Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Никулин, Кэлеровы КЗ-поверхности и решетки Нимейера. I, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 5, 109–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8016>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:47:48

УДК 512.774.4+512.774.2+512.542+512.647.2

В. В. Никулин

Кэлеровы КЗ-поверхности и решетки Нимейера. I

При использовании результатов, полученных в [1, замечание 1.14.7], уточняется связь между кэлеровыми КЗ-поверхностями и решетками Нимейера. Отмечено, что все решетки Нимейера важны для описания КЗ-поверхностей, а не только одна, которая связана с группой Матье.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: КЗ-поверхность, кэлерова поверхность, группа автоморфизмов, целочисленная квадратичная форма.

DOI: 10.4213/im8016

Посвящается И. Р. Шафаревичу к 90-летию

§ 1. Введение

Изучение конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей было начато в работах автора [2], [3] в 1976–1979 гг. Была развита их общая теория и полностью классифицированы абелевы группы (14 нетривиальных абелевых групп). Далее в [1, замечание 1.14.7] было, в частности, показано, что все конечные симплектические группы автоморфизмов КЗ-поверхностей могут быть получены из групп автоморфизмов отрицательно определенных четных унимодулярных решеток при использовании примитивных вложений в эти решетки четных отрицательно определенных решеток (см. обзор этих результатов в § 3). В силу результатов из [1] о существовании примитивных вложений четных решеток в четные унимодулярные решетки, для КЗ-поверхностей достаточно использовать отрицательно определенные четные унимодулярные решетки ранга 24. Они и являются решетками Нимейера.

В 1988 г. все конечные симплектические группы автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей были классифицированы как абстрактные группы Ш. Мукаи [4] (см. также [5]). Ш. Кондо в [6] в 1998 г. показал, что данная классификация может быть получена при использовании примитивных вложений решеток в решетки Нимейера (см. также важное дополнение Ш. Мукаи к этой работе), это подобно результатам автора в [1, замечание 1.14.7]. Недавно К. Хашимото [7] также применил аналогичные идеи использования решеток Нимейера к классификации конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей, аналогичной нашей классификации таких абелевых групп в [3].

Таким образом, теперь стало ясно, что использование отрицательно определенных четных унимодулярных решеток и решеток Нимейера очень плодотворно.

В настоящей статье мы используем идеи и результаты из работы [1, замечание 1.14.7], чтобы показать, что все 24 решетки Нимейера важны для описания кэлеровых КЗ-поверхностей, их геометрии и их конечных симплектических групп автоморфизмов. (Обычно используется решетка Нимейера с системой корней $24A_1$, связанная с группой Матье M_{24} .) С нашей точки зрения, все 24 решетки Нимейера важны для описания КЗ-поверхностей.

Мы определяем и используем *отметку* (или *маркировку*) *кэлеровой КЗ-поверхности X решеткой Нимейера*. При использовании таких отметок можно, в частности, исследовать конечные симплектические группы автоморфизмов и неособые рациональные кривые на X . В [3] было продемонстрировано, что при исследовании конечных симплектических групп автоморфизмов КЗ-поверхностей нужно рассматривать не алгебраические КЗ-поверхности, а кэлеровы КЗ-поверхности. Общая кэлерова КЗ-поверхность X имеет отрицательно определенную решетку Пикара S_X ранга $\text{rk } S_X \leq 19$. В силу результатов из [1] существует примитивное вложение решетки S_X в одну из 24-х решеток Нимейера. Используя это примитивное вложение, можно исследовать арифметику и геометрию решетки S_X и поверхности X . Оно называется *отметкой* (или *маркировкой*) *КЗ-поверхности X решеткой Нимейера*. При этом необходимы все 24 решетки Нимейера. Для кэлеровых КЗ-поверхностей X с полуотрицательно определенной или гиперболической решеткой Пикара S_X мы используем некоторую модификацию таких отметок.

В § 2 напомним результаты из работы [1] о примитивных вложениях решеток в четные унимодулярные решетки, в § 3 – классификацию решеток Нимейера и результаты из [1, замечание 1.14.7] об использовании их (и любых других четных отрицательно определенных унимодулярных решеток) для исследования групп автоморфизмов отрицательно определенных четных решеток, действующих тождественно на дискриминантные группы решеток, при помощи примитивных вложений данных решеток в четные отрицательно определенные унимодулярные решетки.

В § 4 напоминаются определения и основные результаты, связанные с кэлеровыми КЗ-поверхностями X . Используя эти результаты, мы определяем отметку $S \subset N_i$ поверхности X решеткой Нимейера N_i .

В § 5 рассматриваются приложения отметок КЗ-поверхностей X решетками Нимейера для изучения конечных симплектических групп автоморфизмов и неособых рациональных кривых на X .

В § 6 рассматриваются примеры отметок кэлеровых КЗ-поверхностей конкретными решетками Нимейера N_i , $1 \leq i \leq 23$, и их приложения. В частности, показано, что для каждой решетки Нимейера N_i , $i = 1, 2, 3, 5, \dots, 9, 11, \dots, 23$, существует кэлерова КЗ-поверхность X такая, что X может быть отмечена только решеткой Нимейера N_i (см. теорему 6.1). По-видимому, аналогичные результаты имеют место для остальных решеток Нимейера. Все решетки Нимейера важны для описания кэлеровых КЗ-поверхностей.

Мы надеемся рассмотреть другие примеры и приложения в дальнейших публикациях. Предварительный вариант данной работы был опубликован как препринт [8], где также содержатся некоторые дальнейшие результаты.

§ 2. Существование примитивного вложения четной решетки в четные унимодулярные решетки по [1]

В настоящей статье мы используем обозначения, определения и результаты о решетках (т. е. невырожденных целочисленных (над $\mathbb{Z}$) симметрических билинейных формах) из работы [1]. В частности, $\oplus$ обозначает ортогональную сумму решеток и квадратичных форм. Для простого p через $\mathbb{Z}_p$ обозначается кольцо целых p -адических чисел и через $\mathbb{Z}_p^*$ – его группа обратимых элементов.

Пусть S – решетка и $A_S = S^*/S$ – ее дискриминантная группа, q_S – ее дискриминантная квадратичная форма на A_S , где предполагается, что решетка S четна, т. е. квадрат x^2 четен для любого $x \in S$. Через $l(A_S)$ обозначается минимальное число образующих конечной абелевой группы A_S и через $|A_S|$ – ее порядок. Для простого p через $q_{S_p} = q_{S \otimes \mathbb{Z}_p}$ обозначается p -компонента формы q_S (эквивалентно, дискриминантная квадратичная форма p -адической решетки $S \otimes \mathbb{Z}_p$). Квадратичная форма на группе порядка 2 обозначается как $q_\theta^{(2)}(2)$. Через $K(q_{S_p})$ обозначается p -адическая решетка ранга $l(A_{S_p})$ с дискриминантной квадратичной формой q_{S_p} . Она единственна с точностью до изоморфизма для $p \neq 2$ и для $p = 2$, если $q_{S_2} \not\cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$. Имеет место следующая теорема, где вложение $S \subset L$ решеток называется *примитивным*, если L/S не имеет кручения.

ТЕОРЕМА 2.1 [1, теорема 1.12.2]. Пусть S – четная решетка сигнатуры $(t_{(+)}, t_{(-)})$ и $l_{(+)}, l_{(-)}$ – целые числа. Тогда существует примитивное вложение решетки S в одну из четных унимодулярных решеток сигнатуры $(l_{(+)}, l_{(-)})$, если и только если выполнены следующие условия:

- 1) $l_{(+)} - l_{(-)} \equiv 0 \pmod{8}$;
- 2) $l_{(+)} - t_{(+)} \geq 0, l_{(-)} - t_{(-)} \geq 0, l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} \geq l(A_S)$;
- 3) $(-1)^{l_{(+)} - t_{(+)}} |A_S| \equiv \det K(q_{S_p}) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$ для каждого нечетного простого p такого, что $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} = l(A_{S_p})$;
- 4) $|A_S| \equiv \pm \det K(q_{S_2}) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$, если $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} = l(A_{S_2})$ и $q_{S_2} \not\cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$.

Отметим, что если последнее неравенство в условии 2) теоремы 2.1 строгое, то не нужны условия 3) и 4), так как они автоматически выполнены. Если $q_{S_2} \cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$, то не нужно условие 4).

§ 3. Решетки Нимейера и их примитивные подрешетки

Отрицательно определенные четные унимодулярные решетки N ранга 24 называются *решетками Нимейера*. Они были классифицированы Нимейером в [9] (см. также [10, гл. 16, 18]). Все элементы с квадратом (-2) таких решеток определяют системы корней $\Delta(N)$ и порождают подрешетки $[\Delta(N)] = N^{(2)} \subset N$, которые являются ортогональными суммами неприводимых решеток корней $A_n, n \geq 1, D_m, m \geq 4$, или $E_k, k = 6, 7, 8$, с соответствующими системами корней $A_n, \mathbb{D}_m$ или $\mathbb{E}_k$. Теми же буквами $A_n, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_k$ обозначаются диаграммы Дынкина соответствующих решеток корней. Мы

фиксируем стандартные базисы из простых корней этих систем корней и решеток согласно [11] (см. далее рис. 1). Если имеется несколько неприводимых компонент, мы вводим дополнительный второй индекс, который нумерует компоненты.

Согласно [9] имеются 24 решетки Нимейера N с точностью до изоморфизма и они характеризуются их подрешетками корней. Приведем их список, где $\oplus$ обозначает ортогональную сумму:

$$\begin{aligned} N^{(2)} &= [\Delta(N)] \\ &= (1) D_{24}, (2) D_{16} \oplus E_8, (3) 3E_8, (4) A_{24}, (5) 2D_{12}, (6) A_{17} \oplus E_7, \\ &\quad (7) D_{10} \oplus 2E_7, (8) A_{15} \oplus D_9, (9) 3D_8, (10) 2A_{12}, (11) A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6, \\ &\quad (12) 4E_6, (13) 2A_9 \oplus D_6, (14) 4D_6, (15) 3A_8, (16) 2A_7 \oplus 2D_5, (17) 4A_6, \\ &\quad (18) 4A_5 \oplus D_4, (19) 6D_4, (20) 6A_4, (21) 8A_3, (22) 12A_2, (23) 24A_1, \end{aligned}$$

который дает 23 решетки Нимейера N_i , где i указано в скобках; последней является *решетка Лича* (24) с $N^{(2)} = \{0\}$, которая не имеет корней. Далее $N(R)$ обозначает решетку Нимейера с решеткой корней R .

Напомним, что базис $P(N)$ из простых корней решетки корней $[\Delta(N)]$ определяется с точностью до группы отражений $W(N)$, которая порождена отражениями $s_\delta: x \rightarrow x + (x \cdot \delta)\delta$, $x \in N$, в корнях $\delta \in \Delta(N)$. Через $\Gamma(P(N))$ обозначается его диаграмма Дынкина. Пусть $A(N) \subset O(N)$ – группа симметрий фиксированного базиса $P(N)$. Таким образом, $g \in A(N)$, если и только если $g(P(N)) = P(N)$. Тогда имеется полупрямое произведение

$$O(N) = A(N) \ltimes W(N)$$

для группы автоморфизмов решетки N . Таким образом, базис $P(N)$ эквивалентен выбору фундаментальной камеры для $W(N)$, и $A(N)$ – группа симметрий данной фундаментальной камеры.

Мы обозначаем через $\mathcal{N}$ несвязное объединение всех 24-х решеток Нимейера N_i , $i = 1, 2, \dots, 24$, с их отождествленными нулями. Естественно, $\mathcal{N}_i = N_i \subset \mathcal{N}$ обозначает соответствующую решетку Нимейера этого множества, которая называется *компонентой Нимейера* множества $\mathcal{N}$. Если K – решетка, то вложение $K \subset \mathcal{N}$ означает вложение решетки K в одну из решеток $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}$ как подрешетки. Если $K \neq \{0\}$, то $\mathcal{N}_i$ определена единственным образом и называется *компонентой* вложения $K \subset \mathcal{N}$, которое называется *примитивным*, если $\mathcal{N}_i/K$ не имеет кручения.

Далее мы фиксируем базисы $P(\mathcal{N}_i)$ множеств $\Delta(\mathcal{N}_i)$ всех 24-х компонент $\mathcal{N}_i$ множества $\mathcal{N}$. Прямое произведение

$$A(\mathcal{N}) = \prod_{i=1}^{24} A(\mathcal{N}_i)$$

естественным образом действует на $\mathcal{N}$. По определению $A(\mathcal{N}_i)$ действует как $A(N_i)$ на компоненту $\mathcal{N}_i = N_i$ и тождественно на все другие компоненты $\mathcal{N}_j$, $j \neq i$.

Поскольку решетки Нимейера имеют сигнатуру $(0, 24)$, из теоремы 2.1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1 (следствие теоремы 1.12.2 из [1]). *Четная решетка S имеет примитивное вложение в $\mathcal{N}$ (эквивалентно, в одну из решеток Нимейера), если и только если выполнены следующие условия:*

- 2) S отрицательно определена и $\text{rk } S + l(A_S) \leq 24$;
- 3) $|A_S| \equiv \det K(q_{S_p}) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$ для каждого простого нечетного p такого, что $\text{rk } S + l(A_{S_p}) = 24$;
- 4) $|A_S| \equiv \pm \det K(q_{S_2}) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$, если $\text{rk } S + l(A_{S_2}) = 24$ и $q_{S_2} \not\equiv q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$.

Теорема 3.1 дает простые условия для решетки S , когда она может рассматриваться как примитивная подрешетка одной из решеток Нимейера (эквивалентно, $\mathcal{N}$). Мы можем использовать это для получения важной информации об S и всех примитивных подрешетках решеток Нимейера. Далее мы применим эти результаты к решеткам Пикара кэлеровых КЗ-поверхностей.

Для отрицательно определенной решетки S мы обозначаем через $H(S)$ ядро естественного гомоморфизма

$$\pi: O(S) \rightarrow O(q_S).$$

Эквивалентно, автоморфизм $\varphi \in O(S)$ решетки S принадлежит подгруппе $H(S)$, если и только если φ является тождественным на дискриминантной группе S^*/S .

В [1, замечание 1.14.7] было отмечено, что π имеет нетривиальное ядро, если и только если решетка S содержит некоторые исключительные подрешетки. Эти исключительные подрешетки могут быть найдены из отрицательно определенных четных унимодулярных решеток и их групп автоморфизмов. Заметим, что для унимодулярной решетки L имеем $H(L) = O(L)$. Для изучения $H(S)$ в случае отрицательно определенных четных решеток S в [1, замечание 1.14.7] было предложено использовать примитивные вложения S в отрицательно определенные четные унимодулярные решетки. Например, для решеток S , удовлетворяющих теореме 3.1, можно использовать примитивные вложения в решетки Нимейера (эквивалентно, в $\mathcal{N}$). Приведем данные результаты из [1, замечание 1.14.7].

Пусть S – четная отрицательно определенная решетка и $\Delta(S)$ – множество корней $\delta \in S$ с квадратом $\delta^2 = -2$. Легко видеть, что отражение s_δ принадлежит $H(S)$. Таким образом, $[\delta] = \langle -2 \rangle$ – первый пример исключительной подрешетки. Группа Вейля $W(S)$, порожденная отражениями во всех элементах из $\Delta(S)$, дает нормальную подгруппу группы $H(S)$. Выберем базис $P(S)$ системы корней $\Delta(S)$ (эквивалентно, фундаментальную камеру для группы Вейля $W(S)$). Пусть

$$A(S) = \{\varphi \in H(S) \mid \varphi(P(S)) = P(S)\}$$

(эквивалентно, $A(S) \subset H(S)$ – группа симметрий фундаментальной камеры). Тогда $H(S) = A(S) \ltimes W(S)$ – полупрямое произведение. Пусть

$$\mathcal{L}(S) = S_{A(S)} = (S^{A(S)})^\perp_S$$

– ортогональное дополнение в S к неподвижной части $S^{A(S)}$ действия $A(S)$ в S . Очевидно, подрешетка $\mathcal{L}(S) = S_{A(S)} \subset S$ определена однозначно с точностью

до действия группы $W(S)$. Она называется *ковариантной подрешеткой решетки S для $A(S)$* .

В [1, замечание 1.14.7, предложение 1.14.8] показано, что примитивная подрешетка $\mathcal{L}(S)$ удовлетворяет следующим условиям: $\mathcal{L}(S)^{A(S)} = \{0\}$ (это очевидно), $\mathcal{L}(S)$ не имеет корней с квадратом (-2) , $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{L}(S)$ и $A(\mathcal{L}(S)) = A(S)|\mathcal{L}(S)$. Таким образом, $H(\mathcal{L}(S)) = A(\mathcal{L}(S))$, и $A(\mathcal{L}(S))$ определяет $A(S)$: нужно продолжить $A(\mathcal{L}(S))$ тождественно на ортогональное дополнение к $\mathcal{L}(S)$ в S .

Подрешетка $\mathcal{L}(S) = S_{A(S)}$ была названа в [1, замечание 1.14.7] *подрешеткой типа Лича решетки S* . Таким образом, группа $H(S)$ и ее естественные подгруппы $W(S)$ и $A(S)$ полностью определяются базисом $P(S)$ и подрешеткой типа Лича $\mathcal{L}(S)$. Действительно, $W(S)$ порождена отражениями в $P(S)$, и $A(S) = A(\mathcal{L}(S))$, если продолжить $A(\mathcal{L}(S))$ тождественно на ортогональное дополнение $\mathcal{L}(S)^\perp_S$.

Предположим теперь, что $S \subset N_i$ – примитивная подрешетка одной из решеток Нимейера (или любой другой отрицательно определенной четной унимодулярной решетки). Тогда, заменяя S на $w(S)$, где $w \in W(N_i)$, можно предполагать, что $P(S)$ – подмножество в $P(N_i)$. Далее мы всегда предполагаем, что примитивное вложение $S \subset N_i$ удовлетворяет следующему условию:

$$P(S) = S \cap P(N_i) \quad \text{является базисом для } \Delta(S). \quad (3.1)$$

Тогда, продолжая $A(S)$ тождественно на $S_{N_i}^\perp$ (это возможно, так как группа $A(S)$ тождественна на S^*/S), получаем подгруппу группы $A(N_i)$. Отсюда следует, что

$$A(S) = \{\varphi|S \mid \varphi \in A(N_i) \text{ и } \varphi|S_{N_i}^\perp \text{ тождественно}\}. \quad (3.2)$$

Также $A(S) \subset A(N_i)$ и $P(S) \subset P(N_i)$ удовлетворяют очевидному важному условию:

$$P(S) \text{ инвариантно относительно } A(S).$$

Поскольку для решеток Нимейера N_i базисы $P(N_i)$, их графы $\Gamma(P(N_i))$ и группы $A(N_i)$ известны, получаем эффективный способ построения примитивных подрешеток $S \subset N_i$ с различными графами $\Gamma(P(S))$ и группами $A(S)$.

ПРИМЕР 3.1. Решетки Нимейера $N = N_1 = N(D_{24})$, $N_2 = N(D_{16} \oplus E_8)$ имеют тривиальные группы $A(N)$ (см. [10, гл. 16]). Отсюда следует, что примитивные подрешетки $S \subset N$ имеют тривиальные группы $A(S)$ и тривиальные подрешетки типа Лича $\mathcal{L}(S)$.

Предположим, что граф $\Gamma(S^{(2)})$ имеет подграф $\mathbb{D}_n$, где $n \geq 13$. Тогда в силу классификации решеток Нимейера решетка S может иметь примитивное вложение только в решетки Нимейера $N(D_{24})$ и $N(D_{16} \oplus E_8)$ и группа $A(S)$ также тривиальна, если решетка S удовлетворяет теореме 3.1.

Мы рассмотрим другие примеры далее, в § 5.

§ 4. Дополнительные отметки кэлеровых КЗ-поверхностей решетками Нимейера

Рассмотрим кэлеровы КЗ-поверхности. Напомним, что они являются компактными комплексными поверхностями X такими, что X односвязна и имеет 2-мерную голоморфную дифференциальную форму $\omega_X \in H^{2,0}(X)$ такую, что ω_X не имеет нулей. Можно рассматривать ω_X как комплексную форму объема (о кэлеровых КЗ-поверхностях см. [12, гл. 9] и [13]).

Известно, что решетка когомологий $H^2(X, \mathbb{Z})$ с формой пересечений является четной унимодулярной решеткой сигнатуры $(3, 19)$. Она не имеет кручения. Все четные унимодулярные решетки сигнатуры $(3, 19)$ изоморфны (то же самое имеет место для всех неопределенных четных унимодулярных решеток одной сигнатуры). Поверхность X имеет разложение Ходжа

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^{2,0}(X) + H^{1,1}(X) + H^{0,2}(X),$$

где $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\omega_X$ является одномерным, $H^{0,2}(X) = \overline{H^{2,0}(X)}$, $H^{1,1}(X) = \overline{H^{1,1}(X)}$ является 20-мерным. Отсюда следует, что решетка Пикара

$$S_X = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$$

поверхности X является подрешеткой гиперболического вещественного подпространства, $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \subset H^{1,1}(X)$, сигнатуры $(1, 19)$. Поэтому решетка Пикара S_X является примитивной подрешеткой решетки $H^2(X, \mathbb{Z})$ и удовлетворяет одному из следующих условий:

- (а) является отрицательно определенной ранга $0 \leq \text{rk } S_X \leq 19$;
- (б) полуотрицательно определена с одномерным ядром и $1 \leq \text{rk } S_X \leq 19$;
- (с) гиперболична (т.е. имеет сигнатуру $(1, \text{rk } S_X - 1)$) и $1 \leq \text{rk } S_X \leq 20$ (эквивалентно, когда поверхность X алгебраична).

Далее $\rho(X) = \text{rk } S_X$ – число Пикара поверхности X .

Пусть $L_{\text{КЗ}}$ – абстрактная четная унимодулярная решетка сигнатуры $(3, 19)$. Таким образом, решетка Пикара S_X кэлеровой КЗ-поверхности X имеет примитивное вложение $S_X \subset L_{\text{КЗ}}$ и удовлетворяет одному из условий (а), (б) или (с). В силу эпиморфности отображения периодов для КЗ-поверхностей [14]–[16] решетки Пикара S_X КЗ-поверхностей характеризуются этими условиями. Четная решетка, которая либо отрицательно определена, либо полуотрицательно определена с одномерным ядром, либо гиперболична, является решеткой Пикара одной из кэлеровых КЗ-поверхностей, если и только если она имеет примитивное вложение в решетку $L_{\text{КЗ}}$.

Из [1, теорема 2.1] получаем полное описание решеток Пикара кэлеровых КЗ-поверхностей.

ТЕОРЕМА 4.1 (следствие теоремы 1.12.2 из [1]). *Четная отрицательно определенная решетка M изоморфна решетке Пикара S_X какой-то кэлеровой КЗ-поверхности X (эквивалентно, M имеет примитивное вложение в $L_{\text{КЗ}}$), если и только если:*

- 2) $\text{rk } M \leq 19$ и $\text{rk } M + l(A_M) \leq 22$;
- 3) $-|A_M| \equiv \det K(q_{M_p}) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$ для каждого простого нечетного p такового, что $\text{rk } M + l(A_{M_p}) = 22$;

4) $|A_M| \equiv \pm \det K(q_{M_2}) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$, если $\text{rk } M + l(A_{M_2}) = 22$ и $q_{M_2} \not\equiv q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$.

ТЕОРЕМА 4.2 (следствие теоремы 1.12.2 из [1]). Четная полуотрицательно определенная решетка M с одномерным ядром $\text{Ker } M$ изоморфна решетке Пикара S_X одной из кэлеровых КЗ-поверхностей X (эквивалентно, M имеет примитивное вложение в L_{K3}), если и только если для $\widetilde{M} = M/\text{Ker } M$ выполнены условия:

2) $\text{rk } \widetilde{M} \leq 18$ и $\text{rk } \widetilde{M} + l(A_{\widetilde{M}}) \leq 20$;

3) $|A_{\widetilde{M}}| \equiv \det K(q_{\widetilde{M}_p}) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$ для каждого простого нечетного p такого, что $\text{rk } \widetilde{M} + l(A_{\widetilde{M}_p}) = 20$;

4) $|A_{\widetilde{M}}| \equiv \pm \det K(q_{\widetilde{M}_2}) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$, если $\text{rk } \widetilde{M} + l(A_{\widetilde{M}_2}) = 20$ и $q_{\widetilde{M}_2} \not\equiv q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$.

ТЕОРЕМА 4.3 (следствие теоремы 1.12.2 из [1]). Четная гиперболическая решетка M (т. е. M имеет сигнатуру $(1, \text{rk } M - 1)$) изоморфна решетке Пикара S_X одной из алгебраических КЗ-поверхностей X над $\mathbb{C}$ (эквивалентно, M имеет примитивное вложение в L_{K3}), если и только если выполнены условия:

2) $\text{rk } M \leq 20$ и $\text{rk } M + l(A_M) \leq 22$;

3) $|A_M| \equiv \det K(q_{M_p}) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$ для каждого нечетного простого p такого, что $\text{rk } M + l(A_{M_p}) = 22$;

4) $|A_M| \equiv \pm \det K(q_{M_2}) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$, если $\text{rk } M + l(A_{M_2}) = 22$ и $q_{M_2} \not\equiv q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$.

Напомним определение области периодов $\widetilde{\Omega}$ кэлеровых КЗ-поверхностей (см. [13]). Фиксируем четную унимодулярную решетку L_{K3} сигнатуры $(3, 19)$. Область $\widetilde{\Omega}$ состоит из всех троек

$$(H^{2,0}, V^+, P). \quad (4.1)$$

Здесь $H^{2,0} \subset L_{K3} \otimes \mathbb{C}$ — одномерное комплексное линейное подпространство, удовлетворяющее условиям

$$\omega \cdot \omega = 0, \quad \omega \cdot \bar{\omega} > 0 \quad (4.2)$$

для любого $0 \neq \omega \in H^{2,0}$ (симметрическая билинейная форма на L_{K3} продолжается до $\mathbb{C}$ -билинейной формы на $L_{K3} \otimes \mathbb{C}$). Такие $H^{2,0} \subset L_{K3} \otimes \mathbb{C}$ определяют 20-мерное однородное комплексное многообразие, обозначаемое Ω .

Для фиксированного $H^{2,0} \subset L_{K3} \otimes \mathbb{C}$ из Ω через $H_{\mathbb{R}}^{1,1}$ обозначается ортогональное дополнение к $H^{2,0}$ в $L_{K3} \otimes \mathbb{R}$, которое является гиперболической формой сигнатуры $(1, 19)$. Оно содержит световой конус

$$V = \{x \in H_{\mathbb{R}}^{1,1} \mid x^2 > 0\}. \quad (4.3)$$

Через V^+ обозначается одна из двух пол (т. е. связных компонент) конуса V . Она определяет гиперболическое пространство $\mathcal{H}^+ = V^+/\mathbb{R}^+$, являющееся проецивизацией полу конуса V^+ .

Пусть $H_{\mathbb{Z}}^{1,1} = H_{\mathbb{R}}^{1,1} \cap L_{K3}$. Тогда $H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ является решеткой, которая либо отрицательно определена, либо полуотрицательно определена с одномерным ядром,

либо гиперболична. Пусть $\Delta(H_{\mathbb{Z}}^{1,1})$ – множество всех элементов с квадратом (-2) этой решетки. Группа $W(H_{\mathbb{Z}}^{1,1})$, порожденная отражениями во всех элементах из $\Delta(H_{\mathbb{Z}}^{1,1})$, является дискретной группой отражений в V^+ и $\mathcal{H}^+$. Через P обозначается множество всех перпендикулярных векторов из $\Delta(H_{\mathbb{Z}}^{1,1})$ к одной из фундаментальных камер $\mathcal{M}$ этой группы отражений, которые направлены наружу данной камеры. Таким образом,

$$\mathcal{M} = \{x \in V^+ \mid x \cdot P \geq 0\}, \quad (4.4)$$

и каждая грань коразмерности один многогранника $\mathcal{M}$ перпендикулярна в точности одному $\delta \in P$. Обратно, каждый элемент $\delta \in P$ перпендикулярен грани коразмерности один многогранника $\mathcal{M}$, кратко $P = P(\mathcal{M})$.

Множество троек (4.1) обозначается как $\tilde{\Omega}$. Оно является нехаусдорфовым 20-мерным комплексным многообразием, которое этально накрывает Ω .

Напомним, что каждой кэлеровой КЗ-поверхности X сопоставляется каноническая тройка

$$(H^{2,0}(X), V^+(X), P(X)) \quad (4.5)$$

(детали см. в [13]). Здесь $H^{2,0}(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ уже определялось и рассматривалось, а $V^+(X)$ – пола светового конуса

$$V(X) = \{x \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \mid x^2 > 0\}, \quad (4.6)$$

содержащая кэлеров класс поверхности X , и

$$P(X) \subset S_X \quad (4.7)$$

– множество классов всех неособых рациональных кривых на X , которые имеют квадрат (-2) . Каждая исключительная кривая на X (т.е. неприводимая комплексная кривая $C \subset X$ такая, что $C^2 < 0$) – одна из них. Они определяют nef-конус

$$\text{NEF}(X) = \{x \in \overline{V^+(X)} \mid x \cdot P(X) \geq 0\},$$

который является фундаментальной камерой для группы отражений $W(S_X)$, и $P(X)$ – множество перпендикулярных векторов к граням коразмерности один конуса $\text{NEF}(X)$.

Напомним, что отметка кэлеровой КЗ-поверхности X – это изоморфизм решеток

$$\alpha: H^2(X, \mathbb{Z}) \cong L_{K3}. \quad (4.8)$$

Пара (X, α) называется *отмеченной кэлеровой КЗ-поверхностью*.

Взяв

$$\alpha(H^{2,0}(X), V^+(X), P(X)) = ((\alpha \otimes \mathbb{C})(H^{2,0}(X)), (\alpha \otimes \mathbb{R})(V^+(X)), \alpha(P(X))) \in \tilde{\Omega}, \quad (4.9)$$

получаем *отображение периодов* α из пространства модулей отмеченных кэлеровых КЗ-поверхностей в область периодов $\tilde{\Omega}$ отмеченных кэлеровых КЗ-поверхностей.

В силу глобальной теоремы Торелли для кэлеровых КЗ-поверхностей (см. [17] для алгебраического случая и [13]) и эпиморфности отображения периодов

для кэлеровых КЗ-поверхностей (см. [14] для алгебраического случая и [15], [16]) отображение периодов α дает изоморфизм комплексных пространств.

Мы хотим определить дополнительную отметку кэлеровых КЗ-поверхностей решетками Нимейера N_i (или $\mathcal{N}$). Определим соответствующую область периодов $\tilde{\Omega}_{\mathcal{N}}$, которая состоит из четверок

$$(H^{2,0}, V^+, P, \tau: S \subset N_i), \quad (4.10)$$

где тройки $(H^{2,0}, V^+, P) \in \tilde{\Omega}$ уже были определены.

Теперь определим $\tau: S \subset N_i$. Здесь $S \subset H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ – максимальная отрицательно определенная подрешетка в $H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$. Таким образом, $S = H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$, если $H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ отрицательно определена; $H_{\mathbb{Z}}^{1,1} = S \oplus \mathbb{Z}c$, если $H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ имеет одномерное ядро $\mathbb{Z}c$; и $S \subset H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ – отрицательно определенная подрешетка в $H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ такая, что $(S)_{H_{\mathbb{Z}}^{1,1}}^{\perp} = \mathbb{Z}h$, где $h^2 > 0$, если $H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ гиперболична. Для параболического случая, когда S имеет одномерное ядро $\mathbb{Z}c$, мы дополнительно требуем, чтобы $P \cap S = P(S)$. Для гиперболического случая мы дополнительно требуем то, что h является не-элементом, т. е. $h \in V^+$ и $h \cdot P \geq 0$. Эквивалентно, h принадлежит фундаментальной камере для $W(H_{\mathbb{R}}^{1,1})$, определяемой V^+ и P . Здесь $\tau: S \subset N_i$ – примитивное вложение решетки S в одну из решеток Нимейера N_i (эквивалентно, в $\mathcal{N}$) такое, что $\tau(P \cap S) \subset P(N_i)$. Таким образом, τ можно рассматривать как дополнительную отметку решетками Нимейера. Поскольку решетка S отрицательно определена и имеет примитивное вложение в $L_{\text{КЗ}}$, она удовлетворяет теореме 4.1. В частности, $\text{rk } S \leq 19$ и $\text{rk } S + l(A_S) \leq 22$. Тогда $\text{rk } S + l(A_S) < 24$. Таким образом, S удовлетворяет теореме 3.1 и имеет примитивное вложение в одну из 24-х решеток Нимейера N_i . То же самое рассуждение показывает, что $S \oplus A_1$ удовлетворяет теореме 3.1. Отсюда следует, что S имеет примитивное вложение в одну из 23-х решеток Нимейера с непустым множеством корней. Это – важный трюк Кондо [6], который позволяет избежать сложной решетки Лича. Отсюда следует, что

$$\tau: \tilde{\Omega}_{\mathcal{N}} \rightarrow \tilde{\Omega}$$

является естественным сюръективным “накрытием” пространства $\tilde{\Omega}$. К сожалению, мы не можем утверждать, что $\tilde{\Omega}_{\mathcal{N}}$ является многообразием. Мы можем только утверждать, что оно является топологическим пространством с открытыми множествами, являющимися прообразами открытых множеств из $\tilde{\Omega}$, и что τ взаимно однозначно над общими точками $\tilde{\Omega}$, где $H_{\mathbb{Z}}^{1,1} = \{0\}$, поскольку мы отождествляем в $\mathcal{N}$ нули всех решеток Нимейера N_i , $i = 1, \dots, 24$. Такие точки из $\tilde{\Omega}$ образуют дополнение к бесконечному множеству дивизоров в $\tilde{\Omega}$. Таким образом, мы можем только утверждать, что $\tilde{\Omega}_{\mathcal{N}}$ подобно многообразию над этими точками $\tilde{\Omega}$. Кроме того, τ имеет конечные слои над точками $\tilde{\Omega}$, где решетка $H_{\mathbb{Z}}^{1,1}$ отрицательно определена. Таким образом, $\tilde{\Omega}_{\mathcal{N}}$ очень похоже на многообразие над этими точками. Над другими точками пространства $\tilde{\Omega}$ отображение τ имеет счетные слои в общем случае.

Подобным образом мы вводим дополнительную отметку для кэлеровых КЗ-поверхностей X . Это вложение

$$\tau: S \subset \mathcal{N}. \quad (4.11)$$

Здесь $S \subset S_X$ – максимальная отрицательно определенная подрешетка, т.е. $S = S_X$, если S_X отрицательно определена, кроме того, $S_X = S \oplus \mathbb{Z}c$, если S_X является полуотрицательно определенной с одномерным ядром, порожденным классом c эллиптической кривой C на X , и $S \cap P(X) = P(S)$. Если X алгебраична, то $S = h^\perp_{S_X}$, где $h \in S_X$ примитивен, $h^2 > 0$ и h является неф-элементом, т.е. $h \cdot D \geq 0$ для каждого эффективного дивизора D на X . Здесь $\tau: S \subset \mathcal{N}$ является примитивным вложением решеток S в одну из 24-х решеток Нимейера N_i таким, что $P(X) \cap S = P(S) \subset P(N_i)$.

Стандартная отметка $\alpha: H^2(X, \mathbb{Z}) \cong L_{K3}$ кэлеровой КЗ-поверхности X с дополнительной отметкой $\tau: S \subset \mathcal{N}$ решетками Нимейера дает периоды $\alpha(X, \tau) \in \tilde{\Omega}_{\mathcal{N}}$. Они суть

$$\begin{aligned} & \alpha(H^{2,0}(X), V^+(X), P(X), \tau: S \subset \mathcal{N}) \\ &= ((\alpha \otimes \mathbb{C})(H^{2,0}(X)), (\alpha \otimes \mathbb{R})(V^+(X)), \alpha(P(X)), \tau\alpha^{-1}: \alpha(S) \subset \mathcal{N}) \in \tilde{\Omega}_{\mathcal{N}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В силу глобальной теоремы Торелли и эпиморфности отображения периодов для кэлеровых КЗ-поверхностей (см. вышеприведенные ссылки) получаем изоморфизм пространства модулей кэлеровых КЗ-поверхностей X с дополнительной отметкой решетками Нимейера и их пространства периодов $\tilde{\Omega}_{\mathcal{N}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В силу приведенных выше определений и рассуждений, для построения кэлеровой КЗ-поверхности X с отметкой $\tau: S \subset N_i$ решеткой Нимейера N_i необходимо следовать дальнейшим шагам.

(а) Проверяем, что решетка S удовлетворяет теореме 4.1 (эквивалентно, существует примитивное вложение $S \subset L_{K3}$).

(б) Выбираем примитивное вложение $S \subset L_{K3}$.

(с1) Для построения X с отрицательно определенной решеткой S_X выбираем достаточно общее $H^{2,0} \subset (S)^\perp_{L_{K3}} \otimes \mathbb{C}$ такое, что $H^{1,1}_{\mathbb{Z}} = S$. Выбираем $V^+ \subset H^{1,1}_{\mathbb{R}}$ и полагаем, что $P = P(S) = P(N_i) \cap S$. Тогда $(H^{2,0}, V^+, P, \tau: S \subset N_i)$ дает периоды отмеченной кэлеровой КЗ-поверхности (X, α) с $S_X = \alpha^{-1}(S)$ и отметкой $\tau\alpha: S_X = \alpha^{-1}(S) \subset N_i$ решеткой Нимейера N_i . Имеем $P(X) = \alpha^{-1}(P(N_i) \cap S)$.

(с2) Для построения X с полуотрицательно определенной решеткой S_X проверяем, что $S \subset L_{K3}$ удовлетворяет теореме 4.2. Тогда существует примитивный ненулевой элемент $c \in (S)^\perp_{L_{K3}}$ такой, что $S \oplus \mathbb{Z}c \subset L_{K3}$ является примитивной подрешеткой с ядром $\mathbb{Z}c$. Выбираем достаточно общее $H^{2,0} \subset (S \oplus \mathbb{Z}c)^\perp_{L_{K3}} \otimes \mathbb{C}$ такое, что $H^{1,1}_{\mathbb{Z}} = S \oplus \mathbb{Z}c$. Выбираем $V^+ \subset H^{1,1}_{\mathbb{R}}$ такое, что $c \in \overline{V^+}$. Берем $P = P(S) = P(N_i) \cap S$, для каждой связной компоненты P_i , $i = 1, 2, \dots, k$, диаграммы Дынкина множества P берем максимальный корень δ_i и обозначаем $p_i = c - \delta_i$. Тогда

$$\tilde{P} = P \cup \{p_1, p_2, \dots, p_k\} = P(S \oplus \mathbb{Z}c)$$

и $(H^{2,0}, V^+, \tilde{P}, \tau: S \subset N_i)$ дает периоды отмеченной кэлеровой КЗ-поверхности (X, α) с $S_X = \alpha^{-1}(S \oplus \mathbb{Z}c)$ и отметкой $\tau\alpha: \alpha^{-1}(S) \subset N_i$ решеткой Нимейера N_i . Имеем $P(X) = \alpha^{-1}(\tilde{P})$.

(с3) Для построения X с гиперболической решеткой S_X (т.е. X алгебраична) берем примитивный элемент $h \in (S)_{L_{K3}}^\perp$ такой, что $h^2 > 0$ (он, очевидно, существует). Тогда примитивная подрешетка $\tilde{S} = [S \oplus \mathbb{Z}h]_{\text{pr}}$ в L_{K3} , порожденная S и h , гиперболична. Выбираем достаточно общий $H^{2,0} \subset (\tilde{S})_{L_{K3}}^\perp \otimes \mathbb{C}$ такой, что $H_{\mathbb{Z}}^{1,1} = \tilde{S}$, и $V^+ \subset H_{\mathbb{R}}^{1,1}$ такой, что $h \in V^+$. Берем $P = P(S) = P(N_i) \cap S$ и фундаментальную камеру $\mathcal{M}$ для $W(\tilde{S})$ такую, что $h \in \mathcal{M}$ и $P \subset P(\mathcal{M})$, где $P(\mathcal{M})$ – множество перпендикулярных векторов с квадратом (-2) к граням коразмерности один многогранника $\mathcal{M}$, направленных наружу от $\mathcal{M}$. Тогда $(H^{2,0}, V^+, P(\mathcal{M}), \tau: S \subset N_i)$ дает периоды отмеченной алгебраической КЗ-поверхности (X, α) с $S_X = \alpha^{-1}(\tilde{S})$, пef-элементом $\alpha^{-1}(h)$, $P(X) = \alpha^{-1}(P(\mathcal{M}))$, и отметкой $\tau\alpha: \alpha^{-1}(S) \subset N_i$ решеткой Нимейера N_i . Имеем $P(X) = \alpha^{-1}(P(\mathcal{M}))$, и линейная система $|nh|$, $n > 0$, стягивает неособые рациональные кривые с классами из $\alpha^{-1}(S \cap P(N_i))$ и только эти кривые.

§ 5. Приложения отметок решетками Нимейера

Пусть X – кэлерова КЗ-поверхность с отметкой $\tau: S \subset N_i$ решеткой Нимейера N_i . По условиям, налагаемым на τ , согласно нашим рассмотрениям в § 3, использующим результаты [1, замечание 1.14.7], получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть X – кэлерова КЗ-поверхность с отметкой $\tau: S \subset N_i$ решеткой Нимейера N_i . Тогда $P(X) \cap S = P(S)$ – базис системы корней $\Delta(S)$ и $P(S) = P(X) \cap S$ – подмножество множества $P(N_i)$. Таким образом, диаграмма Дынкина $\Gamma(P(X) \cap S)$ дает диаграмму Дынкина $\Gamma(P(S))$ и поддиаграмму диаграммы Дынкина $\Gamma(P(N_i))$.*

В частности, если S_X отрицательно определена, то $S = S_X$ и $P(X) = P(N_i) \cap S$ дает множество классов всех неособых рациональных кривых на X . Если X алгебраична, то $P(X) \cap S = P(S) = P(N_i) \cap S$ дает множество классов всех неособых рациональных кривых на X , которые стягиваются линейной системой $|nh|$ для $n > 0$, где h – примитивный пef-элемент в S_X , порождающий ортогональное дополнение к S в S_X .

Отсюда следует, что для кэлеровых КЗ-поверхностей X отметки решетками Нимейера дают описание множеств неособых рациональных кривых на X таких, что их классы содержатся в $S \subset S_X$.

Напомним, что автоморфизм φ кэлеровой КЗ-поверхности X называется *симплектическим*, если φ сохраняет голоморфную форму ω_X , т.е. $\varphi^*(\omega_X) = \omega_X$. Это эквивалентно (см. [3]) тому, что φ тождествен на трансцендентной части

$$H^2(X, \mathbb{Z})/S_X. \quad (5.1)$$

Известно (см. [17] и [13]; формально это следует из глобальной теоремы Торелли для КЗ-поверхностей), что ядро действия группы $\text{Aut } X$ в $H^2(X, \mathbb{Z})$ тривиально. Подгруппа группы $\text{Aut } X$ называется *симплектической*, если все ее элементы симплектичны. Обозначим через $(\text{Aut } X)_0$ группу всех симплектических автоморфизмов поверхности X .

Для отметки $\tau: S \subset N_i$ поверхности X решеткой Нимейера N_i мы будем рассматривать группу автоморфизмов

$$\text{Aut}(X, S)_0 = \{f \in (\text{Aut } X)_0 \mid f(S) = S \text{ и } f|_{S_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp} \text{ тождественно}\}. \quad (5.2)$$

Если S_X отрицательно определена или гиперболична, то дополнительное условие в (5.2), что $f|_{S_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp}$ тождественно, следует из других условий. Во всех случаях определение $\text{Aut}(X, S)_0$ эквивалентно

$$\text{Aut}(X, S)_0 = \{f \in \text{Aut } X \mid f(S) = S \text{ и } f|_{S_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp} \text{ тождественно}\}. \quad (5.3)$$

Согласно [1, предложение 1.5.1] автоморфизм $\varphi \in O(S)$ может быть продолжен до автоморфизма из $O(H^2(X, \mathbb{Z}))$, тождественного на $S_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp$, если и только если φ является тождественным на $A_S = S^*/S$. По глобальной теореме Торелли для КЗ-поверхностей (см. [17], [13]) имеем $\varphi = f^*$ для некоторого $f \in \text{Aut } X$. Тогда $f \in (\text{Aut } X)_0$ в силу (5.1). Далее мы отождествляем группу $\text{Aut}(X, S)_0$ с ее действием в S . Тогда из наших рассмотрений в § 3, которые вытекают из [1, замечание 1.14.7], получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть X – кэлерова КЗ-поверхность и $S \subset N_i$ – ее отметка решеткой Нимейера N_i , $i = 1, \dots, 24$. Пусть $\text{Aut}(X, S)_0$ – симплектическая группа автоморфизмов X , которая состоит из всех автоморфизмов X , тождественных на $S_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp$ (все они симплектичны). Тогда действие группы $\text{Aut}(X, S)_0$ в S отождествляет ее с подгруппой $A(S) \subset A(N_i)$,

$$A(S) = \{\varphi \in A(N_i) \mid \varphi|_{S_{N_i}^\perp} \text{ тождественно}\}. \quad (5.4)$$

Имеем

$$\text{Aut}(X, S)_0 = A(S)|S.$$

Подрешетка типа Лича $\mathcal{L}(S) \subset S$ (или коинвариантная подрешетка) имеет вид

$$\mathcal{L}(S) = S_{A(S)} = (S^{A(S)})_S^\perp = ((N_i)^{A(S)})_{N_i}^\perp. \quad (5.5)$$

Пусть $P(X) \cap S$ – множество классов всех неособых рациональных кривых на X , содержащихся в S . Тогда $P(X) \cap S$ инвариантно относительно $A(S)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В силу теорем 5.1, 5.2 построение кэлеровых КЗ-поверхностей со всеми возможными отметками $S \subset N_i$ (далее мы будем опускать τ) и со всеми возможными $P(X) \cap S$ и $\text{Aut}(X, S)_0$ заключается в следующих шагах.

(а) Для решетки Нимейера N_i выбираем подгруппу $A \subset A(N_i)$ такую, что $\mathcal{L} = (N_i)_A = ((N_i)^A)_{N_i}^\perp$ удовлетворяет теореме 4.1 (эквивалентно, существует примитивное вложение $\mathcal{L} \subset L_{\text{КЗ}}$). Далее мы называем такие подгруппы KahKЗ-подгруппами (т.е. *подгруппами кэлеровых КЗ-поверхностей*). Пусть $\text{Clos}(A) \subset A(N_i)$ (мы используем обозначение из [7]) – максимальная подгруппа в $A(N_i)$ с той же самой коинвариантной подрешеткой $\mathcal{L} = (N_i)_A = ((N_i)^A)_{N_i}^\perp$. Такие и только такие подгруппы $\text{Clos}(A)$ соответствуют полным симплектическим группам автоморфизмов $\text{Aut}(X, S)_0$ кэлеровых КЗ-поверхностей, которые отмечаются решеткой N_i . Подгруппа A может быть только собственной подгруппой, $A \subset \text{Clos}(A) = \text{Aut}(X, S)_0$.

Отметим, что список всех возможных таких абстрактных групп A для всех решеток Нимейера вместе известен (см. [3] для абелевых групп A и [4]–[6] для произвольных групп A). Отвечающие A решетки типа Лича $\mathcal{L}$ (для всех решеток Нимейера вместе) также известны (см. [3] для абелевых групп A и [7] для произвольных групп A). Почти для всех абстрактных групп A решетки типа Лича $\mathcal{L}$, с действием A на $\mathcal{L}$, однозначно определены с точностью до изоморфизма.

(b) Выбираем подмножество $P \subset P(N_i)$, инвариантное относительно A и такое, что примитивная подрешетка $S_0 = [\mathcal{L}, P]_{\text{пр}} \subset N_i$, порожденная $\mathcal{L}$ и P , удовлетворяет теореме 4.1 (эквивалентно, существует примитивное вложение $S_0 = [\mathcal{L}, P]_{\text{пр}} \subset L_{K3}$). Тогда $P \subset P(S_0) = S_0 \cap P(N_i)$ и $A \subset A(S_0)$.

(c) Расширяем примитивную подрешетку S_0 до примитивной подрешетки $S_0 \subset S \subset N_i$ такой, что $S \cap P(N_i) = P$,

$$\{\varphi \in A(N_i) \mid \varphi(S) = S \text{ и } \varphi|_{S_{N_i}^\perp} \text{ тождественно}\} = \text{Clos}(A)$$

и S удовлетворяет теореме 4.1. Тогда $A(S) = \text{Clos}(A)$, $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}$, $P(S) = P$ и существует примитивное вложение $S \subset L_{K3}$.

(d) Следуем замечанию 4.1 для построения кэлеровой КЗ-поверхности X с отметкой $S \subset N_i$ решеткой Нимейера N_i . Тогда имеем $\text{Aut}(X, S)_0 = \text{Clos}(A)$, $P(X) \cap S = P(S) = P$.

§ 6. Отметки КЗ-поверхностей конкретными решетками Нимейера $N_1, \dots, N_{23}$

Далее используются базисы корневых решеток A_n , D_n или E_k , $k = 6, 7, 8$, указанные на рис. 1.

Рис. 1. Базисы диаграмм Дынкина A_n , D_n , E_k

Для A_n , $n \geq 1$, через $\varepsilon_1 = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n)/(n+1)$ обозначается элемент, определяющий образующую дискриминантной группы $A_n^*/A_n \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.

Для D_n , $n \geq 4$ и $n \equiv 0 \pmod{2}$, через $\varepsilon_1 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1})/2$, $\varepsilon_2 = (\alpha_{n-1} + \alpha_n)/2$, $\varepsilon_3 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-3} + \alpha_n)/2$ обозначаются элементы, определяющие все ненулевые элементы из $D_n^*/D_n \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Для D_n , $n \geq 4$ и $n \equiv 1 \pmod{2}$, через $\varepsilon_1 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2})/2 + \alpha_{n-1}/4 - \alpha_n/4$, $\varepsilon_2 = (\alpha_{n-1} + \alpha_n)/2$, $\varepsilon_3 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2})/2 - \alpha_{n-1}/4 + \alpha_n/4$ обозначаются элементы, определяющие все ненулевые элементы из $D_n^*/D_n \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Для E_6 через $\varepsilon_1 = (\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_6)/3$, $\varepsilon_2 = (-\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_6)/3$ обозначаются элементы, определяющие все ненулевые элементы из $E_6^*/E_6 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Для E_7 элемент $\varepsilon_1 = (\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7)/2$ определяет ненулевой элемент из $E_7^*/E_7 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Если диаграмма Дынкина решетке корней имеет несколько связных компонент, второй индекс базисных элементов нумерует соответствующую компоненту связности.

Далее мы применяем вышеприведенные результаты к конкретным решеткам Нимейера N_i . Через X обозначается кэлерова КЗ-поверхность.

Случай 0. Рассмотрим отметки поверхности X отрицательно определенными четными унимодулярными решетками K ранга 16. Существуют две такие решетки: $K_1 = \Gamma_{16}$ с системой корней D_{16} и $K_2 = 2E_8$ с системой корней $2E_8$. Для них любая примитивная подрешетка $S \subset K_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяет теореме 4.1, так как $\text{rk } S + l(A_S) \leq 16 < 22$ по теореме 2.1. Это дает отметку какой-то X , если $P(S) \subset P(K_i)$. Поэтому данный случай очень прост (фактически этот случай был рассмотрен в [1, замечание 1.14.7]).

Группа $A(K_1)$ тривиальна, и $A(K_2) = C_2$ – группа порядка 2, переставляющая компоненты E_8 .

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset K_1 = \Gamma_{16}$. Тогда $\text{Aut}(X, S)_0 = A(K_1)$ тривиальна, $P(X) \cap S = P(S)$ и $\Gamma(P(X) \cap S) \subset \Gamma(P(K_1)) = \mathbb{D}_{16}$. Возможен любой такой подграф.

Пусть $A = A(K_2)$ – группа порядка 2. Тогда коинвариантная подрешетка (или подрешетка типа Лича) имеет вид

$$\mathcal{L}_A = (K_2)_A = E_8(2) = [\{\alpha_{i1} - \alpha_{i2} \mid 1 \leq i \leq 8\}] \subset K_2 = 2E_8.$$

Она изоморфна E_8 с формой, умноженной на 2.

Пусть X отмечена $S \subset K_2$. Тогда $P(X) \cap S = P(S)$. Если $E_8(2) \not\subset S$, то симплектическая группа $A(X, S)_0$ тривиальна и $\Gamma(P(X) \cap S) \subset 2E_8$. Если $E_8(2) \subset S$, то $A(X, S)_0 = A(K_2)$ – группа порядка 2. Граф $\Gamma(P(X) \cap S)$ является подграфом графа $2E_8$, инвариантным относительно перестановки двух компонент $2E_8$. Возможны все такие подграфы.

Далее, сначала рассмотрим решетки Нимейера N_i такие, что $A(N_i)$ не имеет нетривиальных подгрупп кэлеровых КЗ-поверхностей (эквивалентно, KahK3 -подгрупп). Таким образом, если X имеет отметку $S \subset N_i$ такой решеткой Нимейера N_i , то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Случай 1. Решетка Нимейера $N_1 = N(D_{24}) = [D_{24}, \varepsilon_1]$ имеет тривиальную группу $A(N_1)$ (см. [10, гл. 16]).

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_1$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_1)) = \mathbb{D}_{24}$. Любая такая S дает

отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Группа $\text{Aut}(X, S)_0 = A(N_1)$ тривиальна.

Пусть $S = D_n$, $17 \leq n \leq 19$. Эта решетка удовлетворяет теореме 4.1. Поэтому существует X , отмеченная такой $S = D_n \subset N_1$. По классификации решеток Нимейера только $N_1 = N(D_{24})$ возможна для отметки X такой подрешеткой $S \subset S_X$.

Случай 2. Решетка Нимейера $N_2 = N(D_{16} \oplus E_8) = [D_{16}, \varepsilon_{11}] \oplus E_8$ имеет тривиальную группу $A(N_2)$ (см. [10, гл. 16]).

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_2$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_2)) = \mathbb{D}_{16}\mathbb{E}_8$. Любая такая S отмечает какую-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Группа $\text{Aut}(X, S)_0 = A(N_2)$ тривиальна.

Пусть $S = D_n \oplus E_8$, $8 \leq n \leq 11$. Данная подрешетка удовлетворяет теореме 4.1, поэтому существует X , отмеченная такой $S \subset N_2$. По классификации решеток Нимейера только $N_2 = N(D_{16} \oplus E_8)$ возможна для отметки X такой $S \subset S_X$.

Случай 4. Решетка Нимейера $N = N_4 = N(A_{24}) = [A_{24}, 5\varepsilon_1]$ имеет группу $A(N)$ порядка 2 (см. [10, гл. 16]). Она дает нетривиальную инволюцию диаграммы $P(N_4) = \mathbb{A}_{24}$. Легко видеть, что $\mathcal{L} = N_{A(N)} = (N^{A(N)})_N^\perp$ не удовлетворяет теореме 4.1. Поэтому только тривиальная подгруппа $A \subset A(N)$ является KahK3-подгруппой. (Это также следует из результатов [3], где, в частности, показано, что $\text{rk } \mathcal{L} = 8$ для KahK3-подгруппы порядка 2.)

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_4$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_4)) = \mathbb{A}_{24}$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = A_n$, $18 \leq n \leq 19$. Данная подрешетка удовлетворяет теореме 4.1. Поэтому существует X , отмеченная $S \subset N_4 = N(A_{24})$. По классификации решеток Нимейера только $N_1 = N(D_{24})$ и $N_4 = N(A_{24})$ возможны для отметки X такой $S \subset S_X$.

Случай 5. Решетка Нимейера $N = N_5 = N(2D_{12}) = [2D_{12}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \varepsilon_{21} + \varepsilon_{12}]$ имеет группу $A(N)$ порядка 2, которая переставляет две компоненты D_{12} . Легко видеть, что $\mathcal{L} = N_{A(N)} = (N^{A(N)})_N^\perp$ не удовлетворяет теореме 4.1. Таким образом, только тривиальная подгруппа $A \subset A(N)$ является KahK3-подгруппой.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_5$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_5)) = 2\mathbb{D}_{12}$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = D_{10} \oplus D_9$. Данная подрешетка удовлетворяет теореме 4.1. Поэтому существует X , отмеченная $S \subset N_5$. По классификации решеток Нимейера только $N_5 = N(2D_{12})$ возможна для отметки X такой $S \subset S_X$.

Случай 10. Решетка Нимейера $N = N_{10} = N(2A_{12}) = [2A_{12}, \varepsilon_{11} + 5\varepsilon_{12}]$ имеет группу $A(N)$, которая является циклической группой порядка 4. Легко видеть, что $\mathcal{L} = N_A = (N^A)_N^\perp$ не удовлетворяет теореме 4.1 для обеих нетривиальных подгрупп $A \subset A(N)$. Достаточно проверить это для подгруппы порядка 2, которая дает нетривиальную инволюцию графа $\mathbb{A}_{12}$ для каждой из двух компонент A_{12} . Таким образом, только тривиальная подгруппа $A \subset A(N)$ является KahK3-подгруппой.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{10}$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{10})) = 2A_{12}$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = A_{10} \oplus A_9$. Данная решетка удовлетворяет теореме 4.1. Поэтому существует КЗ-поверхность X , отмеченная $S \subset N_{10}$. По классификации решеток Нимейера только $N_1 = N(D_{24})$, $N_4 = N(A_{24})$, $N_5 = N(2D_{12})$ и $N_{10} = N(2A_{12})$ возможны для отметки X такой $S \subset S_X$.

Для следующих случаев группа $A(N_i)$ имеет подгруппы кэлеровых КЗ-поверхностей A (т.е. KahKЗ -подгруппы) только порядка 1 или 2. Таким образом, если X имеет отметку $S \subset N_i$ такой решеткой Нимейера N_i , то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ либо тривиальна, либо имеет порядок 2.

Случай 3. Для решетки Нимейера $N = N_3 = N(3E_8)$ группа $A(N)$, очевидно, есть группа $\mathfrak{S}_3$, которая действует перестановками трех компонент E_8 , обозначаемых как $(E_8)_j$, $j = 1, 2, 3$. Простые вычисления показывают, что для $A \subset A(N) = \mathfrak{S}_3$ решетка $\mathcal{L} = N_A = ((N^A)^\perp_N)$ не удовлетворяет теореме 4.1, если A равна $\mathfrak{S}_3$ или знакопеременной группе $\mathfrak{A}_3$. Это верно, только если A либо порождена транспозицией, либо тривиальна. Упомянутые группы определяют все KahKЗ -подгруппы.

Для группы $A = [(kl)] \subset A(N)$, порожденной транспозицией (kl) , $1 \leq k < l \leq 3$, подрешетка типа Лича (или коинвариантная подрешетка) имеет вид

$$E_8(2)_{kl} = N_A = [\{\alpha_{ik} - \alpha_{il} \mid 1 \leq i \leq 8\}].$$

Пусть поверхность X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_3 = N(3E_8)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_3)) = 3E_8$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Если S не содержит ни одну из подрешеток $E_8(2)_{kl}$, $1 \leq k < l \leq 3$, то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна. Если $E_8(2)_{kl} \subset S$ для $1 \leq k < l \leq 3$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [(kl)]$ – группа порядка 2.

Пусть $S = 2E_8$. Тогда S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку $S \subset N_3 = N(3E_8)$ какой-то X . По классификации решеток Нимейера только $N_3 = N(3E_8)$ возможна для отметки X такой $S \subset S_X$.

Случай 6. Для решетки Нимейера $N = N_6 = N(A_{17} \oplus E_7) = [A_{17} \oplus E_7, 3\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}]$ группа $A(N_6)$ имеет порядок 2 (см. [10, гл. 16]). Ее образующая тривиальна на E_7 и дает нетривиальную инволюцию диаграммы A_{17} .

Коинвариантная подрешетка для $A(N)$ имеет вид

$$E_8(2) = N_{A(N)} = \left[\{\alpha_{i1} - \alpha_{(18-i)1} \mid 1 \leq i \leq 8\}, \frac{1}{3} \sum_{i=1}^8 i(\alpha_{i1} - \alpha_{(18-i)1}) \right] \subset N_6.$$

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_6 = N(A_{17} \oplus E_7)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_6)) = A_{17}E_7$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Если $E_8(2) \not\subset S$, то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна. Если $E_8(2) \subset S$, то группа $\text{Aut}(X, S)_0 = A(N_6)$ имеет порядок 2.

В частности, $S = [A_{17}, 6\varepsilon_{11}] \subset N_6$ удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . По классификации решеток Нимейера поверхность X может быть отмечена только решеткой $N_6 = N(A_{17} \oplus E_7)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 7. Для решетки Нимейера $N = N_7 = N(D_{10} \oplus 2E_7) = [D_{10} \oplus 2E_7, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}, \varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}]$ группа $A(N_7)$ имеет порядок 2 (см. [10, гл. 16]). Ее образующая переставляет диаграммы $\mathbb{E}_7$ и задает нетривиальную инволюцию диаграммы $\mathbb{D}_{10}$.

Для $A(N)$ коинвариантная подрешетка имеет вид

$$E_8(2) = N_{A(N)} = \left[\alpha_{91} - \alpha_{10,1}, \{ \alpha_{i2} - \alpha_{i3} \mid 1 \leq i \leq 7 \}, \right. \\ \left. \frac{1}{2}(\alpha_{91} - \alpha_{10,1} + \alpha_{22} - \alpha_{23} + \alpha_{52} - \alpha_{53} + \alpha_{72} - \alpha_{73}) \right] \subset N_7.$$

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_7 = N(D_{10} \oplus 2E_7)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_7)) = \mathbb{D}_{10}2\mathbb{E}_7$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Если $E_8(2) \not\subset S$, то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна. Если $E_8(2) \subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = A(N_7)$ имеет порядок 2.

В частности, $S = [\alpha_{91}, \alpha_{10,1}, 2E_7]_{\text{pr}} \subset N_7$ удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Кроме того, $\text{Aut}(X, S)_0$ имеет порядок 2. По классификации решеток Нимейера и приведенным выше вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой $N_7 = N(D_{10} \oplus 2E_7)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 8. Для решетки Нимейера $N = N_8 = N(A_{15} \oplus D_9) = [A_{15} \oplus D_9, 2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}]$ группа $A(N_8)$ имеет порядок 2 (см. [10, гл. 16]). Ее образующая дает нетривиальные инволюции диаграмм $\mathbb{A}_{15}$ и $\mathbb{D}_9$.

Для $A(N)$ коинвариантная подрешетка имеет вид

$$E_8(2) = N_A = \left[\{ \alpha_{i1} - \alpha_{(16-i)1} \mid 1 \leq i \leq 7 \}, \alpha_{82} - \alpha_{92}, \right. \\ \left. \frac{1}{4} \sum_{i=1}^7 (\alpha_{i1} - \alpha_{(16-i)1}) + \frac{1}{2}(\alpha_{82} - \alpha_{92}) \right] \subset N_8.$$

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_8 = N(A_{15} \oplus D_9)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_8)) = \mathbb{A}_{15}\mathbb{D}_9$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Если $E_8(2) \not\subset S$, то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна. Если $E_8(2) \subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = A(N_8)$ имеет порядок 2.

В частности, $S = [A_{15}, \alpha_{82}, \alpha_{92}]_{\text{pr}} \subset N_8$ удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Кроме того, $\text{Aut}(X, S)_0$ имеет порядок 2. По классификации решеток Нимейера и приведенным выше вычислениям X может быть отмечена только решеткой $N_8 = N(A_{15} \oplus D_9)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 9. Для решетки Нимейера

$$N = N_9 = N(3D_8) = [3D_8, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23}, \varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{23}, \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{13}]$$

группа $A(N)$ есть $\mathfrak{S}_3$, которая действует перестановками трех компонент D_8 и перестановками α_{71} , α_{72} и α_{73} . Простые вычисления показывают, что для $A \subset A(N) = \mathfrak{S}_3$ подрешетка $\mathcal{L} = N_A = ((N^A)_N^\perp)$ не удовлетворяет теореме 4.1, если A равна $\mathfrak{S}_3$ или $\mathfrak{A}_3$. Это верно, только если группа A либо порождена транспозицией, либо тривиальна. Они дают все КанКЗ-подгруппы.

Пусть $A = [(kl)]$, $1 \leq k < l \leq 3$, является транспозицией на $(D_8)_j$, $j = 1, 2, 3$. Тогда коинвариантная подрешетка имеет вид

$$N_A = E_8(2)_{kl} = \left[\{ \alpha_{ik} - \alpha_{il} \mid 1 \leq i \leq 8 \}, \frac{1}{2}(\alpha_{1k} - \alpha_{1l} + \alpha_{3k} - \alpha_{3l} + \alpha_{5k} - \alpha_{5l} + \alpha_{8k} - \alpha_{8l}) \right].$$

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_9 = N(3D_8)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_9)) = 3\mathbb{D}_8$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(S) = P(X) \cap S$. Если S не содержит ни одну из подрешеток $E_8(2)_{kl}$, $1 \leq k < l \leq 3$, то $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна. Если $E_8(2)_{kl} \subset S$ для $1 \leq k < l \leq 3$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [(kl)]$ – группа порядка 2.

Пусть $S = [2D_8]_{\text{pr}} \subset N_9$. Тогда S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X , кроме того, $\text{Aut}(X, S)_0$ имеет порядок 2. По классификации решеток Нимейера и приведенным выше вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_9 = N(3D_8)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 11. Для решетки Нимейера $N = N_{11} = N(A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6) = [A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}]$ группа $A(N_{11})$ имеет порядок 2 (см. [10, гл. 16]). Образующая группы $A(N_{11})$ дает нетривиальные инволюции поддиаграмм $\mathbb{A}_{11}$, $\mathbb{D}_7$ и $\mathbb{E}_6$. Для группы $A = A(N_{11})$ коинвариантная подрешетка имеет вид

$$E_8(2) = N_A = \left[\{ \alpha_{i1} - \alpha_{(12-i)1} \mid 1 \leq i \leq 5 \}, \alpha_{62} - \alpha_{72}, \alpha_{13} - \alpha_{63}, \alpha_{33} - \alpha_{53}, \right. \\ \left. \frac{1}{6} \sum_{i=1}^5 i(\alpha_{i1} - \alpha_{(12-i)1}) + \frac{1}{2}(\alpha_{62} - \alpha_{72}) + \frac{1}{3}(-\alpha_{13} + \alpha_{63} + \alpha_{33} - \alpha_{53}) \right] \subset N_{11}.$$

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{11} = N(A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{11})) = \mathbb{A}_{11}\mathbb{D}_7\mathbb{E}_6$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(S) = P(X) \cap S$. Если S не содержит $E_8(2)$, то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна. Если $E_8(2) \subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = A(N_{11})$ имеет порядок 2.

В частности, $S = [A_{11} \oplus E_6, \alpha_{62}, \alpha_{72}]_{\text{pr}} \subset N_{11}$ удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Группа $\text{Aut}(X, S)_0$ имеет порядок 2. По классификации решеток Нимейера и приведенным выше вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой $N_{11} = N(A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 15. Для решетки Нимейера

$$N = N_{15} = N(3A_8) = [3A_8, 4\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}, \varepsilon_{11} + 4\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + 4\varepsilon_{13}]$$

группа $A(N)$ имеет порядок 12 и является прямым произведением группы порядка 2, которая дает нетривиальные инволюции на всех трех компонентах $\mathbb{A}_8$, и группы $\mathfrak{S}_3$, действующей перестановками трех компонент $\mathbb{A}_8$ и элементов α_{11} , α_{12} и α_{13} (см. [10, гл. 16]).

Простые вычисления показывают, что для $A \subset A(N)$ коинвариантная подрешетка $\mathcal{L} = N_A = ((N^A)_N^\perp)$ удовлетворяет теореме 4.1, только если A либо тривиальна, либо $A = [(kl)]$, $1 \leq k < l \leq 3$, порождена транспозицией (kl) двух компонент $(\mathbb{A}_8)_k$, $(\mathbb{A}_8)_l$ и элементов α_{1k} , α_{1l} и тождественна на оставшейся компоненте $(\mathbb{A}_8)_j$. Данные группы задают все КалКЗ-подгруппы. Для $A = [(kl)]$

коинвариантная подрешетка имеет вид

$$E_8(2)_{kl} = N_A = \left[\{ \alpha_{ik} - \alpha_{il} \mid 1 \leq i \leq 8 \}, \frac{1}{3} \sum_{i=1}^8 i(\alpha_{ik} - \alpha_{il}) \right] \subset N_{15}.$$

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{15} = N(3A_8)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{15})) = 3A_8$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$. Если S не содержит ни одну из подрешеток $E_8(2)_{kl}$, $1 \leq k < l \leq 3$, то группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна. Если $E_8(2)_{kl} \subset S$ для $1 \leq k < l \leq 3$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [(kl)]$ имеет порядок 2.

Пусть $S = [2A_8]_{\text{pr}} \subset N_{15}$. Тогда S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X , причем $\text{Aut}(X, S)_0$ имеет порядок 2. По классификации решеток Нимейера и нашим предыдущим вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой $N_{15} = N(3A_8)$ для такой $S \subset S_X$.

Рассматриваемые далее случаи будут более сложны. Мы используем следующие простые общие утверждения и программы для компьютера, приведенные в дополнении, § 7 (разумеется, их также можно использовать для всех рассмотренных ранее случаев, когда вычисления были не приведены в силу их простоты).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть N – решетка Нимейера (или любая другая четная отрицательно определенная унимодулярная решетка), $P(N)$ – базис системы корней N и

$$A(N) = \{ \varphi \in O(N) \mid \varphi(P(N)) = P(N) \}.$$

Если $A \subset A(N)$ – КалКЗ-подгруппа с подрешеткой типа Лича (или коинвариантной) $N_A = (N^A)^\perp_N$ (эквивалентно, существует примитивное вложение $N_A \subset L_{K3}$), то сопряженная подгруппа $A^g = gAg^{-1}$, $g \in A(N)$, также является КалКЗ-подгруппой с подрешеткой типа Лича (или коинвариантной) $N_{A^g} = g(N_A)$. Данные группы определяют КалКЗ-классы сопряженных подгрупп в $A(N)$. Поэтому для описания КалКЗ-подгрупп $A \subset A(N)$ и их коинвариантных подрешеток достаточно описать их представители во всех КалКЗ-классах сопряженности в $A(N)$ и их коинвариантные подрешетки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, N_{A^g} изоморфна N_A . Поэтому, если N_A имеет примитивное вложение $N_A \subset L_{K3}$, то $N_{A^g} = g(N_A) \subset N$ также имеет примитивное вложение $N_{A^g} \subset L_{K3}$. Предложение доказано.

Для вычисления коинвариантных подрешеток полезно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть N – решетка Нимейера (или любая другая отрицательно определенная четная унимодулярная решетка), $P(N)$ – базис системы корней N и

$$A(N) = \{ \varphi \in O(N) \mid \varphi(P(N)) = P(N) \}.$$

Пусть $A_1 \subset A(N)$ и $A_2 \subset A(N)$ – подгруппы и $A = \langle A_1, A_2 \rangle \subset A(N)$ порождена A_1 и A_2 . Тогда коинвариантная подрешетка N_A является примитивной подрешеткой, $N_A = [N_{A_1}, N_{A_2}]_{\text{pr}} \subset N$, решетки N , порожденной коинвариантными подрешетками N_{A_1} и N_{A_2} подгрупп A_1 и A_2 . Поэтому $A = \langle A_1, A_2 \rangle$

является KahKЗ -подгруппой, если и только если $[N_{A_1}, N_{A_2}]_{\text{pr}}$ имеет примитивное вложение в $L_{\text{KЗ}}$.

В частности, если $A = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ порождена $g_1, \dots, g_n \in A$, то $N_A = [N_{\langle g_1 \rangle}, \dots, N_{\langle g_n \rangle}]_{\text{pr}} \subset N$. Кроме того, A является KahKЗ -подгруппой, если и только если подрешетка $[N_{\langle g_1 \rangle}, \dots, N_{\langle g_n \rangle}]_{\text{pr}} \subset N$ имеет примитивное вложение в $L_{\text{KЗ}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $A_1, A_2 \subset A$, то $[N_{A_1}, N_{A_2}]_{\text{pr}} \subset N_A$. Пусть $M = [N_{A_1}, N_{A_2}]_{\text{pr}} \subset N$. Поскольку $N_{A_1} \subset M$ и $N_{A_2} \subset M$, то $A_1 \subset A(M)$, $A_2 \subset A(M)$ и $A = \langle A_1, A_2 \rangle \subset A(M)$. Отсюда следует, что $A = \langle A_1, A_2 \rangle$ тождественна на $M^\perp_N$ и $M \subset N_{\langle A_1, A_2 \rangle}$. Поэтому $M = N_A$. Предложение доказано.

Для вычисления коинвариантной подрешетки N_A для подгруппы $A \subset A(N)$ мы также используем следующее важное и простое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть N – решетка Нимейера (или любая другая четная отрицательно определенная унимодулярная решетка), $P(N)$ – базис системы корней N и

$$A(N) = \{\varphi \in O(N) \mid \varphi(P(N)) = P(N)\}.$$

Предположим, что $P(N)$ порождает N над $\mathbb{Q}$ (иначе следует использовать A -инвариантный базис в $N \otimes \mathbb{Q}$ вместо $P(N)$). Пусть $P(N) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\} \subset N \otimes \mathbb{Q}$ – двойственные элементы, т. е. $e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Пусть $A \subset A(N)$ – подгруппа, $N_A \subset N$ – ее коинвариантная подрешетка $N_A = (N^A)^\perp_N$, $\{e_{i_{11}}, \dots, e_{i_{1l_1}}\}, \dots, \{e_{i_{t1}}, \dots, e_{i_{tl_t}}\}$ – орбиты A в $P(N)$ и t – число орбит. Тогда

$$\{e_{i_{11}}^* - e_{i_{12}}^*, \dots, e_{i_{1(l_1-1)}}^* - e_{i_{1l_1}}^*\}, \dots, \{e_{i_{t1}}^* - e_{i_{t2}}^*, \dots, e_{i_{t(l_t-1)}}^* - e_{i_{tl_t}}^*\}$$

дают базис в $N_A \otimes \mathbb{Q}$. В частности, $\text{rk } N_A = \text{rk } N - t$.

Примитивная подрешетка $K_{\text{pr}} \subset N$ определяется ее рациональным базисом в векторном пространстве $K \otimes \mathbb{Q}$. Действительно, $K_{\text{pr}} = K \otimes \mathbb{Q} \cap N \subset N \otimes \mathbb{Q}$. Поэтому предложение 6.3 дает эффективный метод вычисления подрешетки N_A и ее инвариантов (для теоремы 4.1), чтобы выяснить, имеет ли N_A примитивное вложение в $L_{\text{KЗ}}$ и является ли A KahKЗ -подгруппой.

В дополнении, § 7, мы даем программу Program 0 (использующую программы Program 1–Program 4), вычисляющую нормальный базис (или базис Смита) примитивной подрешетки $K_{\text{pr}} \subset N$ для подрешетки K в N , которая задана образующими в $K \otimes \mathbb{Q}$. Мы используем базис $P(N)$ системы корней решетки Нимейера N (соответствующий базисным столбцам $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$ длины 24), целочисленную матрицу r решетки N в этом базисе (эквивалентную диаграмме Дынкина) и дополнительные данные кода N . Подрешетка K задается рациональными столбцами в этом базисе (матрица SUBL размера $(24 \times \cdot)$) в программе Program 0, вычисляющей нормальный базис (из элементарных делителей или базис Смита) подрешетки K_{pr} (обозначаемый матрицей SUBLpr в программе Program 0) для вложения $K_{\text{pr}} \subset K_{\text{pr}}^*$. Она также вычисляет элементарные делители (или инварианты Смита) данного вложения (обозначенные как DSUBLpr в программе Program 0). В частности, она вычисляет $\text{rk } K_{\text{pr}}$ и

дискриминантную группу $A_{K_{\text{pr}}} = K_{\text{pr}}^*/K_{\text{pr}}$, дает число $l(A_{K_{\text{pr}}})$ ее минимальных образующих. Кроме того, нормальный базис может быть использован для вычисления жордановой формы решетки $K_{\text{pr}} \otimes \mathbb{Z}_p$ над кольцом целых p -адических чисел и дискриминантной формы $q_{K_{\text{pr}}}$. Последние векторы этого базиса дают унимодулярную часть решетки K_{pr} над $\mathbb{Z}_p$. Таким образом, Program 0 (см. § 7) дает все необходимые инварианты для теоремы 4.1, чтобы выяснить, имеет ли K_{pr} примитивное вложение в L_{K3} . Эта программа работает очень быстро во всех случаях, которые будут рассмотрены.

Случай 13. Для решетки Нимейера

$$N = N_{13} = N(2A_9 \oplus D_6) = [2A_9 \oplus D_6, 2\varepsilon_{11} + 4\varepsilon_{12}, 5\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}, 5\varepsilon_{12} + \varepsilon_{33}]$$

группа $A(N)$ – циклическая группа C_4 порядка 4 (см. [10, гл. 16]). Ее элементы определяются перестановками концов диаграмм Дынкина $\mathbb{A}_9$ и $\mathbb{D}_6$, а ее образующая φ дает перестановку

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{91} & \alpha_{12} & \alpha_{92} & \alpha_{53} & \alpha_{63} \\ \alpha_{12} & \alpha_{92} & \alpha_{91} & \alpha_{11} & \alpha_{63} & \alpha_{53} \end{pmatrix}.$$

По предложению 6.3 коинвариантная подрешетка $N_{[\varphi]}$ имеет вид

$$N_{[\varphi]} = [\alpha_{11}^* - \alpha_{12}^*, \alpha_{12}^* - \alpha_{91}^*, \alpha_{91}^* - \alpha_{92}^*, \alpha_{92}^* - \alpha_{21}^*, \alpha_{21}^* - \alpha_{22}^*, \alpha_{22}^* - \alpha_{81}^*, \alpha_{81}^* - \alpha_{82}^*, \\ \alpha_{31}^* - \alpha_{32}^*, \alpha_{32}^* - \alpha_{71}^*, \alpha_{71}^* - \alpha_{72}^*, \alpha_{41}^* - \alpha_{42}^*, \alpha_{42}^* - \alpha_{61}^*, \alpha_{61}^* - \alpha_{62}^*, \\ \alpha_{51}^* - \alpha_{52}^*, \alpha_{53}^* - \alpha_{63}^*]_{\text{pr}} \subset N.$$

Используя Program 0 (см. § 7), получаем, что $\text{rk } N_{[\varphi]} = 14$, $N_{[\varphi]}^*/N_{[\varphi]} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ и $l(N_{[\varphi]}^*/N_{[\varphi]}) = 6$. По теореме 4.1 решетка $N_{[\varphi]}$ имеет примитивное вложение в L_{K3} и $[\varphi] = A(N)$ является KahK3-подгруппой.

Любая подгруппа группы $A(N)$ также является KahK3-подгруппой. Единственная нетривиальная подгруппа группы $A(N)$ – это $[\varphi^2]$ порядка 2. Аналогичные вычисления показывают, что $N_{[\varphi^2]} \cong E_8(2)$.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{13} = N(2A_9 \oplus D_6)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{13})) = 2\mathbb{A}_9\mathbb{D}_6$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_{[\varphi]} \subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [\varphi] \cong C_4$ – циклическая группа порядка 4. Иначе если только $N_{[\varphi^2]} \subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [\varphi^2] \cong C_2$ имеет порядок 2, а если $N_{[\varphi^2]} \not\subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = [2A_9, N_{[\varphi]}]_{\text{pr}} = [\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{81}, N_{[\varphi]}]_{\text{pr}} \subset N_{13}$. Тогда (используя программу Program 0 из § 7) получаем, что $\text{rk } S = 19$ и $S^*/S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Поэтому S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Получаем, что $\text{Aut}(X, S)_0 \cong C_4$ и $2\mathbb{A}_9 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и нашим предыдущим вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{13} = N(2A_9 \oplus D_6)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 16. Для решетки Нимейера

$$N = N_{16} = N(2A_7 \oplus 2D_5) = [2A_7 \oplus 2D_5, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{24}, \varepsilon_{11} + 7\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{14}]$$

группа $A(N)$ является группой диэдра порядка 8 (см. [10, гл. 16]). Мы отождествляем ее с группой симметрий квадрата, ее элементы определяются перестановками концов диаграмм Дынкина $\mathbb{A}_7$ и $\mathbb{D}_5$. Центральная симметрия φ_0

задает инволюцию

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{71} & \alpha_{12} & \alpha_{72} & \alpha_{43} & \alpha_{53} & \alpha_{44} & \alpha_{54} \\ \alpha_{71} & \alpha_{11} & \alpha_{72} & \alpha_{12} & \alpha_{53} & \alpha_{43} & \alpha_{54} & \alpha_{44} \end{pmatrix}.$$

Две порождающие симметрии φ_1 и φ_2 задают инволюции

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{71} & \alpha_{12} & \alpha_{72} & \alpha_{43} & \alpha_{53} & \alpha_{44} & \alpha_{54} \\ \alpha_{12} & \alpha_{72} & \alpha_{11} & \alpha_{71} & \alpha_{43} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \\ \varphi_2 &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{71} & \alpha_{12} & \alpha_{72} & \alpha_{43} & \alpha_{53} & \alpha_{44} & \alpha_{54} \\ \alpha_{11} & \alpha_{71} & \alpha_{72} & \alpha_{12} & \alpha_{44} & \alpha_{54} & \alpha_{43} & \alpha_{53} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\varphi_2\varphi_1$ является поворотом на 90° и имеет порядок 4.

Для циклической подгруппы $H = [\varphi_2\varphi_1]$ порядка 4 коинвариантная подрешетка N_H имеет $\text{rk } N_H = 16$ и $l(N_H^*/N_H) = 8$ (мы используем предложение 6.3 и программу Program 0). Таким образом, N_H не имеет примитивного вложения в L_{K3} , и H не является KahK3-подгруппой по теореме 4.1. Отсюда следует, что $A(N)$ также не является KahK3-подгруппой.

Для сопряженных в $A(N)$ подгрупп $H = [\varphi_0, \varphi_1]$ и $H = [\varphi_0, \varphi_2]$, изоморфных $C_2 \times C_2$, имеем $\text{rk } N_H = 12$ и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ (используем предложение 6.3 и программу Program 0). Поэтому N_H имеет примитивное вложение в L_{K3} по теореме 4.1 и данные $H \cong C_2 \times C_2$ являются KahK3-подгруппами¹.

Все другие нетривиальные подгруппы в $A(N)$ являются циклическими группами порядка 2, которые суть $[\varphi_0]$ и сопряженные подгруппы $[\varphi_1]$, $[\varphi_1\varphi_0]$, $[\varphi_2]$, $[\varphi_2\varphi_0]$. Они являются KahK3-подгруппами, так как являются подгруппами рассмотренных выше групп H . Коинвариантные подрешетки $N_{[\varphi_0]}$, $N_{[\varphi_1]}$, $N_{[\varphi_1\varphi_0]}$, $N_{[\varphi_2]}$, $N_{[\varphi_2\varphi_0]}$ изоморфны $E_8(2)$.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{16} = N(2A_7 \oplus 2D_5)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{16})) = 2A_7 2D_5$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_{[\varphi_0, \varphi_1]} \subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [\varphi_0, \varphi_1] \cong C_2 \times C_2$. Если $N_{[\varphi_0, \varphi_2]} \subset S$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [\varphi_0, \varphi_2] \cong C_2 \times C_2$. Иначе если только $N_{[\varphi]} \subset S$ для одной из инволюций $\varphi \in \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_1\varphi_0, \varphi_2, \varphi_2\varphi_0\}$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [\varphi] \cong C_2$, а если $N_{[\varphi]} \not\subset S$ для каждой такой φ , то $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = [2A_7, N_{[\varphi_0, \varphi_1]}]_{\text{pr}} \subset N_{16}$. Тогда (используя программу Program 0 из § 7) получаем, что $\text{rk } S = 16$ и $S^*/S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Поэтому S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Имеем $\text{Aut}(X, S)_0 \cong C_2 \times C_2$ и $2A_7 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и нашим предыдущим вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{16} = N(2A_7 \oplus 2D_5)$ для такой $S \subset S_X$.

В дальнейших вычислениях мы не упоминаем об использовании предложения 6.3 и программы Program 0 из § 7. Мы используем их постоянно.

Случай 17. Для решетки Нимейера

$$\begin{aligned} N &= N_{17} = N(4A_6) \\ &= [4A_6, \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + 6\varepsilon_{14}, \varepsilon_{11} + 6\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{13} + \varepsilon_{14}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + 6\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{14}] \end{aligned}$$

¹Данные вычисления показывают, что для симплектической группы $G = C_2 \times C_2$ на кэлеровой КЗ-поверхности имеем $S_{(G)}^*/S_{(G)} = S_{(2,2)}^*/S_{(2,2)} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. Именно так мы должны исправить наше вычисление этой группы в [3, предложение 10.1].

группа $A(N)$ имеет центр $[\varphi_0]$ порядка 2, который сохраняет компоненты $4\mathbb{A}_6$, и $A(N)/[\varphi_0] = \mathfrak{A}_4$ – знакопеременная группа на компонентах $4\mathbb{A}_6$ (см. [10, гл. 16]). Ее элементы определяются перестановками концов диаграмм Дынкина $\mathbb{A}_6$. Она порождена инволюцией

$$\varphi_0 = (\alpha_{11}\alpha_{61})(\alpha_{12}\alpha_{62})(\alpha_{13}\alpha_{63})(\alpha_{14}\alpha_{64})$$

и элементами φ_1 и φ_4 порядка 3:

$$\varphi_1 = (\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14})(\alpha_{62}\alpha_{63}\alpha_{64}),$$

$$\varphi_4 = (\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{63})(\alpha_{61}\alpha_{62}\alpha_{13}),$$

где $\varphi_4\varphi_1$ имеет порядок 4 и $(\varphi_4\varphi_1)^2 = \varphi_0$. Все элементы из $A(N)$ сопряжены φ_0 , φ_1 , $\varphi_0\varphi_1$ (порядка 6) и $\varphi_4\varphi_1$.

Коинвариантная подрешетка $N_{[\varphi_0]}$ имеет $\text{rk } N_{[\varphi_0]} = 12$, и $N_{[\varphi_0]}^*/N_{[\varphi_0]} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$. По теореме 4.1 решетка $N_{[\varphi_0]}$ не имеет примитивного вложения в L_{K3} и $[\varphi_0]$ не является КалКЗ-подгруппой.

Для циклической группы $[\varphi_1] \cong C_3$ имеем $\text{rk } N_{[\varphi_1]} = 12$ и $N_{[\varphi_1]}^*/N_{[\varphi_1]} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. По теореме 4.1 решетка $N_{[\varphi_1]}$ имеет примитивное вложение в L_{K3} и $[\varphi_1]$ является КалКЗ-подгруппой. Ее сопряженные дают все циклические подгруппы в $A(N)$ порядка 3. Они суть $[\varphi_1]$, $[\varphi_4]$ и $[\varphi_2]$, $[\varphi_3]$, где $\varphi_2 = \varphi_1\varphi_4\varphi_1^{-1}$, $\varphi_3 = \varphi_1^2\varphi_4\varphi_1^{-2}$. Из структуры $A(N)$ получаем, что сопряженные подгруппы

$$H = [\varphi_i] \cong C_3, \quad i = 1, \dots, 4,$$

– это все нетривиальные КалКЗ-подгруппы в $A(N_{17})$. Имеем $\text{rk } N_H = 12$, $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{17} = N(4A_6)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{17})) = 4\mathbb{A}_6$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_{[\varphi_i]} \subset S$ для одного из $i = 1, 2, 3, 4$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [\varphi_i] \cong C_3$. Иначе если $N_{[\varphi_i]} \not\subset S$ для любого $i = 1, 2, 3, 4$, то $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = [(A_6)_2 = [\alpha_{12}, \dots, \alpha_{62}], N_{[\varphi_1]}]_{\text{pr}} \subset N_{17}$. Имеем $\text{rk } S = 18$, $S^*/S \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Поэтому S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Получаем, что $\text{Aut}(X, S)_0 \cong C_3$ и $3\mathbb{A}_6 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и нашим предыдущим вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{17} = N(4A_6)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 14. Для решетки Нимейера

$$\begin{aligned} N = N_{14} = N(4D_6) &= [4D_6, \text{четные перестановки } 0_1 + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{34}] \\ &= [4D_6, \varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{34}, \varepsilon_{32} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{24}, \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{14}; \\ &\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{24}, \varepsilon_{21} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{34}, \varepsilon_{31} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{14}; \varepsilon_{21} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{14}, \\ &\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{34}, \varepsilon_{31} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{24}; \varepsilon_{31} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{13}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{23}, \varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{33}] \end{aligned}$$

группа $A(N)$ может быть отождествлена с $\mathfrak{S}_4$ по ее действию на компоненты $4\mathbb{D}_6$ (см. [10, гл. 16]) и ее элементы определяются перестановками концов компонент $4\mathbb{D}_6$. Мы нумеруем их числами $1, \dots, 4$. Четные перестановки дают

соответствующие перестановки $(\alpha_{51}, \alpha_{52}, \alpha_{53}, \alpha_{54})$ и $(\alpha_{61}, \alpha_{62}, \alpha_{63}, \alpha_{64})$. Нечетные перестановки меняют местами α_{5i} и α_{6i} . Например, транспозиция (12) дает перестановку

$$(12) = (\alpha_{51}\alpha_{62})(\alpha_{61}\alpha_{52})(\alpha_{53}\alpha_{63})(\alpha_{54}\alpha_{64}).$$

Для $(12)(34) \in \mathfrak{S}_4$ порядка 2 имеем $\text{rk } N_{[(12)(34)]} = 12$ и $N_{[(12)(34)]}^*/N_{[(12)(34)]} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$. По теореме 4.1 решетка $N_{[(12)(34)]}$ не имеет примитивного вложения в $L_{\text{КЗ}}$, поэтому $[(12)(34)]$ и ее сопряженные не являются KahKЗ-подгруппами.

Пусть группа $(\mathfrak{D}_6)_4 = \mathfrak{S}_3(1, 2, 3)$ состоит из всех элементов группы $\mathfrak{S}_4$, сохраняющих 4. Подгруппы, сопряженные группе $(\mathfrak{D}_6)_4$, также обозначаются через $(\mathfrak{D}_6)_k$, $k = 1, \dots, 4$, они изоморфны группе диэдра $\mathfrak{D}_6$ порядка 6. Имеем

$$\text{rk } N_{(\mathfrak{D}_6)_4} = 14, \quad N_{(\mathfrak{D}_6)_4}^*/N_{(\mathfrak{D}_6)_4} \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3.$$

По теореме 4.1 решетка $N_{(\mathfrak{D}_6)_4}$ имеет примитивное вложение в $L_{\text{КЗ}}$ и $(\mathfrak{D}_6)_4$ является KahKЗ-подгруппой.

Подгруппы из $(\mathfrak{D}_6)_4$ также являются KahKЗ-подгруппами. Нетривиальные из них сопряжены $[(12)] \cong C_2$ и $(C_3)_4 = [(123)] \cong C_3$. Имеем $N_{[(12)]} \cong E_8(2)$ и

$$\text{rk } N_{[(123)]} = 12, \quad N_{[(123)]}^*/N_{[(123)]} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6.$$

Из структуры $\mathfrak{S}_4$ получаем, что все нетривиальные KahKЗ-подгруппы в $A(N_{14})$ суть сопряженные подгруппы $(\mathfrak{D}_6)_k$, $k = 1, \dots, 4$, изоморфные $\mathfrak{D}_6$; сопряженные подгруппы $[(ij)]$, $1 \leq i < j \leq 4$, изоморфные C_2 ; сопряженные подгруппы $(C_3)_k \subset (\mathfrak{D}_6)_k$, $k = 1, \dots, 4$, изоморфные C_3 .

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{14} = N(4D_6)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{14})) = 4\mathbb{D}_6$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_{(\mathfrak{D}_6)_k} \subset S$ для одного из $k = 1, \dots, 4$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = (\mathfrak{D}_6)_k \cong \mathfrak{D}_6$. Иначе если только $N_{(C_3)_k} \subset S$ для одного из $k = 1, \dots, 4$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = (C_3)_k \cong C_3$. Если $N_{(C_3)_k} \not\subset S$ и $N_{[(ij)]} \subset S$ для $1 \leq i < j \leq 4$, то имеем $\text{Aut}(X, S)_0 = [(ij)] \cong C_2$, а если $N_{[(ij)]} \not\subset S$, группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = [(D_6)_1] = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{61}, N_{(\mathfrak{D}_6)_4}]_{\text{пр}} \subset N_{14}$. Имеем $\text{rk } S = 19$, $S^*/S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Поэтому S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Получаем, что $\text{Aut}(X, S)_0 \cong \mathfrak{D}_6$ и $3\mathbb{D}_6 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и нашим предыдущим вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{14} = N(4D_6)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 12. Для решетки Нимейера

$$N = N_{12} = N(4E_6) = [4E_6, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{24}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{14}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{23}]$$

группа $A(N)$ имеет центр $[\varphi_0]$ порядка 2, который сохраняет компоненты $4\mathbb{E}_6$, и $A(N)/[\varphi_0] = \mathfrak{S}_4$ на компонентах $4\mathbb{E}_6$ (см. [10, гл. 16]). Элементы группы $A(N)$

определяются перестановками концов поддиаграмм $\mathbb{E}_6$. Она порождена инволюциями

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= (\alpha_{11}\alpha_{61})(\alpha_{12}\alpha_{62})(\alpha_{13}\alpha_{63})(\alpha_{14}\alpha_{64}), \\ \widetilde{(12)} &= (\alpha_{11}\alpha_{12})(\alpha_{61}\alpha_{62})(\alpha_{14}\alpha_{64}), \\ \widetilde{(23)} &= (\alpha_{11}\alpha_{61})(\alpha_{12}\alpha_{13})(\alpha_{62}\alpha_{63}), \\ \widetilde{(34)} &= (\alpha_{11}\alpha_{61})(\alpha_{13}\alpha_{14})(\alpha_{63}\alpha_{64}).\end{aligned}$$

Аналогично определяются инволюции $\widetilde{(ij)}$, $1 \leq i < j \leq 4$, действующие как транспозиции на компонентах $(\mathbb{E}_6)_i$, $(\mathbb{E}_6)_j$ и элементах α_{1i} , α_{1j} .

Элемент $\widetilde{(34)}\widetilde{(12)}$ имеет порядок 4, и $(\widetilde{(34)}\widetilde{(12)})^2 = \varphi_0$. Коинвариантная подрешетка $N_{[\widetilde{(34)}\widetilde{(12)}]}$ имеет $\text{rk } N_{[\widetilde{(34)}\widetilde{(12)}]} = 16$, и $N_{[\widetilde{(34)}\widetilde{(12)}]}^*/N_{[\widetilde{(34)}\widetilde{(12)}]} = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. По теореме 4.1 решетка $N_{[\widetilde{(34)}\widetilde{(12)}]}$ не имеет примитивного вложения в $L_{\text{КЗ}}$ и $[\widetilde{(34)}\widetilde{(12)}]$ не является КалКЗ-подгруппой.

Для $k = 1, \dots, 4$ пусть $(\mathfrak{D}_{12})_k$ состоит из всех элементов группы $A(N_{12})$, сохраняющих компоненту $(\mathbb{E}_6)_k$. Сопряженные подгруппы $(\mathfrak{D}_{12})_k$ изоморфны группе диэдра $\mathfrak{D}_{12}$ порядка 12. Имеем

$$\text{rk } N_{(\mathfrak{D}_{12})_k} = 16, \quad N_{(\mathfrak{D}_{12})_k}^*/N_{(\mathfrak{D}_{12})_k} \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4.$$

По теореме 4.1 решетка $N_{(\mathfrak{D}_{12})_k}$ имеет примитивное вложение в $L_{\text{КЗ}}$ и $(\mathfrak{D}_{12})_k$ является КалКЗ-подгруппой.

Из структуры группы $A(N)$ вытекает, что сопряженные подгруппы

$$(\mathfrak{D}_{12})_k \cong \mathfrak{D}_{12}, \quad k = 1, \dots, 4,$$

и все их подгруппы задают все КалКЗ-подгруппы из $A(N_{12})$.

Эти нетривиальные подгруппы суть (где k отмечает подгруппы в $(\mathfrak{D}_{12})_k$) изоморфные C_6 сопряженные $(C_6)_4 = [\widetilde{(12)}\widetilde{(23)}]$ подгруппы

$$(C_6)_k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

с подрешеткой $N_{(C_6)_k} = N_{(\mathfrak{D}_{12})_k}$ (поэтому $\text{Clos}(C_6)_k = (\mathfrak{D}_{12})_k$); изоморфные $\mathfrak{D}_6$ подгруппы

$$(\mathfrak{D}_6)_{ki}, \quad k = 1, \dots, 4, \quad i = 1, 2,$$

имеющие $\text{rk } N_{(\mathfrak{D}_6)_{ki}} = 14$, и $N_{(\mathfrak{D}_6)_{ki}}^*/N_{(\mathfrak{D}_6)_{ki}} \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$; изоморфные C_3 сопряженные подгруппы

$$(C_3)_k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

с рангом $\text{rk } N_{(C_3)_k} = 12$, и $N_{(C_3)_k}^*/N_{(C_3)_k} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$; изоморфные $C_2 \times C_2$ сопряженные подгруппы

$$[\widetilde{(ij)}, \varphi_0], \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$

имеющие $\text{rk } N_{[\widetilde{(ij)}, \varphi_0]} = 12$, и $N_{[\widetilde{(ij)}, \varphi_0]}^*/N_{[\widetilde{(ij)}, \varphi_0]} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$; изоморфные C_2 подгруппы

$$[\varphi_0], \quad [\widetilde{(ij)}], \quad [\widetilde{(ij)}\varphi_0], \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$

с коинвариантной подрешеткой, изоморфной $E_8(2)$.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N_{12} = N(4E_6)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{17})) = 4E_6$. Любая такая S задает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_{(\mathfrak{D}_{12})_k} \subset S$ для одного из $k = 1, \dots, 4$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = (\mathfrak{D}_{12})_k \cong \mathfrak{D}_{12}$. Иначе если только $N_{(\mathfrak{D}_6)_{ki}} \subset S$ для одного из $k = 1, \dots, 4$, $i = 1, 2$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = (\mathfrak{D}_6)_{ki} \cong \mathfrak{D}_6$. Иначе если только $N_{(C_3)_k} \subset S$ для одного из $k = 1, \dots, 4$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = (C_3)_k \cong C_3$. Иначе если только $N_{[(ij), \varphi_0]} \subset S$ для $1 \leq i < j \leq 4$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = [(ij), \varphi_0] \cong C_2 \times C_2$. Иначе если только $N_H \subset S$ для одной из $H \in \{[\varphi_0]\} \cup \{[(ij)], [(ij)\varphi_0] \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = H \cong C_2$. Иначе группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $S = [(E_6)_1 = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{61}], N_{(C_3)_4}]_{\text{pr}} \subset N_{12}$. Имеем $\text{rk } S = 18$, $S^*/S \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Поэтому S удовлетворяет теореме 4.1 и задает отметку какой-то X . Получаем $\text{Aut}(X, S)_0 \cong C_3$ и $3E_6 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и нашим предыдущим вычислениям КЗ-поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{12} = N(4E_6)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 18. Для решетки Нимейера

$$N = N_{18} = N(4A_5 \oplus D_4) = [4A_5 \oplus D_4, 2\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{13} + 4\varepsilon_{14}, 2\varepsilon_{11} + 4\varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{14}, \\ 2\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12} + 4\varepsilon_{13}, 3\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{12} + \varepsilon_{15}, 3\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{13} + \varepsilon_{25}, 3\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{14} + \varepsilon_{35}]$$

группа $A = A(N)$ имеет центр $[\varphi_0]$ порядка 2, который сохраняет компоненты диаграмм $4A_5$ и $\mathbb{D}_4$. Группа $A(N)/[\varphi_0] = \mathfrak{S}_4$ является симметрической группой на компонентах $4A_5$ (см. [10, гл. 16]). Элементы A определяются их действием на концы диаграммы $4A_5\mathbb{D}_4$. Группа A порождена инволюциями

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (\alpha_{11}\alpha_{51})(\alpha_{12}\alpha_{52})(\alpha_{13}\alpha_{53})(\alpha_{14}\alpha_{54}), \\ \widetilde{(12)} &= (\alpha_{11}\alpha_{12})(\alpha_{51}\alpha_{52})(\alpha_{14}\alpha_{54})(\alpha_{15}\alpha_{35}), \\ \widetilde{(23)} &= (\alpha_{11}\alpha_{51})(\alpha_{12}\alpha_{13})(\alpha_{52}\alpha_{53})(\alpha_{15}\alpha_{45}), \\ \widetilde{(34)} &= (\alpha_{11}\alpha_{51})(\alpha_{13}\alpha_{14})(\alpha_{53}\alpha_{54})(\alpha_{15}\alpha_{35}). \end{aligned}$$

Аналогично определяются инволюции $\widetilde{(ij)}$, $1 \leq i < j \leq 4$, которые действуют как транспозиции компонент $(A_5)_i$, $(A_5)_j$ и элементов α_{1i} , α_{1j} .

Группа $A = A(N)$ изоморфна $T_{48} = Q_8 \rtimes \mathfrak{S}_3$ (стандартное обозначение; см. [4]). Коинвариантная решетка N_A имеет $\text{rk } N_A = 19$ и $N_A^*/N_A \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

По теореме 4.1 решетка N_A имеет примитивное вложение в L_{K3} и $A = A(N)$ является KahK3 -подгруппой. Любая ее подгруппа также является KahK3 -подгруппой. По-видимому, эти утверждения были впервые отмечены в [7].

Группа $A = A(N)$ имеет с точностью до сопряженности только следующие нетривиальные подгруппы $H \subset A$ и инварианты их коинвариантных подрешеток N_H .

1. Подгруппа H , изоморфная T_{24} (бинарная группа тетраэдра), состоит из элементов A , которые дают четные перестановки компонент $4A_5$. Коинвариантная подрешетка N_H равна N_A , поэтому $\text{Clos}(H) = A$ изоморфна T_{48} и $\text{rk } N_H = 19$, $N_H^*/N_H \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Подгруппы H , изоморфные SD_{16} (силовские 2-подгруппы A), сопряжены подгруппе $[(\widetilde{(34)})(\widetilde{(23)})(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(13)}), (\widetilde{(24)})]$, имеющей $\text{rk } N_H = 18$, и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Подгруппы H , изоморфные C_8 , сопряжены $[(\widetilde{(34)})(\widetilde{(23)})(\widetilde{(12)})]$ с подгруппой $\text{Clos}([(34)(23)(12)]) = [(\widetilde{(34)})(\widetilde{(23)})(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(13)}), (\widetilde{(24)})]$, изоморфной SD_{16} . Таким образом, $N_{[(34)(23)(12)]} = N_{[(\widetilde{(34)})(\widetilde{(23)})(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(13)}), (\widetilde{(24)})]}$, и $\text{rk } N_H = 18$, $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Подгруппа H , изоморфная Q_8 , имеет вид $H = [(\widetilde{(34)})(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(24)})(\widetilde{(13)})]$, ранг $\text{rk } N_H$ равен 17 и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

5. Подгруппы H , изоморфные $\mathfrak{D}_{12}$, сопряжены подгруппе $[(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(23)})]$, имеющей $\text{rk } N_H = 16$, и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$.

6. Подгруппы H , изоморфные C_6 , сопряжены $[(\widetilde{(23)})(\widetilde{(12)})]$ с подгруппой $\text{Clos}([(23)(12)]) = [(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(23)})]$, изоморфной $\mathfrak{D}_{12}$. Поэтому $N_{[(23)(12)]} = N_{[(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(23)})]}$ и $\text{rk } N_H = 16$, $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$.

7. Подгруппы H , изоморфные $\mathfrak{D}_8$, сопряжены подгруппе $[(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(34)})]$, имеющей $\text{rk } N_H = 15$, $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$.

8. Подгруппы H , изоморфные $\mathfrak{D}_6$, сопряжены подгруппе $[\varphi_0(\widetilde{(23)}), (\widetilde{(12)})]$ или подгруппе $[\varphi_0(\widetilde{(13)}), (\widetilde{(23)})]$, имеющим $\text{rk } N_H = 14$, и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$.

9. Подгруппы H , изоморфные C_4 , сопряжены подгруппе $[(\widetilde{(34)})(\widetilde{(12)})]$, имеющей $\text{rk } N_H = 14$, и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

10. Подгруппы H , изоморфные $C_2 \times C_2$, суть $[(ij), \varphi_0]$, $1 \leq i < j \leq 4$, $\text{rk } N_H = 12$, и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.

11. Подгруппы H , изоморфные C_3 , сопряжены подгруппе $[\varphi_0(\widetilde{(23)})(\widetilde{(12)})]$, имеющей $\text{rk } N_H = 12$, и $N_H^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$.

12. Подгруппы H , изоморфные C_2 , суть $[\varphi_0]$, $[(ij)]$ и $[(ij)\varphi_0]$, $1 \leq i < j \leq 4$. Решетка N_H изоморфна $E_8(2)$.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N = N_{18} = N(4A_5 \oplus D_4)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{18})) = 4A_5\mathbb{D}_4$. Любая такая S задает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $S = N_A$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = A \cong T_{48}$. Иначе если только $N_H \subset S$ при $H \cong SD_{16}$ или $H \cong \mathfrak{D}_{12}$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если $N_H \subset S$, где $H \cong Q_8$, $\mathfrak{D}_8$ или $\mathfrak{D}_6$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, $H \cong C_4$ или $H \cong C_3$, то $\text{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, $H \cong C_2$, то $H = \text{Aut}(X, S)_0 = H \cong C_2$. Иначе группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $H = [(\widetilde{(12)}), (\widetilde{(34)})] \cong \mathfrak{D}_8$, и пусть $S = [(A_5)_1 = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{51}], N_H]_{\text{pr}} \subset N_{18}$. Имеем $\text{rk } S = 18$, $S^*/S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ и $q_{S_2} = q_{\theta}^{(2)}(2) \oplus q'$. Поэтому S удовлетворяет теореме 4.1 и задает отметку какой-то X . Тогда $H \subset \text{Aut}(X, S)_0$, $H \cong \mathfrak{D}_8$, и $2A_5 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и нашим предыдущим вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{18} = N(4A_5 \oplus D_4)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 19. Для решетки Нимейера

$$\begin{aligned} N &= N_{19} = N(6D_4) \\ &= [6D_4, \varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{16}, \varepsilon_{12} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{25} + \varepsilon_{36}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{35} + \varepsilon_{26}, \\ &\quad \varepsilon_{23} + \varepsilon_{24} + \varepsilon_{25} + \varepsilon_{26}, \varepsilon_{22} + \varepsilon_{24} + \varepsilon_{35} + \varepsilon_{16}, \varepsilon_{21} + \varepsilon_{24} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{36}] \end{aligned}$$

группа $A = A(N)$ состоит из циклической группы $[\varphi]$ порядка 3, которая сохраняет компоненты связности $6\mathbb{D}_4$, и $A/[\varphi] = \mathfrak{S}_6$ дает симметрическую группу на шести компонентах $6\mathbb{D}_4$ (см. [10, гл. 16, 18]). Элементы группы A определяются их действием на концы компонент $6\mathbb{D}_4$, и она порождена элементом

$$\varphi = (\alpha_{11}\alpha_{31}\alpha_{41})(\alpha_{12}\alpha_{32}\alpha_{42})(\alpha_{13}\alpha_{33}\alpha_{43})(\alpha_{14}\alpha_{34}\alpha_{44})(\alpha_{15}\alpha_{35}\alpha_{45})(\alpha_{16}\alpha_{36}\alpha_{46})$$

и инволюциями

$$\begin{aligned} \widetilde{(12)} &= (\alpha_{41}\alpha_{42})(\alpha_{11}\alpha_{32})(\alpha_{31}\alpha_{12})(\alpha_{13}\alpha_{33})(\alpha_{14}\alpha_{34})(\alpha_{15}\alpha_{35})(\alpha_{16}\alpha_{36}), \\ \widetilde{(23)} &= (\alpha_{11}\alpha_{31})(\alpha_{12}\alpha_{33})(\alpha_{32}\alpha_{13})(\alpha_{42}\alpha_{43})(\alpha_{14}\alpha_{34})(\alpha_{15}\alpha_{45})(\alpha_{36}\alpha_{46}), \\ \widetilde{(34)} &= (\alpha_{11}\alpha_{31})(\alpha_{12}\alpha_{32})(\alpha_{43}\alpha_{44})(\alpha_{13}\alpha_{34})(\alpha_{33}\alpha_{14})(\alpha_{15}\alpha_{35})(\alpha_{16}\alpha_{36}), \\ \widetilde{(45)} &= (\alpha_{11}\alpha_{41})(\alpha_{32}\alpha_{42})(\alpha_{13}\alpha_{33})(\alpha_{44}\alpha_{45})(\alpha_{14}\alpha_{35})(\alpha_{34}\alpha_{15})(\alpha_{16}\alpha_{36}), \\ \widetilde{(56)} &= (\alpha_{11}\alpha_{31})(\alpha_{12}\alpha_{32})(\alpha_{13}\alpha_{33})(\alpha_{14}\alpha_{34})(\alpha_{15}\alpha_{36})(\alpha_{35}\alpha_{16})(\alpha_{45}\alpha_{46}). \end{aligned}$$

Здесь и далее для канонического гомоморфизма $\pi: A \rightarrow \mathfrak{S}_6$ через $\tilde{x}$ обозначается элемент в $\pi^{-1}(x)$ для $x \in \mathfrak{S}_6$. Так же “тильда” используется для подгруппы $G \subset \mathfrak{S}_6$. Таким образом, $\tilde{G}$ – подгруппа в A такая, что π задает изоморфизм групп $\tilde{G}$ и G . Через $\tilde{\tilde{G}}$ обозначается $\pi^{-1}(G)$ для $G \subset \mathfrak{S}_6$.

Опишем КалКЗ-подгруппы H в A . Они могут быть двух типов.

Тип I. КалКЗ-подгруппа $H \subset A = A(N_{19})$ содержит подгруппу $[\varphi]$. Тогда $H = \tilde{\tilde{G}} = \pi^{-1}(G)$ для $G \subset \mathfrak{S}_6$. Достаточно описать все возможные классы сопряженности таких подгрупп G в $\mathfrak{S}_6$.

Поскольку $\text{rk } N_H \leq 19$ для КалКЗ-подгруппы H , группа G должна иметь более двух орбит в $\{1, \dots, 6\}$. Поэтому $G \subset \mathfrak{S}_{1,1,4}$, $G \subset \mathfrak{S}_{1,2,3}$ или $G \subset \mathfrak{S}_{2,2,2}$. Здесь мы пользуемся стандартным обозначением из [4]. Например, $\mathfrak{S}_{1,2,3}$ состоит из всех перестановок группы $\mathfrak{S}_6$, которые переводят в себя подмножества $\{1\}$, $\{2, 3\}$ и $\{4, 5, 6\}$. Знакопеременная подгруппа группы $\mathfrak{S}_{1,2,3}$ обозначается $\mathfrak{A}_{1,2,3}$.

Если $H = \tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}_{1,1,4} = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{A}_{3,4}$, то $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. По теореме 4.1 решетка N_H имеет примитивное вложение в L_{K3} и H является КалКЗ-подгруппой.

Если $H = \tilde{\tilde{\mathfrak{S}}}_{1,2,3} = [\varphi, \widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{S}_{3,3}$, то $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Для 3-компоненты $q_{N_{H3}}$ дискриминантной формы q_{N_H} решетки N_H получаем

$$\det K(q_{N_{H3}}) = \det \begin{pmatrix} -6948 & -5022 & 108 & 144 \\ -5022 & -3684 & 78 & 108 \\ 108 & 78 & -18 & 0 \\ 144 & 108 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

над $\mathbb{Z}_3$ и $\det K(q_{N_{H_3}}) \equiv 2^5 \cdot 3^5 \cdot 61 \cdot 109 \equiv -3^5 \pmod{(\mathbb{Z}_3^*)^2}$. По теореме 4.1 решетка N_H имеет примитивное вложение в L_{K3} и H является КалКЗ-подгруппой.

Если $H = \widetilde{\mathfrak{S}}_{2,2,2} = [\varphi, \widetilde{(12)}, \widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}]$, где $\mathfrak{S}_{2,2,2} \cong (C_2)^3$, то $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. По теореме 4.1 решетка N_H не имеет примитивного вложения в L_{K3} и H не является КалКЗ-подгруппой. Такую же коинвариантную подрешетку N_H имеют подгруппы $H \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_{2,2,2}$, которые сопряжены $[\varphi, \widetilde{(12)}\widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}]$, $[\varphi, \widetilde{(12)}\widetilde{(34)}, \widetilde{(34)}\widetilde{(56)}]$ или $[\varphi, \widetilde{(12)}\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}]$.

Отсюда следует, что КалКЗ-подгруппы типа I – это подгруппы типа I, которые сопряжены подгруппам $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1,4} = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{A}_{3,4}$ и $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,2,3} = [\varphi, \widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{S}_{3,3}$, перечислить их все достаточно легко.

Те из них, которые сопряжены подгруппам типа I из $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1,4} = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{A}_{3,4}$, сопряжены одной из следующих подгрупп:

(I.1) $H = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1,4} \cong \mathfrak{A}_{3,4}$ с рангом $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

(I.2) $H = [\varphi, \widetilde{(34)}\widetilde{(45)}, \widetilde{(34)}\widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{A}}_{1,1,4} \cong C_3 \times \mathfrak{A}_4$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1,4} \cong \mathfrak{A}_{3,4}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

(I.3) $H = [\varphi, \widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(35)}] = \widetilde{D}_8 \cong D_8 \ltimes C_3$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1,4} \cong \mathfrak{A}_{3,4}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

(I.4) $H = [\varphi, \widetilde{(34)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] = \widetilde{K}_4 \cong C_2 \times C_6$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1,4} \cong \mathfrak{A}_{3,4}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; здесь $K_4 \cong C_2 \times C_2$ – нормальная подгруппа Клейна² в группе $\mathfrak{S}_{1,1,4} \cong \mathfrak{S}_4$;

(I.5) $H = [\varphi, \widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] = \widetilde{C}_4 \cong Q_{12}$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,1,4} \cong \mathfrak{A}_{3,4}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; здесь $C_4 \subset \mathfrak{S}_{1,1,4} \cong \mathfrak{S}_4$ – циклическая подгруппа порядка 4 и Q_{12} – бинарная группа диэдра порядка 12;

(I.6) $H = [\varphi, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{A}_{3,3}$ с $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$;

(I.7) $H = [\varphi, \widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] \cong (C_3)^2$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{A}_{3,3}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 16$, группа $(N_H)^*/N_H$ изоморфна³ группе $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$;

²Эти вычисления показывают, что для симплектической группы $G = C_2 \times C_6$ на кэлеровой КЗ-поверхности имеем $S_{(G)}^*/S_{(G)} = S_{(2,6)}^*/S_{(2,6)} \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Именно так мы должны исправить наше вычисление этой группы в [3, предложение 10.1].

³Эти вычисления показывают, что для симплектической группы $G = (C_3)^2$ на кэлеровой КЗ-поверхности имеем $S_{(G)}^*/S_{(G)} = S_{(3,3)}^*/S_{(3,3)} \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. Именно так мы должны исправить наше вычисление этой группы в [3, предложение 10.1].

$$(I.8) \quad H = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{D}_{12}, \operatorname{rk} N_H = 16, (N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4;$$

$$(I.9) \quad H = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] \cong C_6 \text{ с подгруппой } \operatorname{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{D}_{12}, \text{ приведенной выше, и } \operatorname{rk} N_H = 16, (N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4;$$

$$(I.10) \quad H = [\varphi, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{D}_6, \operatorname{rk} N_H = 14, (N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3;$$

$$(I.11) \quad H = [\varphi] = \widetilde{\{e\}} \cong C_3 \text{ и } \operatorname{rk} N_H = 12, (N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6.$$

Те их них, которые сопряжены подгруппам типа I в $\widetilde{\mathfrak{S}}_{1,2,3} = [\varphi, \widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{S}_{3,3}$ и отличны от приведенных выше подгрупп (I.1)–(I.11), сопряжены одной их следующих подгрупп:

$$(I'.1) \quad H = [\varphi, \widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,2,3} \cong \mathfrak{S}_{3,3} \text{ и } \operatorname{rk} N_H = 18, (N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2;$$

$$(I'.2) \quad H = [\varphi, \widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong C_3 \times \mathfrak{D}_6 \text{ с подгруппой } \operatorname{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,2,3} \cong \mathfrak{S}_{3,3} \text{ и } \operatorname{rk} N_H = 18, (N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2.$$

Тип II. КалКЗ-подгруппа $H \subset A = A(N_{19})$ не содержит подгруппу $[\varphi]$. Тогда π дает изоморфизм $\pi: H \rightarrow \pi(H) = G \subset \mathfrak{S}_6$. Достаточно описать все возможные классы сопряженности G в $\mathfrak{S}_6$ и их подъемы до $H = \widetilde{G} \subset A$.

Поскольку $\operatorname{rk} N_H \leq 19$, подгруппа G должна иметь по крайней мере две орбиты в $\{1, \dots, 6\}$. Таким образом, $H = \widetilde{G}$, где либо $G \subset \mathfrak{S}_{1,5}$, либо $G \subset \mathfrak{S}_{2,4}$ или $G \subset \mathfrak{S}_{3,3}$ (с точностью до сопряженности).

Рассмотрим случаи, когда $G \subset \mathfrak{S}_{1,5}$. Легко видеть, что для $G = \mathfrak{S}_{1,5}$ получаем (с точностью до сопряженности в A):

$$(II.1) \quad H = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \varphi, \widetilde{(56)}] = \widetilde{\mathfrak{S}}_{1,5} \cong \mathfrak{S}_5 \text{ и } \operatorname{rk} N_H = 19, (N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \text{ по теореме 4.1 решетка } N_H \text{ имеет примитивное вложение в } L_{K3} \text{ и } H \text{ является КалКЗ-подгруппой.}$$

В частности, для всех $G \subset \mathfrak{S}_{1,5}$ получаем КалКЗ-подгруппу

$$\widetilde{G} = \pi^{-1}(G) \cap [\widetilde{(23)}, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \varphi, \widetilde{(56)}] \cong G.$$

Для каждой $G \subset \mathfrak{S}_{1,5}$ можно дополнительно проверить, что это единственный подъем G до подгруппы $\widetilde{G} \subset A$ с точностью до сопряженности в A , если G отлична от $\mathfrak{S}_4$ и $\mathfrak{A}_4$. Каждая из подгрупп $\mathfrak{S}_4$ и $\mathfrak{A}_4$ имеет два подъема.

Перечислим подгруппы $H = \widetilde{G} \subset [\widetilde{(23)}, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \varphi, \widetilde{(56)}]$ для каждого из 17 нетривиальных классов сопряженности подгрупп $G \subset \mathfrak{S}_5$ и дополнительные классы сопряженности для $G \cong \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_4$:

$$(II.2) \quad H = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \varphi, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(34)}] \cong [(23456), (234)] \cong \mathfrak{A}_5 \text{ и } \operatorname{rk} N_H = 18, (N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z};$$

$$(II.3) \quad H = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \varphi, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}, \varphi, \widetilde{(45)}] \cong [(23456), (3465)] \cong \operatorname{Hol}(C_5) = C_5 \rtimes \operatorname{Aut}(C_5) \text{ и } \operatorname{rk} N_H = 18, (N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z};$$

(II.4) $H = [\widetilde{(23)}\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}, \widetilde{(56)}\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}\widetilde{(45)}\varphi] = [\widetilde{(23456)}, \widetilde{(36)}\widetilde{(45)}] \cong \mathfrak{D}_{10}$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$;

(II.5) $H = [\widetilde{(23)}\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(23)}\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] \cong C_5$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\widetilde{(23)}\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}, \widetilde{(56)}\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}\widetilde{(45)}\varphi] = [\widetilde{(23456)}, \widetilde{(36)}\widetilde{(45)}] \cong \mathfrak{D}_{10}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$;

(II.6) $H = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}\varphi, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{S}_4$ и $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(II.6') $H = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{S}_4$ и $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(II.7) $H = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(456)}] \cong \mathfrak{A}_4$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(II.7') $H = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(456)}] \cong \mathfrak{A}_4$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(II.8) $H = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}\varphi, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{D}_{12}$, $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$;

(II.9) $H = [\widetilde{(23)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(23)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] \cong C_6$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}\varphi, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{D}_{12}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$;

(II.10) $H = [\widetilde{(23)}\widetilde{(45)}\varphi, \widetilde{(23)}\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(23)}\widetilde{(45)}, \widetilde{(23)}\widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{D}_6$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$;

(II.11) $H = [\widetilde{(45)}\varphi, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(45)}, \widetilde{(56)}] \cong \mathfrak{D}_6$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$;

(II.12) $H = [\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}, \widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(34)}] = [\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(35)}] \cong \mathfrak{D}_8$ и $\text{rk } N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$;

(II.13) $H = [\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] \cong C_4$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(II.14) $H = [\widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}] \cong C_3$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$;

(II.15) $H = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(45)}\varphi\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}\widetilde{(45)}\varphi] = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}, \widetilde{(35)}\widetilde{(46)}] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(II.16) $H = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}, \widetilde{(56)}] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(II.17) $H = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(34)}\widetilde{(56)}] \cong C_2$ и $\text{rk } N_H = 8$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$;

(II.18) $H = [\widetilde{(56)}] = [\widetilde{(56)}] \cong C_2$ и $\text{rk } N_H = 8$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$.

Легко видеть, что если $G \subset \mathfrak{S}_{3,3}$ и G не имеет 1-элементную орбиту (эквивалентно, G не сопряжена подгруппе из $\mathfrak{S}_{1,5}$), то G содержит элемент циклического типа $[3, 3]$. Тогда $H = \widetilde{G}$ содержит одну из подгрупп $H_1 = [\widetilde{(12)}\widetilde{(23)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}]$, $[\widetilde{(12)}\widetilde{(23)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}\varphi]$ или $[\widetilde{(12)}\widetilde{(23)}\widetilde{(45)}\widetilde{(56)}\varphi^2]$ (с точностью до сопряженности) такую, что $\text{rk } N_{H_1} = 16$ и $N_{H_1}^*/N_{H_1} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8$. По теореме 4.1 решетка N_{H_1} не имеет примитивного вложения в L_{K3} и ни одна из таких подгрупп H_1 не является КалКЗ-подгруппой. Тогда $H = \widetilde{G}$ также не является КалКЗ-подгруппой.

Аналогично, если $G \subset \mathfrak{S}_{2,4}$ и G не имеет 1-элементной орбиты, то либо G содержит элемент циклического типа $[2, 2, 2]$ или $[2, 4]$, либо G сопряжена подгруппе $[(12)(34), (12)(56)]$, изоморфной $(C_2)^2$. В первом случае подгруппа $H = \tilde{G}$ содержит подгруппу $H_1 = [(12)(34)(56)]$ (с точностью до сопряженности) такую, что $\text{rk } N_{H_1} = 12$ и $N_{H_1}^*/N_{H_1} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$. Во втором случае подгруппа $H = \tilde{G}$ содержит подгруппу $H_1 = [(12)(34)(45)(56)]$ (с точностью до сопряженности) такую, что $\text{rk } N_{H_1} = 16$ и $N_{H_1}^*/N_{H_1} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. По теореме 4.1 ни одна из таких решеток N_{H_1} не имеет примитивного вложения в L_{K3} и ни одна из таких подгрупп H_1 не является KahK3-подгруппой. Тогда $H = \tilde{G}$ также не является KahK3-подгруппой. Последний случай задает следующую подгруппу:

(II'.1) $H = [(12)(34), (12)(56)] \cong (C_2)^2$ (с точностью до сопряженности) такую, что $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$; по теореме 4.1 решетка N_H имеет примитивное вложение в L_{K3} и H является KahK3-подгруппой.

Данный случай интересен, так как инвариантная решетка N^H не имеет корней (с квадратом (-2)).

В результате получаем список всех KahK3-классов сопряженности подгрупп из $A = A(N_{19})$, которые суть вышеприведенные подгруппы (I.1)–(I.11), (I'.1), (I'.2), (II.1)–(II.18), (II.6'), (II.7'), (II'.1).

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N = N_{19} = N(6D_4)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{19})) = 6\mathbb{D}_4$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.1) ($H \cong \mathfrak{A}_{3,4}$), (I'.1) ($H \cong \mathfrak{S}_{3,3}$), (II.1) ($H \cong \mathfrak{S}_5$) или (II'.1) ($H \cong (C_2)^2$), то $\text{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.6) ($H \cong \mathfrak{A}_{3,3}$), (I.8) ($H \cong \mathfrak{D}_{12}$), (II.2) ($H \cong \mathfrak{A}_5$), (II.3) ($H \cong \text{Hol}(C_5)$), (II.6) ($H \cong \mathfrak{S}_4$), (II.8) ($H \cong \mathfrak{D}_{12}$) или (II.7') ($H \cong \mathfrak{A}_4$), то $\text{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.10) ($H \cong \mathfrak{D}_6$), (II.4) ($H \cong \mathfrak{D}_{10}$), (II.7) ($H \cong \mathfrak{A}_4$), (II.10) ($H \cong \mathfrak{D}_6$), (II.11) ($H \cong \mathfrak{D}_6$) или (II.12) ($H \cong \mathfrak{D}_8$), то $\text{Aut}(X, S)_0 \cong H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (II.13) ($H \cong C_4$), (II.14) ($H \cong C_3$), (II.15) ($H \cong (C_2)^2$) или (II.16) ($H \cong (C_2)^2$), то $\text{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (II.17) ($H \cong C_2$) или (II.18) ($H \cong C_2$), то $\text{Aut}(X, S)_0 \cong H$. Иначе группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $H = [(34), (45)\varphi, (56)] = [(34), (45), (56)] \cong \mathfrak{S}_4$ имеет тип (II.6), и пусть $S = [(D_4)_6 = [\alpha_{16}, \dots, \alpha_{46}], N_H]_{\text{pr}} \subset N_{19}$. Имеем $\text{rk } S = 19$ и $S^*/S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Таким образом, S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Получаем, что $H \subset \text{Aut}(X, S)_0$, где $H \cong \mathfrak{S}_4$, и $4\mathbb{D}_4 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и приведенным выше вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{19} = N(6D_4)$ для такой подрешетки $S \subset S_X$.

Случай 20. Для решетки Нимейера

$$N = N_{20} = N(6A_4) = [6A_4, [1(01441)]] = [6A_4, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} - \varepsilon_{14} - \varepsilon_{15} + \varepsilon_{16},$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{14} - \varepsilon_{15} - \varepsilon_{16}, \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{15} - \varepsilon_{16},$$

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{16}, \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} - \varepsilon_{14} + \varepsilon_{15}]$$

группа $A = A(N_{20})$ состоит из циклической группы $[\varphi]$ порядка 2, сохраняющей связные компоненты $6\mathbb{A}_4$, и группы $A/[\varphi] = \mathfrak{S}_5$, которая действует строго перестановками шести связных компонент $6\mathbb{A}_4$ (см. [10, гл. 16, 18]). Группа $\mathfrak{S}_5$ действует на следующие пять троек классов элементов из $N_{20}/6\mathbb{A}_4$:

$$\begin{aligned}\tilde{1} &= \{2\varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{12} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{15}, \varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{14} - 2\varepsilon_{15} - \varepsilon_{16}, 2\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} - \varepsilon_{16}\}, \\ \tilde{2} &= \{2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{13} - \varepsilon_{14}, \varepsilon_{12} - \varepsilon_{14} - 2\varepsilon_{15} + 2\varepsilon_{16}, 2\varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{13} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{16}\}, \\ \tilde{3} &= \{2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{14} - \varepsilon_{15}, \varepsilon_{12} - 2\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{15} - \varepsilon_{16}, -2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{14} - \varepsilon_{16}\}, \\ \tilde{4} &= \{-2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{15}, \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{14} - 2\varepsilon_{16}, 2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{14} + 2\varepsilon_{15} - \varepsilon_{16}\}, \\ \tilde{5} &= \{2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} - 2\varepsilon_{16}, \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{13} - 2\varepsilon_{14} - \varepsilon_{15}, -\varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{12} - 2\varepsilon_{15} - \varepsilon_{16}\}.\end{aligned}$$

Нетрудно дать их точное определение.

Группа $A = A(N_{20})$ определяется действием на концы компонент $6\mathbb{A}_4$. Она порождена инволюцией

$$\varphi = (\alpha_{11}\alpha_{41})(\alpha_{12}\alpha_{42})(\alpha_{13}\alpha_{43})(\alpha_{14}\alpha_{44})(\alpha_{15}\alpha_{45})(\alpha_{16}\alpha_{46})$$

и соответствующими транспозициями элементов $\tilde{1}, \dots, \tilde{5}$:

$$\begin{aligned}(\widetilde{12}) &= (\alpha_{11}\alpha_{15}\alpha_{41}\alpha_{45})(\alpha_{12}\alpha_{46}\alpha_{42}\alpha_{16})(\alpha_{13}\alpha_{44}\alpha_{43}\alpha_{14}), \\ (\widetilde{23}) &= (\alpha_{11}\alpha_{16}\alpha_{41}\alpha_{46})(\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{42}\alpha_{43})(\alpha_{14}\alpha_{45}\alpha_{44}\alpha_{15}), \\ (\widetilde{34}) &= (\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{41}\alpha_{42})(\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{43}\alpha_{44})(\alpha_{15}\alpha_{46}\alpha_{45}\alpha_{16}), \\ (\widetilde{45}) &= (\alpha_{11}\alpha_{13}\alpha_{41}\alpha_{43})(\alpha_{12}\alpha_{16}\alpha_{42}\alpha_{46})(\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{44}\alpha_{45}),\end{aligned}$$

имеющими порядок 4 в A .

Для $H = [\varphi]$ имеем $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$. По теореме 4.1 решетка N_H не имеет примитивного вложения в L_{K3} и $H = [\varphi]$ не является KahK3-подгруппой. Поэтому каноническая проекция $\pi: A \rightarrow \mathfrak{S}_5$ дает изоморфизм $\pi|_H: H \rightarrow \pi(H) = G \subset \mathfrak{S}_5$ для любой KahK3-подгруппы $H \subset A$, которая обозначается $H = \tilde{G}$. Рассмотрим возможные G и H для KahK3-подгрупп $H \subset A$ с точностью до сопряженности (в $\mathfrak{S}_5$ и A).

Имеем

$$(\widetilde{12})^2 = ((\widetilde{12})(\widetilde{23}))^3 = ((\widetilde{12})(\widetilde{23})(\widetilde{34})(\widetilde{45})\varphi)^5 = ((\widetilde{12})(\widetilde{34})(\widetilde{45}))^6 = \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}[(\widetilde{12})], \quad [(\widetilde{12})\varphi], \quad [(\widetilde{12})(\widetilde{23})] &= [(\widetilde{123})], \\ [(\widetilde{12})(\widetilde{23})(\widetilde{34})(\widetilde{45})\varphi] &= [(\widetilde{12345})], \quad [(\widetilde{12})(\widetilde{34})(\widetilde{45})], \quad [(\widetilde{12})(\widetilde{34})(\widetilde{45})\varphi] = [(\widetilde{12})(\widetilde{345})]\end{aligned}$$

не являются KahK3-подгруппами.

Подгруппа $H = [(\widetilde{12})(\widetilde{34})\varphi] \cong C_2$ имеет $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$. По теореме 4.1 она не является KahK3-подгруппой.

Из этих вычислений и известного списка классов сопряженности подгрупп в $\mathfrak{S}_5$ получаем список KahK3-подгрупп в $A = A(6\mathbb{A}_4)$ с точностью до сопряженности:

1) $H = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}, \widetilde{(45)(23)(34)}] = [\widetilde{(12345)}, \widetilde{(2354)}] \cong \text{Hol}(C_5)$ и $H = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}, \widetilde{(45)(23)(34)\varphi}] = [\widetilde{(12345)}, \widetilde{(2354)}] \cong \text{Hol}(C_5)$ такие, что $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$;

2) $H = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}, \widetilde{(45)(23)(34)(23)(45)(34)}] = [\widetilde{(12345)}, \widetilde{(25)(34)}] \cong \mathfrak{D}_{10}$ такая, что $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$;

3) $H = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}] = [\widetilde{(12345)}] \cong C_5$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}, \widetilde{(45)(23)(34)(23)(45)(34)}] \cong \mathfrak{D}_{10}$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$;

4) $H = [\widetilde{(12)(23)(34)}] = [\widetilde{(1234)}] \cong C_4$ и $H = [\widetilde{(12)(23)(34)\varphi}] = [\widetilde{(1234)}] \cong C_4$ такие, что $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

5) $H = [\widetilde{(12)(34)}] = [\widetilde{(12)(34)}] \cong C_2$ и $\text{rk } N_H = 8$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N = N_{20} = N(6A_4)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{20})) = 6A_4$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_H \subset S$, где H имеет тип 1) ($H \cong \text{Hol}(C_5)$), 2) ($H \cong \mathfrak{D}_{10}$) или тип 4) ($H \cong C_4$), то $\text{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип 5) ($H \cong C_2$), то $\text{Aut}(X, S)_0 = H \cong C_2$. Иначе группа $\text{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $H = [\widetilde{(12)(23)(34)}] \cong C_4$ имеет тип 4). Пусть $S = [(A_4)_1 = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{41}], A_2 = [\alpha_{22}, \alpha_{32}], N_H]_{\text{pr}} \subset N_{20}$. Тогда $\text{rk } S = 19$ и $S^*/S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Таким образом, S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Имеем $H \subset \text{Aut}(X, S)_0$, где $H \cong C_4$, и $4A_4A_2 \subset \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$, где $H \cong C_4$ действует транзитивно на четыре компоненты диаграммы $4A_4$ и переставляет элементы α_{22} , α_{32} компоненты A_2 . По классификации решеток Нимейера и приведенным выше вычислениям X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{20} = N(6A_4)$ для такой $S \subset S_X$.

Случай 21. Для решетки Нимейера

$$\begin{aligned} N = N_{21} = N(8A_3) = [8A_3, [3(2001011)]] &= [8A_3, -\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{12} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{17} + \varepsilon_{18}, \\ &-\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + 2\varepsilon_{13} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_{18}, -\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{14} + \varepsilon_{17}, \\ &-\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} + 2\varepsilon_{15} + \varepsilon_{18}, -\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{15} + 2\varepsilon_{16}, \\ &-\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{16} + 2\varepsilon_{17}, -\varepsilon_{11} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_{17} + 2\varepsilon_{18}] \end{aligned}$$

группа $A = A(N_{21})$ состоит из циклической группы $[\varphi]$ порядка 2, которая сохраняет связные компоненты $8A_3$, и $A/[\varphi] = \text{Aff}(3, \mathbb{F}_2)$ является аффинной группой 3-мерного аффинного пространства над $\mathbb{F}_2$, задаваемого восемью компонентами $(A_3)_i$, $1 \leq i \leq 8$, диаграммы $8A_3$. Здесь 4-элементное подмножество $\{i, j, k, l\} \subset \{1, \dots, 8\}$ является плоскостью данного аффинного пространства, если и только если $2(\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{1j} + \varepsilon_{1k} + \varepsilon_{1l}) \in N/8A_3$. Так, $\{1, 5, 7, 8\}$, $\{1, 2, 6, 8\}$, $\{1, 2, 3, 7\}$, $\{1, 3, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$ и $\{1, 4, 6, 7\}$ задают все плоскости, содержащие 1. Таким образом, можно ввести аффинные координаты, где $1 = (000)$, $2 = (100)$, $3 = (010)$, $4 = (001)$, $5 = (101)$, $6 = (111)$, $7 = (110)$, $8 = (111)$ (здесь элементы троек рассматриваются по mod 2). Элементы A определяются действием на концы $8A_3$. Инволюция φ имеет вид

$$\varphi = (\alpha_{11}\alpha_{31})(\alpha_{12}\alpha_{32})(\alpha_{13}\alpha_{33})(\alpha_{14}\alpha_{34})(\alpha_{15}\alpha_{35})(\alpha_{16}\alpha_{36})(\alpha_{17}\alpha_{37})(\alpha_{18}\alpha_{38}).$$

Группа переноса в A порождается переносами

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{12} &= (\alpha_{11}\alpha_{12})(\alpha_{31}\alpha_{32})(\alpha_{13}\alpha_{17})(\alpha_{33}\alpha_{37})(\alpha_{14}\alpha_{15})(\alpha_{34}\alpha_{35})(\alpha_{16}\alpha_{18})(\alpha_{36}\alpha_{38}), \\ \tilde{T}_{13} &= (\alpha_{11}\alpha_{13})(\alpha_{31}\alpha_{33})(\alpha_{12}\alpha_{17})(\alpha_{32}\alpha_{37})(\alpha_{14}\alpha_{18})(\alpha_{34}\alpha_{38})(\alpha_{15}\alpha_{16})(\alpha_{35}\alpha_{36}), \\ \tilde{T}_{14} &= (\alpha_{11}\alpha_{14})(\alpha_{31}\alpha_{34})(\alpha_{12}\alpha_{15})(\alpha_{32}\alpha_{35})(\alpha_{13}\alpha_{18})(\alpha_{33}\alpha_{38})(\alpha_{16}\alpha_{17})(\alpha_{36}\alpha_{37}).\end{aligned}$$

Здесь $T_{ij}(i) = j$ и $\pi(\tilde{T}_{ij}) = T_{ij}$ для канонического гомоморфизма $\pi: A \rightarrow \text{Aff}(3, \mathbb{F}_2)$.

Подгруппа $H = [\varphi] \cong C_2$ имеет $\text{rk } N_H = 8$, и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Таким образом, N_H удовлетворяет теореме 4.1, и $H = [\varphi] \cong C_2$ является KahK3-подгруппой.

Подгруппа $H = [\tilde{T}_{12}] \cong C_2$ имеет $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$. Поэтому N_H не удовлетворяет теореме 4.1 и $H = [\tilde{T}_{12}] \cong C_2$ не является KahK3-подгруппой. То же самое имеет место для подгруппы $H = [\varphi\tilde{T}_{12}] \cong C_2$.

Отсюда следует, что KahK3-подгруппы $H \subset A$ имеют тривиальные подгруппы переноса в $\text{Aff}(3, \mathbb{F}_2)$:

(*) для канонического гомоморфизма $\bar{\pi}: A \rightarrow \text{Gl}(3, \mathbb{F}_2)$ ядро гомоморфизма $\bar{\pi}|_H: H \rightarrow \text{Gl}(3, \mathbb{F}_2)$ содержится в $[\varphi] \cong C_2$.

Опишем возможные KahK3-подгруппы $H \subset A$ и их образы $G = \pi(H)$ для канонического гомоморфизма $\pi: A \rightarrow \text{Aff}(3, \mathbb{F}_2)$.

Пусть $H \subset A$ является KahK3-подгруппой, т.е. N_H удовлетворяет теореме 4.1. Тогда $\text{rk } N_H \leq 19$. Отсюда следует, что группа $G = \pi(H)$ должна иметь по крайней мере две орбиты в $\{1, \dots, 8\}$. Мы хотим показать, что G имеет 1-элементную орбиту.

Пусть G имеет 2-элементную орбиту $\{1, 2\}$ и не имеет 1-элементной орбиты. Тогда группа G сохраняет вектор $12 = (100)$ и ее линейная часть $\bar{G}$ содержится в $\mathfrak{S}_4$, где

$$\mathfrak{S}_4 = \{f \in \text{Aff}(3, \mathbb{F}_2) \mid f(1) = 1, f(2) = 2\}$$

состоит из матриц с нулем 1 и собственным вектором $\{1, 2\} = (100)$. Для нуля 1 и базиса $\{1, 2\} = (100)$, $\{1, 3\} = (010)$, $\{1, 4\} = (001)$ группа $\mathfrak{S}_4$ является симметрической группой для ее действия сопряжениями на четыре циклические подгруппы порядка 3 в $\mathfrak{S}_4$, которые суть

$$\begin{aligned}C_{13} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & C_{23} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_{33} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & C_{43} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом, для построения G и затем H нужно взять подгруппу $\bar{G} \subset \mathfrak{S}_4$ и изменить некоторые из ее образующих g на $T_{12}g$. Полученная группа G должна быть изоморфна ее линейной части $\bar{G}$ и не должна иметь 1-элементных орбит в $\{1, \dots, 8\}$.

Пусть $\bar{G} = [F_{13}] = C_{13} \cong C_3$, где $F_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Преобразование $T_{12}F_{13}$ дает перестановку $(12)(358746)$ порядка 6 вместо 3. Поэтому мы не получаем KahK3-подгруппу в силу вышеприведенного свойства (*).

Пусть $\overline{G} = [F_4] \cong C_4$, где $F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Преобразование $T_{12}F_4$ дает перестановку (12)(3574), которая имеет тот же порядок 4, но оно имеет 1-элементные орбиты $\{6\}$ и $\{8\}$. Поэтому мы не получаем искомого KahK3-подгруппу.

Пусть $\overline{G} = [F_{12}] \cong C_2$, где $F_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является нечетным элементом в $\mathfrak{S}_4$. Преобразование $T_{12}F_{12}$ задает перестановку (12)(37)(46)(58). Оно дает перенос T_{12} в плоскости $\{1, 2, 3, 7\}$ и другой перенос T_{46} в параллельной плоскости $\{4, 5, 6, 8\}$ и поднимается до элемента

$$\widetilde{T_{12}F_{12}} = (\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{31}\alpha_{32})(\alpha_{13}\alpha_{17}\alpha_{33}\alpha_{37})(\alpha_{14}\alpha_{36}\alpha_{34}\alpha_{16})(\alpha_{15}\alpha_{18}\alpha_{35}\alpha_{38})$$

в A такого, что $(\widetilde{T_{12}F_{12}})^2 = \varphi$. Подгруппа $H = [\widetilde{T_{12}F_{12}}] \subset A$ имеет $\text{rk } N_H = 16$, и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Решетка N_H не удовлетворяет теореме 4.1, и H не является KahK3-подгруппой.

Пусть $\overline{G} = [F_{22}] \cong C_2$, где $F_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является четным элементом в $\mathfrak{S}_4$. Преобразование $T_{12}F_{22}$ задает перестановку (12)(45). Оно является переносом T_{12} в плоскости $\{1, 2, 4, 5\}$ и тождественно в параллельной плоскости $\{3, 6, 7, 8\}$. Таким образом, это преобразование имеет 1-элементные орбиты и не дает искомой KahK3-подгруппы H .

Пусть $\overline{G} = [F_{12}, F'_{12}] \subset \mathfrak{S}_4$ является не нормальной подгруппой Клейна, где F_{12} и F'_{12} – коммутирующие нечетные транспозиции. Для группы G одна из F_{12} , F'_{12} должна быть заменена на одну из $T_{12}F_{12}$, $T_{12}F'_{12}$, которая не порождает KahK3-подгруппу, как мы видели. Мы не получаем искомой KahK3-подгруппы.

Пусть $\overline{G} = [F_{22}, F'_{22}] \subset \mathfrak{S}_4$ – нормальная подгруппа Клейна, где F_{22} и F'_{22} – различные четные элементы порядка 2. Для группы G одна из F_{22} , F'_{22} должна быть заменена на одну из $T_{12}F_{22}$, $T_{12}F'_{22}$, но тогда группа G будет иметь 1-элементную орбиту, что вытекает из приведенных выше рассуждений. Таким образом, мы не получаем искомой KahK3-подгруппы.

Пусть $\overline{G} = [F_4, F'_{12}] \cong \mathfrak{D}_8$, где F_4 – приведенная выше матрица и $F'_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – нечетный элемент из $\mathfrak{S}_4$ порядка 2. Как мы видели, группа G есть $[T_{12}F_4, F'_{12}]$. Здесь $T_{12}F_4$ задает перестановку (12)(3574), а F'_{12} – перестановку (34)(57). Группа G имеет 1-элементные орбиты $\{6\}$ и $\{8\}$. Таким образом, мы не получаем искомого KahK3-подгруппу.

Пусть $\overline{G} = [F_{13}, F'_{12}] \cong \mathfrak{S}_3$, где F_{13} приведена ранее и $F'_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – нечетный элемент в $\mathfrak{S}_4$ порядка 2 такой, что $F'_{12}F_{13}F'_{12} = (F_{13})^2$. Как мы видели, мы не можем заменить ни одну из F_{13} и F'_{12} на $T_{12}F_{13}$ и $T_{12}F'_{12}$ соответственно, так как тогда мы не получаем KahK3-подгруппы. Таким образом, мы не получаем искомого KahK3-подгруппу.

Пусть $\overline{G} = [F_{13}, F'_{13}] \cong \mathfrak{A}_4$, где матрица F_{13} была приведена ранее и F'_{13} – другая матрица порядка 3. Как мы видели, мы не можем заменить F_{13} и F'_{13} на $T_{12}F_{13}$ и $T_{12}F'_{13}$ соответственно, так как тогда мы не получаем KahK3-подгруппу. Таким образом, мы не получаем искомого KahK3-подгруппу.

Пусть $\overline{G} = [F_{12}, F'_{12}, F''_{12}] = \mathfrak{S}_4$, где F_{12} , F'_{12} , F''_{12} – нечетные элементы порядка 2. Как мы видели, мы не можем заменить F_{12} , F'_{12} , F''_{12} на $T_{12}F_{12}$,

$T_{12}F1'_2, T_{12}F1''_2$ соответственно, так как тогда мы не получаем KahK3-подгруппу. Таким образом, мы не получаем искомую KahK3-подгруппу.

В результате мы показали, что G должна иметь 1-элементную орбиту, если она имеет 2-элементную орбиту.

Теперь предположим, что G не имеет 1-элементной орбиты и 2-элементной орбиты, но имеет 3-элементную орбиту. Эти три элемента порождают плоскость из четырех элементов. Дополнительный элемент этой плоскости тогда дает 1-элементную орбиту. Противоречие.

Предположим теперь, что G имеет две орбиты из четырех элементов.

Во-первых, предположим, что данные орбиты являются общими, т. е. не дают плоскости. Мы можем предположить, что одна из орбит есть $\{1, 2, 3, 4\}$. Тогда G должна содержать четную перестановку g порядка 2 в $\{1, 2, 3, 4\}$. Мы можем также предположить, что это перестановка (13)(24). На всех элементах она дает (13)(24)(78)(65) и поднимается до элемента

$$g = (\alpha_{11}\alpha_{13}\alpha_{31}\alpha_{33})(\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{32}\alpha_{34})(\alpha_{17}\alpha_{38}\alpha_{37}\alpha_{18})(\alpha_{16}\alpha_{15}\alpha_{36}\alpha_{35})$$

из A такого, что $g^2 = \varphi$. Тогда $H = [g]$ должна быть KahK3-подгруппой. Имеем $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. По теореме 4.1 группа H не может быть KahK3-подгруппой, и мы получаем противоречие.

Во-вторых, предположим, что эти 4-элементные орбиты дают параллельные плоскости. Мы можем предположить, что они суть $\{1, 3, 5, 6\}$ и $\{2, 4, 7, 8\}$. Тогда G должна содержать четную перестановку g порядка 2 в $\{1, 3, 5, 6\}$. Мы можем также предположить, что g есть (13)(65). Если g не тождественна в $\{2, 4, 7, 8\}$ и, например, $g(2) = 4$, то $g = (13)(24)(78)(65)$. Как и выше, получаем противоречие. Таким образом, g должна быть тождественна в $\{2, 4, 7, 8\}$, и $g = (13)(56)$. Рассматривая другую плоскость $\{2, 4, 7, 8\}$, аналогично мы можем построить четную перестановку $g' \in G$ порядка 2 в $\{2, 4, 7, 8\}$, которая тождественна в $\{1, 3, 5, 6\}$. Например, мы можем предположить, что $g' = (24)(78)$. Тогда $gg' = (13)(24)(78)(65)$ и, как и выше, получаем противоречие.

Далее, обозначим

$$\text{Gl}(3, \mathbb{F}_2) = \{f \in \text{Aff}(3, \mathbb{F}_2), f(1) = 1\}$$

порядка $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$. Таким образом, мы отождествляем нуль с $1 = (000)$ и используем базис $2 = (100)$, $3 = (010)$ и $4 = (001)$. Рассмотрим возможные подгруппы $G \subset \text{Gl}(3, \mathbb{F}_2)$ и их подъемы до KahK3-подгрупп $H \subset A$ с точностью до сопряженности. Как мы видели, они дают все KahK3-классы сопряженности подгрупп в A .

Для элемента $F \in \text{Gl}(3, \mathbb{F}_2)$ через $\tilde{F}$ обозначим его подъем до элемента $\tilde{F} \in A$ такого, что $\tilde{F}(\alpha_{11}) = \alpha_{11}$. Для подгруппы $G \subset \text{Gl}(3, \mathbb{F}_2)$ обозначим

$$\tilde{G} = \{\tilde{F} \mid F \in G\}.$$

Очевидно, $\pi|_{\tilde{G}}: \tilde{G} \cong G$ является изоморфизмом.

Рассмотрим следующие элементы из $\mathrm{Gl}(3, \mathbb{F}_2)$ и A :

$$F1_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2345678),$$

$$\widetilde{F}1_7 = (\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18})(\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{34}\alpha_{35}\alpha_{36}\alpha_{37}\alpha_{38})$$

порядка 7;

$$F1_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (3475)(68),$$

$$\widetilde{F}1_4 = (\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{37}\alpha_{15})(\alpha_{33}\alpha_{34}\alpha_{17}\alpha_{35})(\alpha_{16}\alpha_{18}\alpha_{36}\alpha_{38}),$$

$$F2_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2346)(78),$$

$$\widetilde{F}2_4 = (\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{34}\alpha_{16})(\alpha_{32}\alpha_{33}\alpha_{14}\alpha_{36})(\alpha_{15}\alpha_{35})(\alpha_{17}\alpha_{38}\alpha_{37}\alpha_{18})$$

порядка 4;

$$F1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (346)(587),$$

$$\widetilde{F}1_3 = (\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{16})(\alpha_{33}\alpha_{34}\alpha_{36})(\alpha_{15}\alpha_{18}\alpha_{17})(\alpha_{35}\alpha_{38}\alpha_{37})$$

где $F1_3 F1_7 (F1_3)^{-1} = (F1_7)^2$,

$$F2_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (234)(578),$$

$$\widetilde{F}2_3 = (\alpha_{12}\alpha_{33}\alpha_{34})(\alpha_{32}\alpha_{13}\alpha_{14})(\alpha_{15}\alpha_{17}\alpha_{38})(\alpha_{35}\alpha_{37}\alpha_{18})$$

порядка 3;

$$F1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (48)(56),$$

$$\widetilde{F}1_2 = (\alpha_{12}\alpha_{32})(\alpha_{14}\alpha_{38})(\alpha_{34}\alpha_{18})(\alpha_{15}\alpha_{16})(\alpha_{35}\alpha_{36})(\alpha_{17}\alpha_{37})$$

порядка 2.

Рассматривая возможные подгруппы $G \subset \mathrm{Gl}(3, \mathbb{F}_2)$ и их подъемы до подгрупп из A , получаем следующие KahK3-подгруппы в A с точностью до сопряженности:

(II.1) $H = [\widetilde{F}1_7, \widetilde{F}1_4] = \widetilde{\mathrm{Gl}(3, \mathbb{F}_2)} \cong L_2(7) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$ и $\mathrm{rk} N_H = 19$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$;

(II.2) $H = [\widetilde{F}1_7, \widetilde{F}1_3] = [\widetilde{F}1_7] \rtimes [\widetilde{F}1_3] \cong C_7 \rtimes C_3$ и $\mathrm{rk} N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$;

(II.3) $H = [\widetilde{F1}_7] \cong C_7$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\widetilde{F1}_7, \widetilde{F1}_3] \cong C_7 \rtimes C_3$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$.

Случаи (II.1)–(II.3) дают все H с 7-элементной орбитой $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, эквивалентно, порядок H делится на 7.

Следующие случаи дают все H с 1-элементными орбитами $\{1\}$ и $\{2\}$:

(I.1) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_4, \widetilde{F1}_3] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_4, \widetilde{F1}_3] \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$ с рангом $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ и

$$\begin{aligned} \det(K((N_H)_2)) &\equiv \det \begin{pmatrix} -75192 & 85308 & 63780 & -36 \\ 85308 & -97356 & -72420 & 48 \\ 63780 & -72420 & -54112 & 34 \\ -36 & 48 & 34 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 2^6 \cdot 3^4 \cdot 23^2 \cdot 239 \equiv \pm 12^2 \cdot 2^2 \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, N_H удовлетворяет теореме 4.1, H является КалКЗ-подгруппой, и следующие случаи дают ее подгруппы:

(I.2) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_3, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_3, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] \cong C_2 \times \mathfrak{A}_4$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{F1}_4, \widetilde{F1}_3] \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$, приведенной выше, и рангом $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(I.3) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_2, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_2, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] \cong C_2 \times \mathfrak{D}_6 \cong \mathfrak{D}_{12}$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$;

(I.4) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] \cong C_6$ с приведенной выше подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{F1}_2, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] \cong C_2 \times \mathfrak{D}_6 \cong \mathfrak{D}_{12}$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$;

(I.5) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_3 \widetilde{F1}_4 (\widetilde{F1}_3)^{-1}, \widetilde{F1}_2] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_3 \widetilde{F1}_4 (\widetilde{F1}_3)^{-1}, \widetilde{F1}_2] \cong C_2 \times \mathfrak{D}_8$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(I.6) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^2 (\widetilde{F1}_3)^{-1}, \widetilde{F1}_2] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^2 (\widetilde{F1}_3)^{-1}, \widetilde{F1}_2] \cong (C_2)^3$ и $\text{rk } N_H = 14$, подгруппа $(N_H)^*/N_H$ изоморфна⁴ $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(I.7) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^2 (\widetilde{F1}_3)^{-1}, \widetilde{F1}_3 \widetilde{F1}_4 (\widetilde{F1}_3)^{-1} \widetilde{F1}_2] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^2 (\widetilde{F1}_3)^{-1}, \widetilde{F1}_3 \widetilde{F1}_4 (\widetilde{F1}_3)^{-1} \widetilde{F1}_2] \cong (C_2)^3$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(I.8) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_3 \widetilde{F1}_4 (\widetilde{F1}_3)^{-1}] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_3 \widetilde{F1}_4 (\widetilde{F1}_3)^{-1}] \cong C_2 \times C_4$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{F1}_3 \widetilde{F1}_4 (\widetilde{F1}_3)^{-1}, \widetilde{F1}_2] \cong C_2 \times \mathfrak{D}_8$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(I.9) $H = [\varphi, \widetilde{F1}_2] = [\varphi] \times [\widetilde{F1}_2] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(I.10) $H = [\varphi] \cong C_2$ и $\text{rk } N_H = 8$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$;

(II.3) $H = [\widetilde{F1}_4, \widetilde{F1}_3] \cong \mathfrak{S}_4$ и $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$;

(II.3') $H = [\varphi, \widetilde{F1}_4, \widetilde{F1}_3] \cong \mathfrak{S}_4$ и $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$;

(II.4) $H = [\widetilde{F1}_3, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] \cong \mathfrak{A}_4$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(II.5) $H = [\widetilde{F1}_2, \widetilde{F1}_4 \widetilde{F1}_3 (\widetilde{F1}_4)^{-1}] \cong \mathfrak{D}_6$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$;

⁴Эти вычисления показывают, что для симплектической группы $G = (C_2)^3$ на кэлеровой КЗ-поверхности имеем $S_{(G)}^*/S_{(G)} = S_{(2,2,2)}^*/S_{(2,2,2)} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. Именно так мы должны исправить наше вычисление этой группы в [3, предложение 10.1].

(II.5') $H = [\varphi \widetilde{F1_2}, \widetilde{F1_4} \widetilde{F1_3} (\widetilde{F1_4})^{-1}] \cong \mathfrak{D}_6$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$;

(II.6) $H = [\widetilde{F1_4} \widetilde{F1_3} (\widetilde{F1_4})^{-1}] \cong C_3$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$;

(II.7) $H = [\widetilde{F1_3} \widetilde{F1_4} (\widetilde{F1_3})^{-1}, \widetilde{F1_2}] \cong \mathfrak{D}_8$ и $\text{rk } N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$;

(II.7') $H = [\varphi \widetilde{F1_3} \widetilde{F1_4} (\widetilde{F1_3})^{-1}, \widetilde{F1_2}] \cong \mathfrak{D}_8$ и $\text{rk } N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$;

(II.7'') $H = [\widetilde{F1_3} \widetilde{F1_4} (\widetilde{F1_3})^{-1}, \varphi \widetilde{F1_2}] \cong \mathfrak{D}_8$ и $\text{rk } N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$;

(II.7''') $H = [\varphi \widetilde{F1_3} \widetilde{F1_4} (\widetilde{F1_3})^{-1}, \varphi \widetilde{F1_2}] \cong \mathfrak{D}_8$ и $\text{rk } N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$;

(II.8) $H = [\widetilde{F1_3} (\widetilde{F1_4})^2 (\widetilde{F1_3})^{-1}, \widetilde{F1_2}] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ (H является не нормальной подгруппой Клейна в $\mathfrak{S}_4$);

(II.8') $H = [\varphi \widetilde{F1_3} (\widetilde{F1_4})^2 (\widetilde{F1_3})^{-1}, \widetilde{F1_2}] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(II.8'') $H = [\varphi \widetilde{F1_3} (\widetilde{F1_4})^2 (\widetilde{F1_3})^{-1}, \varphi \widetilde{F1_2}] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(II.9) $H = [\widetilde{F1_3} (\widetilde{F1_4})^2 (\widetilde{F1_3})^{-1}, \widetilde{F1_3} \widetilde{F1_4} (\widetilde{F1_3})^{-1} \widetilde{F1_2}] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ (H – нормальная подгруппа Клейна в $\mathfrak{S}_4$);

(II.9') $H = [\varphi \widetilde{F1_3} (\widetilde{F1_4})^2 (\widetilde{F1_3})^{-1}, \widetilde{F1_3} \widetilde{F1_4} (\widetilde{F1_3})^{-1} \widetilde{F1_2}] \cong (C_2)^2$ и $\text{rk } N_H = 12$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$;

(II.10) $H = [\widetilde{F1_4}] \cong C_4$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(II.10') $H = [\varphi \widetilde{F1_4}] \cong C_4$ и $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(II.11) $H = [\widetilde{F1_2}] \cong C_2$ и $\text{rk } N_H = 8$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$;

(II.11') $H = [\varphi \widetilde{F1_2}] \cong C_2$ и $\text{rk } N_H = 8$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$.

Следующие случаи задают все H , имеющие 1-элементную орбиту $\{1\}$, не имеющие других 1-элементных орбит и имеющие 4-элементную орбиту $\{2, 3, 4, 6\}$, определяющую плоскость:

(III.1) $H = [\varphi, \widetilde{F2_4}, \widetilde{F2_3}] = [\varphi] \times [\widetilde{F2_4}, \widetilde{F2_3}] \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$ с рангом $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ и

$$\begin{aligned} \det(K((N_H)_2)) &\equiv \det \begin{pmatrix} -14460 & -12168 & -6276 & -48 \\ -12168 & -11724 & -6072 & -36 \\ 6276 & -6072 & -3148 & -18 \\ -48 & -36 & -18 & -4 \end{pmatrix} \\ &= 2^6 \cdot 3^2 \cdot 41 \cdot 9767 \equiv \pm 12^2 \cdot 2^2 \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, N_H удовлетворяет теореме 4.1, H является КанКЗ-подгруппой, и все следующие случаи задают ее подгруппы:

(III.2) $H = [\varphi, (\widetilde{F2_4})^2, \widetilde{F2_3}] = [\varphi] \times [(\widetilde{F2_4})^2, \widetilde{F2_3}] \cong C_2 \times \mathfrak{A}_4$ с подгруппой $\text{Clos}(H) = [\varphi, \widetilde{F2_4}, \widetilde{F2_3}] \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$, приведенной выше, и $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(IV.1) $H = [\widetilde{F2_4}, \widetilde{F2_3}] \cong \mathfrak{S}_4$ и $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(IV.1') $H = [\varphi \widetilde{F2_4}, \widetilde{F2_3}] \cong \mathfrak{S}_4$ и $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

(IV.2) $H = [(\widetilde{F2_4})^2, \widetilde{F2_3}] \cong \mathfrak{A}_4$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$;

(IV.2') $H = [\varphi (\widetilde{F2_4})^2, \widetilde{F2_3}] \cong \mathfrak{A}_4$ и $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Пусть X отмечена примитивной подрешеткой $S \subset N = N_{21} = N(8A_3)$. Тогда S должна удовлетворять теореме 4.1 и $\Gamma(P(S)) \subset \Gamma(P(N_{21})) = 8A_3$. Любая такая S дает отметку какой-то X , и $P(X) \cap S = P(S)$.

Если $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.1), (III.1) ($H \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$) или (II.1) ($H \cong L_2(7) \cong \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_2)$), то $\mathrm{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.3) ($H \cong C_2 \times \mathfrak{D}_6 \cong \mathfrak{D}_{12}$), (I.5) ($H \cong C_2 \times \mathfrak{D}_8$) или (II.2) ($H \cong C_7 \rtimes C_3$), то $\mathrm{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.6), (I.7) ($H \cong (C_2)^3$), (II.3), (II.3'), (IV.1) или (IV.1') ($H \cong \mathfrak{S}_4$), то $\mathrm{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.9) ($H \cong (C_2)^2$), (II.4), (IV.2), (IV.2') ($H \cong \mathfrak{A}_4$), (II.7), (II.7'), (II.7'') или (II.7''') ($H \cong \mathfrak{D}_8$), то $\mathrm{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (I.10) ($H \cong C_2$), (II.5) или (II.5') ($H \cong \mathfrak{D}_6$), то $\mathrm{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (II.6) ($H \cong C_3$), (II.8), (II.8'), (II.8''), (II.9), (II.9') ($H \cong (C_2)^2$), (II.10) или (II.10') ($H \cong C_4$), то $\mathrm{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе если только $N_H \subset S$, где H имеет тип (II.11) или (II.11') ($H \cong C_2$), то $\mathrm{Aut}(X, S)_0 = H$. Иначе группа $\mathrm{Aut}(X, S)_0$ тривиальна.

Пусть $H = [\widetilde{F2}_4, \widetilde{F2}_3] \cong \mathfrak{S}_4$ имеет тип (IV.1). Пусть $S = [(A_3)_2 = [\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}], N_H]_{\mathrm{pr}} \subset N_{21}$. Имеем $\mathrm{rk} S = 19$ и $S^*/S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Таким образом, S удовлетворяет теореме 4.1 и дает отметку какой-то X . Имеем $H \subset \mathrm{Aut}(X, S)_0$, где $H \cong \mathfrak{S}_4$, и $(A_3)_2(A_3)_3(A_3)_4(A_3)_6 = \Gamma(P(X) \cap S) = P(S)$. По классификации решеток Нимейера и приведенным выше вычислениям поверхность X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{21} = N(8A_3)$ для такой $S \subset S_X$.

Ниже мы рассмотрим случаи, когда $\mathrm{Aut}(X, S)_0$ может быть очень большой.

Случай 22. Предположим, что КЗ-поверхность X имеет 18 неособых рациональных кривых, определяющих граф $9A_2$. В [18] описана примитивная подрешетка $\bar{I} \subset S_X$, порожденная классами

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{19}, \alpha_{29}$$

таких кривых. В частности, $\mathrm{rk} \bar{I} = 18$, и $\bar{I}^*/\bar{I} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$.

Рассмотрим отметку $S \subset N_i$ поверхности X решеткой S , содержащей примитивную подрешетку $\bar{I} \subset S$. В [18] показано, что

$$P(X) \cap S = \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{19}, \alpha_{29}\}.$$

Таким образом, $9A_2$ должно быть подграфом диаграммы Дынкина решетки N_i , и соответствующая подрешетка $\bar{I} \subset N_i$ является примитивной подрешеткой. По классификации решеток Нимейера это возможно только для $N(12A_2)$. Таким образом, X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{22} = N(12A_2)$.

Случай 23. Предположим, что X имеет 16 непересекающихся неособых рациональных кривых. Известно [19], что классы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16}$ этих кривых порождают примитивную подрешетку $\Pi \subset S_X$, которая описана в [17] и [19], и X – куммерова поверхность. В частности, $\mathrm{rk} \Pi = 16$, и $\Pi^*/\Pi \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.

Рассмотрим отметку $S \subset N_i$ поверхности X решеткой S , которая содержит примитивную подрешетку $\Pi \subset S$. Известно [19], что

$$P(X) \cap S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{16}\},$$

поэтому граф $16A_1$ должен быть подграфом диаграммы Дынкина решетки N_i и соответствующая подрешетка $\Pi \subset N_i$ является примитивной подрешеткой. По классификации решеток Нимейера это возможно только для $N(24A_1)$. Таким образом, X может быть отмечена только решеткой Нимейера $N_{23} = N(24A_1)$. Для этого случая $\text{Aut}(X, S)_0$ является подгруппой

$$\text{Kum} = \{\varphi \in A(N(24A_1)) \mid \varphi(\Pi) = \Pi\}.$$

В [20], в частности, рассмотрены некоторые такие подгруппы.

В итоге из наших рассуждений вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. *Для каждой из решеток Нимейера N_i , $i = 1, 2, 3, 5, \dots, 9, 11, \dots, 23$, существует кэлерова КЗ-поверхность X такая, что X может быть отмечена только решеткой Нимейера N_i .*

Мы думаем, что тот же самый результат имеет место для остальных решеток Нимейера N_4, N_{10} . В силу трюка Кондо из [6], который мы упоминали в § 4, любая кэлерова КЗ-поверхность, отмеченная решеткой Лича N_{24} , может быть также отмечена одной из решеток N_i , $i = 1, \dots, 23$. С другой стороны, естественно отмечать КЗ-поверхности с пустым множеством $P(X) \cap S$ решеткой Лича N_{24} . Все решетки Нимейера важны для описания отметок кэлеровых КЗ-поверхностей.

Мы надеемся рассмотреть в деталях оставшиеся случаи решеток Нимейера N_i , $22 \leq i \leq 24$, в дальнейших публикациях.

§ 7. Дополнение: программы

В настоящем параграфе мы приводим программы, использующие GP/PARI Calculator, Version 2.2.13.

Program 0: niemeier\general1.txt

```
\\for Niemeier lattice Niem given by
\\the 24\times 24 symmetric matrix r in root basis
\\represented by basic of the size 24 vectors (0,0,...,0,1,0,...,0)~
\\and its rational cording matrix
\\cord of size ( . \times 24)
\\and its sublattice SUBL given by
\\ (24\times . ) rational matrix SUBL
\\it calculates basis of its primitive sublattice
\\SUBLpr (SUBL\otimes Q)\cap Niem as matrix SUBLpr
\\and calculates invariants DSUBLpr of
\\SUBLpr\subset SUBLpr*
\\and calculates the matrix rSUBLpr of SUBLpr in this
\\elementary divisors (Smith) basis SUBLpr
a=matrix(24,24+matsize(cord)[1]);
for(i=1,24,a[i,i]=1);for(i=1,matsize(cord)[1],a[,24+i]=cord[i,]~ );
L=a;N=SUBL;
\r niemeier\latt4.txt;
SUBLpr1=Npr;R=r;B=SUBLpr1;
```

```
\r niemeier\latt2.txt;
SUBLpr=BB;DSUBLpr=D;rSUBLpr=G;
```

Program 1: niemeier\latt1.txt

```
\\for a non-degenerate lattice
\\L given by a symmetric integer matrix l
\\in some generators
\\calculates the elementary divisors (Smith) basis of L
\\as a matrix b and
\\calculates the matrix ll=b~*l*b
\\of L in the bases b
\\calculates invariants d of L\subset L*
ww=matsnf(l,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];
nn=matsize(l)[1];nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i,i]==0,nnn=nnn-1));
b=matrix(nn,nnn,X,Y,vv[X,Y+nn-nnn]);
ll=b~*l*b;
d=vector(nnn,X,dd[X+nn-nnn,X+nn-nnn]);
kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);kill(nn);kill(nnn);
```

Program 2: niemeier\latt2.txt

```
\\for a non-degenerate lattice L
\\given by an integer quadratic n x n matrix R
\\and generators B (n x m) matrix with rational coefficients
\\calculates invariants D of L\subset L* of this lattice
\\the elementary divisors (Smith) basis BB of this lattice, (n x mm) matrix,
\\and matrix G=BB~*R*BB of L in this basis
l=B~*R*B;
\r niemeier\latt1.txt;
BB=B*b;G=BB~*R*BB;D=d;
```

Program 3: niemeier\latt3.txt

```
\\for a module M
\\given by rational columns
\\of matrix M, it finds its basis
\\as a matrix MM
\\and finds matrix VV such that MM=M*VV
gg=gcd(M);M1=M/gg;
ww=matsnf(M1,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];
mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i,i]==0,nnn=nnn-1));
VV=matrix(nn,nnn);
nnnn=0;for(i=1,nn,if(dd[i,i]==0,nnnn=nnnn+1;VV[,nnnn]=vv[,i]));
M2=M1*VV;MM=M2*gg;
kill(gg);kill(M1);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);kill(mm);
kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);kill(M2);
```

Program 4: niemeier\latt4.txt

```
\\For a module L given by
\\a rational m x n matrix L
```

```

\\such that L contains all basic columns
\\(0,...,0,1,0,...,0)~
\\and its submodule N given by rational
\\matrix N
\\it finds basis of the primitive
\\submodule Npr=(N\otimes Q)\cap L
\\as the matrix Npr
ggg=gcd(N);N1=N/ggg;
M=L;
\r niemeier\latt3.txt;
L1=MM;kill(VV);
N2=L1^-1*N1;
ww=matsnf(N2,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];
N3=N2*vv;mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnn=nnn-1));
N4=matrix(mm,nnn);
nnnn=0;
for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnnn=nnnn+1;ddd=gcd(dd[i],)\
N4[,nnnn]=N3[,i]/ddd));
Npr=L1*N4;
kill(ggg);kill(N1);kill(M);kill(L1);kill(MM);
kill(N2);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);
kill(N3);kill(mm);kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);
kill(ddd);kill(N4);

```

Это завершает список используемых программ.

Список литературы

1. В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Integral symmetric bilinear forms and some of their applications”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:1 (1980), 103–167.
2. В. В. Никулин, “Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа К3”, *УМН*, **31**:2 (1976), 223–224.
3. В. В. Никулин, “Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа К3”, Тр. ММО, **38**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 75–137; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Finite automorphism groups of Kahler K3 surfaces”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **2** (1980), 71–135.
4. Sh. Mukai, “Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group”, *Invent. Math.*, **94**:1 (1988), 183–221.
5. G. Xiao, “Galois covers between K3 surfaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **46**:1 (1996), 73–88.
6. Sh. Kondō, “Niemeier lattices, Mathieu groups, and finite groups of symplectic automorphisms of K3 surfaces”, *Duke Math. J.*, **92**:3 (1998), 593–603.
7. K. Hashimoto, “Finite symplectic actions on the K3 lattice”, *Nagoya Math. J.*, **206** (2012), 99–153.
8. V. V. Nikulin, *Kahlerian K3 surfaces and Niemeier lattices*. I, arXiv:1109.2879.

9. H.-V. Niemeier, “Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1”, *J. Number Theory*, **5** (1973), 142–178.
10. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, т. 1, 2, Мир, М., 1990; пер. с англ.: J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren Math. Wiss., **290**, Springer-Verlag, New York, 1988.
11. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, группы Кокстера и системы Титса, группы, порожденные отражениями, системы корней*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*, Hermann, Paris VI, 1968.
12. И. Р. Шафаревич, Б. Г. Авербух, Ю. Р. Вайнберг, А. Б. Жижченко, Ю. И. Манин, Б. Г. Мойшезон, Г. Н. Тюрин, А. Н. Тюрин, “Алгебраические поверхности”, Тр. МИАН СССР, **75**, Наука, М., 1965, 3–215.
13. D. Burns, M. Rapoport, “On the Torelli problem for Kählerian K-3 surfaces”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **8**:2 (1975), 235–273.
14. Вик. С. Куликов, “Вырождения K3-поверхностей и поверхностей Энриквеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042; англ. пер.: V. S. Kulikov, “Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:5 (1977), 957–989.
15. Y.-T. Siu, “A simple proof of the surjectivity of the period map of K3 surfaces”, *Manuscripta Math.*, **35**:3 (1981), 311–321.
16. A. N. Todorov, “Applications of the Kähler–Einstein–Calabi–Yau metric to moduli of K3 surfaces”, *Invent. Math.*, **61**:3 (1981), 251–265.
17. И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, “Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа K3”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 530–572; англ. пер.: I. I. Pjateckii-Šapiro, I. R. Šafarevič, “A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 547–588.
18. W. Barth, “K3 surfaces with nine cusps”, *Geom. Dedicata*, **72**:2 (1998), 171–178.
19. В. В. Никулин, “О куммеровых поверхностях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:2 (1975), 278–293; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On Kummer surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:2 (1975), 261–275.
20. A. Taormina, K. Wendland, *The overarching finite symmetry group of Kummer surfaces in the Mathieu group M_{24}* , arXiv: 1107.3834.

В. В. Никулин (V. V. NIKULIN)
 Department of Mathematical Sciences,
 University of Liverpool, United Kingdom;
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vnikulin@liv.ac.uk, vnikulin@list.ru

Поступило в редакцию
 25.06.2012
 26.11.2012