этих ситуациях мы говорим, что X/Z имеет тип (C) , (D) , (F) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае (C) существует непустое открытое по Зарискому подмножество $U \subset Z$ такое, что ограничение $f_U: X_U \rightarrow U$ является расслоением на коники. Аналогично, в случае (D) существует $U \subset Z$ такое, что $f_U: X_U \rightarrow U$ – неособое расслоение на поверхности дель Пеццо.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Мы также будем рассматривать класс G -многообразий Фано, отличных от (F) :

(F^c) трехмерные многообразия Фано с каноническими горенштейновыми (не обязательно $G\mathbb{Q}$ -факториальными) особенностями.

В некоторых ситуациях это более удобно для классификационных задач. Подкласс класса (F), состоящий из всех трехмерных $G\mathbb{Q}$ -многообразий Фано X таких, что K_X не является дивизором Картье, мы обозначим через (F^q) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть G – конечная группа, и пусть X – рационально связное G -многообразие. Тогда существуют G -расслоение Фано–Мори $f: \bar{X} \rightarrow Z$ и G -эквивариантное бирациональное отображение $X \dashrightarrow \bar{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя стандартные аргументы (см., например, [3]), мы можем заменить X на неособую проективную модель так, что действие G на X бигекулярно. Далее, мы применим G -эквивариантную программу минимальных моделей (G -ПММ): $X \dashrightarrow \bar{X}$ (в высших размерностях мы можем применить G -ПММ с масштабированием [7, следствие 1.3.3]). Заметим, что в [7] рассматриваются многообразия без действия группы, но добавление действия конечной группы не представляет большой трудности (см. [8, пример 2.18]). Применяя эту программу, мы остаемся в категории проективных многообразий с лишь терминальными $G\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями. Поскольку X рационально связно, на последнем шаге канонический дивизор не может быть численно эффективным [9, теорема 1], таким образом, мы получим G -расслоение Фано–Мори $f: \bar{X} \rightarrow Z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. В обозначениях из предложения 2.3 в случае $\dim X = 3$ мы говорим, что наше изначальное G -многообразие принадлежит классу (C) (соответственно, (D), (F)), если ему принадлежит $\bar{X}/Z$. Ясно, что выбор бирационального отображения $X \dashrightarrow \bar{X}$ не является единственным, и поэтому классы (C), (D), (F) могут пересекаться.

2.3. G -программа минимальных моделей для пар [10]. Пусть X – нормальное G -многообразие, и пусть $\mathcal{M}$ – инвариантная линейная система дивизоров Вейля без неподвижных компонент. В этом случае мы говорим, что $(X, \mathcal{M})$ – G -пара. Стандартным образом можно определить дискрепантность $a(E, X, \mathcal{M})$ простого дивизора E относительно $(X, \mathcal{M})$. Мы говорим, что пара $(X, \mathcal{M})$ терминальна (соответственно, канонична), если $a(E, X, \mathcal{M}) > 0$ (соответственно, $a(E, X, \mathcal{M}) \geq 0$) для всех исключительных дивизоров E над X . Можно применить G -программу минимальных моделей в категории G -пар $(X, \mathcal{M})$ таких, что многообразие X является $G\mathbb{Q}$ -факториальным и пара $(X, \mathcal{M})$ терминальна. В частности, для любой G -пары $(X, \mathcal{M})$ существует терминальная модель $f: (X', \mathcal{M}') \rightarrow (X, \mathcal{M})$, где f – G -эквивариантный морфизм и $(X', \mathcal{M}')$ – терминальная G -пара такая, что дивизор $K_{X'} + \mathcal{M}'$ является f -численно эффективным, $\mathcal{M}'$ – бирациональный прообраз $\mathcal{M}$ и X' является $G\mathbb{Q}$ -факториальным. Более того, мы можем записать

$$K_{X'} + \mathcal{M}' = f^*(K_X + \mathcal{M}) - \sum_i a_i E_i,$$

где E_i – f -исключительные дивизоры, $a_i \geq 0$ для всех i и $a_i = 0$ для всех i тогда и только тогда, когда пара $(X, \mathcal{M})$ является канонической. В последнем случае мы говорим, что морфизм f является логкрепантным.

2.4. Многообразия минимальной степени. Для удобства ссылок мы напомним следующий хорошо известный факт.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $W \subset \mathbb{P}^N$ – n -мерное проективное многообразие, не содержащееся в гиперплоскости. Тогда $\deg W \geq \operatorname{codim} W + 1$ и равенство здесь имеет место, если и только если W – одно из следующих:

- 1) $W = \mathbb{P}^N$;
- 2) $W = W_2 \subset \mathbb{P}^N$ – квадра;ка;
- 3) W – образ многообразия $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$, при (бирациональном) морфизме, заданном $|\mathcal{O}(1)|$;
- 4) W – образ $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$, $a_i \geq 0$, при (бирациональном) морфизме, заданном $|\mathcal{O}(1)|$.

2.5. Трехмерные многообразия Фано. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с лишь каноническими горенштейновыми особенностями. По формуле Римана–Роха и теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль имеем $\dim |-K_X| = g + 1$, где $g = g(X)$ – положительное целое число такое, что $-K_X^3 = 2g - 2$. Это число называется *родом* X . Пусть $\Phi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g+1}$ – антиканоническое отображение. Все такие многообразия Фано делятся на следующие группы (см. [11]–[14]):

- (i) $\operatorname{Bs} |-K_X| \neq \emptyset$ и $\Phi(X)$ – поверхность такая, как в теореме 2.5;
- (ii) (гиперэллиптический случай) $\operatorname{Bs} |-K_X| = \emptyset$, Φ – двойное накрытие трехмерного многообразия $W \subset \mathbb{P}^{g+1}$ такого, как в теореме 2.5;
- (iii) (тригональный случай) Φ – вложение и образ $\Phi(X)$ не является пересечением квадрик; в этом случае квадрики, проходящие через $\Phi(X)$, высекают четырехмерное многообразие такое, как в теореме 2.5;
- (iv) (основная серия) Φ – вложение и образ $\Phi(X)$ является пересечением квадрик.

В обозначениях, приведенных выше, X называется *трехмерным многообразием дель Пеццо*, если его антиканонический класс делится на 2 в $\operatorname{Pic}(X)$, т. е. $-K_X \sim 2A$ для некоторого $A \in \operatorname{Pic}(X)$. *Степень* X определяется как $d = d(X) := A^3$.

ТЕОРЕМА 2.6 [11, гл. 2, § 1], [15, гл. 1, § 6]. Пусть X – трехмерное многообразие дель Пеццо, и пусть $A := -\frac{1}{2}K_X$. Тогда $\dim |S| = d(X) + 1$ и $d(X) \leq 8$. Более того:

- 1) если $d = 1$, то $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1^3, 2, 3)$, линейная система $|2A|$ определяет двойное накрытие $X \rightarrow \mathbb{P}(1^3, 2)$ с дивизором ветвления $B \subset \mathbb{P}(1^3, 2)$ – поверхностью взвешенной степени 6;
- 2) если $d = 2$, то $X \simeq X_4 \subset \mathbb{P}(1^4, 2)$, линейная система $|A|$ определяет двойное накрытие $X \rightarrow \mathbb{P}^3$ с дивизором ветвления $B \subset \mathbb{P}^3$ – поверхностью степени 4;
- 3) если $d = 3$, то $X \simeq X_3 \subset \mathbb{P}^4$;
- 4) если $d = 4$, то $X \simeq X_{2,2} \subset \mathbb{P}^5$.

§ 3. Множества неподвижных точек

Далее G обозначает конечную циклическую группу, порожденную элементом τ . Пусть X — G -многообразие размерности n . Обозначим множество неподвижных точек через $\text{Fix}(\tau, X)$. Мы будем записывать $\text{Fix}(\tau)$, если это не приводит к путанице.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Предположим, что X имеет лишь $G\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, и пусть $F = \bigcup F_i$ — объединение всех $(n-1)$ -мерных компонент $F_i \subset \text{Fix}(\tau)$. Тогда $\text{Sing}(F) \subset \text{Sing}(X)$, F является несвязным объединением своих неприводимых компонент и каждая компонента F_i является нормальной. На самом деле для каждой точки $P \in F$ индуцированное действие τ на касательном пространстве Зарисского $T_{P,F}$ тривиально. Однако действие является нетривиальным на $T_{P,X}$. Поэтому $T_{P,F} \subsetneq T_{P,X}$ и, таким образом, $\text{Sing}(F) \subset \text{Sing}(X)$. В частности, различные компоненты $F_i, F_j \subset \text{Fix}(\tau)$ не могут пересекать друг друга вне $\text{Sing}(X)$. Заметим, что $\text{codim Sing}(X) \geq 3$, так как особенности X терминальны. С другой стороны, F_i и F_j — дивизоры $\mathbb{Q}$ -картье, поскольку X является $G\mathbb{Q}$ -факториальным. Следовательно, $F_i \cap F_j = \emptyset$. Те же самые аргументы показывают, что каждая компонента F_i является неособой в коразмерности 1. Поскольку F_i — многообразие Коэна–Маколея (см., например, [8, следствие 5.25]), оно нормально.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Предположим, что X имеет структуру G -расслоенного по Фано–Мори пространства $f: X \rightarrow Z$ и существует неунилинейчатая неприводимая компонента $S \subset \text{Fix}(\tau, X)$ размерности $n-1$. Тогда S доминирует Z (см., например, [16, следствие 1.3]). Следовательно, действие τ на Z тривиально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Предположим, что X рационально связно.*

1) *Существует не более одной неприводимой компоненты $S \subset \text{Fix}(\tau, X)$ размерности $n-1$, не являющейся унилинейчатой.*

2) *Пусть $\psi: X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение, где X' — проективное многообразие с логтерминальными по Кавамате особенностями (относительно некоторой границы). Предположим, что существует дивизориальная компонента $S \subset \text{Fix}(\tau, X)$, не являющаяся унилинейчатой. Тогда $\psi_* S$ — дивизор на X' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Предположим противное: существуют две такие компоненты S_1 и S_2 . Как в предложении 2.3, мы можем предположить, что многообразие X является проективным и неособым. Применим эквивариантную ПММ $X \dashrightarrow \bar{X}$. Неунилинейчатые дивизоры S_i не могут быть стянуты (см., например, [16, следствие 1.3]). Следовательно, их образы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ — также дивизоры, содержащиеся в $\text{Fix}(\tau, \bar{X})$. Поскольку X рационально связно, оно не может иметь минимальной модели, т. е. канонический дивизор $K_{\bar{X}}$ не может быть численно эффективным [9, теорема 1]. Таким образом, $\bar{X}$ имеет структуру G -расслоенного по Фано–Мори пространства $f: \bar{X} \rightarrow Z$. Согласно замечанию 3.1 дивизоры $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ не пересекают друг друга, а согласно замечанию 3.2 они являются f -обильными и действие G на Z тривиально. Ограничивая $\bar{S}_1 + \bar{S}_2$ на общий слой $F = f^{-1}(z)$, мы получим

обильный несвязный дивизор. Это возможно только при $\dim F = 1$, таким образом, $F \simeq \mathbb{P}^1$. Поскольку действие является нетривиальным на F , мы видим, что $\text{Fix}(\tau, \bar{X}) \cap F$ состоит из двух точек $\bar{S}_1 \cap F$ и $\bar{S}_2 \cap F$. С другой стороны, база Z рационально связна, и, таким образом, $\bar{S}_i$ не может быть сечением f в общей точке. Противоречие.

Утверждение 2) следует из [16, следствие 1.6].

Обозначим неунилинейчатую компоненту коразмерности 1 множества $\text{Fix}(\tau, X)$ через $F(\tau, X)$, или просто через $F(\tau)$ (если это не приводит к путанице). Согласно предложению 3.3, (ii) бирациональный тип $F(\tau, X)$ не зависит от выбора проективной модели X (лишь с логтерминальными особенностями), на которой G действует бирегулярно. В частности, мы можем определить кодировку размерность $\kappa(\tau, X)$ равной $\kappa(F(\tau, X))$, если $F(\tau, X) \neq \emptyset$, и равной $-\infty$ в противном случае.

§ 4. Расслоения на коники

Далее $G = \{1, \tau\}$ – группа порядка 2.

ЛЕММА 4.1. Пусть $f: X \rightarrow Z$ – G -расслоение по Фано–Мори пространство над рациональной поверхностью Z . Предположим, что действие G на Z тривиально. Тогда f G -бirationально эквивалентно действию

$$\tau: (x_0, x_1, x_2; u, v) \mapsto (-x_0, x_1, x_2; u, v) \quad (4.1)$$

на гиперповерхности в $\mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2}^2 \times \mathbb{A}_{u, v}^2$, заданной уравнением

$$\varphi_0(u, v)x_0^2 + \varphi_1(u, v)x_1^2 + \varphi_2(u, v)x_2^2 = 0. \quad (4.2)$$

Более того, фактор X/G рационален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала, уменьшая Z , мы можем считать, что $Z \subset \mathbb{A}_{u, v}^2$ – открытое по Зарисскому подмножество, X неособо и f является расслоением на коники над Z . Тогда линейная система $|-K_X|$ определяет G -эквивариантное вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2}^2 \times \mathbb{A}_{u, v}^2$ так, что слои морфизма f – коники в $\mathbb{P}_{x_0, x_1, x_2}^2$ (см. [5, предложение 1.2]). Ясно, что действие на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^2$ может быть записано в виде (4.1). Тогда, изменяя систему координат, мы можем считать, что X задано уравнением (4.2). Наконец, X/G является рациональным, поскольку $\mathbb{k}(X/G) \simeq \mathbb{k}(u, v, x_1/x_2)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть Y – рационально связное трехмерное G -многообразие с $G = \{1, \tau\}$ и $\kappa(\tau, Y) \geq 0$. Предположим, что (Y, G) принадлежит классу (C), и пусть $f: X \rightarrow Z$ – модель, являющаяся расслоением на коники, т.е. это G -расслоение Фано–Мори с $\dim Z = 2$ такое, что существует G -эквивариантное бирациональное отображение $Y \dashrightarrow X$. Тогда действие на Z тривиально и ограничение $f_{F(\tau)}: F(\tau) \rightarrow Z$ является двойным накрытием в общей точке. Следовательно, действие G сопряжено действию, заданному в (4.1), (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S := F(\tau)$. Согласно замечанию 3.2 действие на Z тривиально и $f(S) = Z$. Это доказывает первое утверждение. Далее, для общего слоя F мы имеем $F \simeq \mathbb{P}^1$ и действие G на F не является тривиальным. Тогда $F \cap S$ состоит из двух точек и, таким образом, $f|_S: S \rightarrow Z$ является двойным накрытием в общей точке.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Напомним, что *степень нерациональности* алгебраического многообразия V – это минимальная степень доминантного рационального отображения из V в $\mathbb{P}^n$ [17]. Согласно следствию 4.2 степень нерациональности $F(\tau)$, где τ – инволюция, $F(\tau) \neq \emptyset$, действующая на связке коник, равна 2. Следующая конструкция показывает, что *любая* алгебраическая поверхность степени нерациональности 2 бирационально эквивалентна $F(\tau)$ для некоторой инволюции в $\text{Cr}_3(\mathbb{k})$.

КОНСТРУКЦИЯ 4.4. Пусть $\pi: S \dashrightarrow Z$ – конечное в общей точке рациональное отображение степени 2, где Z является рациональной поверхностью. Уменьшая Z , мы можем считать, что π – морфизм, Z – открытое по Зарисскому подмножество в $\mathbb{A}_{u,v}^2$ и S задается в $\mathbb{A}_{u,v}^2 \times \mathbb{P}_x^1$ уравнением

$$x^2 = \varphi(u, v).$$

Определим действие τ на $X := \mathbb{A}_{u,v}^2 \times \mathbb{P}_x^1$ следующим образом:

$$\tau: (u, v, x) \mapsto (u, v, \varphi(u, v)x^{-1}).$$

Ясно, что $\text{Fix}(\tau) = S$.

Наконец, мы предложим серию примеров инволюций в группах бирациональных автоморфизмов расслоений на коники с $F(\tau) = \emptyset$. В частности, это дает примеры нелинеаризуемых инволюций в $\text{Cr}_3(\mathbb{k})$ с $F(\tau) = \emptyset$ (ср. с теоремой 1.1).

КОНСТРУКЦИЯ 4.5. Пусть $h: Y \rightarrow Z$ – расслоение на коники над поверхностью. Предположим, что существует рациональная поверхность $S \subset Y$ такая, что ограничение $h_S: S \rightarrow Z$ – конечный в общей точке морфизм степени 2 (таким образом, S является бирациональным 2-сечением морфизма h). Уменьшая Z , мы можем считать, что морфизм h_S на самом деле конечен. Рассмотрим замену базы $f: X = Y \times_Z S \rightarrow S$. Тогда f является локально тривиальным расслоением на рациональные кривые. В частности, X рационально. Тогда инволюция Галуа τ двойного накрытия $X \rightarrow Y$ определяет элемент $\text{Cr}_3(\mathbb{k})$. Заметим, что если $Y = X/\tau$ нерационально, то τ не линеаризуется. В противном случае X/τ бирационально эквивалентно рациональному многообразию $\mathbb{P}^3/\tau'$, где τ' – линейная инволюция $\mathbb{P}^3$, сопряженная τ .

ПРИМЕР 4.6. Пусть $V \subset \mathbb{P}^4$ – неособая кубическая гиперповерхность и $L \subset V$ – прямая. Пусть $Y \rightarrow V$ – раздутие L и S – исключительный дивизор. Проекция из L индуцирует структуру расслоения на коники $Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, и S является рациональным 2-сечением. Кубика V нерациональна [18]. Согласно лемме 4.1 наша конструкция дает пример инволюции в $\text{Cr}_3(\mathbb{k})$ с $F(\tau) = \emptyset$, которая не линеаризуется.

§ 5. Расслоения на поверхности дель Пеццо

В этом параграфе мы изучим случай (D).

ЛЕММА 5.1. *Пусть Γ – любая конечная группа. Существует естественное биективное соответствие между:*

- 1) *множеством всех Γ -расслоений на поверхности дель Пеццо $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ с тривиальным действием на $\mathbb{P}^1$ по модулю Γ -эквивариантных бирациональных преобразований над $\mathbb{P}^1$,*
- 2) *множеством всех поверхностей дель Пеццо V над $\mathbb{k}(t)$, допускающих эффе́ктивное Γ -действие с $\text{Pic}(V)^\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ по модулю Γ -изоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{k}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{k}(t)$ и $\eta = \text{Spec } \mathbb{k}(t)$ – общая точка. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – Γ -расслоение на поверхности дель Пеццо с тривиальным действием на $\mathbb{P}^1$. Тогда Γ действует на общем слое $V := X_\eta$, который является поверхностью дель Пеццо над $\mathbb{k}(t)$ с $\text{Pic}(V)^\Gamma \simeq \mathbb{Z}$. Обратно, если Γ действует на поверхности дель Пеццо V , определенной над $\mathbb{k}(t)$ так, что $\text{Pic}(V)^\Gamma \simeq \mathbb{Z}$, то мы можем взять подкольцо $\mathbb{k} \subset R \subset \mathbb{k}(t)$, для которого поле частных R совпадает с $\mathbb{k}(t)$, $Z := \text{Spec } R$ – рациональная аффинная нормальная кривая и существует многообразие X_Z над R такое, что $X_Z \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } \mathbb{k}(t) = V$. Тогда, как в предложении 2.3, мы получим Γ -расслоение на поверхности дель Пеццо $X/\mathbb{P}^1$.

Напомним, что в нашем случае $G = \{1, \tau\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть $f: X \rightarrow Z$ – G -эквивариантное расслоение на поверхности дель Пеццо с $\text{Pic}(X/Z)^G \simeq \mathbb{Z}$ и $F(\tau) \neq \emptyset$ над рациональной кривой Z . Пусть X_η – общий слой и $d := K_{X_\eta}^2$. Тогда имеет место одно из следующих:*

- (i) $d = 1$, τ – инволюция Бертини на X_η ;
- (ii) $d = 2$, τ – инволюция Гейзера на X_η ;
- (iii) $1 \leq d \leq 4$ и действие τ имеет эллиптическую кривую неподвижных точек на X_η .

Более того, $\text{Pic}(X_\eta/G) \simeq \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что согласно замечанию 3.2 действие на Z тривиально. Пусть $S := F(\tau, X)$ и X_η – общий слой. Пусть $S_\eta \subset X_\eta$ – общий слой S/Z . Таким образом, S_η – кривая τ -неподвижных точек. Поскольку $\kappa(S) \geq 0$, то $p_a(S_\eta) > 0$. Если $p_a(S_\eta) > 1$, то согласно [4] (ср. с теоремой 1.1) мы имеем случаи (i) и (ii). Предположим, что $p_a(S_\eta) = 1$. Тогда S_η – эллиптическая кривая и $S_\eta \in |-K_{X_\eta}|$. В этом случае утверждение вытекает из следующей леммы.

Последнее утверждение очевидно, поскольку $\rho(X_\eta/G) = \rho(X_\eta)^G = 1$.

ЛЕММА 5.3. *Пусть V – поверхность дель Пеццо над полем $\mathbb{L}$ характеристики нуль, $\tau \in \text{Aut}_{\mathbb{L}}(V)$ – элемент порядка 2 и $W := V/\tau$. Предположим, что $F(\tau, V)$ – (неособая) эллиптическая кривая. Тогда W – поверхность дель Пеццо, особенностями которой является только дувалевские точки*

типа A_1 , $K_W^2 = 2K_V^2$ и

$$\# \text{Sing}(W) + K_V^2 = 4.$$

В частности, $K_V^2 \leq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что $\mathbb{L} = \mathbb{C}$. Пусть $\pi: V \rightarrow W$ – факторотображение. Положим $s := \# \text{Sing}(W)$ и $d := K_V^2$. Вблизи каждой неподвижной точки $P \in V$ действие τ в подходящих (аналитических) координатах может быть записано как $\tau: (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, x_2)$ или $\tau: (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2)$. В первом случае точка $\pi(P)$ неособа, а во втором $\pi(P)$ имеет тип A_1 . Пусть C – сумма одномерных компонент $\text{Fix}(\tau)$, и пусть $C_1 := F(\tau, V) \subset C$.

Мы утверждаем, что $C_1 = C \sim -K_V$. Предположим, что $C_1 \not\sim -K_V$. Поскольку $(K_V + C_1) \cdot C_1 = 2p_a(C_1) - 2 = 0$ и $K_V \cdot C_1 < 0$, то $C_1^2 > 0$. Согласно теореме Ходжа об индексе имеем

$$(K_V + C_1) \cdot K_V = (K_V + C_1)^2 < 0.$$

Таким образом, $d = K_V^2 < -K_V \cdot C_1$. С другой стороны, действие τ на линейной системе $|-r_d K_V|$ является нетривиальным, где $r_1 = 2$ и $r_d = 1$, если $d > 1$. В противном случае морфизм, заданный линейной системой $|-r_d K_V|$, пропускается через W , и тогда τ должно быть инволюцией или Бертини, или Гейзера. Поэтому C – компонента дивизора $D \in |-r_d K_V|$. Следовательно, $d < -K_V \cdot C_1 \leq -K_V \cdot D = dr_d$. Это возможно, только если $d = 1$ и $D = C_1$. Тогда $p_a(C_1) = 2$. Противоречие. Таким образом, $C_1 \sim -K_V$. Заметим, что кривая C неособа (так как $C \subset \text{Fix}(\tau)$). В частности, C – несвязное объединение своих неприводимых компонент. Поскольку дивизор $C_1 \sim -K_V$ обилен, то $C = C_1$.

Далее, согласно формуле Гурвица имеем $K_V = \pi^* K_W + C$. Таким образом, $2K_V = \pi^* K_W$. Поэтому дивизор $-K_W$ обилен, т. е. W – поверхность дель Пеццо лишь с дювалевскими особенностями типа A_1 и $K_W^2 = 2d$. Применяя формулу Нётера к минимальному разрешению особенностей W , мы получим

$$\rho(W) + s = 10 - K_W^2 = 10 - 2d.$$

С другой стороны, согласно формуле Лефшеца для числа неподвижных точек мы имеем

$$s = 2 + \text{Tr}_{H^2(V, \mathbb{R})}(\tau) = 2 + \rho(W) - (\rho(V) - \rho(W)) = 2 + 2\rho(W) - 10 + d.$$

Таким образом, $s + d = 4$. Лемма доказана.

Далее мы приведем два примера инволюций в $\text{Cr}_3(\mathbb{k})$ типов, представленных в предложении 5.2, (i), (ii).

ПРИМЕР 5.4 (ср. [19, примеры 7.11, 8.10, 4.6, 5.5]). Предположим, что $X = X_4 \subset \mathbb{P}(1^4, 2)_{x_1, \dots, x_4, y}$ – гиперповерхность степени 4, имеющая только терминальные особенности, и пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_{x_1, \dots, x_4}^3$ – проекция. Тогда π – двойное накрытие, разветвленное в квартике $B \subset \mathbb{P}^3$, и X – трехмерное многообразие дель Пеццо степени 2. Пусть τ – инволюция Галуа. Мы назовем ее

инволюцией Гейзера многообразие X . Можно записать уравнение X в виде

$$y^2 = \varphi_4(x_1, \dots, x_4),$$

где $\varphi_4 = 0$ – уравнение B , а τ действует как $x_i \mapsto x_i$, $y \mapsto -y$. Пусть l_1 и l_2 – общие линейные формы от $x_1, \dots, x_4$. Тогда отображение

$$X \dashrightarrow \mathbb{P}^1, \quad (x_1, \dots, x_4, y) \dashrightarrow (l_1, l_2),$$

определяет бирациональную τ -эквивариантную структуру расслоения на поверхности дель Педро на X , как в предложении 5.2, (ii). Ясно, что $\text{Fix}(\tau) \simeq B$ и эта поверхность или имеет тип КЗ с лишь дювалевскими особенностями, или является бирационально линейчатой. Для общего выбора B многообразие X не является рациональным. Однако для некоторых специальных $B \subset \mathbb{P}^3$ многообразие X может быть рациональным. Например, пусть $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ – раздутье шести точек в общем положении и $\mathbb{P}^3 \rightarrow X$ – стягивание K -тривиальных кривых. Тогда X является трехмерным многообразием дель Педро, как и выше. Это X рационально и имеет в точности 16 особых точек. Поэтому B – куммерова поверхность. Больше количество примеров можно найти в [19].

ПРИМЕР 5.5 (ср. [19, примеры 7.13, 5.5]). Как и выше, начиная с гиперповерхности $X = X_6 \subset \mathbb{P}(1^3, 2, 3)$, мы получим инволюцию Бертини на X . Общая проекция определяет бирациональную τ -эквивариантную структуру расслоения на поверхности дель Педро на X , как и в предложении 5.2, (i). В этом случае $\text{Fix}(\tau)$ – гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^3, 2)$, поверхность общего типа.

Инволюции типа 5.2, (iii) могут быть заданы следующей серией примеров.

ПРИМЕР 5.6. Пусть $Q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}(t)}^3$ – неособая квадрика, определенная над $\mathbb{k}(t)$. Предположим, что $\text{Pic}(Q) \simeq \mathbb{Z}$. Например, мы можем взять $Q = \{x_0x_1 + x_2^2 + tx_3^2 = 0\}$. Пусть $V \rightarrow Q$ – двойное накрытие, разветвленное в неособой кривой $C \in |-K_Q|$ (также определенной над $\mathbb{k}(t)$). Тогда V – поверхность дель Педро степени 4. Легко видеть, что V – пересечение двух квадрик Q_1, Q_2 в $\mathbb{P}_{\mathbb{k}(t)}^4$ таких, что Q_1 является конусом над Q и $Q_2 \cap Q = C$. Пусть τ – инволюция Галуа V/Q . Поскольку $\text{Pic}(Q) \simeq \mathbb{Z}$, то $\text{Pic}(V)^\tau \simeq \mathbb{Z}$. Мы получим действие τ на пучке поверхностей дель Педро, как в предложении 5.2, (iii).

ПРИМЕР 5.7. Пусть $V \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}(t)}^3$ – неособая кубическая поверхность, заданная уравнением $x_0^2x_1 + x_1\varphi_2(x_1, x_2, x_3) + \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 0$, где φ_d – однородный многочлен степени d и $\varphi_3(x_1, x_2, x_3)$ неприводим над $\mathbb{k}(t)$. Таким образом, $(1 : 0 : 0 : 0)$ – точка Эккарда, и прямые, проходящие через нее, сопряжены относительно $\text{Gal}(\overline{\mathbb{k}(t)}/\mathbb{k}(t))$. Инволюция τ действует как $x_0 \mapsto -x_0$, и фактор V/τ – поверхность дель Педро степени 6 с точкой типа A_1 . Мы получим действие τ на пучке поверхностей дель Педро, как в предложении 5.2, (iii).

ПРИМЕР 5.8. Пусть $V \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}(t)}(1, 1, 1, 2)$ – неособая гиперповерхность взвешенной степени 4. Мы можем записать ее уравнение в виде $y^2 = \varphi_4(x_1, x_2, x_3)$. Предположим, что φ_4 содержит члены только четной степени от x_1 . Тогда V инвариантно относительно инволюции $\tau: x_1 \mapsto -x_1$. Фактормногообразие V/τ

является гиперповерхностью взвешенной степени 4 в $\mathbb{P}_{k(t)}(1, 1, 2, 2)$. Это поверхность дель Пеццо степени 4 с двумя точками типа A_1 . Как и выше, мы получим действие τ на пучке поверхностей дель Пеццо, описанное в предложении 5.2, (iii).

ПРИМЕР 5.9. Пусть $V \subset \mathbb{P}_{k(t)}(1, 1, 2, 3)$ – неособая гиперповерхность взвешенной степени 6. Мы можем записать ее уравнение в виде $z^2 = \varphi_6(x_1, x_2, y)$. Предположим, что φ_6 содержит только члены четной степени от x_1 . Инволюция τ действует на V как $\tau: x_1 \mapsto -x_1$. Как и выше, мы получим действие τ на пучке поверхностей дель Пеццо, описанное в предложении 5.2, (iii).

§ 6. Негоренштейновы трехмерные многообразия Фано

В этом параграфе мы изучим случай (F^q) . Напомним, что в случае (F^q) , (a) теоремы 1.2 единственное утверждение – неравенство $\dim |-K_X| \leq 0$, поэтому далее мы можем предположить, что $\dim |-K_X| \geq 1$. Существенный результат состоит в том, что для трехмерного многообразия Фано с $\dim |-K_X| \geq 3$, допускающего инволюцию с $F(\tau) \neq \emptyset$, существует эквивариантное бирациональное преобразование на трехмерное многообразие со структурой расслоения типа (C) либо (D) или на трехмерное многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. Нам нужна следующая простая, но очень полезная лемма.

ЛЕММА 6.1. Пусть X – нормальное проективное трехмерное G -многообразие и $\mathcal{M}$ – G -инвариантная линейная система без неподвижных компонент такая, что $-K_X - \mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} D$, где D – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор. Если $D \neq 0$ или пара $(X, \mathcal{M})$ не является канонической, то (X, G) имеет тип (C) или (D).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем G -инвариантный пучок $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ (без неподвижных компонент) и заменим пару $(X, \mathcal{L})$ на ее терминальную $G\mathbb{Q}$ -факториальную модель (см. п. 2.3). Тогда мы можем записать $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{L} + D$, где $D > 0$. Применим G -эквивариантную $(K_X + \mathcal{L})$ -ПММ. На каждом шаге мы стягиваем $(K + \mathcal{L})$ -отрицательный экстремальный луч и $-(K + \mathcal{L}) \sim_{\mathbb{Q}} D$. Поэтому дивизор D не может быть стянут и $K + \mathcal{L}$ не может быть численно эффективным. Если (X, G) не типа (C) или (D), то в результате мы получим пару $(X', \mathcal{L}')$ такую, что $\text{Pic}(X')^G \simeq \mathbb{Z}$ и $-K_{X'} \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}' + D'$, где $D' > 0$. Мы можем записать $-K_{X'} \sim_{\mathbb{Q}} a' \mathcal{L}'$ для некоторого $a' > 1$. Согласно построению пара $(X', \mathcal{L}')$ терминальна. Поэтому общий элемент $L' \in \mathcal{L}'$ неособ и содержится в множестве неособых точек X' [10, лемма 1.22]. Согласно формуле присоединения имеем $-K_{L'} = (a' - 1)L'|_{L'}$. Поэтому L' – поверхность дель Пеццо; в частности, L' является рациональной. Таким образом, X имеет G -инвариантный пучок рациональных поверхностей. Разрешая базисное множество и применяя относительную G -ПММ, мы получим G -расслоение Фано–Мори типа (D) или (C).

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть X – трехмерное $G\mathbb{Q}$ -многообразие Фано. Предположим, что $-K_X \sim D + M$, где D и M – эффективные дивизоры такие, что $D \neq 0$ и $\dim |M| > 0$. Тогда (X, G) имеет тип (C) или (D).

СЛЕДСТВИЕ 6.3 (ср. [10, § 4]). Пусть X – трехмерное $G\mathbb{Q}$ -многообразие Фано. Предположим, что $\dim |-K_X| \geq 1$ и (X, G) не имеет тип (C) или (D). Тогда пара $(X, |-K_X|)$ канонична. В частности, $|-K_X|$ не имеет неподвижных компонент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4 (ср. [10, теорема 4.5]). Пусть X – негорнштейново трехмерное $G\mathbb{Q}$ -многообразие Фано. Предположим, что $\dim |-K_X| \geq 1$ и (X, G) не имеет тип (C) или (D). Тогда существуют G -эквивариантные бирациональные морфизмы

$$X \xleftarrow{f} \tilde{X} \xrightarrow{h} Y,$$

где f – логкрепантная терминальная модель пары $(X, |-K_X|)$ и особенности $\tilde{X}$ терминальные горнштейновы. Далее, имеются следующие возможности:

- (i) $Y \simeq \mathbb{P}^1$, $\dim |-K_X| = 1$ и h – КЗ-расслоение;
- (ii) $Y \simeq \mathbb{P}^2$, $\dim |-K_X| = 2$ и h – эллиптическое расслоение;
- (iii) Y – трехмерное многообразие Фано лишь с горнштейновыми каноническими особенностями и h – бирациональный K -крепантный морфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. [10, теорема 4.5]). Согласно следствию 6.3 пара $(X, |-K_X|)$ является канонической. Пусть f – логкрепантная терминальная модель для $(X, |-K_X|)$. Таким образом, пара $(\tilde{X}, |-K_{\tilde{X}}|)$ терминальна, и $\tilde{X}$ является $G\mathbb{Q}$ -факториальным. Тогда $|-K_{\tilde{X}}|$ не имеет базисных точек [10, доказательство теоремы 4.5]. В частности, $K_{\tilde{X}}$ – дивизор Картье. Пусть $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \bar{X} \subset \mathbb{P}^n$ – морфизм, заданный $|-K_{\tilde{X}}|$, и пусть $\tilde{X} \rightarrow Y \rightarrow \bar{X}$ – факторизация Штейна. Имеем G -эквивариантную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \tilde{X} & & & \\ & \swarrow f & \searrow h & \searrow \tilde{f} & \\ X & \cdots \cdots \cdots & Y & \longrightarrow & \bar{X} \subset \mathbb{P}^n \end{array}$$

Пусть $\tilde{H} \in |-K_{\tilde{X}}|$ – общий элемент. Тогда $\tilde{H}$ – неособая поверхность типа КЗ. Поскольку отображение ограничения $H^0(\tilde{X}, -K_{\tilde{X}}) \rightarrow H^0(\tilde{H}, -K_{\tilde{H}})$ сюръективно, то согласно [20] образ $\tilde{f}(\tilde{H}) \subset \mathbb{P}^n$ – один из следующих:

- 1) рациональная нормальная кривая;
- 2) рациональная нормальная поверхность степени $n - 1$ (см. теорему 2.5);
- 3) поверхность типа КЗ с двувалевскими особенностями.

Рассмотрим случай $\dim \bar{X} = 1$. Тогда $\bar{X} = \tilde{f}(\tilde{H})$ – рациональная нормальная кривая и $-K_{\tilde{X}} = \tilde{f}^* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1) = n \tilde{f}^* \tilde{P}$, где $\tilde{P} \in \bar{X}$ – точка. Согласно следствию 6.2 имеем $n = 1$ и получаем (i).

Рассмотрим случай $\dim \bar{X} = 2$. Тогда мы находимся в ситуациях 1) или 2). Обе возможности дают нам, что $\bar{X} \subset \mathbb{P}^n$ – рациональная нормальная поверхность степени $n - 1$. Поскольку $-K_{\tilde{X}} = \tilde{f}^* \mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$, то согласно следствию 6.2 линейная система $|\mathcal{O}_{\bar{X}}(1)|$ не может быть разложена в сумму подвижных линейных систем. Единственная возможность – случай (ii) (см. теорему 2.5).

Наконец, в случае $\dim \bar{X} = 3$ мы получим (iii), как и в [10, следствие 4.6].

ПРИМЕР 6.5. Рассмотрим знаменитый список Флетчера из 95 терминальных взвешенных гиперповерхностей Фано [21], из которых 92 удовлетворяют условию $\dim |-K_X| \leq 2$. Далее, многие из этих многообразий допускают бирегулярную инволюцию τ с $\kappa(\tau, X) \geq 0$.

Например, гиперповерхность $X = X_{66} \subset \mathbb{P}(1, 5, 6, 22, 33)$ в подходящей системе координат $(x_1, x_5, x_6, x_{22}, x_{33})$ может быть задана уравнением $x_{33}^2 = \varphi(x_1, x_5, x_6, x_{22})$, где φ – квазиоднородный многочлен взвешенной степени 66. Проекция $X \rightarrow \mathbb{P}(1, 5, 6, 22)$ является двойным накрытием, и для соответствующей инволюции Галуа τ мы имеем $\text{Fix}(\tau) \simeq \{\varphi = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 5, 6, 22)$. Легко проверить, что для общего выбора φ подмногообразие $S := \text{Fix}(\tau)$ является нормальной поверхностью лишь с циклическими факторособенностями типов $\frac{1}{2}(1, 1)$ и $\frac{1}{5}(1, 2)$. Согласно формуле присоединения имеем $K_S = \mathcal{O}_S(32)$. Таким образом, $K_S^2 = \frac{512}{5}$. Пусть $\mu: \tilde{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение особенностей. Тогда $K_{\tilde{S}} = \mu^*K_S - \Delta$, где Δ – дивизор кодискрепантностей. В нашем случае Δ лежит над точкой типа $\frac{1}{5}(1, 2)$. Отсюда $\Delta^2 = -\frac{2}{5}$ и $K_{\tilde{S}}^2 = \frac{512}{5} - \frac{2}{5} = 102$. Следовательно, S является поверхностью общего типа, и $\kappa(\tau, X) = 2$.

Заметим, что общая гиперповерхность Фано X в списке Флетчера нерациональна [22]. Значит, для общего X наша конструкция не дает инволюции в группе Кремоны. Поэтому интересно исследовать *специальные* многообразия из этого списка.

§ 7. Горенштейновы трехмерные многообразия Фано. Примеры

В этом параграфе мы предложим несколько примеров инволюций, действующих на горенштейновых канонических трехмерных многообразиях Фано. Нам интересны только те инволюции, которые не сопряжены действиям на связке коник или пучке поверхностей дель Пеццо. Заметим сначала, что все гиперэллиптические трехмерные многообразия Фано имеют инволюцию Галуа.

ПРИМЕР 7.1. Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие, разветвленное в дивизоре $B \subset \mathbb{P}^3$ степени 6 таким, что пара $(\mathbb{P}^3, \frac{1}{2}B)$ является логтерминальной по Кавамате. Тогда X – гиперэллиптическое трехмерное многообразие Фано с $g(X) = 2$. Пусть τ – инволюция Галуа. Тогда $\text{Sing}(X) = \pi^{-1}(\text{Sing}(B))$ и $\text{Fix}(\tau) = \pi^{-1}(B)$. Если B неособо или имеет лишь дювалевские особенности, то $\kappa(\tau, X) = 2$. Заметим, что если X имеет лишь изолированные cDV-особенности и является $\mathbb{Q}$ -факториальным, то оно нерационально [23]. В частности, если нам интересны элементы порядка 2 в $\text{Cr}_3(\mathbb{k})$, мы должны рассматривать особые секстики $B \subset \mathbb{P}^3$.

Например, пусть $B \subset \mathbb{P}^3$ – *секстика Барта*. Напомним, что это поверхность, заданная уравнением

$$4(\varepsilon^2 x_1^2 - x_2^2)(\varepsilon^2 x_2^2 - x_3^2)(\varepsilon^2 x_3^2 - x_1^2) - x_4^2(1 + 2\varepsilon)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)^2 = 0,$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{5})$. Тогда X имеет в точности 65 обыкновенных двойных точек и не имеет других особенностей. Более того, X рационально (см. [24, пример 3.7]). Это дает нам пример инволюции $\tau \in \text{Cr}_3(\mathbb{k})$ с $\kappa(\tau, X) = 2$.

ПРИМЕР 7.2. Пусть $W = W_2 \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрака, и пусть $\pi: X \rightarrow W$ – двойное накрытие, разветвленное в дивизоре $B \in |\mathcal{O}_W(4)|$ таким, что пара $(W, \frac{1}{2}B)$ является логтерминальной по Кавамате. Тогда X – гиперэллиптическое трехмерное многообразие Фано с $g(X) = 3$. Пусть $\tau \in \text{Aut}(X)$ – инволюция Галуа. Как и выше, $\kappa(\tau, X) = 2$, если дивизор ветвления имеет “не очень плохие” особенности.

Однако многообразие X нерационально, если оно неособо [6].

Серия примеров получается из двойных накрытий трехмерных многообразий дель Пеццо.

КОНСТРУКЦИЯ 7.3. Пусть Y – трехмерное многообразие дель Пеццо лишь с каноническими горенштейновыми особенностями. По определению $-K_Y \sim 2A$ для некоторого $A \in \text{Pic}(Y)$. Пусть $B \in |-K_Y|$ – элемент такой, что пара $(Y, \frac{1}{2}B)$ логтерминальна по Кавамате. Рассмотрим двойное накрытие $\pi: X \rightarrow Y$, разветвленное в B . По формуле Гурвица

$$-K_X = -\pi^*\left(K_Y + \frac{1}{2}B\right) = \pi^*A.$$

Поэтому X – трехмерное многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. Обозначим через τ инволюцию Галуа и $S := \pi^{-1}(B)$. Тогда $S \simeq B$, $\text{Sing}(X) = \text{Sing}(S) \cup \pi^{-1}\text{Sing}(Y)$ и $\text{Fix}(\tau) = S$. Так как $K_B = 0$, то $\kappa(\tau, X) \leq 0$ и $\kappa(\tau, X) = 0$ тогда и только тогда, когда B неприводимо, нормально и имеет лишь дювалевские особенности. Пусть $d = A^3$ – степень Y . Тогда $-K_X^3 = 2A^3$. Таким образом, $g(X) = d + 1$.

Рассмотрим частные случаи конструкции 7.3.

ПРИМЕР 7.4 ($g = 2$). Пусть Y – трехмерное многообразие дель Пеццо степени 1. Тогда Y – гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^3, 2, 3)$, а проекция $\delta: Y \rightarrow \mathbb{P}(1^3, 2) =: \mathbb{P}$ – двойное накрытие. Рассмотрим другое двойное накрытие $\gamma: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}$ – фактор по отражению. Пусть $X := Y \times_{\mathbb{P}} \mathbb{P}^3$. Тогда τ – инволюция Галуа проекции $X \rightarrow Y$, которая является двойным накрытием. Другими словами, X – гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^4, 3)$, заданная (квазиоднородным) уравнением $z^2 = \varphi(x_0^2, x_1, x_2, x_3)$, и τ – отражение $x_0 \mapsto -x_0$.

ПРИМЕР 7.5 ($g = 3$). Пусть Y – трехмерное многообразие дель Пеццо степени 2. Тогда Y – гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1^4, 2)$. Проекция $\delta: Y \rightarrow \mathbb{P}(1^4) = \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие. Как и выше, рассмотрим другое двойное накрытие $\gamma: W_2 \rightarrow \mathbb{P}$ – проекцию квадраки $W_2 \subset \mathbb{P}^4$ из точки $P \notin W_2$. Пусть $X := Y \times_{\mathbb{P}^3} W_2$. Тогда τ – инволюция Галуа проекции $X \rightarrow Y$, которая является двойным накрытием.

ПРИМЕР 7.6 ($g = 3$). Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – квартака, заданная (однородным) уравнением $ax_0^4 + x_0^2\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Тогда τ – отражение $x_0 \mapsto -x_0$. Фактормногообразие задается уравнением $ay^2 + y\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ в $\mathbb{P}(1^4, 2)$. Если $a \neq 0$, то этот фактор является трехмерным многообразием дель Пеццо степени 2. Если $a = 0$, то τ линеаризуется.

ПРИМЕР 7.7 ($g = 4$). Пусть $X = X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ – пересечение квадрики Q и кубического конуса V с вершиной $P \in V$ такой, что $P \notin Q$. Проекция $\pi: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^4$ из точки P – двойное накрытие кубики $Y \subset \mathbb{P}^4$. Тогда τ – инволюция Галуа этой проекции.

ПРИМЕР 7.8 ($g = 5$). Пусть $X = X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ – пересечение трех квадрик Q_1, Q_2, Q_3 таких, что Q_1 и Q_2 – конусы с вершинами в одной точке $P \in Q_1 \cap Q_2$, где $P \notin Q_3$. Проекция $\pi: X \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^5$ из P – двойное накрытие пересечения двух квадрик $Y \subset \mathbb{P}^5$. Как и выше, τ – инволюция Галуа этой проекции.

§ 8. Горенштейновы трехмерные многообразия Фано.

Доказательство основной теоремы

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 8.1. На протяжении этого параграфа X – трехмерное многообразие Фано лишь с каноническими горенштейновыми особенностями. Пусть $g := g(X) \geq 2$ – род X . Таким образом, $-K_X^3 = 2g - 2$, и $\dim |-K_X| = g + 1$. Пусть $\Phi = \Phi_{|-K_X|}: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{g+1}$ – антиканоническое отображение. Предположим, что (X, G) не имеет тип (C) или (D) (иначе мы находились бы в ситуации, рассмотренной или § 4, или § 5).

Наша цель – заменить (X, G) на другую бирациональную модель, удовлетворяющую предположению 8.1 с минимальным возможным родом.

ЛЕММА 8.2. *Особенности X имеют тип cDV.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что трехмерная каноническая горенштейнова особенность имеет тип cDV тогда и только тогда, когда центр каждого крепантного исключительного дивизора одномерен. Пусть $P \in X$ – особенность, не являющаяся cDV. Для ее орбиты Λ мы имеем две возможности: $\{P\}$ и $\{P, P'\}$, где $P' \neq P$. Рассмотрим подсистему $\mathcal{L} \subset |-K_X|$, состоящую из всех элементов, проходящих через Λ . Поскольку $\dim |-K_X| = g + 1 \geq 3$, то $\dim \mathcal{L} \geq 1$. Запишем $\mathcal{L} = D + \mathcal{M}$, где D (соответственно, $\mathcal{M}$) – неподвижная (соответственно, подвижная) часть $\mathcal{L}$. Согласно нашему предположению (X, G) не имеет тип (C) или (D), и согласно лемме 6.1 мы имеем $D = 0$ и $\mathcal{M} = \mathcal{L}$. Пусть E – крепантный исключительный дивизор с центром в P . Поскольку $P \in \text{Bs } \mathcal{L}$, для дискрепантности E мы имеем $a(E, X, \mathcal{L}) < a(E, X, 0) = 0$. Поэтому пара $(X, \mathcal{L})$ не является канонической. Это противоречит лемме 6.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *Предположим, что линейная система $|-K_X|$ не является очень обильной. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

- (i) X – двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвленное в секстике $B \subset \mathbb{P}^3$;
- (ii) X – двойное накрытие неособой квадрики $W_2 \subset \mathbb{P}^4$, разветвленное в поверхности, высекаемой на X кватрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что $\text{Bs } |-K_X| \neq \emptyset$. Тогда образ $W := \Phi(X) \subset \mathbb{P}^{g+1}$ – поверхность минимальной степени (см. п. 2.5). Применим теорему 2.5. Поскольку $\dim |-K_X| = g + 1 \geq 3$, поверхность W является или поверхностью Хирцебруха $\mathbb{F}_n$ (рациональной линейчатой поверхностью), или

конусом $\mathbb{P}(1, 1, n)$ над рациональной нормальной кривой. В обоих случаях мы получим противоречие согласно следствию 6.2, поскольку $|-K_X| = \Phi^*|\mathcal{O}_W(1)|$ разложимо в сумму двух подвижных линейных систем.

Таким образом, многообразие X гиперэллиптическое, и линейная система $|-K_X|$ определяет двойное накрытие $\Phi: X \rightarrow W$, где $W \subset \mathbb{P}^{g+1}$ – (нормальное) многообразие степени $g - 1$ (см. п. 2.5). Применим теорему 2.5. В случае 3) поверхность W – конус Веронезе, $W \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$. Таким образом, $-K_X = 2\Phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1^3, 2)}(1)$, где $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1^3, 2)}(1)|$ – подвижная линейная система. Это противоречит следствию 6.2. В случае 4) теоремы 2.5 мы рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \searrow \\ W & \longleftarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \longrightarrow \mathbb{P}^1 \end{array}$$

где $\tilde{X}$ – нормализация произведения $X \times_W \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Тогда $\tilde{X}$ – трехмерное слабое многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями [14, лемма 3.6] и морфизм $\tilde{X} \rightarrow X$ является крепантным и G -эquivariantным. Поэтому композиция $\tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ является G -эquivariantным расслоением дель Пеццо (степени 2). Это противоречит нашим предположениям. В случае 1) из теоремы 2.5 мы получим (i) (см. [14]). Наконец, в случае 2) мы имеем двойное накрытие, как в (ii). Осталось показать только, что квадрика $W_2 \subset \mathbb{P}^4$ неособа. В противном случае линейная система ее гиперплоских сечений $|\mathcal{O}_{W_2}(1)|$ допускает разложение в сумму двух G -инвариантных подвижных линейных систем дивизоров Вейля и, таким образом, $|-K_X| = \Phi^*|\mathcal{O}_{W_2}(1)|$ также допускает такое разложение. Это снова противоречит следствию 6.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.4. *Предположим, что многообразие Фано X тригонально. Тогда X – одно из следующих:*

- (i) $Y \simeq Y_4 \subset \mathbb{P}^4$;
- (ii) $Y \simeq Y_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеется G -эquivariantное антиканоническое вложение $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$. Предположим, что X не является пересечением квадрик. Тогда квадрики, проходящие через X в $\mathbb{P}^{g+1}$, высекают четырехмерное многообразие $W \subset \mathbb{P}^{g+1}$ степени $g - 2$ (см. п. 2.5). Как и выше, применим теорему 2.5. Если $W = \mathbb{P}^4$ или $W = W_2 \subset \mathbb{P}^5$, то мы получим (i) и (ii) соответственно. В оставшихся случаях пусть $\sigma: \tilde{W} \rightarrow W$ – раздутие особого множества (мы положим $\sigma = \text{id}$, если W неособо) и $\tilde{X} \subset \tilde{W}$ – собственный прообраз X . Тогда $\tilde{W}$ неособо, $\tilde{X}$ – трехмерное слабое многообразие Фано с каноническими горенштейновыми особенностями [14, леммы 4.4, 4.7] и морфизм $\tilde{X} \rightarrow X$ крепантный (и G -эquivariantный). Многообразие $\tilde{W}$ – $\mathbb{P}^2$ -расслоение (соответственно, $\mathbb{P}^3$ -расслоение) над $\mathbb{P}^2$ (соответственно, $\mathbb{P}^1$). По формуле присоединения проекция на базу индуцирует на $\tilde{X}$ G -эquivariantную структуру расслоения на коники (соответственно, расслоения на поверхности дель Пеццо). Это противоречит нашим предположениям.

ЛЕММА 8.5. *Предположим, что линейная система $|-K_X|$ очень обильна. Тогда не существуют прямые, проходящие через общую точку $P \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в противном случае семейство прямых на X имеет размерность по крайней мере 2. Пусть $L \subset X$ – прямая, проходящая через P . Пусть $\delta: X' \rightarrow X$ – терминальная крепантная модель и $L' \subset X'$ – собственный прообраз L . Если $L' \cap \text{Sing}(X') \neq \emptyset$, то, поскольку $\dim \text{Sing}(X') \leq 0$, легко видеть, что X – конус над S . Основание этого конуса – гиперплоское сечение, поверхность типа КЗ лишь с дювалевскими особенностями. Тогда вершина не является канонической особенностью. Противоречие. Поэтому L' содержится в множестве неособых точек X' . Поскольку L' принадлежит покрывающему семейству рациональных кривых, то $N_{L'/X'} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$, где $a, b \geq 0$. С другой стороны, $\deg N_{L'/X'} = -K_{X'} \cdot L' - 2 = -1$. Противоречие.

ЛЕММА 8.6. *Предположим, что $g(X) \geq 3$ и существует G -неподвижная особая точка $P \in X$. Тогда существует G -эквивариантное бирациональное отображение $X \dashrightarrow Y$, где Y – трехмерное многообразие Фано с каноническими горнштейновыми особенностями, и $g(Y) < g(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 8.3 дивизор $-K_X$ очень обилен или X имеет тип (ii) из этого предложения, т. е. X – гиперэллиптическое многообразие Фано и $\Phi(X)$ – неособая квадрика $W_2 \subset \mathbb{P}^4$. В втором случае P лежит на дивизоре ветвления (поскольку Φ не может быть этальным над $\Phi(P)$).

Пусть $\mathcal{M} \subset |-K_X|$ – подсистема, состоящая из всех элементов, проходящих через P . Таким образом, $\text{Bs}|\mathcal{M}| = \{P\}$. Мы утверждаем, что отображение $h: X \dashrightarrow \bar{X} \subset \mathbb{P}^q$, заданное $\mathcal{M}$, является конечным в общей точке. Если $-K_X$ очень обилен, то h не что иное, как проекция из P . Так как X не является конусом, то h должно быть конечным в общей точке. Таким образом, мы можем считать, что $\mathcal{M} = \Phi^* \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – линейная система гиперплоских сечений W_2 , проходящих через $P' := \Phi(P)$. Мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad h \quad} & \bar{X} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \\ W_2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

где $W_2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – проекция из P' . Поэтому h конечно в общей точке.

Если пара $(X, \mathcal{M})$ не является канонической, то согласно лемме 6.1 пара (X, G) имеет тип (C) или (D). Таким образом, пара $(X, \mathcal{M})$ канонична (но не терминальна в P). Рассмотрим ее логкрепантную терминальную модель $f: (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow (X, \mathcal{M})$ (см. п. 2.3). Здесь пара $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{M}})$ терминальна,

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{\mathcal{M}} = f^*(K_X + \mathcal{M}) \sim 0,$$

и поэтому $\tilde{\mathcal{M}} \subset |-K_{\tilde{X}}|$. Запишем

$$K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \Theta, \quad \tilde{\mathcal{M}} = f^*\mathcal{M} - \Theta,$$

где Θ – эффективный исключительный дивизор такой, что $\text{Supp}(\Theta) = f^{-1}(P)$. Для общего элемента $D \in |-K_{\tilde{X}}|$ имеем $f_*D \in |-K_X| = |-f^*K_X - \Theta|$. Так как Θ не может быть численно тривиальным над X , то $\text{Supp}(\Theta) \cap \text{Supp}(D) \neq \emptyset$, $P \in f(D)$ и $f_*D \in \mathcal{M}$. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{M}} = |-K_{\tilde{X}}|$.

Поскольку пара $(\tilde{X}, \widetilde{\mathcal{M}})$ терминальна, базисное множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ состоит из не более чем конечного числа точек [10, лемма 1.22]. В частности, $-K_{\tilde{X}}$ – численно эффективный дивизор Картье. Согласно изложенному выше дивизор $-K_{\tilde{X}}$ также объемен, т.е. $\tilde{X}$ – трехмерное слабое многообразие Фано. Рассмотрим антиканоническую модель

$$Y := \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\tilde{X}, -nK_{\tilde{X}}).$$

Тогда Y – трехмерное многообразие Фано лишь с каноническими горенштейновыми особенностями. Пусть $\tilde{X} \rightarrow Y \dashrightarrow \bar{X}$ – факторизация Штейна для $h \circ f$. Таким образом, мы имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \tilde{X} & & & \\ & \swarrow f & \searrow & \dashrightarrow & \\ h: X & \dashrightarrow & Y & \dashrightarrow & \bar{X} \end{array} \quad (8.1)$$

Согласно предложению 8.3 линейная система $|-K_Y|$ не имеет базисных точек, поэтому таковой является и $|-K_{\tilde{X}}|$. Наша конструкция G -эквивариантна. Наконец,

$$\dim |-K_Y| = \dim |-K_{\tilde{X}}| = \dim \widetilde{\mathcal{M}} = \dim \mathcal{M} = \dim |-K_X| - 1.$$

Следовательно, $g(Y) < g(X)$.

ЛЕММА 8.7. *Предположим, что $g(X) \geq 4$ и X особа. Тогда существует τ -эквивариантное бирациональное отображение $X \dashrightarrow Y$, где Y – трехмерное многообразие Фано лишь с каноническими горенштейновыми особенностями, и $g(Y) < g(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 8.3 линейная система $|-K_X|$ определяет вложение $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$. По лемме 8.6 мы можем считать, что τ не имеет неподвижных особых точек. Таким образом, существуют две точки P_1, P_2 , переставляемые τ . Тогда, как и в доказательстве леммы 8.6, рассмотрим подсистему $\mathcal{M} \subset |-K_X|$, состоящую из всех элементов, проходящих через P_1 и P_2 . Это дает отображение $h: X \dashrightarrow \bar{X} \subset \mathbb{P}^{g-1}$, которое является проекцией из прямой $L \subset \mathbb{P}^{g+1}$, проходящей через P_1 и P_2 . Мы утверждаем, что морфизм h является конечным в общей точке. Предположим, что ее общий слой содержит кривую C . Тогда $C \subset \Pi \cap X$, где Π – плоскость, проходящая через L . Поскольку (X, G) не типа (C), то кривая C нерациональна. В этом случае X не может быть пересечением квадратик. Согласно предложению 8.4 имеет место единственная возможность, когда X – пересечение квадратика Q и кубики Y в $\mathbb{P}^5$. Поскольку $C \subset \Pi \cap X$ – нерациональная кривая, мы имеем

$\Pi \subset Q$. Если $L \not\subset \text{Sing}(Q)$, то существует только конечное число плоскостей в Q , проходящих через L . Таким образом, можно считать, что $L \subset \text{Sing}(Q)$. Тогда $L \cap Y$ или совпадает с L , или является инвариантным 0-циклом степени 3. В обоих случаях τ имеет неподвижные точки на L , который должны быть особыми точками X . Это противоречит нашему предположению.

Следовательно, h конечно в общей точке. Тогда, как и в доказательстве леммы 8.6, мы получаем диаграмму (8.1) и можем показать, что $\dim |-K_Y| < \dim |-K_X|$.

ЛЕММА 8.8. *Предположим, что $S := F(\tau) \neq \emptyset$ и $g(X)$ является минимальным среди всех бирациональных моделей (X, G) , удовлетворяющих предположению 8.1. Тогда имеет место одно из следующих:*

- (i) X – гиперэллиптическое многообразие Фано и τ – гиперэллиптическая инволюция;
- (ii) $S \in |-K_X|$ и S имеет лишь дювалевские особенности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предположению 8.3 мы можем считать, что $|-K_X|$ определяет морфизм $\Phi: X \rightarrow \mathbb{P}^{g+1}$. Если естественное действие τ на $H^0(X, -K_X)$ тривиально, то X должно быть гиперэллиптическим, и мы получим случай (i). Таким образом, мы можем считать, что τ эффективно действует на $H^0(X, -K_X)$. Тогда $\Phi(S)$ содержится в гиперплоскости $\mathbb{P}^g \subset \mathbb{P}^{g+1}$. Поэтому мы можем записать

$$\Phi^{-1}(\mathbb{P}^g) = S + R \sim -K_X,$$

где R – эффективный дивизор Вейля. Пусть $\nu: S' \rightarrow S$ – нормализация. Согласно формуле “субприсоединения” (см., например, [25, гл. 16]) имеем

$$K_{S'} + \text{Diff}_{S'}(R) = \nu^*(K_X + S + R) = 0,$$

где Diff – так называемая *дифференца*, эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор. Согласно [9, следствие 3] имеем $\text{Diff}_{S'}(R) = 0$. Таким образом, $\dim S \cap R \leq 0$, и S неособо в коразмерности 1. Поскольку $S + R$ является многообразием Коэна–Маколея, то $R = 0$ и S нормально. Аналогично, рассматривая минимальное разрешение особенностей S , мы получим, что особенности S дювалевские.

ЛЕММА 8.9. *Предположим, что $g(X) \geq 6$ и $F(\tau) \neq \emptyset$. Тогда существует G -эквивариантное бирациональное отображение $X \dashrightarrow Y$, где Y – трехмерное многообразие Фано с каноническими горнштейновыми особенностями, и $g(Y) < g(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8.5 объединение всех прямых на X – замкнутое собственное подмножество в V . Поскольку поверхность $F(\tau)$ не является линейчатой, она не является компонентой V . Возьмем точку $P \in F(\tau) \setminus V$. Пусть $f: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие P и $E := f^{-1}(P)$ – исключительный дивизор. Мы утверждаем, что дивизор $-K_{\tilde{X}} = -f^*K_X - 2E$ численно эффективен. На самом деле если $-K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} < 0$ для некоторой кривой $\tilde{C}$, то $\tilde{C}$ содержится в $\text{Bs} |-K_{\tilde{X}}|$. Заметим, что $\mathcal{M} := f_*|-K_{\tilde{X}}| \subset |-K_X|$ – подсистема, состоящая из всех элементов, особых в P . Поэтому для $C := f(\tilde{C})$ мы имеем $C \subset X \cap T_{P,X}$. Согласно

предложению 8.4 многообразие X – пересечение квадратик. Поэтому C – прямая, проходящая через P . Это противоречит нашему выбору P . Таким образом, дивизор $-K_{\tilde{X}}$ численно эффективен. Поскольку $-K_{\tilde{X}}^3 = -K_X^3 - 8 > 0$, этот дивизор объемен. Согласно теореме о свободе от базисных точек (см., например, [8, теорема 3.3]) линейная система $|-nK_{\tilde{X}}|$ определяет морфизм $h: \tilde{X} \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^n$ и мы можем считать, что Y нормально, имеет лишь канонические горенштейновы особенности, $K_{\tilde{X}} = h^*K_Y$ и $-K_Y$ обилен. Таким образом, мы получим новое трехмерное многообразие Фано Y с $-K_Y^3 = -K_X^3 - 8 > 0$.

Из всех утверждений настоящего параграфа мы получим описание нашего трехмерного многообразия Фано X .

СЛЕДСТВИЕ 8.10. *Заменяя (X, τ) на бирациональную модель, мы можем считать, что $g(X) \leq 5$ и имеет место одно из следующих:*

- (i) X – двойное накрытие $\mathbb{P}^3$, разветвленное в секстике $B \subset \mathbb{P}^3$, особенности X типа cDV;
- (ii) X – двойное накрытие X неособой квадратки $W_2 \subset \mathbb{P}^4$, разветвленное в поверхности $B \subset W_2$ степени 8, особенности X терминальны;
- (iii) $X \subset \mathbb{P}^4$ – кватрика с терминальными особенностями;
- (iv) $X \subset \mathbb{P}^5$ – неособое пересечение квадратки и кубического конуса;
- (v) $X \subset \mathbb{P}^6$ – неособое пересечение трех квадратик.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8.2 особенности X типа cDV. Напомним, что $g(X) \geq 2$ (так как $-K_X^3 = 2g(X) - 2 > 0$). Если $g(X) = 2$, то $\dim |-K_X| = 3$ (см. предположение 8.1) и мы получим случай (i) согласно предложению 8.3. Таким образом, мы предположим, что $g(X) \geq 3$. Используя классификацию и применяя лемму 8.9, мы получим модель (X, G) с $g(X) \leq 5$.

В случаях $g(X) = 5, 4$ согласно лемме 8.7 мы можем считать, что X неособо. В случае $g(X) = 3$ согласно лемме 8.6 мы можем считать, что $\text{Fix}(\tau, X) \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$, в частности, X имеет лишь изолированные cDV-особенности.

В случае (F^c) , (a) теоремы 1.2 мы имеем вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$, которое является эквивариантным (так как это вложение задается сечениями $H^0(X, -nK_X)$). В подходящих координатах мы получим нужные подслучаи (i) и (ii). Осталось показать, что в случаях (F^c) , (b), (ii), (c), (d) действие τ задается конструкцией 7.3. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8.11. *Пусть многообразие X такое, как в следствии 8.10, (ii)–(v). Предположим, что $F(\tau, X) \neq \emptyset$ и действие G на $H^0(X, -K_X)$ не является тривиальным. Предположим также, что $g(X)$ минимально среди всех бирациональных моделей (X, G) , удовлетворяющих предположению 8.1. Тогда фактормногообразие X/G является (горенштейновым) трехмерным многообразием дель Пеццо степени $g(X) - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: X \rightarrow Y = X/G$ – факторотображение, $S := F(\tau, X)$ и $R := \pi(S)$. По лемме 8.8 имеем $S \sim -K_X$. Дивизор $-K_X + S = -\pi^*K_Y$ обилен. Поэтому Y – (логтерминальное) трехмерное многообразие Фано. Согласно формуле присоединения имеем $0 = K_R = (K_Y + R)|_R$. Поэтому

$K_Y + R \sim_{\mathbb{Q}} 0$ и $-K_Y^3 = 4(-K_X)^3 = 8(g-1)$. Более того, дивизор ветвления $R \subset Y$ делится на 2 в $\text{Cl}(Y)$. Таким образом, достаточно показать, что Y имеет лишь терминальные горенштейновы особенности.

По лемме 8.6 имеем $\text{Fix}(\tau, X) \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Следовательно, S неособо, и поэтому Y неособо вдоль R . Предположим, что $\text{Fix}(\tau, X) \neq S$. Тогда $\text{Fix}(\tau, X) \setminus S$ состоит из конечного числа неособых точек $P_1, \dots, P_k \in X$ и согласно изложенному выше каждая точка $\pi(P_i) \in Y$ имеет тип $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Тогда линейная оболочка $\Phi(S)$ является гиперплоскостью $\mathbb{P}^g$ и $\Phi(P_1) = \dots = \Phi(P_k) := Q \notin \Phi(S)$. Здесь $\text{Fix}(\tau, \mathbb{P}^{g+1}) = \mathbb{P}^g \cup \{Q\}$. В частности, $k \leq 2$. Несложные вычисления с орбифолдовой формулой Римана–Роха показывают, что группа $\text{Cl}(Y)$ не имеет кручений (см., например, [26, предложение 2.9]). Поскольку $K_Y + R \sim_{\mathbb{Q}} 0$, то дивизор K_Y является дивизором Картье. Противоречие. Таким образом, $\text{Fix}(\tau, X) = S$, и особенности Y терминальные горенштейновы.

Автор благодарен рецензенту за многочисленные полезные комментарии.

Список литературы

1. I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, “Finite subgroups of the plane Cremona group”, *Algebra, arithmetic, and geometry. In honor of Yu. I. Manin on the occasion of his 70th birthday*, vol. I, Progr. Math., **269**, Birkhäuser, Boston, MA, 2009, 443–548.
2. Yu. Prokhorov, “ p -elementary subgroups of the Cremona group of rank 3”, *Classification of algebraic varieties* (Schiermonnikoog, Netherlands, 2009), EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, 327–338.
3. Yu. Prokhorov, “Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3”, *J. Algebraic Geom.*, **21**:3 (2012), 563–600.
4. L. Bayle, A. Beauville, “Birational involutions of $\mathbf{P}^2$ ”, *Asian J. Math.*, **4**:1 (2000), 11–17.
5. A. Beauville, “Variétés de Prym et jacobiniennes intermédiaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **10**:3 (1977), 309–391.
6. В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 815–868.
7. C. Birkar, P. Cascini, Ch. D. Hacon, J. McKernan, “Existence of minimal models for varieties of log general type”, *J. Amer. Math. Soc.*, **23**:2 (2010), 405–468.
8. J. Kollár, Sh. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
9. Y. Miyaoka, Sh. Mori, “A numerical criterion for uniruledness”, *Ann. of Math.* (2), **124**:1 (1986), 65–69.
10. V. Alexeev, “General elephants of $\mathbf{Q}$ -Fano 3-folds”, *Compositio Math.*, **91**:1 (1994), 91–116.
11. В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 59–157; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Soviet Math.*, **13**:6 (1980), 745–814.
12. V. A. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties. Algebraic geometry*. V, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
13. P. Jahnke, I. Radloff, “Gorenstein Fano threefolds with base points in the anticanonical system”, *Compos. Math.*, **142**:2 (2006), 422–432.

14. В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Гиперэллиптические и тригональные трехмерные многообразия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 145–204; англ. пер.: V. V. Przhilyalkovskij, I. A. Chel'tsov, K. A. Shramov, “Hyperelliptic and trigonal Fano threefolds”, *Izv. Math.*, **69**:2 (2005), 365–421.
15. Т. Fujita, “On the structure of polarized manifolds with total deficiency one. I”, *J. Math. Soc. Japan*, **32**:4 (1980), 709–725; “II”, **33**:3 (1981), 415–434; “III”, **36**:1 (1984), 75–89.
16. Ch. D. Hacon, J. McKernan, “On Shokurov’s rational connectedness conjecture”, *Duke Math. J.*, **138**:1 (2007), 119–136.
17. Н. Yoshihara, “Degree of irrationality of an algebraic surface”, *J. Algebra*, **167**:3 (1994), 634–640.
18. С. Н. Clemens, P. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95** (1972), 281–356.
19. Yu. Prokhorov, “G-Fano threefolds. I”, *Adv. Geom.*, **13** (2013).
20. B. Saint-Donat, “Projective models of K-3 surfaces”, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 602–639.
21. A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 101–173.
22. A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, “Fano 3-fold hypersurfaces”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 175–258.
23. I. Cheltsov, J. Park, “Sextic double solids”, *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, Progr. Math., **282**, Birkhäuser, Boston, MA, 2010, 75–132.
24. S. Endraß, “On the divisor class group of double solids”, *Manuscripta Math.*, **99**:3 (1999), 341–358.
25. J. Kollár (ed.), “Flips and abundance for algebraic threefolds”, *A summer seminar at the University of Utah* (Salt Lake City, 1991), Astérisque, **211**, Soc. Math. de France, Paris, 1992, 1–258.
26. Yu. Prokhorov, “Q-Fano threefolds of large Fano index. I”, *Doc. Math.*, **15** (2010), 843–872.

Ю. Г. ПРОХОРОВ (Yu. G. PROKHOROV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет;
 Национальный исследовательский университет
 “Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: prokhorogmail.com

Поступило в редакцию
 22.06.2012
 30.11.2012