Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Гизатуллин, Комбинаторика, связанная с точками перегиба и двойными касательными плоской кривой четвертого порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 4, 31–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 10:12:58

УДК 512.772+519.725+519.172

М. Х. Гизатуллин

Комбинаторика, связанная с точками перегиба и двойными касательными плоской кривой четвертого порядка

После предварительного обзора и описания некоторых малых систем Штейнера, рассмотренных с точки зрения теории инвариантов бинарных форм, построен бинарный (длины 24) код Голя при использовании идеи из защищенной в 1875 г. диссертации Ю. Грассмана. Одним из применяемых инструментов является пара дизъюнктивных плоскостей Фано. Другим приложением этого метода, соединенного с использованием свойств плоской кватрики, является построение новой блок-схемы на 28 элементах. Такая блок-схема оказалась подмножеством множества 288 семерок Аронгольда. В свою очередь, множество всех семерок Аронгольда можно разбить на восемь попарно дизъюнктивных блок-схем указанного вида.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: бинарная форма, инвариант, точка перегиба, двойная касательная, плоская кривая 4-го порядка, семерка Аронгольда, блок-схема, плоскость Фано, система Штейнера, код Голя.

DOI: 10.4213/im8015

Дорогому Игорю Ростиславовичу

§ 1. Введение

Ю. Грассман, сын знаменитого Г. Грассмана, в своей диссертации [1], защищенной в 1875 г., попытался описать конечное множество кривых второго порядка, ассоциированное с множеством точек перегиба плоской кривой четвертого порядка без особенностей. Коники этого множества содержали как минимум пять точек перегиба фиксированной кватрики, но, как утверждал Ю. Грассман, если коника проходит через пять точек перегиба кватрики, то она проходит еще через три точки перегиба и, таким образом, пересекает кватрику в восьми точках перегиба. Всего на общей кватрике имеется 24 точки перегиба (при условии алгебраической замкнутости основного поля, разумеется), и диссертант подсчитал, что всего имеется 759 коник в отмеченном множестве. В наше время можно понять, что фактически Ю. Грассман открыл систему Штейнера $S(5, 8, 24)$ или, по меньшей мере, предрек ее появление (понятие системы Штейнера мы напоминаем в определении 2.1 и замечании 2.2). Мы также знаем, что такая система Штейнера была открыта и описана в тридцатые годы прошлого столетия, затем она была применена для описания простой спорадической группы Матьё M_{24} , для конструкции бинарного кода Голя и

решетки Лича (см. определение 2.3). Отметим, что Ю. Грассман не признан первооткрывателем системы Штейнера $S(5, 8, 24)$ (ни просто открывателем, да и вообще почти забыт). Причина этого состоит в том, что упомянутое выше базисное утверждение о конике, проходящей через пять точек перегиба квартики, является ошибочным: существует определяемая пятью точками квартики кривая второго порядка, для которой остальные три точки пересечения с квартикой не являются точками перегиба (см. [2], [3] или § 6, где обсуждаются коники, проходящие через шесть точек перегиба и через две точки квартики, лежащие на двойной касательной). Прочие ошибки из диссертации Ю. Грассмана основаны на указанном утверждении.

Все же хочется привести несколько цитат (в переводе с немецкого на русский) из диссертации Ю. Грассмана [1]. В [1, теорема 5] приведено главное свойство системы Штейнера $S(5, 8, 24)$ (но не как определение, а как утверждение о выполнении): *Коническое сечение, проходящее через пять точек перегиба кривой 4-го порядка, пересекает ее в трех других точках перегиба*. В [1, с. 15] дан результат вычисления числа всех коник и числа соответствующих восьмерок, состоящих из высекаемых кониками точек перегиба (мы будем называть восьмерки точек перегиба *октадами*, Ю. Грассман называет коники, высекающие такие октады, перегибными коническими сечениями): *Получается, что истинное число конических сечений, так себя ведущих по отношению к 24-м точкам перегиба, равно 759*. На этой же с. 15 найдены и некоторые другие численные характеристики этой системы Штейнера, например индексы блоковых пересечений, равные 253, 77, 21, 5, которые можно увидеть, например, на правом склоне пирамиды, представленной на рис. 2.14 в [4, гл. 2, с. 68]. Далее, в [1, с. 17] мы встречаем утверждение, в переводе на современный язык означающее, что расстояние Хэмминга между двумя октадами, высекаемыми двумя кониками, не может быть равно десяти: *Два перегибных конических сечения, имеющих три общих точки перегиба на квартире, всегда имеют еще одну общую точку перегиба*. Такое высказывание есть первый шаг в направлении общего утверждения о том, что все взаимные расстояния Хэмминга между октадами из $S(5, 8, 24)$ равны нулю по модулю четыре. Далее Ю. Грассман показывает, что если расстояние Хэмминга между двумя различными октадами, высекаемыми кониками, не превосходит 10, то оно равно 8. В последнем случае теоретико-множественная симметрическая разность двух таких октад также является октадой, но, как показывают простые примеры, не всегда эта новая октада будет высечена коникой.

Расстояние Хэмминга между двумя октадами, высекаемыми кониками, не может быть равно 14. Действительно, мы видим в [1, с. 17]: *Два перегибных конических сечения, имеющих общую точку перегиба на квартире, всегда имеют еще одну общую точку перегиба*. Другими словами, если расстояние Хэмминга между двумя различными октадами не превосходит 14, то оно не превосходит 12.

Приведенные цитаты демонстрируют, что Ю. Грассман имел ясное понимание многих свойств системы $S(5, 8, 24)$. В настоящей работе мы попытаемся

реабилитировать главную его идею и показать, как маленькое подмножество множества перегибных коник для квартики Клейна определяет код Голея, и, следовательно, это малое подмножество форсированно определяет все октады системы Штейнера, отвечающей коду Голея (см. теорему 6.1). Однако еще раз отметим, что не все принудительно (хотя и однозначно) присоединенные октады высекаются кониками. Для нашего построения мы применяем пары дизъюнктивных плоскостей Фано (некоторые авторы для такой пары используют термин “проективная би плоскость Фано”).

Хочу объяснить применение кривой Клейна вместо какой-либо иной неособой квартики. Мой опыт показывает, что только у квартики Клейна координаты точек перегиба и точек касания двойных касательных легко доступны и удобны для проверок и вычислений, проводимых одновременно со всеми восьмьюдесятью указанными точками ($80 = 24 + 28 \times 2$). Координаты точек перегиба кривой Клейна приведены в § 4, список двойных касательных представлен в § 9 (приложение 1). Координаты точек пресечения двойных касательных с кривой Клейна не выписаны. Стоит отметить, что, быть может, наиболее существенное свойство квартики Клейна состоит в том, что транзитивное на точках перегиба действие группы Клейна G_{168} импримитивно (см. § 4, где перечислены тройки системы импримитивности).

Другое приложение метода пары плоскостей Фано – наше построение новой блок-схемы на двадцати восьми элементах, отождествляемых с двойными касательными к плоской квартирке. Ранее в [5] и [7] одна стандартная блок-схема на 28 элементах с теми же основными параметрами была построена, но наша блок-схема не изоморфна прежней (см. теоремы 7.1, 7.5). Кроме того, новая блок-схема позволяет представить множество всех 288 семерок Аронгольда в виде дизъюнктивного объединения восьми блок-схем, каждая из которых изоморфна построенной нами (см. теорему 8.1).

В § 2, 3 мы представляем описание некоторых систем Штейнера с точки зрения теории инвариантов бинарных форм. Бинарные формы степени 8 нам потребуются для описания кода Голея, но ради полноты и последовательности изложения мы приводим примеры комбинаторных приложений бинарных форм степеней 2, 4 и 6.

Благодарю рецензента за его конструктивные советы и предложения, а также сотрудников редакции журнала “Известий РАН. Сер. математическая” за их терпеливое сотрудничество с автором. Выражаю благодарность М. А. Микенбергу за помощь в русской версии TeXa.

§ 2. Основные понятия

2.1. При рассмотрении плоских коник и квартик основное поле предполагается алгебраически замкнутым и нулевой характеристики. Иногда мы используем конечные поля $\mathbb{F}_p$, число p элементов в них всегда будет простым. Иногда мы будем рассматривать натуральные числа (или их классы вычетов по модулю p) как элементы поля $\mathbb{F}_p$.

Через K обозначим поле, не обязательно алгебраически замкнутое или нулевой характеристики. Множество $\mathbb{P}_1(K)$ всех K -рациональных точек проективной прямой $\mathbb{P}_1/K$ естественным образом отождествим с $\{\infty\} \cup K$ (см. далее п. 2.2).

Следующее определение стандартно (см. [7], [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. (а) Пусть Ω – конечное множество, состоящее из n элементов, λ, l, m – натуральные числа такие, что $1 \leq l < m < n$, $1 \leq \lambda$. Пара (Ω, F) , где F – некоторое семейство различных подмножеств в Ω , именуемых *блоками*, называется (n, m, l, λ) -схемой, если каждый блок состоит из m элементов, а каждое подмножество множества Ω , состоящее из l элементов, содержится точно в λ блоках.

(б) Если $\lambda = 1$, то соответствующая схема называется *системой Штейнера* и обозначается $S(l, m, \Omega)$ или $S(l, m, n)$.

(с) Если $l = 2$, $\lambda = 2$, то соответствующая схема называется *уравновешенной неполной блок-схемой* (а кратко *блок-схемой*) и обозначается $D(n, b, r, m)$, где $b = \text{Card}(F)$ – количество блоков в ней, число r указывает, что каждый элемент множества Ω входит ровно в r блоков.

(д) Пусть фиксированы элемент $\omega \in \Omega$ и (n, m, l, λ) -схема на Ω . *Производная* $(n - 1, m - 1, l - 1, \lambda)$ -схема (или просто *производная схема*) относительно элемента ω – это пара (Ω', F') , где

$$\Omega' = \Omega \setminus \{\omega\}, \quad F' = \{B \setminus \{\omega\} \mid B \in F, B \ni \omega\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Характеризация схем с помощью их главных параметров, т.е. использование выражений типа (n, m, l, λ) -схема или $S(l, m, \Omega)$, немного двусмысленна, потому что на заданном множестве Ω можно построить несколько схем с одинаковыми параметрами. В самом деле, иногда мы будем рассматривать два семейства F, F' без общих блоков и называть такие семейства *дизъюнктными*. Кроме того, возможно существование двух неизоморфных схем с одинаковыми параметрами (см., например, ниже теорему 7.5). Тем не менее, мы будем применять это двусмысленное обозначение для систем Штейнера, так как будем рассматривать сравнительно малые системы, однозначно характеризующиеся (с точностью до биективной подстановки множества Ω) своими параметрами $(l, m, |\Omega|)$. Например, система Штейнера $S(2, 3, 7)$, называемая *проективной плоскостью Фано*, единственна. Другой пример – система $S(5, 8, 24)$, согласно теореме Витта эта система также единственна (см. [4]).

2.2. Теперь обсудим умножение бинарных форм. Мы будем записывать бинарные формы в виде

$$a = \sum_{i=0}^m a_i \binom{m}{i} x_0^i x_1^{m-i},$$

т.е. будем рассматривать однородные формы степени m от двух переменных x_0, x_1 с нормализованными коэффициентами a_i из поля K , характеристика которого предполагается большей, чем m . Линейное K -пространство бинарных форм степени m является m -й симметрической степенью $S^m(Kx_0 + Kx_1)$.

Будем предполагать, что m четно. Иногда мы будем отождествлять две ненулевые пропорциональные друг другу формы, рассматривая их как точки m -мерного проективного пространства $\mathbb{P}(S^m(Kx_0 + Kx_1))$.

Каждая бинарная форма определяет свое нулевое множество, которое мы будем рассматривать как подмножество проективной прямой $\mathbb{P}_1(\bar{K})$, $(x_0 : x_1)$ – как однородные координаты на этой прямой, точку $(1 : 0)$ будем считать бесконечной и обозначать ∞ . Если нули формы a попарно различны, будем говорить, что эта форма *невырожденная*. Если все нули a лежат в $\mathbb{P}_1(K)$, то будем называть форму a *разложимой над K* .

Для бинарных форм четной степени m существует квадратичный инвариант $I_2(a)$, являющийся обобщением дискриминанта квадратичной формы двух переменных. Этот инвариант задает невырожденное скалярное произведение на $S^m(Kx_0 + Kx_1)$ и позволяет отождествить это линейное пространство с двойственным к нему пространством.

Далее, существует естественное (и с ковариантным поведением) умножение в линейном пространстве $S^m(Kx_0 + Kx_1)$:

$$(a, b) \mapsto [a, b], \quad a, b, [a, b] \in S^m(Kx_0 + Kx_1),$$

которое коммутативно при четном $m/2$ и кососимметрично при нечетном $m/2$. Старомодный, если не сказать древний, символический метод теории инвариантов позволяет дать следующее краткое описание такого умножения:

$$\text{если } m = 2p, \quad a = a_x^{2p}, \quad b = b_x^{2p}, \quad \text{то } [a, b] = (a, b)^p a_x^p b_x^p,$$

где согласно стандартным приемам символического метода

$$a_x = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1, \quad b_x = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1, \quad (a, b) = \alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0,$$

и после указанных в символическом описании операций возведения в степень и умножений одночлены с α_0 , α_1 , а также с β_0 , β_1 , участвующие в сумме $(a, b)^p a_x^p b_x^p$, должны быть заменены на соответствующие нормализованные коэффициенты форм a , b . Точнее, $\alpha_0^i \alpha_1^{m-i}$ следует заменить на a_i , а $\beta_0^i \beta_1^{m-i}$ – на b_i .

Мультипликативный квадрат $[a, a]$ формы a будем обозначать одним из символов $\hat{a}$ или $a^{[2]}$ (и, конечно, будем отождествлять a с $a^{[1]}$).

Для случая, когда $m/2$ четно, мы будем записывать $a^{[4]}$ вместо $[a^{[2]}, a^{[2]}]$, а также $a^{[8]}$ вместо $[a^{[4]}, a^{[4]}]$ и т. д. Отметим, что бессмысленно определять в общей ситуации понятие $a^{[n]}$ (например, посредством индукции) по причине отсутствия ассоциативности операции $[a, b]$.

Говорим, что форма $a \in S^m(Kx + Ky)$ – *проективный идемпотент*, если $a \neq 0$ и $a^{[n]} = \lambda a$ для некоторого $\lambda \in K^*$ и числа $n > 1$, специфицированного в предыдущем абзаце (т. е. $n \in \{2, 4, 8, \dots\}$). Будем также в этой ситуации пользоваться кратким названием *идемпотент*. Будем говорить, что a – *строгий идемпотент*, если $a \neq 0$ и $\hat{a} = \lambda a$ для некоторого $\lambda \in K^*$.

Некоторые детали относительно обсуждаемого умножения и идемпотентов можно найти в [6].

2.3. Опишем тернарное умножение бинарных форм. Для одного приложения теории инвариантов (см. ниже пример 3.6) удобно пользоваться тернарным умножением

$$(a, b, c) \mapsto [a, b, c], \quad a, b, c, [a, b, c] \in S^m(Kx_0 + Kx_1),$$

бинарных форм степени m , делящейся на 3, скажем $m = 3p$. Упомянутый выше символический метод описывает тернарное умножение следующим образом:

$$\text{если } a = a_x^{3p}, \quad b = b_x^{3p}, \quad c = c_x^{3p}, \quad \text{то } [a, b, c] = (a, b)^p (a, c)^p (b, c)^p a_x^p b_x^p c_x^p.$$

При использовании тернарного умножения мы будем записывать $\hat{a}$ или $a^{[3]}$ вместо $[a, a, a]$, $a^{[9]}$ вместо $\hat{a}^{[3]}$ и т. д. Будем говорить, что форма a – *нильпотент*, если $a^{[3^m]} = 0$ при некотором m .

Следующее определение, взятое из дискретной математики, является стандартным (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. *Бинарный линейный код* – это множество элементов линейного подпространства конечномерного векторного пространства V над $\mathbb{F}_2$.

Допустим, что фиксирован базис Ω объемлющего пространства V . Тогда можно рассматривать векторы как подмножества множества Ω , при этом операция сложения векторов соответствует взятию теоретико-множественной симметрической разности подмножеств.

Расстоянием Хэмминга между двумя векторами называется число элементов их симметрической разности (конечно, такое расстояние корректно определено только при фиксации базиса Ω). *Длина вектора* относительно выбранного базиса – это расстояние Хэмминга между этим вектором и нулевым. Пользуясь указанным соответствием, определим код Голея как минимальное линейное подпространство пространства $V = \mathbb{F}_2^{24}$ (с фиксированной базой Ω для V , $|\Omega| = 24$), содержащее систему Штейнера $S(5, 8, 24)$ на Ω .

§ 3. Примеры

ПРИМЕР 3.1. Простейшим примером неполной блок-схемы мы обязаны Ф. Ейтсу (1936 г.). Пример снабжен номером 1 в таблице из [5, с. 90] и номером 4 в табл. 1 из [7]. Параметры этой блок-схемы следующие:

$$n = 6, \quad b = 10, \quad r = 5, \quad k = 3, \quad \lambda = 2.$$

Если мы отождествим множество Ω с $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5) = \{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$, то тройки этой блок-схемы будут соответствовать тройкам нулей бинарных невырожденных разложимых кубических форм с дискриминантом, равным 1. Десять троек блок-схемы показаны на рис. 1 как треугольники с черными вершинами. Треугольники показанного десятигранника задают триангуляцию действительной проективной плоскости (при этом, конечно, необходимо отождествить друг с другом диаметрально противоположные точки внешнего шестиугольника).

Рис. 1

Двойственное клеточное разбиение действительной проективной плоскости показано на рис. 1 посредством белых вершин и пунктирных ребер. Одномерный скелет двойственного комплекса – это граф Петерсена (см. [8, рис. 9.6]).

Рис. 1 объясняет, как группа $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$ действует на множестве из пяти элементов (и поэтому изоморфна A_5). В самом деле, эта группа действует на проективной плоскости $\mathbb{P}(S^2(\mathbb{F}_5 x_0 + \mathbb{F}_5 x_1))$ (над $\mathbb{F}_5$) – проективизации пространства бинарных квадратичных форм, при таком действии сохраняется множество невырожденных разложимых форм (им соответствуют пары точек из Ω , или, другими словами, ребра представленного десятигранника). При таком действии сохраняется коника, определяемая дискриминантом бинарной квадратичной формы. Имеются ровно пять автополярных относительно дискриминантной коники треугольников с вершинами в множестве разложимых квадратичных форм. Эти пять треугольников $(a, a', a''), \dots, (e, e', e'')$ отмечены на рис. 1. Возможно, что изложенное в этом примере представляет собой геометрическую интерпретацию части теоремы 1 из [9, гл. 10, § 1].

ПРИМЕР 3.2. Простейший пример системы Штейнера – это $S(2, 3, 7)$, или, иначе, $S(2, 3, \mathbb{F}_7)$, или $S(2, 3, \mathbb{P}_2(\mathbb{F}_2))$. Последнее обозначение показывает, что мы рассматриваем систему прямых (а точнее, коллинеарных троек точек) на проективной плоскости над $\mathbb{F}_2$. Система $S(2, 3, 7)$ называется *плоскостью Фано*. Если задать множество Ω из семи элементов, то наберется ровно 30 различных $(2, 3, 7)$ -семейств Штейнера на Ω . Действительно,

$$\frac{7!}{\text{Aut}(\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_2))} = \frac{7!}{168} = 30.$$

Рис. 2

Некоторые пары таких семейств дизъюнктны. Одна дизъюнктная пара показана на рис. 2, где тройки одной системы расположены у черных вершин графа, тройки другой системы – около белых. Этот граф – изобретение П. Дж. Хивуда, который увязал с таким графом и иные картинки, например триангуляцию двумерного тора, одномерный скелет которой – полный семивершинный граф (см. рис. 2), и двойственное клеточное разбиение, полезное при решении проблемы раскраски торических карт (см. [8, гл. 11, 12, 14, рис. 11.17, рис. 14.11] и наши рис. 2–4).

На рис. 2 две вершины соединены ребром, если отвечающие им тройки имеют общую пару элементов. Для множества $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ мы взяли в качестве двух дизъюнктных систем два разностных множества (это понятие разъясняется в [7]), т.е. тройки первого семейства F получаются из вектора $(0, 1, 3)$ прибавлением вектора $(1, 1, 1)$ по модулю 7, второе семейство F' произведено аналогичным образом, исходя из вектора $(0, 1, 5)$; F привязано к черным вершинам, F' – к белым.

На рис. 3 показана триангуляция двумерного тора с помощью треугольников, соответствующих тройкам из F и F' .

На рис. 4 из приложения 2 (см. § 10) представлено двойственное по отношению к указанной триангуляции клеточное разбиение тора, для этой новой карты требуется семь различных цветов раскраски. На новой карте семь черных вершин и соединяющие их ребра образуют граф Хивуда, поэтому род такого графа равен 1.

Если мы будем рассматривать элементы множества Ω как элементы поля $\mathbb{F}_7$, то получим, что группа аффинных преобразований

$$\text{Aff}(1, \mathbb{F}_7) = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{F}_7, a \neq 0\} \quad (3.1)$$

Рис. 3

действует на Ω и сохраняет при этом семейство троек $F \cup F'$. Порядок этой группы равен 42. Нормальный делитель $\text{SAff}(1, \mathbb{F}_7) \subset \text{Aff}(1, \mathbb{F}_7)$ индекса 2, состоящий из аффинных преобразований (3.1), имеющих квадратичные вычеты по модулю 7 в качестве коэффициента a , сохраняет каждое из семейств F , F' по отдельности,

$$\text{SAff}(1, \mathbb{F}_7) = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{F}_7, a \in \{1, 2, 4\}\}. \quad (3.2)$$

Полиномиальное отображение

$$f: z \mapsto f(z), \quad f(z) = (-z^5 - 2z^2),$$

также сохраняет F . Данное отображение указано в [10, упражнение 12, с. 263], где автор также сообщает, что объединение $\{f\}$ с множеством аффинных переносов из группы $\text{Aff}(1, \mathbb{F}_7)$ порождает дважды транзитивную группу перестановок семизэлементного множества $\mathbb{F}_7$, порядок этой группы равен 168, и эта новая группа простая. Конечно, она является клейновой группой G_{168} , изоморфной как $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$, так и $\text{PGL}(3, \mathbb{F}_2)$ (по поводу взаимного изоморфизма друг другу двух последних групп см. следующий пример).

ПРИМЕР 3.3. Здесь мы рассмотрим систему $S(3, 4, 8)$ или $S(3, 4, \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7))$. Возьмем упомянутую в примере 3.2 систему F , затем добавим четвертый элемент ∞ к каждой тройке F . Получим семь четверок:

$$\begin{aligned} (0, 1, 3, \infty), \quad (1, 2, 4, \infty), \quad (2, 3, 5, \infty), \\ (3, 4, 6, \infty), \quad (0, 4, 5, \infty), \quad (1, 5, 6, \infty), \quad (0, 2, 6, \infty). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Кроме того, добавим дополняющие (до всей прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7)$) четверки

$$\begin{aligned} (2, 4, 5, 6), \quad (0, 3, 5, 6), \quad (0, 1, 4, 6), \\ (0, 1, 2, 5), \quad (1, 2, 3, 6), \quad (0, 2, 3, 4), \quad (1, 3, 4, 5). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Получившееся совокупное семейство F , состоящее из 14 четверок, является системой Штейнера $S(3, 4, 8)$. Группа автоморфизмов этой системы совпадает

с $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ (подтверждение и объяснение этого факта дано ниже в примере 3.5). Ассоциированная с F структура плоскости Фано может быть получена взятием семи пар взаимно дополнительных четверок и рассмотрением таких пар как точек плоскости. Три точки такой природы объявляются коллинеарными, если симметрическая разность любых трех представляющих их четверок либо пуста, либо совпадает со всей прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7)$.

Пользуясь описанной конструкцией, мы получаем естественное действие группы $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ на плоскости Фано и изоморфизм между этой группой и группой коллинеаций плоскости Фано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если мы добавим новое семейство F' четверок, произведенное из второго семейства троек, рассмотренного в примере 3.2, а именно семейство

$$\begin{aligned} &(0, 1, 5, \infty), \quad (0, 2, 3, \infty), \quad (0, 4, 6, \infty), \quad (1, 2, 6, \infty), \\ &(1, 3, 4, \infty), \quad (2, 4, 5, \infty), \quad (3, 5, 6, \infty), \quad (2, 3, 4, 6), \quad (1, 4, 5, 6), \quad (1, 2, 3, 5), \\ &(0, 3, 4, 5), \quad (0, 2, 5, 6), \quad (0, 1, 3, 6), \quad (0, 1, 2, 4), \end{aligned} \quad (3.5)$$

то получим два дизъюнктивных семейства четверок F, F' . Если мы попытаемся образовать трехмерный полиэдральный комплекс с помощью двадцати восьми этих четверок, то полученный комплекс не будет трехмерным комбинаторным многообразием или гомологическим многообразием в смысле [11, определение [1:1], с. 467], потому что границы вершинных звезд нашего комплекса будут торами, а не сферами. Комплекс будет псевдомногообразием в смысле [11, определение [3:14], с. 316].

ПРИМЕР 3.5. Если $m = 4$ и a, b – бинарные квартики, то их произведение $c = [a, b]$ (в смысле п. 2.2) есть смешанный гессиан форм a, b и

$$c = \frac{\partial^2 a}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x_0 \partial x_1} \frac{\partial^2 b}{\partial x_0 \partial x_1}.$$

Нормализованные коэффициенты смешанного гессиана c суть

$$\begin{aligned} c_0 &= 6(a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1), \\ c_1 &= 3(a_0 b_3 + a_3 b_0 - a_1 b_2 - a_2 b_1), \\ c_2 &= a_0 b_4 + a_4 b_0 + 2a_1 b_3 + 2a_3 b_1 - 6a_2 b_2, \\ c_3 &= 3(a_1 b_4 + a_4 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2), \\ c_4 &= 6(a_4 b_2 + a_2 b_4 - 2a_3 b_3). \end{aligned}$$

Если $m = 4$ и $K = \mathbb{F}_7$, то совокупность всех невырожденных разложимых идемпотентных квартик (в том смысле, что $a^{[4]} = \lambda a$) совпадает (с точностью до ненулевого постоянного множителя) с множеством из 28 бинарных квартик, 14 из которых имеют четверки нулей, описанные в (3.3), (3.4), другие 14 имеют нули, указанные в (3.5). Краткое доказательство состоит в следующем. Для невырожденной квартики условие идемпотентности равносильно равенству $I_2(a) = 0$, потому что согласно теории инвариантов бинарных квартик

форма $[\hat{a}, \hat{a}]$ является линейной комбинацией исходной формы a и ее гессиана:

$$[\hat{a}, \hat{a}] = 5 \cdot I_2(a) \cdot \hat{a} - 3 \cdot I_3(a) \cdot a,$$

где $I_3(a)$ – кубический инвариант. Простое объяснение последнего тождества состоит в следующем: коллекция ковариантов бинарной кватрики невелика, поэтому любая попытка производства нового коварианта четвертого порядка приводит нас к линейной комбинации исходной кватрики и ее гессиана; ясно также, что коэффициенты возникающей линейной комбинации являются инвариантами. В терминах геометрии проективного пространства $\mathbb{P}(S^4(Kx_0 + Kx_1))$ доказанное условие идемпотентности означает, что идемпотенты располагаются на квадрике $I_2 = 0$.

Далее, каждую невырожденную разложимую бинарную кватрику можно привести к виду $xy(x-y)(x-ty)$, где $t \neq 0$, $t \neq 1$. Для такой кватрики уравнение $I_2(a) = 0$ равносильно $t^2 - t + 1 = 0$. В основном поле $\mathbb{F}_7$ корнями последнего уравнения являются $t_1 = 3$ и $t_2 = -2$; $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ -орбитой кватрики, соответствующей первому корню, является первое семейство кватрик с нулями из (3.3), (3.4), орбита кватрики, соответствующей второму корню, – дополнительное семейство с нулями из (3.5).

Если к 14 четверкам системы $S(3, 4, 8)$, рассматриваемых (по соглашениям из определения 2.3) как векторы 8-мерного $\mathbb{F}_2$ -пространства, добавить нулевой вектор и вектор с единичными координатами, то получим пример линейного бинарного кода из [4].

ПРИМЕР 3.6. Ради полноты и плавного перехода к следующему примеру 3.8, мы обсудим здесь случай бинарных секстиков ($m = 6$) над полем из одиннадцати элементов ($K = \mathbb{F}_{11}$). Согласно п. 2.2 бинарное умножение в этом случае кососимметрично: $[a, a] = 0$ для бинарных секстиков a , поэтому лучше использовать тернарное умножение из замечания 2.2.

Штейнерову систему типа $S(5, 6, 12)$ на множестве $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{11})$ можно образовать с помощью нулей мультипликативных нильпотентов следующего вида: пусть a – невырожденная разложимая бинарная секстика, мультипликативный куб $\hat{a} = [a, a, a]$ которой представляется как произведение $\lambda f^2 g^4$, где $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{F}_{11}$, f и g – две проективно различные линейные формы. Для такой секстики a произведение $a^{[9]} = [\hat{a}, \hat{a}, \hat{a}]$ будет шестой степенью линейной формы (точнее, в данном случае оно будет равно μg^6) и следующий мультипликативный куб $a^{[27]}$ обратится в ноль. Множество таких нильпотентов a состоит из 264 секстиков (рассматриваемых с точностью до множителя из $\mathbb{F}_{11}^*$). Характеризуются такие секстики a посредством значений инвариантов следующим образом:

$$I_2(a) = 0, \quad I_4(a) = 0, \quad I_6(a) = 0, \quad I_{10}(a) \neq 0, \quad I_{15}(a) \neq 0.$$

Необходимо отметить, что инвариант $I_4(a)$ четвертой степени относительно коэффициентов формы a не определен однозначно, так как к нему можно прибавить $\lambda I_2(a)^2$, обозначения $I_6(a)$, $I_{10}(a)$ также двусмысленны, но приведенная выше характеристика не зависит от возможных изменений в определениях инвариантов.

Рассматриваемое множество нильпотентных секстик можно распределить по двум подмножествам, каждое из которых состоит из 132 секстик. Если взять шестерки нулей секстик одного из этих семейств, то образуется система Штейнера $S(5, 6, 12)$. Добавляя к группе $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_{11})$ полиномиальное отображение $z \mapsto -(4z^2 + 3z^7)$, можно породить группу Матьё M_{12} (см. [10, с. 263]). Группа M_{12} сохраняет то семейство Штейнера F , которому принадлежит шестерка $\{\infty, 1, 3, 4, 5, 9\}$, содержащая квадратичные вычеты по модулю 11 и бесконечно удаленную точку (а также в F входит дополнительная шестерка $\{0, 2, 6, 7, 8, 10\}$, содержащая квадратичные невычеты и нуль).

Мы не будем доказывать сформулированные выше (и в следующем замечании) утверждения относительно объектов примера 3.6, потому что не будем использовать эти утверждения далее в нашей работе.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Вместе два дизъюнктивных семейства F, F' типа $S(5, 6, 12)$ производят пятимерный комбинаторный комплекс, являющийся псевдомногообразием, но не гомологическим многообразием. Действительно, нетрудно вычислить характеристику Эйлера–Пуанкаре этого комплекса и увидеть, что она ненулевая.

Любая система Штейнера $S(l, m, n)$ порождает меньшие производные системы (см. п. (d) определения 2.1): $S(l - 1, m - 1, n - 1)$, $S(l - 2, m - 2, n - 2)$ и т. д. Таким образом, два семейства F, F' порождают две дизъюнктивные системы типа $S(2, 3, 9)$. Систему последнего типа можно ассоциировать с девятью точками перегиба плоской неособой кубической кривой. В самом деле, известно, что прямая, проходящая через две точки перегиба, пересекает кривую еще в одной такой точке и что точки перегиба располагаются по три на двенадцати прямых. Две наши дизъюнктивные $S(2, 3, 9)$ -системы позволяют построить двумерный комплекс и задать триангуляцию неориентируемой поверхности M_6 . Эта поверхность может быть получена из сферы с шестью круглыми отверстиями заклеиванием отверстий шестью пленками Мёбиуса. Для раскраски карты, отвечающей дуальному к триангуляции клеточному разбиению, требуется девять различных красок.

Две производные (по отношению к F и F') дизъюнктивные $S(3, 4, 10)$ -системы порождают трехмерное псевдомногообразие, в котором звезды вершин имеют границами упомянутые выше поверхности типа M_6 .

ПРИМЕР 3.8. Допустим, что $m = 8$ и $K = \mathbb{F}_{23}$. Явные формулы для мультипликативного квадрата $\hat{a} = [a, a]$ бинарной октавики a были выписаны в [6, с. 394–395]. По старинной терминологии $\hat{a}$ является эвектантом формы a относительно кубического инварианта $I_3(a)$.

Рассмотрим теперь разложимые над полем $\mathbb{F}_{23}$ невырожденные бинарные октавики, порождающие строгий идемпотент в третьем поколении. Здесь мы подразумеваем, что потомок $a^{[8]} = [a^{[4]}, a^{[4]}]$ формы a есть строгий идемпотент, считая, что $a^{[2]} = [a, a]$ принадлежит первому поколению, $a^{[4]} = [a^{[2]}, a^{[2]}]$ – второму. Указанные октавики a , для которых потомок $a^{[8]}$ есть строгий идемпотент, будем называть *октавиками Тодда*, соответствующие наборы нулей

октавик – *октадами Тодда*. Всего имеется 1518 октад Тодда. В статье [12] представлен список половины из них; 759 октад этого списка составляют штейнерову систему F типа $S(5, 8, 24)$. Семейству F принадлежит октада $\{\infty, 0, 1, 2, 3, 5, 14, 17\}$. Не лежащие в F другие 759 октад Тодда составляют дополнительную систему Штейнера F' .

Октавики Тодда связаны с любопытной геометрией. В восьмимерном проективном пространстве

$$\mathbb{P}_8/\mathbb{F}_{23} = \mathbb{P}(S^8(\mathbb{F}_{23}x_0 + \mathbb{F}_{23}x_1))$$

бинарных октавик три октавики a , $a^{[2]}$, $a^{[4]}$ коллинеарны. Другими словами, каждая октавика Тодда a определяет точку многообразия Г. Грассмана $\text{Gr}(1, 8)$, эта точка – прямая $L(a)$ в $\mathbb{P}_8$, содержащая a , $a^{[2]}$, $a^{[4]}$. Кроме того, на прямой $L(a)$ находится квадрат $(C(a))^2$ коварианта $C(a)$, этот ковариант имеет степень 2 относительно коэффициентов формы a и порядок 4 относительно переменных x_0, x_1 . Для любой октавики Тодда a ковариант $C(a)$ пропорционален квадрату квадратичной формы $Q(a)$: $C(a) = \lambda(Q(a))^2$, которая неприводима над полем $\mathbb{F}_{23}$. Если W – множество всех неприводимых бинарных квадратичных форм, то отображение $F \rightarrow W$, $a \mapsto Q(a)$, сюръективно, слой этого отображения состоит из трех октавик Тодда, объединение соответствующих им трех октад – все множество $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{23})$. Группа $\text{PSL}(2, \mathbb{F}_{23})$ сохраняет семейство слоев, но вся группа M_{24} разрушает эту стратификацию.

Если мы рассмотрим члены семейства F как векторы 24-мерного линейного пространства над $\mathbb{F}_2$, то увидим, что эти векторы порождают 12-мерное линейное подпространство, которое является кодом Голея $\mathcal{G}_{24}$. При этом новых октад не появится: если симметрическая разность нескольких октад из F есть октада, то последняя обязательно лежит в F .

Теперь мы укажем 12 октад из F , порождающих код $\mathcal{G}_{24}$.

Таблица, представленная матрицей

	∞	15	7	14	5	10	20	17	11	22	21	19
	P	C	B	E	A	D	J	I	M	K	F	H
(0)	•	•										
(1)	•		•									
(2)	•			•								
(3)	•				•							
(4)	•					•						
(5)	•						•					
(6)	•							•				
(7)	•								•			
(8)	•									•		
(9)	•										•	
(10)	•											•
(11)												

(3.6)

и матрицей

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 9 & 18 & 13 & 3 & 6 & 12 \\
 G & V & U & R & N & W & X & T & O & Q & S & L \\
 (0) & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & & \bullet & \bullet \\
 (1) & & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & & \bullet & \bullet \\
 (2) & & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & & \bullet \\
 (3) & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet & \\
 (4) & & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \bullet \\
 (5) & & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\
 (6) & & & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\
 (7) & & & & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 (8) & & & & & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 (9) & & \bullet & & & & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\
 (10) & & \bullet & \bullet & & & & \bullet & & \bullet & \bullet & & \bullet \\
 (11) & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
 \end{array}
 \end{array} \tag{3.7}$$

разделена на две части, левая половина каждого вектора $(0), \dots, (11)$ располагается в виде строки в (3.6), его правая половина показана в (3.7). Верхняя строка в (3.6) заполнена квадратичными невычетами по модулю 23, это ∞ и умноженные на 15 последовательные степени двойки. Верхняя строка в (3.7) заполнена квадратичными вычетами по модулю 23, это последовательные степени двойки. Смысл второй табличной строки, заполненной буквами, находящимися во взаимно однозначном соответствии со стоящими над ними символами первой строки, будет объяснен далее в § 4, 5.

Добавленное полиномиальное отображение

$$f: z \mapsto f(z), \quad f(z) = (4z^4 - 3z^{15}),$$

вместе с $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_{23})$ порождает группу Матьё M_{24} (см. [10, с. 263]). Эта группа сохраняет систему Штейнера и код Голея.

§ 4. Список точек перегиба на кватернике Клейна

Пусть (x_0, x_1, x_2) – однородные координаты на проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Среди различных видов однородных уравнений кватерники Клейна Γ выберем следующее наипростейшее уравнение:

$$x_0^3 x_1 + x_1^3 x_2 + x_2^3 x_0 = 0.$$

Зафиксируем в основном поле K примитивный корень ε седьмой степени из единицы (для поля комплексных чисел можно взять $\varepsilon = e^{2\pi i/7}$).

Первые три точки перегиба для Γ очевидны, это вершины координатного треугольника Δ_∞ :

$$\Delta_\infty = \triangle ABC, \quad A = (1 : 0 : 0), \quad B = (0 : 1 : 0), \quad C = (0 : 0 : 1).$$

Кроме того, стороны треугольника Δ_∞ являются перегибными касательными кватрики Клейна Γ : AB (соответственно, BC , CA) – прямая, касающаяся кватрики Γ в точке B (соответственно, C , A). Пользуясь проективными автоморфизмами кватрики Γ , мы можем получить еще семь перегибных треугольников: группа Клейна G_{168} действует транзитивно на множестве, состоящем из 24 точек перегиба, но при таком действии существуют подмножества импримитивности, это тройки вершин восьми треугольников $\Delta_\infty, \Delta_0, \dots, \Delta_6$. Воспользуемся обозначениями $A, B, \dots, W, X$ из статьи [3] и разбиением множества точек перегиба на перегибные треугольники. Однородные координаты точек $D, T, \dots, X$ нормализованы условием $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \Delta JQX, \\
J &= ((\varepsilon^5 + \varepsilon^2) : -(\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + 1) : 1), \\
Q &= ((\varepsilon^4 + \varepsilon^3) : (\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2) : 1), \\
X &= (-(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + 1) : -(\varepsilon^5 + \varepsilon^2 + 1) : 1); \\
\Delta_1 &= \Delta HOV, \\
O &= ((\varepsilon^5 + \varepsilon) : -(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon) : 1), \\
H &= ((\varepsilon^4 + \varepsilon^2) : (\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1) : 1), \\
V &= (-(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon) : -(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) : 1); \\
\Delta_2 &= \Delta IPW, \\
I &= ((\varepsilon^5 + 1) : -(\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1) : 1), \\
W &= ((\varepsilon^3 + \varepsilon^2) : -(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon) : 1), \\
P &= ((\varepsilon^4 + \varepsilon) : (\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon + 1) : 1); \\
\Delta_3 &= \Delta KDR, \\
K &= ((\varepsilon^3 + \varepsilon) : -(\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + \varepsilon) : 1), \\
R &= ((\varepsilon^4 + 1) : (\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + \varepsilon) : 1), \\
D &= (-(\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1) : -(\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2) : 1); \\
\Delta_4 &= \Delta FMT, \\
M &= ((\varepsilon^3 + 1) : -(\varepsilon^4 + \varepsilon + 1) : 1), \\
T &= ((\varepsilon^2 + \varepsilon) : -(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3) : 1), \\
F &= (-(\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1) : (\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + \varepsilon + 1) : 1); \\
\Delta_5 &= \Delta ELS, \\
L &= ((\varepsilon^2 + 1) : -(\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + 1) : 1), \\
E &= ((\varepsilon^5 + \varepsilon^4) : (\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1) : 1), \\
S &= (-(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1) : -(\varepsilon^5 + \varepsilon^2 + \varepsilon) : 1); \\
\Delta_6 &= \Delta GNU, \\
G &= ((\varepsilon + 1) : (\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon) : 1), \\
N &= ((\varepsilon^5 + \varepsilon^3) : (\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + 1) : 1), \\
U &= (-(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon + 1) : (\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon + 1) : 1).
\end{aligned}$$

Пусть Ω – множество, состоящее из 24 точек перегиба кривой Γ . Имеется естественное отображение

$$\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7), \quad \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7) = \{\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad (4.1)$$

сопоставляющее точке содержащий ее треугольник Δ . Далее, иногда в последующем мы будем указывать треугольник, соответствующий точке, посредством индекса при символе точки; например, вместо U , E будем записывать U_6 , E_5 , потому что $6 = \tau(U)$, $5 = \tau(E)$.

§ 5. Коники, проходящие через 8 точек перегиба кватрики Клейна

Если Φ – коника, содержащая восемь точек перегиба, то образ ее пересечения с Γ при отображении τ (определенном в (4.1)) – подмножество множества $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7)$. Имеются два вида таких коник.

Коники первого вида характеризуются равенством

$$\tau(\Phi \cap \Gamma) = \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7).$$

Каждая коника первого вида проходит через одну вершину каждого перегибного треугольника и тем самым определяет некоторое сечение отображения τ . В работе [3, с. 71] описан способ производства множества всех 63-х коник первого вида. Мы укажем два примера из них:

- 1) $\Phi_1, \Phi_1 \cap \Gamma = \{A, E, H, I, J, M, R, U\} = \{J_0, H_1, I_2, R_3, M_4, E_5, U_6, A_\infty\}$;
- 2) $\Phi_2, \Phi_2 \cap \Gamma = \{B, D, G, H, M, Q, S, W\} = \{Q_0, H_1, W_2, D_3, M_4, S_5, G_6, B_\infty\}$.

Если коника, проходящая через восемь точек перегиба кривой Γ , не является коникой первого вида, то множество $\tau(\Phi \cap \Gamma)$ состоит из четырех элементов, принадлежащих $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7)$, и каждая такая коника проходит через пары вершин четырех треугольников, помеченных элементами из $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7)$. Такие коники мы будем называть *кониками второго вида*. В [3, с. 71, 72] описан способ производства всех 84 коник второго вида. Здесь мы укажем следующие шесть примеров:

- 3) $\Phi_3, \Phi_3 \cap \Gamma = \{A, B, D, E, I, L, P, R\} = \{I_2, P_2, D_3, R_3, E_5, L_5, A_\infty, B_\infty\}$;
- 4) $\Phi_4, \Phi_4 \cap \Gamma = \{A, C, F, J, L, Q, S, T\} = \{J_0, Q_0, F_4, T_4, L_5, S_5, A_\infty, C_\infty\}$;
- 5) $\Phi_5, \Phi_5 \cap \Gamma = \{B, C, E, G, H, N, O, S\} = \{H_1, O_1, E_5, S_5, G_6, N_6, B_\infty, C_\infty\}$;
- 6) $\Phi_6, \Phi_6 \cap \Gamma = \{D, I, K, M, Q, T, W, X\} = \{Q_0, X_0, I_2, W_2, D_3, K_3, M_4, T_4\}$;
- 7) $\Phi_7, \Phi_7 \cap \Gamma = \{F, H, J, M, N, U, V, X\} = \{J_0, X_0, H_1, V_1, F_4, M_4, N_6, U_6\}$;
- 8) $\Phi_8, \Phi_8 \cap \Gamma = \{G, K, O, P, R, U, V, W\} = \{O_1, V_1, P_2, W_2, K_3, R_3, N_6, U_6\}$.

В этих примерах видно, что соответствующие коникам четверки индексов лежат в множестве из 28 четверок, перечисленных в (3.3)–(3.5). Рассмотрение всех 84 коник второго вида подтверждает это наблюдение. Для каждой четверки из упомянутого списка (3.3)–(3.5) имеются ровно три коники второго вида, индексируемые соответствующими четверками τ -индексов.

Если мы рассмотрим 24-мерное линейное пространство над $\mathbb{F}_2$, порожденное 24 точками перегиба, то 8 векторов длины 8, определяемых вышеуказанными кониками $\Phi_1, \dots, \Phi_8$, линейно независимы, порождают 8-мерное линейное пространство, которое является подпространством 12-мерного кода Голея,

описанного матрицами (3.6), (3.7). Для геометрического порождения кода мы воспользуемся далее четырьмя парами коник более сложной природы.

§ 6. Коники, проходящие через шесть точек перегиба и две точки касания двойной касательной

Общая квартика неособа и имеет 28 двойных касательных прямых. Иногда коника, проходящая через шесть точек перегиба, пересекает квартику в двух точках касания двойной касательной. Для квартики Клейна имеются 112 таких коник, они бывают двух видов. Желая продолжить предыдущую нумерацию видов коник, мы здесь и далее будем говорить о кониках третьего и четвертого вида. *Коника третьего вида* – та, что содержит шесть вершин двух перегибных треугольников (всего имеется 28 таких коник). Коники четвертого вида проходят через шесть вершин шести различных перегибных треугольников, семейство таких коник состоит из 84 членов. Укажем две коники четвертого вида:

$$\text{а) } \Phi_a, \Phi_a \cap \Gamma = \{D, G, I, M, S, X\} = \{X_0, I_2, D_3, M_4, S_5, G_6\};$$

$$\text{б) } \Phi_b, \Phi_b \cap \Gamma = \{F, L, Q, R, U, W\} = \{Q_0, W_2, R_3, F_4, L_5, U_6\}.$$

Их объединение $\Phi_a + \Phi_b$ определяет 12 точек перегиба, это множество из 12 точек – вектор, принадлежащий коду, определенному в (3.6), (3.7).

Дюжину точек для двух коник третьего вида, соответствующих дизъюнктным парам перегибных треугольников, можно описать с помощью всех четырех треугольников. Рассмотрим следующие три четверки треугольников, соответствующие трем четверкам $(0, 1, 2, 4)$, $(0, 1, 3, 6)$, $(0, 1, 5, \infty)$ из (3.5):

$$\Psi_1 = \triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_4,$$

$$\Psi_2 = \triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_3 + \triangle_6,$$

$$\Psi_3 = \triangle_0 + \triangle_1 + \triangle_5 + \triangle_\infty.$$

Согласно [3] каждая из четверок Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 определяется некоторой парой коник третьего вида.

ТЕОРЕМА 6.1. *Двенадцать векторов, соответствующих $\Phi_1, \dots, \Phi_8, \Phi_a + \Phi_b, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$, линейно независимы над $\mathbb{F}_2$ и порождают код Голея, определяемый матрицами (3.6), (3.7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится рутинным матричным вычислением, которое мы не приводим.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Любая пара перегибных треугольников определяет конику четвертого вида, пересекающую нашу квартику в двух точках касания двойной касательной (помимо, конечно, вершин этих треугольников), поэтому мы можем пометить любую двойную касательную парой символов из множества $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7) = \{\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Конечно, некий способ такой маркировки был указан О. Гессе давно (еще в 1855 г.) и даже для общей квартики, а не только

для специальной, и А. Кэли пользовался термином *дуадные символы* для подобных меток. Однако маркировка Гессе не единственна, она определена с точностью до перестановки восьми маркирующих элементов. Используемое нами соответствие между парами перегибных треугольников и двойными касательными кривой Γ является естественным. Точное описание двойных касательных и их меток дано в приложении 1.

§ 7. Построение блок-схемы на множестве двойных касательных с помощью семерок Аронгольда

– Какое клеймо у ранчо Наполито, Уилсон?
 – X – черта – Y , – сказал Уилсон.
 – И мне так казалось, – заметил Куин.
 – Но взгляни на ту белую тёлку. У ней другое клеймо:
 сердце и в нем крест. Это что за клеймо?
 О. Генри, рассказ “Сердце и крест”

В этом параграфе, если двойная касательная помечена парой $\{X, Y\}$, где $X, Y \in \{\infty, 0, 1, \dots, 6\}$ (см. замечание 6.2), мы будем иногда использовать другие способы для такой маркировки, а именно следующие:

$$X - Y, \quad Y - X \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} X \\ | \\ Y \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} Y \\ | \\ X \end{array}$$

Некоторые множества, состоящие из семи двойных касательных, называются *семерками Аронгольда*. Пользуясь упомянутыми обозначениями, можно пояснить, что семерка Аронгольда изображается иероглифически (или, возможно, клинописью), либо как звезда, либо как сердце и крест. Звездообразная семерка Аронгольда – это

$$\begin{array}{ccccc} d & e & f & & \\ & \backslash & / & & \\ c - a - g & & & & \\ & / & \backslash & & \\ b & & h & & \end{array}$$

(где $\{a, \dots, h\} = \{\infty, 0, 1, \dots, 6\}$). Она также будет записываться либо в виде $(a \mid b, c, d, e, f, g, h)$, либо кратко $S(a)$. Сердце-крестовая семерка Аронгольда

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ b - c & | & \\ \backslash & f - d - h & \\ a & | & \\ & e & \end{array}$$

будет обозначаться либо в виде $(a, b, c, |d|, e, f, g, h)$, либо кратко $H(a, b, c, |d|)$.

Общее число семерок Аронгольда равно 288. Каждая двойная касательная появляется в 72 различных семерках Аронгольда. Каждая пара двойных касательных появляется в 16 семерках Аронгольда. В соответствии с начальным

определением [7, гл. 10] можно сказать, что множество всех семерок Аронгольда – это блок-схема с параметрами $v = 28$, $b = 288$, $k = 7$, $r = 72$, $\lambda = 16$. Далее мы увидим, что эта блок-схема является *кратной* в смысле комментариев к приложению 1 книги [7] и составленной из восьми блок-схем, имеющих параметры $v = 28$, $b = 36$, $k = 7$, $r = 9$, $\lambda = 2$. Ниже мы построим блок-схему с последними параметрами. Отметим, что блок-параметр 36 неслучайно совпадает с числом четных тэта-характеристик неособой плоской кватрики.

Каждая семерка Аронгольда определяет четную тэта-характеристику кватрики. Краткое объяснение такого сопоставления состоит в следующем: если мы пометим двойную касательную посредством нечетной тэта-характеристики (т. е. матрицей из $\text{Mat}(2, 3, \mathbb{F}_2)$ с ненулевым скалярным произведением ее строк), то сумма всех семи матриц, соответствующих двойным касательным из семерки Аронгольда, является четной тэта-характеристикой (т. е. матрицей из $\text{Mat}(2, 3, \mathbb{F}_2)$ с нулевым скалярным произведением ее строк). Например, все звездобразные семерки Аронгольда определяют одну и ту же четную тэта-характеристику. Две сердце-крестовых семерки Аронгольда

$$(a, b, c, |d|, e, f, g, h), \quad (a', b', c', |d'|, e', f', g', h')$$

определяют одинаковые четные тэта-характеристики тогда и только тогда, когда либо

$$\{a, b, c, d\} = \{a', b', c', d'\},$$

либо

$$\{a, b, c, d\} = \{e', f', g', h'\}.$$

Можно рассматривать четную тэта-характеристику как представление множества $\{\infty, 0, 1, \dots, 6\}$ в виде объединения двух дизъюнктивных четырехэлементных подмножеств или как несобственное объединение пустого подмножества и целого $\{\infty, 0, 1, \dots, 6\}$. Такое разбиение будем называть *комбинаторной меткой* для четной тэта-характеристики.

Пусть **AS** – множество семерок Аронгольда, **ET** – множество четных тэта-характеристик. Имеем отображение

$$\varphi: \mathbf{AS} \rightarrow \mathbf{ET}, \quad (7.1)$$

переводящее семерку Аронгольда в ее комбинаторную метку, описанную выше. Поясним, что звезда определяет несобственное разбиение, а сердце-крест $(a, b, c, |d|, e, f, g, h)$ определяет разбиение $\{a, b, c, d\} \cup \{e, f, g, h\}$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Для отображения φ (см. (7.1)) существует сечение*

$$\sigma: \mathbf{ET} \rightarrow \mathbf{AS}.$$

Образ $\sigma(\mathbf{ET})$ является блок-схемой с параметрами $v = 28$, $b = 36$, $k = 7$, $r = 9$, $\lambda = 2$. Другими словами, каждая четная тэта-характеристика имеет единственного представителя в $\sigma(\mathbf{ET})$, каждая двойная касательная появляется ровно в девяти семерках Аронгольда из $\sigma(\mathbf{ET})$, каждая пара двойных появляется ровно в двух семерках Аронгольда из $\sigma(\mathbf{ET})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним о двух дизъюнктивных плоскостях Фано F, F' , построенных на семи элементах множества $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, \dots, 6\}$ (см. пример 3.2):

$$F: \quad (0, 1, 3), \quad (1, 2, 4), \quad (2, 3, 5), \quad (3, 4, 6), \quad (0, 4, 5), \quad (1, 5, 6), \quad (0, 2, 6). \quad (7.2)$$

$$F': \quad (0, 1, 5), \quad (1, 2, 6), \quad (0, 2, 3), \quad (1, 3, 4), \quad (2, 4, 5), \quad (3, 5, 6), \quad (0, 4, 6). \quad (7.3)$$

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(F \cup F')$ состоит из 42 элементов (см. (3.1)). Каждое из подсемейств F, F' сохраняется по отдельности при действии подгруппы $\text{SAff}(1, \mathbb{F}_7)$ на $F \cup F'$ (см. (3.2)). Элементов второго порядка в $\text{Aut}(F \cup F')$ имеется ровно семь, а именно

$$\tau_i: z' \equiv -z + 2i \pmod{7}, \quad i \in \mathbb{F}_7.$$

Неподвижным элементом для τ_i в множестве $\mathbb{F}_7$ является i . Каждая инволюция τ_i меняет местами F и F' . Определяемая посредством τ_0 подстановка есть $(0)(1, 6)(2, 5)(3, 4)$. Циклические разложения для остальных инволюций могут быть произведены из только что указанного последовательным прибавлением единицы по модулю 7, это

$$\tau_i: (i)(1+i, 6+i)(2+i, 5+i)(3+i, 4+i),$$

где результаты сложения должны быть приведены по модулю 7. Каждая инволюция $\tau_i, i = 0, 1, \dots, 6$, порождает три семерки Аронгольда

$$H(\infty, 1+i, 6+i, |i|), \quad H(\infty, 2+i, 5+i, |i|), \quad H(\infty, 3+i, 4+i, |i|).$$

Итак, мы уже имеем 21 семерку Аронгольда, но требуется построить 36. Следующие 14 семерок будут получены с помощью силовских 3-подгрупп группы $\text{SAff}(1, \mathbb{F}_7)$ (эта группа была описана в (3.2)). Имеются семь таких подгрупп $S_0, \dots, S_6$, каждая подгруппа S_i имеет три орбиты в $\mathbb{F}_7$: одна орбита состоит из одной-единственной неподвижной для S_i точки i , каждая из двух остальных орбит содержит три элемента, одна тройка принадлежит F , другая – F' . Точнее, подгруппа

$$S_i = \{(z' = z), (z' = 2z - i), (z' = 4z - 3i)\}$$

имеет орбиты

$$\{i\}, \quad \{1+i, 2+i, 4+i\}, \quad \{3+i, 5+i, 6+i\}.$$

Такая подгруппа S_i порождает две семерки Аронгольда

$$H(1+i, 2+i, 4+i, |i|), \quad H(3+i, 5+i, 6+i, |i|).$$

Итак, мы уже имеем 21 семерку Аронгольда, произведенную инволюциями, 14 семерок Аронгольда, произведенных силовскими 3-подгруппами. Остается добавить звезду $S(\infty)$, и требуемая коллекция из 36 семерок Аронгольда будет получена. Нетрудно проверить, что все соответствующие им четные тэта-характеристики различны. Тем самым построено сечение

$$\sigma: \mathbf{ET} \rightarrow \mathbf{AS}.$$

Нетрудно также проверить анонсированные блок-схемные свойства. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Каждая инволюция τ_i допускает реализацию как топологическая инволюция клеточного комплекса, показанного на рис. 4 далее. Действительно, для $\tau_5 = (5)(0, 3)(1, 2)(4, 6)$ топологическая реализация – это центральная симметрия прямоугольника, а прочие инволюции сопряжены с τ_5 .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Если возьмем 14 семерок Аронгольда из проведенного доказательства теоремы 7.1 (т.е. семерки, произведенные с помощью силовских 3-подгрупп), то окажется, что 28 четверок из комбинаторных меток для соответствующих четных тэта-характеристик были описаны в замечании 3.4, и они определяют описанное там же трехмерное псевдомногообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Блок-схема с теми же самыми параметрами v, b, k, r, λ была построена в [5, № 22], имеется ее описание в [7, приложение 1, № 33]. Следующая теорема показывает отличие этой блок-схемы от нашей.

ТЕОРЕМА 7.5. *Блок-схемы Фишера–Эйтса–Холла и $\sigma(\mathbf{ET})$ не изоморфны друг другу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предлагаемое доказательство будет комбинаторно-топологическим: мы сравним звезды вершин и увидим, что строение границ этих звезд различное.

Зафиксируем одну из 28 двойных касательных, обозначим ее b , возьмем в $\sigma(\mathbf{ET})$ одну из девяти семерок Аронгольда, содержащих b , обозначим эту семерку через A . Среди упомянутых девяти семерок имеются ровно две семерки A', A'' такие, что три множества $A \setminus \{b\}, A' \setminus \{b\}, A'' \setminus \{b\}$ попарно не пересекаются.

С другой стороны, если зафиксируем один из 28 объектов блок-схемы Фишера–Эйтса–Холла, описанной в [7, табл. 1, № 33], обозначим его b_0 , затем среди девяти блоков, содержащих b_0 , возьмем один блок и обозначим его A_0 , то найдутся ровно два блока A_1, A_2 таких, что $b_0 \in A_1, b_0 \in A_2$,

$$(A_1 \setminus \{b_0\}) \cap (A \setminus \{b_0\}) = \emptyset, \quad (A_2 \setminus \{b_0\}) \cap (A \setminus \{b_0\}) = \emptyset.$$

Однако, в отличие от ситуации с двойными касательными, множество $(A_1 \setminus \{b_0\}) \cap (A_2 \setminus \{b_0\})$ не пусто и содержит ровно один объект. Этим теорема доказана.

§ 8. Разбиение множества семерок Аронгольда

ТЕОРЕМА 8.1. *Для отображения φ (см. (7.1)) имеется восемь сечений*

$$\sigma_i: \mathbf{ET} \rightarrow \mathbf{AS}, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

таких, что $\sigma_1(\mathbf{ET}), \dots, \sigma_8(\mathbf{ET})$ – взаимно дизъюнктные подмножества в $\mathbf{AS}$, и их объединение совпадает с $\mathbf{AS}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим биекцию $s: \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_7) \rightarrow \{1, 2, \dots, 8\}$, определяемую стрелками

$$\begin{array}{cccccccc} \infty & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{array} \quad (8.1)$$

Кроме этой подстановки, воспользуемся еще восьмью подстановками s_i множества $\{1, 2, \dots, 8\}$, определяемыми формулами

$$s_i(z) \equiv (z + i) \pmod{8}.$$

При этом подразумеваем, конечно, что s, s_i индуцируют отображения на конечных множествах символов, на комбинаторных метках, на сердцах с крестом и на звездах; индуцируемые отображения будем обозначать также через s, s_i .

Для произвольной четной тэта-характеристики t положим

$$\sigma_i(t) := s^{-1}(s_i(s(\sigma(t)))).$$

Ясно, что каждое σ_i есть сечение для φ . Проверка того факта, что подмножества $\sigma_i(\mathbf{ET})$ взаимно дизъюнктные, осуществляется прямым перебором: нетрудно (при желании все проверять) составить список всех 288 семерок Аронгольда и распределить их по восьми подмножествам $\sigma_i(\mathbf{ET})$. Не приводя этот перебор, можем считать, что теорема доказана.

§ 9. Приложение 1.

Список двойных касательных к квартике Клейна

Следующие уравнения нормализованы условием равенства единице коэффициента при x_2 , константа ε – фиксированный примитивный корень седьмой степени из единицы:

$$\begin{aligned} \{0, \infty\}: & x_0 + x_1 + x_2 = 0, \\ \{1, \infty\}: & \varepsilon^4 x_0 + \varepsilon^6 x_1 + x_2 = 0, \\ \{2, \infty\}: & \varepsilon x_0 + \varepsilon^5 x_1 + x_2 = 0, \\ \{3, \infty\}: & \varepsilon^5 x_0 + \varepsilon^4 x_1 + x_2 = 0, \\ \{4, \infty\}: & \varepsilon^2 x_0 + \varepsilon^3 x_1 + x_2 = 0, \\ \{5, \infty\}: & \varepsilon^6 x_0 + \varepsilon^2 x_1 + x_2 = 0, \\ \{6, \infty\}: & \varepsilon^3 x_0 + \varepsilon x_1 + x_2 = 0, \\ \{0, 1\}: & -(2\varepsilon^4 + \varepsilon^3 - \varepsilon^2 + \varepsilon + 2)x_0 + (\varepsilon^3 + 1)^2 x_1 + x_2 = 0, \\ \{0, 2\}: & (\varepsilon^5 + 2\varepsilon^4 + \varepsilon^3 - \varepsilon - 1)x_0 + (\varepsilon^6 + 1)^2 x_1 + x_2 = 0, \\ \{0, 3\}: & -(3\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 + \varepsilon + 3)x_0 + (\varepsilon^2 + 1)^2 x_1 + x_2 = 0, \\ \{0, 4\}: & -(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon + 2)x_0 + (\varepsilon^5 + 1)^2 x_1 + x_2 = 0, \\ \{0, 5\}: & (\varepsilon^5 + 2\varepsilon^4 + 3\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 + \varepsilon)x_0 + (\varepsilon + 1)^2 x_1 + x_2 = 0, \\ \{0, 6\}: & (2\varepsilon^5 - \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon - 1)x_0 + (\varepsilon^4 + 1)^2 x_1 + x_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{1, 6\}: & -(\varepsilon^5 + 2\varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2 - 1)x_0 + (\varepsilon^4 + \varepsilon^3)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{2, 6\}: & (\varepsilon^4 - \varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)x_0 + (\varepsilon^4 + \varepsilon^6)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{3, 6\}: & -(2\varepsilon^5 - \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + \varepsilon + 1)x_0 + (\varepsilon^4 + \varepsilon^2)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{4, 6\}: & -(\varepsilon^5 + 2\varepsilon^4 + 3\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1)x_0 + (\varepsilon^4 + \varepsilon^5)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{5, 6\}: & (2\varepsilon^5 + 2\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1)x_0 + (\varepsilon^4 + \varepsilon)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{1, 5\}: & (3\varepsilon^5 + 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 2)x_0 + (\varepsilon^3 + \varepsilon)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{2, 5\}: & (2\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 + 3)x_0 + (\varepsilon^6 + \varepsilon)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{3, 5\}: & (\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)^2 x + (\varepsilon^2 + \varepsilon)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{4, 5\}: & (\varepsilon^5 + 3\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + 2\varepsilon + 2)x_0 + (\varepsilon^5 + \varepsilon)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{1, 4\}: & (\varepsilon^5 + \varepsilon^3 + 1)^2 x_0 + (\varepsilon^5 + \varepsilon^3)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{2, 4\}: & (\varepsilon^5 - \varepsilon^3 - 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1)x_0 + (\varepsilon^5 + \varepsilon^6)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{3, 4\}: & (-\varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 - \varepsilon^2 + 2)x_0 + (\varepsilon^5 + \varepsilon^2)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{1, 3\}: & -(\varepsilon^5 + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1)x_0 + (\varepsilon^3 + \varepsilon^2)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{2, 3\}: & -(2\varepsilon^5 + \varepsilon^4 - \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon)x_0 + (\varepsilon^6 + \varepsilon^2)^2 x_1 + x_2 = 0, \\
\{1, 2\}: & (\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1)^2 x_0 + (\varepsilon^6 + \varepsilon^3)^2 x_1 + x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Слева от каждого уравнения поставлена метка, упомянутая в замечании 6.2.

§ 10. Приложение 2

Представим здесь карту семи шестисторонних стран на торе и торическое вложение графа Хивуда (см. рис. 4).

Рис. 4

Подразумевается, что противоположные стороны данного прямоугольника отождествляются друг с другом, как это обычно делается при графическом изображении тора.

Список литературы

1. J. Grassmann, *Zur Theorie der Wendepunkte, besonders der Curven vierter Ordnung*, Thesis, Berlin, 1875.
2. E. Ciani, "I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, **13**:2 (1899), 347–373.
3. F. R. Sharpe, "Conics through inflections of self-projective quartics", *Amer. J. Math.*, **37**:1 (1915), 65–72.
4. Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Связь, М., 1979; пер. с англ.: F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*, I, II, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
5. R. A. Fisher, F. Yates, *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*, Oliver & Boyd, London–Edinburgh, 1943.
6. M. Gizatullin, "Bialgebra and geometry of plane quartics", *Asian J. Math.*, **5**:3 (2001), 387–432.
7. М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: M. Hall, *Combinatorial theory*, Blaisdell Publ., Waltham, MA–Toronto–London, 1967.
8. Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
9. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, Мир, М., 1990; пер. с англ.: J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren Math. Wiss., **290**, Springer-Verlag, New York, 1988.
10. R. D. Carmichael, *Introduction to the theory of groups of finite order*, Ginn, Boston, 1937.
11. П. С. Александров, *Комбинаторная топология*, ОГИЗ, М., 1947.
12. J. A. Todd, "A representation of the Mathieu group M_{24} as a collineation group", *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **71**:1 (1966), 199–238.

М. Х. Гизатуллин (М. Н. GIZATULLIN)
Тольяттинский государственный университет
E-mail: gizmarat@yandex.ru

Поступило в редакцию
25.06.2012
14.11.2012