Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пржиялковский, Слабые
модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных много-
образий Фано, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77,
выпуск 4, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 05:54:42

УДК 512.776

В. В. Пржиялковский

Слабые модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано

Рассмотрены модели Ландау–Гинзбурга для гладких трехмерных многообразий Фано основной серии и показано, что они представляются многочленами Лорана. Проверяется, что данные модели Ландау–Гинзбурга могут быть компактифицированы до открытых многообразий Калаби–Яу. В духе программы Л. Кацаркова показано, что числа неприводимых компонент центральных слоев компактификаций найденных пучков на единицу больше размерностей промежуточных якобианов соответствующих многообразий Фано. (В частности, эти числа не зависят от способа компактификации.) Сформулированы основные известные методы нахождения моделей Ландау–Гинзбурга как многочленов Лорана. Обсуждаются представления моделей Ландау–Гинзбурга многообразий Фано в виде многочленов Лорана и формулируются проблемы, связанные с таким представлением.

Библиография: 44 наименования.

Ключевые слова: слабые модели Ландау–Гинзбурга, многообразия Фано, торические вырождения, промежуточный якобиан.

DOI: 10.4213/im8018

Посвящая И. Р. Шафаревичу к его 90-летию

§ 1. Введение

Гипотезы зеркальной симметрии связывают симплектические свойства многообразия X с алгебро-геометрическими свойствами его зеркально-симметричной пары – многообразия Y (или однопараметрического семейства многообразий Калаби–Яу $Y \rightarrow \mathbb{A}^1$) и, наоборот, алгебро-геометрические свойства многообразия X с симплектическими свойствами многообразия Y . Гипотеза гомологической зеркальной симметрии (см. [1]) определяет зеркальное соответствие в терминах производных категорий. С каждым многообразием или семейством она связывает две категории. Многообразию X и симплектической форме на нем (в статье это будет антиканоническая форма ω_X) можно сопоставить так

Работа выполнена при финансовой поддержке FWF (грант P20778), РФФИ (гранты № 11-01-00336-а, 11-01-00185-а, 12-01-31012, 12-01-33024), грантов МК-1192.2012.1, НШ-5139.2012.1 и Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (грант правительства РФ, договор 11.G34.31.0023), Фонда Династия и NSF FRG DMS-0854977, NSF DMS-0854977, NSF DMS-0901330.

называемую *категорию Фукая* $\mathrm{Fuk}(X)$, объектами которой являются лагранжевы подмногообразия относительно этой симплектической формы. С семейством Y можно связать относительную версию этой категории, *категорию Фукая–Зайделя* $\mathrm{FS}(Y)$. Алгебраические свойства представлены производной категорией когерентных пучков $D^b(X)$ для X и производной категорией особенностей $D_{\mathrm{sing}}^b(Y)$ для Y – прямой суммой категорий по всем слоям, объектами которых являются комплексы когерентных пучков по модулю совершенных комплексов. Гипотеза гомологической зеркальной симметрии предсказывает, что всякому гладкому многообразию Фано X можно сопоставить так называемую *модель Ландау–Гинзбурга* $Y \rightarrow \mathbb{A}^1$, так что их категории кроссэквивалентны:

$$\mathrm{Fuk}(X) \simeq D_{\mathrm{sing}}^b(Y), \quad D^b(X) \simeq \mathrm{FS}(Y).$$

Гипотеза гомологической зеркальной симметрии очень сильна, но, к сожалению, ее трудно доказать для конкретных зеркальных пар. Поэтому логично, что первым шагом является проверка совпадений некоторых инвариантов обобщаемых выше категорий. Естественным инвариантом категории $\mathcal{C}$ являются ее *когомологии Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(\mathcal{C})$. Для категории Фукая когомологии Хохшильда являются не чем иным, как *квантовыми когомологиями* (см. п. 2.1). Умножая симплектическую форму на скаляр, можно варьировать категории Фукая. Таким образом, можно получить так называемую *некоммутативную структуру Ходжа*. Похожим образом категории $D_{\mathrm{sing}}^b(Y)$ (более точно, каждому особому слою семейства $Y \rightarrow \mathbb{A}^1$) можно сопоставить некоммутативную структуру Ходжа. (Определения и конструкции этих структур см. в [2]).

Совпадение некоммутативных структур Ходжа называется *гипотезой зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа*.

Она позволяет свести зеркальное соответствие для многообразий Фано на численный уровень. Сформулируем ее следующим образом. Во многих случаях можно полагать, что многообразие Y – просто комплексный тор (см. принцип 34 в § 6). В этом случае комплекснозначная функция может быть представлена многочленом Лорана, который, с некоторыми дополнительными условиями, называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* многообразия X . Таким образом, оказывается, что проблема нахождения слабой модели Ландау–Гинзбурга для X сводится к проблеме нахождения определенного многочлена Лорана. Некоторый ряд, комбинаторно строящийся по этому многочлену (так называемый *ряд свободных членов*), должен совпадать с так называемым *свободным членом регуляризованного I -ряда* для многообразия X , построенным по геометрическим данным (числам рациональных кривых на X). Более подробное описание этой конструкции представлено в [3].

Существует 17 семейств гладких трехмерных многообразий Фано с рангом группы Пикара 1 (так называемых *многообразий основной серии*); см. [4]. Каждое из них определено своим индексом и антиканонической степенью. В настоящей работе находятся слабые модели Ландау–Гинзбурга (некоторые из них

были известны ранее, но не были выписаны) для всех 17 семейств. Оказывается, что эти модели – многочлены Лорана от трех переменных, которые имеют *компактификацию Калаби–Яу* до семейств поверхностей типа КЗ (теорема 19).

Возникает вопрос: какие численные инварианты многообразия Фано могут быть восстановлены из его модели Ландау–Гинзбурга (или его слабой модели) и каким образом? К. ван Энкеворт и Д. ван Стратен [5] предложили способ извлечь характеристические числа общего антиканонического сечения многообразия Фано, записав монодромию двойственного семейства в некотором конкретном базисе.

Недавняя идея Л. Кацаркова (см., например, [2], [6], [7]) предлагает связать ходжев тип многообразия Фано со структурой центрального слоя двойственной модели Ландау–Гинзбурга и пучком исчезающих циклов к этому слою.

Теорема 23 показывает, что числа неприводимых компонент (без кратностей) центральных слоев компактификаций Калаби–Яу найденных в работе слабых моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано на единицу больше размерностей соответствующих промежуточных якобианов. В действительности при некоторых естественных условиях эти числа не зависят от конкретной слабой модели Ландау–Гинзбурга (см. п. 6.2 и [8]). Это утверждение неясно для трехмерных многообразий Фано с рангом группы Пикара, большим единицы (в этом случае см. [8]). Для рациональных трехмерных многообразий Фано теорема 23 возникает в работе [9] как свойство построенных в ней моделей Ландау–Гинзбурга. (Объяснение феномена теоремы 23 см. в замечании 24.)

Настоящая работа является первым шагом к изучению слабых моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано. В работах [6], [8], [10] более детально изучены конкретные свойства некоторых слабых моделей Ландау–Гинзбурга и их связь с гомологической зеркальной симметрией.

Для удобства поместим здесь табл. 1 с найденными слабыми моделями Ландау–Гинзбурга. В таблице приняты следующие обозначения: N – номер многообразия в соответствии с лексикографическим порядком (индекс, степень), I – индекс многообразия, а $\deg$ – антиканоническая степень.

Таблица 1. Слабые модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано

N	I	$\deg$	$h^{1,2}$	Число комп.	Описание многообразий	Слабая модель Ландау–Гинзбурга
1	1	2	52	53	двойное пространство X_2 (двойное накрытие $\mathbb{P}^3$) с ветвлением в секстике	$\frac{(x+y+z+1)^6}{xyz}$
2	1	4	30	31	общий элемент семейства – кватерника X_4	$\frac{(x+y+z+1)^4}{xyz}$
3	1	6	20	21	гладкое полное пересечение квадратики и кубики X_6	$\frac{(x+1)^2(y+z+1)^3}{xyz}$
4	1	8	14	15	гладкое полное пересечение трех квадратики X_8	$\frac{(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2}{xyz}$

N	I	deg	h^{12}	Число комп.	Описание многообразий	Слабая модель Ландау–Гинзбурга
5	1	10	10	11	общим элементом семейства является X_{10} – сечение грассманиана $G(2, 5)$ двумя гиперплоскостями и квадратикой в плюккеровом вложении	$\frac{(1+x+y+z+xy+xz+yz)^2}{xyz}$
6	1	12	7	8	многообразие X_{12}	$\frac{(x+z+1)(x+y+z+1)(z+1)(y+z)}{xyz}$
7	1	14	5	6	многообразие X_{14} , сечение грассманиана $G(2, 6)$ пятью гиперплоскостями в плюккеровом вложении	$\frac{(x+y+z+1)^2}{x} + \frac{(x+y+z+1)(y+z+1)(z+1)^2}{xyz}$
8	1	16	3	4	многообразие X_{16}	$\frac{(x+y+z+1)(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz}$
9	1	18	2	3	многообразие X_{18}	$\frac{(x+y+z)(x+xz+xy+xyz+z+y+yz)}{xyz}$
10	1	22	0	1	многообразие X_{22}	$\frac{xy}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + x + y + \frac{1}{z} + 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{xy} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{z}{xy}$
11	2	$8 \cdot 1$	21	22	двойной конус Веронезе V_1 (двойное накрытие конуса над поверхностью Веронезе, ветвящееся в гладкой кубике)	$\frac{(x+y+1)^6}{xy^2z} + z$
12	2	$8 \cdot 2$	10	11	двойное пространство V_2 (двойное накрытие $\mathbb{P}^3$) с ветвлением в квартике	$\frac{(x+y+1)^4}{xyz} + z$
13	2	$8 \cdot 3$	5	6	гладкая кубика V_3	$\frac{(x+y+1)^3}{xyz} + z$
14	2	$8 \cdot 4$	2	3	гладкое пересечение двух квадратик V_4	$\frac{(x+1)^2(y+1)^2}{xyz} + z$
15	2	$8 \cdot 5$	0	1	многообразие V_5 , сечение грассманиана $G(2, 5)$ тремя гиперплоскостями в плюккеровом вложении	$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$
16	3	$27 \cdot 2$	0	1	гладкая квадратика Q	$\frac{(x+1)^2}{xyz} + y + z$
17	4	64	0	1	проективное пространство $\mathbb{P}^3$	$x + y + z + \frac{1}{xyz}$

В дальнейшем будет доказано, что многочлены из табл. 1 – слабые модели Ландау–Гинзбурга соответствующих многообразий Фано (теорема 19). Мы также представим основные известные методы нахождения слабых моделей Ландау–Гинзбурга (см. § 3) и обсудим некоторые связанные с ними вопросы (см. § 6). Многочлены из табл. 1 не единственные слабые модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано основной серии (ср. п. 6.2). Другие примеры можно найти, скажем, в [10].

§ 2. Зеркальная симметрия вариаций структур Ходжа

Рассмотрим гладкие проективные многообразия, определенные над полем $\mathbb{C}$. Для такого многообразия X мы будем обозначать $H_2(X, \mathbb{Z})/\text{tors}$ через $H_2(X)$.

В работе под многообразием Калаби–Яу подразумевается многообразие с тривиальным каноническим классом.

2.1. Регуляризованные квантовые D -модули. Рассмотрим гладкое многообразие Фано X , ранг группы Пикара которого равен единице¹. Ему можно сопоставить множество инвариантов Громова–Виттена рода нуль (чисел рациональных кривых на X). Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in H^*(X, \mathbb{Z})$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и $\beta \in H_2(X)$. Соответствующий этим данным (m -точечный) инвариант Громова–Виттена рода нуль с потомками (см. [11, гл. VI, п. 2.1]) обозначается следующим образом:

$$\langle \tau_{k_1} \gamma_1, \dots, \tau_{k_m} \gamma_m \rangle_{\beta}.$$

По этим инвариантам (точнее, примарным трехточечным инвариантам, т. е. тем, для которых $m = 3$ и $k_1 = k_2 = k_3 = 0$) можно построить (малое) кольцо квантовых когомологий. Это кольцо – деформация обычного кольца когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [11, определение 0.0.2]. Рассмотрим кольцо Новикова Λ – кольцо многочленов над $\mathbb{C}$ от формальных переменных t^β , $\beta \in H_2(X)$, с естественными соотношениями $t^{\beta_1} t^{\beta_2} = t^{\beta_1 + \beta_2}$. Фиксируем эффективный базис $\Delta \subset H^*(X, \mathbb{Z})$. *Кольцом квантовых когомологий* называется векторное пространство $QH^*(X) = H^*(X, \mathbb{Z}) \otimes \Lambda$, снабженное *квантовым умножением* – билинейным отображением

$$\star: QH^*(X) \times QH^*(X) \rightarrow QH^*(X),$$

заданным через

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = \sum_{\substack{\gamma \in \Delta, \\ \beta \in H_2(X)}} \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma^\vee \rangle_{\beta} \gamma t^\beta$$

для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in H^*(X)$, где $\gamma^\vee$ – двойственный по Пуанкаре к γ класс (мы отождествляем элементы $\gamma \in H^*(X)$ и $\gamma \otimes 1 \in QH^*(X)$).

Заметим, что кольцо $QH^*(X)$ градуировано с помощью формулы $\deg t^\beta = -K_X \cdot \beta$ и свободным (по t) членом $\gamma_1 \star \gamma_2$ является $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, так что $QH^*(X)$, действительно, является деформацией кольца $H^*(X, \mathbb{C})$.

Положим $H = -K_X$ и определим кольцо $QH_H^*(X)$ как минимальное подкольцо кольца $QH^*(X)$, содержащее H . Пусть оно порождено над Λ линейным пространством $H_H^*(X)$, т. е. $QH_H^*(X) = H_H^*(X) \otimes \Lambda$. Многообразие X называется *квантово минимальным*, если $\dim_{\Lambda} QH_H^*(X) = \dim_{\mathbb{C}} H_H^*(X) = \dim X + 1$. Примерами квантово минимальных многообразий являются полные пересечения во (взвешенных) проективных пространствах или трехмерные многообразия Фано основной серии.

¹Эти условия можно ослабить, однако, так как нас интересуют только такие многообразия Фано, мы дадим определения для этого случая.

Теперь приведем конструкцию *регуляризованного квантового $\mathcal{D}$ -модуля* (или, что то же самое, второй структурной связности Дубровина). Более конкретно, этот $\mathcal{D}$ -модуль содержит подмодуль, соответствующий подпространству $H_H^*(X)$. Поскольку нам нужна только часть, соответствующая этому подпространству, мы дадим определение для него; в общем случае в определениях надо просто заменить $H_H^*(X)$ на $H^*(X)$, чтобы получить определение для всего модуля (подробно об определении этого $\mathcal{D}$ -модуля в квантово минимальном случае см. [3], [12], [13]).

Рассмотрим тор $\mathbb{T} = \text{Spec } B$, где $B = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Пусть HQ – тривиальное векторное расслоение над $\mathbb{T}$ со слоем $H_H^*(X)$. Положим $S = H^0(HQ)$. Пусть $\star: S \times S \rightarrow S$ – квантовое умножение (его можно рассматривать как операцию на $S \cong QH_H^*(X) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$). Положим $\mathcal{D} = B[\frac{\partial}{\partial t}]$ и $D = t \frac{\partial}{\partial t}$. Рассмотрим (плоскую) связность ∇ на HQ , определенную на сечениях $\gamma \in H_H^*(X)$ с помощью выражения

$$\left(\nabla(\gamma), t \frac{\partial}{\partial t} \right) = K_V \star \gamma$$

(спаривание здесь является естественным спариванием дифференциальных форм и векторных полей). Эта связность снабжает S структурой $\mathcal{D}$ -модуля с помощью выражения $D(\gamma) = (\nabla(\gamma), D)$.

Обозначим этот $\mathcal{D}$ -модуль через Q . В общем случае он не регулярен. Пусть $E = \mathcal{D}/\mathcal{D}(t \frac{\partial}{\partial t} - t)$ – экспоненциальный $\mathcal{D}$ -модуль. Определим *регуляризацию* $\mathcal{D}$ -модуля Q как $Q^{\text{reg}} = \mu_*(Q \boxtimes E)$, где $\mu: \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ – умножение, а $\boxtimes$ – внешнее тензорное произведение. Другими словами, Q^{reg} – это свертка с антиканоническим экспоненциальным $\mathcal{D}$ -модулем. Она может быть представлена дифференциальным оператором, делящимся на D слева: $Q^{\text{reg}} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(DL_X)$. Такой дифференциальный оператор L_X называется *регуляризованным квантовым дифференциальным оператором*. В случае, когда многообразие X квантово минимально, L_X называется *оператором типа DN* (см. [14, п. 2.10]). Такие операторы изучаются в [12]. Для $N = 3$ этот оператор выписан в [14, пример 2.11] в терминах структурных констант квантового умножения на антиканонический класс (двухточечных инвариантов Громова–Виттена). Таким образом, каждому трехмерному многообразию Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ можно сопоставить оператор типа $D3$. Эти операторы известны для всех трехмерных многообразий Фано основной серии (см., например, [14, п. 5.8]).

Обозначим через H^0 класс в $H^0(X, \mathbb{Z})$, двойственный к фундаментальному классу квантово минимального многообразия X . Рассмотрим ряд

$$\tilde{I}_{H^0}^X = 1 + \sum_{\beta} (-K_X \cdot \beta)! \langle \tau_{-K_X \cdot \beta - 2} H^0 \rangle_{\beta} t^{-K_X \cdot \beta},$$

в котором сумма берется по всем $\beta \in H_2(X)$ таким, что $-K_X \cdot \beta \geq 2$. Для квантово минимального многообразия X этот ряд (с точностью до сдвига по координате t) – единственное аналитическое решение уравнения $L_X I = 0$ вида

$$\tilde{I}_{H^0}^X = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \in \mathbb{C}[[t]], \quad a_i \in \mathbb{C}$$

(см. [13, следствие 2.2.6], а также ссылки в этой статье).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ряд $\tilde{I}_{H^0}^X$ называется *фундаментальным членом регуляризованного I -ряда* многообразия X .

2.2. Слабые модели Ландау–Гинзбурга. Рассмотрим тор $\mathbb{T}_{LG} = \mathbb{G}_m^n = \prod_{i=1}^n \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_i^{\pm 1}]$ и функцию f на нем. Эта функция может быть представлена многочленом Лорана: $f = f(x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1})$. Обозначим через $\phi_f(i)$ свободный член (т. е. коэффициент при $x_1^0 \cdots x_n^0$) многочлена f^i и положим

$$\Phi_f = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_f(i) t^i \in \mathbb{C}[[t]].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ряд Φ_f называется *рядом свободных членов* многочлена f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть X – гладкое n -мерное многообразие Фано, и пусть $\tilde{I}_{H^0}^X \in \mathbb{C}[[t]]$ – его свободный член регуляризованного I -ряда. Многочлен Лорана $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ называется *очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для X , если (с точностью до сдвига $f \mapsto f + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$)

$$\Phi_f = \tilde{I}_{H^0}^X.$$

Очень слабая модель Ландау–Гинзбурга $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для X , если существует послойная компактификация семейства $f: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}$, тотальное пространство которой – гладкое (открытое) многообразие Калаби–Яу. Такая компактификация называется *компактификацией Калаби–Яу*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если тотальное пространство и база семейства гладкие, то и общий слой также гладок.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В литературе встречается несколько отличное определение слабой модели Ландау–Гинзбурга (см., скажем, [3]). По этому определению слабая модель Ландау–Гинзбурга – это очень слабая модель Ландау–Гинзбурга, общий слой которой бирационально эквивалентен многообразию Калаби–Яу, тогда как согласно определению 4 это (усиленное) свойство выполняется для всех (даже приводимых) слоев. Однако на практике эти условия совпадают: нам не известны естественные примеры, когда эти определения отличаются.

Смысл определения 4 следующий (см. [15, § 10] или [16, с. 50–52]). Рассмотрим пучок $\mathbb{T}_{LG} \rightarrow \mathbb{B} = \mathbb{P}[u : v] \setminus (0 : 1)$ со слоями $Y_\alpha = \{1 - \alpha f = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$.

Следующее предложение – математический фольклор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [3, предложение 2.3]. Пусть многогранник Ньютона многочлена $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ содержит строго внутри себя точку нуля. Пусть $t \in \mathbb{B}$ – локальная координата в точке $(0 : 1)$. Тогда существуют послойная $(n - 1)$ -форма $\omega_t \in \Omega_{\mathbb{T}_{LG}/\mathbb{B}}^{n-1}$ и (локально определенный) послойный $(n - 1)$ -цикл Δ_t такие, что

$$\Phi_f = \int_{\Delta_t} \omega_t.$$

Последнее равенство означает, что ряд Φ_f является решением уравнения Пикара–Фукса пучка $\{Y_t\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Пусть $\text{PF}_f = \text{PF}_f(t, \frac{\partial}{\partial t})$ – оператор Пикара–Фукса пучка $\{Y_t\}$. Обозначим порядок оператора PF_f через m , а его степень по t через r . Пусть Y – полустабильная компактификация $\{Y_t\}$ (т. е. отображение $f: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$; будем обозначать его для простоты через f). Обозначим размерность трансцендентной части когомологий $R^{n-1}f_!\mathbb{Z}_Y$ через m_f (см. алгоритм для его вычисления в [17]) и число особенностей (с учетом кратностей) семейства f через r_f . Тогда $m \leq m_f$ и $r \leq r_f$. Поэтому можно записать дифференциальный оператор ограниченного по t и D порядка с неопределенными коэффициентами. Поскольку ряд Φ_f его зануляет, мы получаем систему, состоящую из бесконечного числа линейных уравнений. Чтобы проверить, что $L_X = \text{PF}_f$, необходимо решить эту систему (она имеет единственное с точностью до умножения на коэффициент решение, поэтому нам надо решить только конечное число линейных уравнений).

На практике, однако, достаточно просто сравнить первые несколько коэффициентов разложения рядов Φ_f и $\tilde{I}_{H^0}^X$. Действительно, первые несколько коэффициентов ряда $\tilde{I}_{H^0}^X$ определяют оператор L_X . Поэтому если эти первые несколько коэффициентов совпадают с первыми несколькими коэффициентами ряда Φ_f , то дифференциальный оператор, зануляющий ряд Φ_f , с точностью до коэффициентов высокого порядка совпадает с L_X , так что $\text{PF}_f = L_X$.

ВОПРОС 9. Пусть задан многогранник Δ . Можно ли (эффективно) найти число $s = s(\Delta)$ такое, что для любого многочлена f , многогранником Ньютона которого является Δ , первые s коэффициентов ряда Φ_f определяют остальные (таким образом, чтобы доказать, что $\tilde{I}_{H^0}^X = \Phi_f$ для любого ряда $\tilde{I}_{H^0}^X$, достаточно проверить совпадение лишь первых s коэффициентов обоих рядов). Другими словами, верно ли, что система линейных уравнений относительно коэффициентов оператора Пикара–Фукса для многочлена Лорана с заданным многогранником Ньютона для первых s коэффициентов невырождена?

§ 3. Методы нахождения слабых моделей Ландау–Гинзбурга

Мы опишем некоторые методы нахождения очень слабых моделей Ландау–Гинзбурга для некоторых многообразий Фано, в частности для полных пересечений в проективных пространствах и грассманианах и для многообразий, допускающих малые торические вырождения. На практике они не очень слабые, а просто слабые, и обычно это показать несложно. Однако общий способ, чтобы показать это, в некоторых случаях нам не известен.

В следующем параграфе мы найдем слабые модели Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано основной серии.

3.1. Малые торические вырождения. Сначала опишем зеркальные партнеры для многообразий Фано, допускающих так называемые малые торические вырождения. Эта конструкция была предложена в [18] и [19].

Пусть многообразие Фано X вырождается к терминальному горенштейнову торическому многообразию Y . Пусть $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^k$, $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^k)$, – множество целочисленных точек, порождающих лучи веера Y . Обозначим $x^{v_i} = x_1^{v_i^1} \cdots x_k^{v_i^k} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}]$. Тогда слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X (с точностью до сдвига $f \rightarrow f + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$) является многочлен Лорана

$$f_X = \sum_{i=1}^n x^{v_i}.$$

ПРОБЛЕМА 10. Доказать, что f_X является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия X .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В случае большого индекса можно использовать аргументы, восходящие к квантовой теореме Лефшеца (примененной к гиперплоскому сечению), и формулу Гивенталю для I -рядов гладких торических многообразий (ср. [20, предложение 1.7.15]), чтобы доказать, что предложенные многочлены Лорана являются очень слабыми моделями Ландау–Гинзбурга. Чтобы доказать существование компактификаций Калаби–Яу, покажем, что особенности элементов соответствующих семейств либо допускают крепантное разрешение, либо “приходят с объемлющего торического многообразия”. Этого достаточно для доказательства, так как данные элементы – антиканонические сечения объемлющего торического многообразия (ссылки могут быть найдены в [21], в частности см. [21, теорема 4.1.9]).

3.2. Полные пересечения. Модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах были предложены в [22]. Переформулировка их предложений в терминах многочленов Лорана следующая. Слабой моделью Ландау–Гинзбурга для гладкого многообразия X , являющегося полным пересечением r гиперповерхностей степеней $k_1, \dots, k_r$ в $\mathbb{P}^N$, является (с точностью до сдвига $f \rightarrow f + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$) многочлен Лорана

$$f_X = \frac{\prod_{i=1}^r (x_{i,1} + \cdots + x_{i,k_i-1} + 1)^{k_i}}{\prod x_{i,j} \cdot \prod y_i} + y_1 + \cdots + y_{k_0} \in \mathbb{C}[\{x_{jl}^{\pm 1}, y_s^{\pm 1}\}],$$

где $k_0 = N - \sum_i k_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Многочлен f_X является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно хорошо известной формуле Гивенталю для свободного члена I -ряда многообразия X (с точностью до сдвига) имеем

$$\tilde{I}_{H^0}^X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^r (k_j i)!}{(i!)^{N+1}} t^{k_0 i}.$$

Можно проверить, что свободным членом многочлена f_X^n является число $\frac{\prod_{j=0}^r (k_j i)!}{(i!)^{N+1}}$, если $n = k_0 i$, и 0 в противном случае.

Рассмотрим компактификацию пучка, соответствующего f_X , задаваемую натуральным вложением

$$(\mathbb{C}^*)^{N-r} \hookrightarrow \mathbb{P}(y_0 : \dots : y_{k_0}) \times \mathbb{P}(x_{1,1} : \dots : x_{1,k_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(x_{r,1} : \dots : x_{r,k_r}).$$

Эта компактификация является (особой) относительной гиперповерхностью мультистепени $(k_0 + 1, k_1, \dots, k_r)$ в $\mathbb{P}^{k_0} \times \mathbb{P}^{k_1-1} \times \dots \times \mathbb{P}^{k_r-1}$, так что она имеет тривиальный канонический класс. Легко проверить, что особенности компактифицированного пучка “чисто канонические”, т. е. допускают крепантное разрешение. Действительно, особенности являются произведениями дювалевских особенностей и линейных пространств коразмерности 2 или произведениями обыкновенных двойных точек и линейных пространств коразмерности 3 (вдали от пересечения компонент особого множества). Если мы раздуем сDV-особенность коразмерности 2, то опять получим особенности того же типа (особенности “пересекаются трансверсально”). Раздув особенности одну за другой и взяв малое разрешение, мы получим крепантное разрешение. Таким образом, тотальное пространство разрешения компактификации является многообразием Калаби–Яу, так что многочлен Лорана является слабой моделью Ландау–Гинзбурга (более подробно см. [23]).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. То же самое может быть сделано для полных пересечений дивизоров Картье во взвешенных проективных пространствах. А именно, для них можно определить многочлены Лорана типа Хори–Вафы, аналогичные определенным выше многочленам для обычных полных пересечений, и показать, что они являются очень слабыми моделями Ландау–Гинзбурга (см. [24] и [25, теорема 9]). Для случая индекса Фано 1 известно, что они являются слабыми моделями (см. замечание 20). В общем случае это пока не доказано.

3.3. Грассманианы. Слабые модели Ландау–Гинзбурга для грассманианов были предложены в [26, (B.25)]. Затем в [18] при использовании конструкции² малых торических вырождений грассманианов эти модели Ландау–Гинзбурга были получены с помощью техники малых торических вырождений.

Предложенная модель для грассманиана $G(k, N)$ – многочлен

$$X_{1,1} + \sum_{\substack{1 \leq a \leq N-k \\ 1 \leq b \leq k}} X_{ab}^{-1} (X_{a+1,b} + X_{a,b+1}) + X_{N-k,k}^{-1} \in \mathbb{C}[\{X_{ab}, X_{ab}^{-1}\}]$$

(переменными являются $X_{a,b}$, $1 \leq a \leq N - k$, $1 \leq b \leq k$; для $a > N - k$ или $b > k$ положено $X_{ab} = 0$).

ПРОБЛЕМА 14. Показать, что приведенный выше многочлен в действительности является слабой (или хотя бы очень слабой) моделью Ландау–Гинзбурга для $G(k, N)$.

Эта проблема является комбинаторной: чтобы ее решить, нужно найти коэффициенты ряда свободных членов для этого многочлена и сравнить их

²Об этой конструкции см. ссылки в [18].

со свободным членом регуляризованного I -ряда для $G(k, N)$, приведенного в [27] (см. также [28, гипотеза 5.2.3]). Методы для доказательства условия Калаби–Яу см. в замечании 11.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Аналогичными способами можно выписать очень слабые модели Ландау–Гинзбурга полных многообразий флагов [29] и многообразий частичных флагов [28]. Для общих многообразий флагов G/P см. [30]. Способ для минискульных многообразий планируется описать в работе [31].

3.4. Полные пересечения в грассманианах. В этом пункте мы опишем предложения для слабых моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений в грассманианах. Метод их построения является частным случаем метода для полных пересечений в многообразиях, допускающих малые торические вырождения. А именно, пусть $Y = X \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_s$ – полное пересечение в многообразии, допускающем вырождение к терминальному торическому многообразию X . Пусть $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{Z}^k$, как и раньше, множество целочисленных порождающих лучей веера многообразия X . Обозначим через $D(v_i)$ дивизор, соответствующий порождающей v_i . Пусть $\{p_1^l, \dots, p_{r_l}^l\}$, $l = 1, \dots, s$, – подмножества множества $\{v_1, \dots, v_n\}$ такие, что выполнено равенство $Y_l = \sum_j D(p_j^l)$ с точностью до классов когомологий. Тогда (гипотетически) моделью Ландау–Гинзбурга для Y является многообразие

$$\{x^{p_1^l} + \dots + x^{p_{r_l}^l} = 1\} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}], \quad l = 1, \dots, s,$$

с потенциалом $\sum_{i=1}^n x^{v_i}$ (см. [19]).

Мы опишем эту процедуру³ для полных пересечений в грассманиане $G(m, r)$, следуя [18] (лишь переименовав обозначения для простоты). Рассмотрим следующие многочлены Лорана от переменных X_{ab} , $1 \leq a \leq r - m$, $1 \leq b \leq m$:

$$\begin{aligned} & X_{11}, \\ & \frac{X_{1i}}{X_{1,i-1}} + \frac{X_{2i}}{X_{2,i-1}} + \dots + \frac{X_{r-m,i}}{X_{r-m,i-1}}, \quad i = 2, \dots, m, \\ & \frac{X_{j+1,1}}{X_{j1}} + \frac{X_{j+1,2}}{X_{j2}} + \dots + \frac{X_{j+1,m}}{X_{jm}}, \quad j = 1, \dots, r - m - 1, \\ & \frac{1}{X_{r-m,m}}. \end{aligned}$$

Любому из этих многочленов сопоставим множество лучей веера многообразия X , соответствующего слагаемым многочлена. Сумма граничных дивизоров, соответствующих этим лучам, эквивалентна (в когомологиях) порождающей группе Пикара многообразия X . Когомологический класс гиперповерхности в грассманиане задается ее степенью. Это значит, что можно найти s сумм граничных дивизоров так, что каждый дивизор содержится в не более чем одной сумме и i -я сумма эквивалентна Y_i . Это дает модель Ландау–Гинзбурга для Y .

³Она была предложена для полных пересечений типа Калаби–Яу, но может быть использована для многообразий Фано абсолютно также (по модулю замены $f \rightarrow f + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$).

ПРОБЛЕМА 16. Во всех рассматриваемых нами случаях существуют (бirationальные) замены переменных в моделях Ландау–Гинзбурга для полных пересечений Фано в $G(m, r)$, полученных описанным выше путем, так что после этих замен модели Ландау–Гинзбурга становятся функциями на торах (т. е. многочленами Лорана). Более точно, в каждом уравнении можно выразить одну переменную через остальные, подставить их в многочлен Лорана для грассманиана и сделать линейную замену переменных так, что все знаменатели окажутся мономами. Требуется доказать это в общем случае.

Из описанной процедуры не следует, что полученный с ее помощью многочлен Лорана является очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для полного пересечения в $G(m, r)$. На практике она является слабой моделью; это можно проверить в каждом частном случае.

ПРОБЛЕМА 17. Доказать, что модель Ландау–Гинзбурга для полного пересечения в $G(m, r)$ является слабой в общем случае (ср. проблемы 10, 14).

ПРИМЕР 18. Рассмотрим многообразие Фано X_{14} . По определению оно является сечением грассманиана $G(2, 6)$ пятью гиперплоскостями. Модель Ландау–Гинзбурга – это многообразие

$$\left\{ X_{11} = 1, \frac{X_{21}}{X_{11}} + \frac{X_{22}}{X_{12}} = 1, \frac{X_{31}}{X_{21}} + \frac{X_{32}}{X_{22}} = 1, \frac{X_{41}}{X_{31}} + \frac{X_{42}}{X_{32}} = 1, \frac{1}{X_{42}} = 1 \right\} \\ \subset \mathbb{C}[\{X_{ij}, X_{ij}^{-1}\}],$$

где $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 2$, с потенциалом

$$X_{11} + \frac{X_{21} + X_{12}}{X_{11}} + \frac{X_{22}}{X_{12}} + \frac{X_{31} + X_{22}}{X_{21}} + \frac{X_{32}}{X_{22}} + \frac{X_{41} + X_{32}}{X_{31}} + \frac{X_{42}}{X_{32}} + \frac{X_{42}}{X_{41}} + \frac{1}{X_{42}}.$$

Обозначим $X_{12} = a$, $X_{22} = b$, $X_{32} = c$. Тогда имеем

$$X_{21} = \frac{a-b}{a}, \quad X_{31} = \frac{(a-b)(b-c)}{ab}, \quad X_{41} = \frac{(c-1)(a-b)(b-c)}{abc}.$$

Таким образом, потенциал может быть выражен в виде

$$5 + a + \frac{ab}{a-b} + \frac{abc}{(a-b)(b-c)} + \frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-1)} \\ = 5 + \frac{a^2}{a-b} + \frac{abc^2}{(a-b)(b-c)(c-1)}.$$

Обозначим $x = a - b$, $y = b - c$, $z = c - 1$. Тогда $a = x + y + z + 1$, $b = y + z + 1$, $c = z + 1$ и мы получаем потенциал

$$f = 5 + \frac{(x + y + z + 1)^2}{x} + \frac{(x + y + z + 1)(y + z + 1)(z + 1)^2}{xyz} \\ \in \mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}].$$

Свободным членом регуляризованного I -ряда для X_{14} (сдвинутым на 4) является ряд

$$\tilde{I}_{H^0}^{X_{14}} = 1 + 4t + 48t^2 + 760t^3 + 13840t^4 + 273504t^5 + 5703096t^6 + \dots$$

(см. [32]). Легко видеть, что ряд свободных членов для многочлена $f_{14} = f - 5$ равен $\tilde{I}_{H^0}^{X_{14}}$ с точностью до более чем 16 коэффициентов. Это значит, что последние ряды совпадают (см. замечание 8).

Послойная компактификация пучка $f = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, заданная естественным отображением

$$\mathrm{Spec} \mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}] \rightarrow \mathbb{P}(x : y : z : w),$$

дает семейство кватрик, особенности которого являются дювалевскими вдоль прямых или обыкновенными двойными точками (см. доказательство предложения 12). Поэтому семейство допускает компактификацию Калаби–Яу.

Таким образом, полученный нами многочлен Лорана является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X_{14} .

§ 4. Трехмерные многообразия Фано основной серии

В настоящем параграфе мы изучим многочлены Лорана из табл. 1 и докажем, что они являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга соответствующих многообразий Фано. Сначала опишем, как получить эти модели Ландау–Гинзбурга (мы называем их *стандартными*⁴).

Многообразия с номерами $N = 1, 11, 12$ (см. табл. 1) являются гиперповерхностями во взвешенных проективных пространствах степени 6 в $\mathbb{P}(1 : 1 : 1 : 1 : 3)$, степени 6 в $\mathbb{P}(1 : 1 : 1 : 1 : 2 : 3)$ и степени 4 в $\mathbb{P}(1 : 1 : 1 : 1 : 2)$ соответственно. Их слабые модели Ландау–Гинзбурга могут быть найдены по процедуре Хори–Вафы, аналогичной процедуре для полных пересечений во взвешенных проективных пространствах, описанной в п. 3.2 (см. замечания 20, 13).

Многообразия с номерами $N = 2, 3, 4, 13, 14, 16, 17$ являются полными пересечениями, так что их слабые модели Ландау–Гинзбурга могут быть найдены с помощью предложения 12.

Многообразия с номерами $N = 5, 7, 15$ являются полными пересечениями в грассманианах, так что соответствующие многочлены можно получить с помощью метода, описанного в проблеме 16. Многочлен для X_{14} описан в примере 18. Многочлены для V_5 и X_{10} можно получить и другим путем. А именно, многообразие V_5 имеет малое торическое вырождение (это показано С. С. Галкиным в его диссертации [20]), так что его слабая модель Ландау–Гинзбурга задается соответствующим многогранником (см. п. 3.1). Согласно [14] модель Ландау–Гинзбурга для X_{10} является фактором модели для V_5 (доказательство см. в [6] и [8]). Рассмотрев инварианты фактора, после замены координат получим модель Ландау–Гинзбурга для X_{10} ; приведенная нами форма удобна для вычислений.

Многочлен для многообразия с номером $N = 6$, т. е. для X_{12} , можно найти в [33]. Мы несколько поменяли координаты для удобства.

⁴Этот термин предназначается только для употребления внутри настоящей статьи. С нашей точки зрения, слабые модели Ландау–Гинзбурга из табл. 1 не лучше, чем другие.

Наконец, многочлены для многообразий с номерами $N = 8, 9, 10$ найдены в [3]. В журнальной версии этой статьи содержится опечатка в многочлене для многообразия X_{16} ; она исправлена в препринте arXiv. Интересно, что эти многочлены были найдены в предположении существования горенштейнова торического вырождения соответствующих многообразий. Позднее С. С. Галкин в своей диссертации [20] показал существование терминального горенштейнова вырождения многообразия X_{22} , так что соответствующий многочлен может быть получен при использовании метода из п. 3.1.

ТЕОРЕМА 19. *Стандартные многочлены являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано основной серии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя прямые вычисления, получаем, что стандартные многочлены являются очень слабыми моделями Ландау–Гинзбурга (см. замечание 8). Компактификации, соответствующие естественному вложению торов в проективные пространства, для пучков, задающихся многочленами для всех многообразий, кроме V_1 и X_2 , дают относительные квартики в $\mathbb{P}^3$ или (для полных пересечений) относительные антиканонические сечения в произведениях проективных пространств. Особенности полученных тотальных пространств являются дювалевскими вдоль прямых и обыкновенными двойными точками на каждом шаге их минимального разрешения (ср. предложение 12). Это дает компактификации Калаби–Яу семейств.

Рассмотрим пучок

$$\frac{(x+y+1)^6}{xy^2z} + z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

связанный с многообразием V_1 . Компактифицируем это семейство до семейства поверхностей в $\mathbb{A}^3$:

$$(x+y+1)^6 = (\lambda - z)xy^2z.$$

После замены переменных $a = x + y + 1$ получим семейство

$$a^6 = (\lambda - z)(a - y - 1)y^2z.$$

Рассмотрим это семейство как семейство гиперповерхностей в $(\mathbb{C}^*)^3$ с координатами a, y, z (другими словами, позволим делить на a, y, z). После замены переменных $b = y/a, c = yz/a$ получим семейство

$$a^4 = (\lambda b - c)(a - ab - 1)c.$$

Компактифицируем его до семейства в $\mathbb{P}^3$. Мы получим семейство квартик с дювалевскими особенностями вдоль прямых (см. доказательство предложения 12). После разрешения этих особенностей получим семейство, тотальное пространство которого является многообразием Калаби–Яу, а исходное семейство гиперповерхностей в торе лежит в этом разрешении.

Наконец, рассмотрим пучок для X_2 . Мы имеем семейство

$$(x+y+z+1)^6 = \lambda xyz.$$

В бирациональных координатах $a = x + y + z + 1$, $b = x/(x + y + z + 1)$, $c = y/(x + y + z + 1)$ получим

$$a^4 = \lambda bc(a - ab - ac - 1).$$

Как и раньше, можно проверить, что исходное семейство можно компактифицировать до многообразия Калаби–Яу. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Покажем, что общий элемент стандартной слабой модели Ландау–Гинзбурга для X_2 можно компактифицировать до КЗ-поверхности другим, более концептуальным путем (предложенным В. В. Голышевым). Напомним, что зеркалом Хори–Вафы для гиперповерхности степени d во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(w_0 : \dots : w_n)$ является многообразие

$$y_0^{w_0} \cdots y_n^{w_n} = 1, \quad y_0 + \cdots + y_n = 1,$$

где $w_0 + \cdots + w_n = d$, с потенциалом

$$f = y_0 + \cdots + y_n.$$

Для X_2 , гиперповерхности степени 6 в $\mathbb{P}(1 : 1 : 1 : 1 : 3)$, имеем (с точностью до сдвига $f \rightarrow f - 1$) многообразие

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_4^3 = 1, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$$

с потенциалом

$$f = y_0.$$

Рассмотрев замену переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x}{x + y + z + t}, & y_2 &= \frac{y}{x + y + z + t}, \\ y_3 &= \frac{z}{x + y + z + t}, & y_4 &= \frac{t}{x + y + z + t} \end{aligned}$$

(где x, y, z, t являются проективными координатами), получим модель Ландау–Гинзбурга

$$y_0 x y z t^3 = (x + y + z + t)^6, \quad f = y_0.$$

Таким образом, в локальной карте, скажем, $t \neq 0$ мы получим слабую модель Ландау–Гинзбурга

$$f'_2 = \frac{(x + y + z + 1)^6}{xyz}.$$

Общий элемент пучка, соответствующего f'_2 , бирационален общему элементу пучка исходной модели Хори–Вафы. Обратим потенциал: $u = 1/f$. Мы получим пучок

$$y_1 y_2 y_3 y_4^3 = u, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1.$$

Эта модель в точности является моделью Ландау–Гинзбурга для $\mathbb{P}(1 : 1 : 1 : 1 : 3)$ (см. [34, (2)]). Таким образом, согласно [34, теорема 1.15] общий элемент рассматриваемого пучка бирационально эквивалентен КЗ-поверхности.

§ 5. Восстановление чисел Ходжа

Следующий факт сразу доказывается построением общего разрешения.

ФАКТ 21. Пусть X и Y – два бирациональных гладких многообразия Калаби–Яу. Тогда они бирациональны в коразмерности 1.

По определению флопа многообразия X и Y отличаются на флопы.

СЛЕДСТВИЕ 22. Любые две компактификации Калаби–Яу слабой модели Ландау–Гинзбурга отличаются на флопы.

ТЕОРЕМА 23. Пусть X – гладкое трехмерное многообразие Фано основной серии. Пусть $f: (\mathbb{C}^*)^3 \rightarrow \mathbb{C}$ – его стандартная модель Ландау–Гинзбурга. Пусть $k_X - 1$ – число неприводимых компонент центрального слоя компактификации Калаби–Яу многочлена f . Тогда $k_X = h^{12}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается прямыми вычислениями компактификаций Калаби–Яу, рассматриваемых в теореме 19, в каждом из 17 случаев из табл. 1 (см. примеры 31, 32 и [35], [7]). Согласно следствию 22 числа компонент центральных слоев всех компактификаций Калаби–Яу многочлена f одинаковы.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Поскольку X является трехмерным многообразием Фано и $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, его ромб Ходжа следующий:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & h^{12}(X) & h^{12}(X) & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Таким образом, теорема 23 позволяет воссоздать все числа Ходжа трехмерных многообразий Фано основной серии.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Согласно [36] феномен, возникший в теореме 23, можно объяснить (по крайней мере для полных пересечений) следующим образом. Рассмотрим превратный пучок $\mathcal{F}$ циклов, исчезающих к центральному слою слабой модели Ландау–Гинзбурга f . Если для ее послойной компактификации выполнена гипотеза гомологической зеркальной симметрии, то k_X можно вычислить с помощью спектральной последовательности из [36] для $H^1(\mathcal{F})$ и $H^3(\mathcal{F})$. Следовательно, $H^1(\mathcal{F})$ и $H^3(\mathcal{F})$ согласно [36] изоморфны $H^{12}(X)$ и $H^{21}(X)$ как структуры Ходжа. С этой точки зрения теорема 23 выполняется для любой модели Ландау–Гинзбурга (ср. следствие 46). Таким образом, теорема 23 подтверждает гипотезу гомологической зеркальной симметрии для трехмерных многообразий Фано основной серии и их (компактифицированных) стандартных моделей Ландау–Гинзбурга.

Можно видеть на примерах, что этот эффект сохраняется и в случае многообразий большего ранга Пикара.

ВОПРОС 26. Прямые вычисления, даже в случае многообразий Фано основной серии, как в теореме 23, могут быть довольно сложными (обычно для больших чисел Ходжа). Поэтому проведение их для всех рангов является большой технической проблемой. Возможно ли провести их (или хотя бы доказать теорему 23) более концептуальным способом?

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Аналог теоремы 23 в высших размерностях согласно [36] следующий. Рассмотрим n -мерное многообразие Фано X . Пусть k_X – разность числа компонент приводимых слоев его (торической) модели Ландау–Гинзбурга той же размерности и числа таких слоев. Тогда из гомологической зеркальной симметрии следует, что $k_X = h^{1,n-1}(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 28. В статье [31] показано, без использования гипотезы гомологической зеркальной симметрии, что это соотношение выполнено для слабых моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений (см. п. 3.2).

ПРОБЛЕМА 29. Доказать, что равенство $k_X = h^{1,n-1}(X)$ выполнено для торических моделей Ландау–Гинзбурга многообразий Фано размерности больше трех.

ПРИМЕР 30. Рассмотрим общую четырехмерную кубу. Ее структура Ходжа является суммой части, порожденной гиперплоским сечением, и примитивной структуры Ходжа в размерности 4, а именно структуры Ходжа веса 2 размерностей $(1, 20, 1)$. В частности, $h^{13} = 1$ и $h^{22} = 21$. Центральный слой компактификации Калаби–Яу торической модели Ландау–Гинзбурга типа Хори–Вафы имеет две компоненты, пересекающиеся по некоторой специальной К3-поверхности с числом Пикара 20 (см. [37]).

ПРИМЕР 31. Рассмотрим многообразие X_{16} , его стандартной моделью Ландау–Гинзбурга является многочлен

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)(x+y+1)}{xyz}.$$

Компактификация в проективном пространстве дает семейство кватрик

$$\{(x+t)(y+t)(z+t)(x+y+z+t) = \lambda xyz t\} \subset \mathbb{A}[\lambda] \times \mathbb{P}[x:y:z:t].$$

Центральный слой $\lambda = 0$ состоит из четырех компонент. Особым множеством являются девять непересекающихся “горизонтальных” прямых. Все они в общей точке являются произведениями дювалевских особенностей типа A_1 и прямых. После их раздутия получим три обыкновенные двойные точки в центральном слое, так что в итоге мы не получим новых компонент в центральном слое и $k_{X_{16}} = 3 = h^{12}(X_{16})$.

ПРИМЕР 32. Рассмотрим многообразие X_{18} , его стандартной моделью Ландау–Гинзбурга является многочлен

$$\frac{(x+y+z)(x+xz+xy+xyz+z+y+yz)}{xyz}.$$

Компактификация в проективном пространстве дает семейство кватрик

$$\{(x+y+z)(xt^2+xzt+xyt+xyz+zt^3+yt^2+yzt) = \lambda xyz t\} \subset \mathbb{A}[\lambda] \times \mathbb{P}[x:y:z:t].$$

Центральный слой $\lambda = 0$ состоит из двух компонент. Особым множеством являются три “горизонтальные” прямые, глобально имеющие тип A_1 вдоль прямых, три “горизонтальные” прямые, глобально имеющие тип A_2 вдоль прямых, и “горизонтальная” прямая ℓ , которая вдали от центрального слоя имеет тип A_1 вдоль прямой. Пересечением двух компонент центрального слоя является плоская кубика с одним нодом; этот нод лежит на ℓ . Раздувая прямую ℓ , мы получим одну “вертикальную” прямую особенностей, глобально имеющую тип A_1 вдоль прямой. Две компоненты слоя над 0 теперь пересекаются по объединению двух прямых (одна из которых состоит из особенностей тотального пространства); эти кривые пересекаются по двум точкам. Раздув оставшуюся особенность, мы получим три поверхности над 0. Каждая две из них пересекаются по рациональной кривой, и три такие кривые пересекаются по двум точкам. Итак, в итоге получим $k_{X_{18}} = 2 = h^{12}(X_{18})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 33. Более сложные случаи компактификаций детально описаны в [35], [7].

§ 6. Свойства, примеры, проблемы

В предыдущих параграфах мы рассматривали слабые модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано основной серии. Однако такая модель для заданного многообразия не единственна. В настоящем параграфе мы обсудим, как выбрать “правильные” модели и что зависит от конкретного выбора. Мы рассмотрим два подхода: подход “от глобального к локальному”, показывающий, какая слабая модель Ландау–Гинзбурга правильная, и подход “от локального к глобальному”, из которого следует, что для трехмерных многообразий Фано основной серии ничего не зависит от конкретного выбора. Второй подход изучается и обсуждается в [8].

6.1. От глобального к локальному. Вернемся к исходному определению двойственной модели Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X размерности n . Напомним, что многочлен Лорана f от n переменных называется очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия X , если $\tilde{I}_{H^0}^X = \Phi_f$. Другими словами, для f выполнено *условие периодов*. Однако этого условия мало, чтобы “почувствовать геометрию” многообразия X . Чтобы сформулировать более сильное определение, можно использовать следующий принцип.

Принцип 34 (компактификационный принцип). Существует послойная компактификация семейства слоев “хорошей” очень слабой модели Ландау–Гинзбурга (определенной с точностью до флопов), удовлетворяющая (стороне В) гипотезе зеркальной симметрии.

В частности, это значит, что должна существовать послойная компактификация до (открытого) гладкого многообразия Калаби–Яу – семейства компактных многообразий Калаби–Яу. Это условие достаточно сильное: скажем, если $f(x_1, \dots, x_n)$ – очень слабая модель Ландау–Гинзбурга для многообразия X , то для достаточно большого числа k многочлен Лорана $f(x_1^k, x_2, \dots, x_n)$ является очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X , но компактификационный принцип для него не выполняется. Таким образом, необходимым условием выполнения для очень слабой модели Ландау–Гинзбурга компактификационного принципа является *условие Калаби–Яу*, говорящее, что должна существовать компактификация, тотальное пространство которой является гладким многообразием Калаби–Яу.

Однако условия периодов и условия Калаби–Яу недостаточно для выполнения компактификационного принципа.

ПРИМЕР 35. Четырехмерная кубика (см. [37]) имеет две следующие модели Ландау–Гинзбурга:

$$\frac{(x+y+1)^3}{xyzw} + z + w, \quad \left(x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) \left(y_1 + y_2 + \frac{1}{y_1 y_2}\right).$$

Компактификация Калаби–Яу второй модели имеет сложный центральный слой, состоящий из многих компонент, и неправильные инварианты.

ПРИМЕР 36. Пусть X – полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$. Рассмотрим следующую слабую модель Ландау–Гинзбурга для X :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) \left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Число компонент над нулем ее компактификации в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{A}^1$ равно 30, тогда как $h^{12}(X) = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 37. Координаты особых слоев слабой модели Ландау–Гинзбурга определяются ее уравнением Пикара–Фукса. Пример 36 показывает, что даже для трехмерных многообразий Фано основной серии число компонент над нулем не определяется этим уравнением.

Последнее условие, которое мы хотим наложить на многочлены Лорана, связано с торическими вырождениями (ср. п. 3.1). Рассмотрим многообразие Фано X и его слабую модель Ландау–Гинзбурга f . Говорят, что f удовлетворяет *торическому условию*, если существует вложенное вырождение $X \rightsquigarrow T$ к торическому многообразию T , веерный многогранник которого (выпуклая оболочка целочисленных порождающих лучей веера многообразия T) совпадает с многогранником Ньютона (выпуклой оболочкой ненулевых коэффициентов) многочлена f . В этом случае f называется *торической моделью Ландау–Гинзбурга*.

Легко проверить, что слабые модели Ландау–Гинзбурга из примеров 35, 36 не торические: степени многообразий Фано отличаются от степеней торических многообразий, связанных с многочленами Лорана.

С этой точки зрения можно сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 38 (усиленная гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа). *Каждое гладкое многообразие Фано имеет торическую модель Ландау–Гинзбурга.*

СЛЕДСТВИЕ 39. *Каждое гладкое многообразие Фано имеет торическое вырождение.*

Согласно теореме 19, предложению 12 и работе [6] гипотеза 38 верна для многообразий Фано основной серии и полных пересечений. Это позволяет надеяться на то, что имеет место следующая картина.

ОПТИМИСТИЧЕСКАЯ КАРТИНА 40. Торические вырождения многообразий Фано взаимно однозначно соответствуют торическим моделям Ландау–Гинзбурга. Для них выполнен компактификационный принцип.

ВОПРОС 41. Верно ли, что выполнено обратное ко второй части компактификационного принципа? А именно, верно ли, что все модели Ландау–Гинзбурга (с точки зрения гомологической зеркальной симметрии) той же размерности, что и исходное многообразие Фано, являются компактификациями торических? В частности, верно ли, что все они рациональны?

ВОПРОС 42. Нужно ли наложить какие-либо условия на торические многообразия в оптимистической картине?

Вопросы 41, 42 также изучаются в [8].

ЗАМЕЧАНИЕ 43. Торические многообразия могут иметь несколько сглаживаний к разным гладким многообразиям Фано (см. [38], [10]).

6.2. От локального к глобальному. Другой способ понять, какие слабые модели Ландау–Гинзбурга “правильные”, известен только для трехмерных многообразий. Мы кратко приведем его для многообразий Фано основной серии (более детально см. [8]).

Как мы отмечали ранее, согласно гипотезе зеркальной симметрии ожидается, что слоями модели Ландау–Гинзбурга многообразия Фано являются многообразия Калаби–Яу. Более точно, ожидается, что эти слои зеркально двойственны антиканоническим сечениям многообразия Фано. В трехмерном случае эта двойственность есть не что иное, как классическая двойственность КЗ-поверхностей Долгачева–Никулина.

Пусть H – гиперболическая решетка, т. е. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с формой пересечения

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решеткой пересечений на вторых когомологиях любой КЗ-поверхности является решетка $K = H \oplus H \oplus H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1)$. Рассмотрим семейство U_L поверхностей типа КЗ, решетка алгебраических циклов которых содержит решетку $L \subset K$ (и совпадает с L для общей КЗ-поверхности семейства). Рассмотрим решетку $M' = L^\perp$, ортогонал к L в K . Пусть $M' = H \oplus M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. Семейство КЗ-поверхностей U_M называется *двойственным к U_L по Долгачеву–Никулину* семейством.

Рассмотрим главное поляризованное семейство антиканонических сечений трехмерного многообразия Фано X индекса i и степени $(-K_X)^3 = i^3k$. Это семейство не что иное, как U_{L_n} для $L_n = \langle 2n \rangle$, $2n = ik$. Решетка L_n является подрешеткой в H . Отображая таким образом L_n в одно из слагаемых H решетки K , можно видеть, что двойственной к L_n по Долгачеву–Никулину решеткой является решетка $M_n = H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1) + \langle -2n \rangle$.

Поверхности с решеткой Пикара M_n являются *поверхностями Шиода–Инозе*. Они являются разрешениями факторов некоторых КЗ-поверхностей S по инволюции *Никулина*, т.е. инволюции, сохраняющей решетку трансцендентных циклов T_S ; она меняет местами две копии $E_8(-1)$. Кроме того, поверхности Шиода–Инозе могут быть описаны как куммеровы поверхности, соответствующие произведениям эллиптических кривых и n -изогенных им. M_n -поляризованные поверхности Шиода–Инозе образуют неприводимое одномерное семейство.

Оказывается, что слои стандартных торических моделей Ландау–Гинзбурга можно компактифицировать до поверхностей Шиода–Инозе, двойственных к антиканоническим сечениям трехмерных многообразий Фано.

ТЕОРЕМА 45 [8]. Пусть X – трехмерное многообразие Фано основной серии индекса i , и пусть $(-K_X)^3 = i^3k$. Тогда слои компактификации Калаби–Яу стандартной торической модели Ландау–Гинзбурга для многообразия X являются поверхностями Шиода–Инозе с решетками Пикара $M_{ik/2}$.

Назовем (торическую) модель Ландау–Гинзбурга с условием Шиода–Инозе *хорошей*.

Таким образом, компактификации хороших моделей Ландау–Гинзбурга по модулю накрытий и стандартного действия группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ на базе образуют единственные семейства поверхностей Шиода–Инозе. Более точно, они являются индексоллистыми накрытиями пространства модулей.

СЛЕДСТВИЕ 46 (ср. следствие 22). Компактификация (до многообразия Калаби–Яу) хорошей модели Ландау–Гинзбурга единственна с точностью до флопов.

Таким образом, если для трехмерных многообразий Фано основной серии выполняется гипотеза гомологической зеркальной симметрии, то модели Ландау–Гинзбурга для этой гипотезы с точностью до флопов являются компактификациями стандартных. Более того, все другие хорошие модели Ландау–Гинзбурга бирациональны над базой A^1 стандартным моделям Ландау–Гинзбурга.

6.3. Торические вырождения и многочлены Лорана. Существует несколько способов найти (торические) слабые модели Ландау–Гинзбурга для фиксированного многообразия Фано X . Некоторые из таких способов описаны в § 3. Однако в некоторых случаях эти методы неприменимы, скажем в том

случае, когда нет простого геометрического описания для X . В таких случаях можно надеяться угадать слабую модель Ландау–Гинзбурга с помощью торических вырождений следующим образом. Сначала надо угадать торическое многообразие с такими же численными инвариантами, как у многообразия X : степень, ранг группы Пикара и т. д. Далее (хотя это и не необходимо) надо доказать, что это торическое многообразие является вырождением многообразия X . Тогда согласно оптимистической картине должна быть торическая модель Ландау–Гинзбурга, многогранник Ньютона которой совпадает с веерным многогранником найденного торического многообразия. Проблемой является воссоздание многочлена Лорана с заданным наперед рядом свободных членов из его многогранника Ньютона (т. е. “положить коэффициенты в целые точки многогранника”). Эта проблема до сих пор не решена. Однако существует несколько подходов решить ее, в основном, в каноническом и трехмерном случаях.

Биномиальный принцип гласит, что вершинам многогранника следует присвоить коэффициент 1, а i -й (с любого конца) целой точке ребра целочисленной длины n следует присвоить $\binom{n}{i}$. Этот принцип применим во многих случаях (т. е. для таких торических многообразий с особенностями типа cDV, у которых целочисленные точки веерного многогранника, кроме центра координат, лежат на ребрах).

ГИПОТЕЗА 47 [39]. *Трехмерные многообразия с особенностями типа cDV сглаживаемы.*

Однако биномиальный принцип применим не всегда, и мы вынуждены рассматривать худшие особенности. Для них (в каноническом⁵ трехмерном случае) можно применить *принцип Минковского*, предложенный в [38].

Этот принцип обобщает биномиальный следующим образом. Напомним, что отрезок целочисленной длины n является суммой Минковского n неразложимых целочисленных многогранников – отрезков длиной 1. Единственным многочленом от одной переменной x , имеющим коэффициент 1 в вершинах этого отрезка, является многочлен $x + 1$. Биномиальный принцип утверждает, что коэффициенты в отрезке длины n задаются произведением n многочленов $x + 1$, каждый из которых соответствует своему слагаемому Минковского. Это описание можно обобщить в двумерном случае, т. е. на грани трехмерного многогранника. Рассмотрим каждую такую грань и ее разложение по Минковскому в неразложимые слагаемые. Пусть все такие слагаемые имеют вид A_k , $k \geq 0$, – многоугольники Ньютона многочленов $(x + 1)^k + y$; если это неверно, то принцип неприменим. Тогда коэффициенты исходной грани задаются произведением многочленов, соответствующих слагаемым.

Идея разложения граней в суммы Минковского восходит к идее, утверждающей, что такие разложения устраняют некоторые препятствия к деформациям торических многообразий (см. [40]). В частности, это означает, что разные

⁵Каноничность означает, что единственной целочисленной точкой внутри веерного многогранника является центр координат.

разложения граней по Минковскому дают разные многочлены Лорана, соответствующие разным гладким трехмерным многообразиям Фано, вырождающимся к одному и тому же торическому многообразию (см. замечание 43). Кроме того, торические многообразия, к которым применим принцип Минковского, имеют тенденцию быть сглаживаемы в антиканоническом вложении. С другой стороны, многочлены Лорана, к которым принцип Минковского неприменим, имеют тенденцию “соответствовать” (после определения для них зеркального соответствия) торическим вырождениям не в антиканоническом вложении или даже несглаживаемым многообразиям.

ПРИМЕР 48. Торической моделью Ландау–Гинзбурга (согласно [34] или [41]) для $\mathbb{P}(1 : a_1 : \dots : a_n)$ является многочлен $x_1 + \dots + x_n + \frac{1}{x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}}$.

ПРИМЕР 49 [10]. Рассмотрим $\mathbb{P}(1 : 1 : 2 : 4)$. Торическая модель Ландау–Гинзбурга не типа Минковского для $\mathbb{P}^3$, многочлен Лорана

$$\frac{(x+1)^2}{xyz} + \frac{y}{z} + z,$$

соответствует сглаживанию многообразия $\mathbb{P}(1 : 1 : 2 : 4)$ к $\mathbb{P}^3$ как квадратик в $\mathbb{P}(1 : 1 : 1 : 1 : 2)$ (см. [7, пример 2.13]). Другой многочлен не типа Минковского, $x + y + z + 1/xy^2z^4$, является моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия $\mathbb{P}(1 : 1 : 2 : 4)$.

ВОПРОС 50. Верно ли, что для торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких многообразий Фано, связанных с торическими вырождениями в антиканоническом вложении, выполнен принцип Минковского? Верно ли обратное утверждение?

ЗАМЕЧАНИЕ 51. Для всех трехмерных многообразий Фано недостаточно рассматривать горенштейновы⁶ торические модели Ландау–Гинзбурга. К примеру, двойное пространство с ветвлением в секстике не имеет горенштейновой торической модели Ландау–Гинзбурга, так как не существует целочисленного многогранника объема $\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$, содержащего единственную внутреннюю целую точку. По тем же причинам не существует горенштейновой торической модели Ландау–Гинзбурга для двойного конуса Веронезе. Стандартные торические модели Ландау–Гинзбурга для обеих этих моделей не канонические. Все оставшиеся трехмерные многообразия Фано основной серии имеют горенштейновы торические модели Ландау–Гинзбурга. Среди 105 гладких трехмерных многообразий Фано 98 могут иметь горенштейновы торические модели Ландау–Гинзбурга. Все они имеют как минимум очень слабые модели (см. [38]).

ПРИМЕР 52. Существуют пять возможных горенштейновых торических вырождений для $\mathbb{P}^3$ (см. [42]). Из них три дают торические модели Ландау–Гинзбурга. Есть пять возможных горенштейновых торических вырождений для

⁶Торическое многообразие горенштейново, если многогранник, двойственный к его веерному многограннику, целочислен. В частности, горенштейновы торические многообразия являются каноническими.

квадрики в $\mathbb{P}^4$ (см. [42]). Из них четыре дают торические модели Ландау–Гинзбурга.

ЗАМЕЧАНИЕ 53. Существует бесконечно много (негоренштейновых) торических моделей Ландау–Гинзбурга для $\mathbb{P}^3$, например такие, многогранники Ньютона которых являются веерными многогранниками многообразий вида $\mathbb{P}(a^2, b^2, c^2, abc)$, где (a, b, c) – тройки Маркова, т.е. тройки взаимно простых натуральных чисел таких, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ (ср. [43] и [44]). Согласно замечанию Прохорова трехмерное проективное пространство вырождается именно к таким проективным пространствам (это следует из [43, теорема 1.1]).

Автор благодарен Э. Вилсону, С. С. Галкину, В. В. Гольшеву, А. Илиеву, Л. Кацаркову, В. Лазичу, В. В. Никулину, Д. О. Орлову, И. А. Чельцову и К. А. Шрамову за полезные комментарии и важные замечания, а также рецензенту за предложения по реорганизации статьи.

Список литературы

1. M. Kontsevich, “Homological algebra of mirror symmetry”, *Proceedings of the international congress of mathematicians* (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 120–139.
2. L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, “Hodge theoretic aspects of mirror symmetry”, *From Hodge theory to integrability and TQFT tt^* -geometry* (Augsburg, Germany, 2007), Proc. Sympos. Pure Math., **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 87–174.
3. V. Przyjalkowski, “On Landau–Ginzburg models for Fano varieties”, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:4 (2008), 713–728.
4. В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 516–562; “II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 506–549; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Fano 3-folds. I”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:3 (1977), 485–527; “II”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:3 (1978), 469–506.
5. C. van Enckevort, D. van Straten, “Monodromy calculations of fourth order equations of Calabi–Yau type”, *Mirror symmetry V*, AMS/IP Stud. Adv. Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 539–559.
6. N. O. Ilten, J. Lewis, V. Przyjalkowski, “Toric degenerations of Fano threefolds giving weak Landau–Ginzburg models”, *J. Algebra*, **374** (2013), 104–121.
7. L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Landau–Ginzburg models – old and new”, *Proceedings of the 18th Gokova geometry-topology conference*, International Press, Somerville, MA, 2012, 97–124.
8. C. Doran, A. Harder, L. Katzarkov, J. Lewis, V. Przyjalkowski, “Modularity of Fano threefolds” (to appear).
9. M. Abouzaid, D. Auroux, L. Katzarkov, *Lagrangian fibrations on blowups of toric varieties and mirror symmetry for hypersurfaces*, [arXiv: 1205.0053](https://arxiv.org/abs/1205.0053).
10. I. Cheltsov, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Birational geometry via moduli spaces”, *Birational geometry, rational curves, and arithmetic – Simons symposium*, Springer-Verlag, New York, 2013, 93–132.
11. Yu. I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
12. V. Golyshev, J. Stienstra, “Fuchsian equations of type DN”, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 323–346.

13. В. В. Пржиялковский, “Минимальное кольцо Громова–Виттена”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:6 (2008), 203–222; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Minimal Gromov–Witten rings”, *Izv. Math.*, **72**:6 (2008), 1253–1272.
14. V. V. Golyshev, “Classification problems and mirror duality”, *Surveys in geometry and number theory: reports on contemporary Russian mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **338**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 88–121.
15. F. Beukers, J. Stienstra, “On the Picard–Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic K3-surfaces”, *Math. Ann.*, **271**:2 (1985), 269–304.
16. F. Beukers, “Irrationality of π^2 , periods of an elliptic curve and $\Gamma^1(5)$ ”, *Diophantine approximations and transcendental numbers* (Luminy, 1982), Progr. Math., **31**, Birkhäuser, Boston, MA, 1984, 47–66.
17. В. И. Данилов, А. Г. Хованский, “Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:5 (1986), 925–945; англ. пер.: V. I. Danilov, A. G. Khovanskii, “Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge–Deligne numbers”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:2 (1987), 279–298.
18. V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, “Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Grassmannians”, *Nuclear Phys. B*, **514**:3 (1998), 640–666.
19. V. V. Batyrev, “Toric degenerations of Fano varieties and constructing mirror manifolds”, *The Fano conference* (Torino, Italy, 2002), Univ. di Torino, Torino, 2004, 109–122.
20. С. С. Галкин, *Торические вырождения многообразий Фано*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МИАН, М., 2008; <http://www.mi.ras.ru/~galkin/papers/disser.pdf>
21. V. V. Batyrev, “Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties”, *J. Algebraic Geom.*, **3**:3 (1994), 493–535.
22. H. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv: hep-th/0002222.
23. V. Przyjalkowski, C. Shramov, *On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models*, arXiv: 1305.4377.
24. В. В. Пржиялковский, “Квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях”, *Матем. сб.*, **198**:9 (2007), 107–122; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Quantum cohomology of smooth complete intersections in weighted projective spaces and in singular toric varieties”, *Sb. Math.*, **198**:9 (2007), 1325–1340.
25. V. Przyjalkowski, “Hori–Vafa mirror models for complete intersections in weighted projective spaces and weak Landau–Ginzburg models”, *Cent. Eur. J. Math.*, **9**:5 (2011), 972–977.
26. T. Eguchi, K. Hori, C.-Sh. Xiong, “Gravitational quantum cohomology”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **12**:9 (1997), 1743–1782.
27. A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, “Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa”, *Duke Math. J.*, **126**:1 (2005), 101–136.
28. V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, “Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds”, *Acta Math.*, **184**:1 (2000), 1–39.
29. A. Givental, “Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture”, *Topics in singularity theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **180**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 103–115.
30. K. Rietsch, “A mirror symmetric solution to the quantum Toda lattice”, *Comm. Math. Phys.*, **309**:1 (2012), 23–49.
31. A. Bondal, S. Galkin, *Mirror symmetry for minuscule varieties*, IPMV 11-0101.
32. В. В. Пржиялковский, “Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 145–158; англ. пер.:

- V. V. Przyjalkowski, “Gromov–Witten invariants of Fano threefolds of genera 6 and 8”, *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 433–446.
33. F. Beukers, C. A. M. Peters, “A family of K3 surfaces and $\zeta(3)$ ”, *J. Reine Angew. Math.*, **351** (1984), 42–54.
 34. A. Corti, V. Golyshev, “Hypergeometric equations and weighted projective spaces”, *Sci. China Math.*, **54**:8 (2011), 1577–1590.
 35. A. Iliev, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Double solids, categories and non-rationality”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), *Shokurov’s volume*, 2013 (в печати); [arXiv: 1102.2130](#).
 36. M. Gross, L. Katzarkov, H. Ruddat, “Towards mirror symmetry for varieties of general type”, *J. Adv. Math. Stud.* (в печати); [arXiv: 1202.4042](#).
 37. L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Generalized homological mirror symmetry and cubics”, *Многомерная алгебраическая геометрия*, Тр. МИАН, **264**, МАИК, М., 2009, 94–102; англ. пер.: L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, “Generalized homological mirror symmetry and cubics”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **264**:1 (2009), 87–95.
 38. T. Coates, A. Corti, S. Galkin, V. Golyshev, A. Kasprzyk, *Fano varieties and extremal Laurent polynomials. A collaborative research blog*, [arXiv: http://arxiv.org/abs/coates.ma.ic.ac.uk/fanosearch](#).
 39. Ю. Г. Прохоров, “Степень трехмерных многообразий Фано с каноническими гorenштейновыми особенностями”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 81–122; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “On the degree of Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 77–114.
 40. K. Altmann, “The versal deformation of an isolated toric Gorenstein singularity”, *Invent. Math.*, **128**:3 (1997), 443–479.
 41. D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, “Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations”, *Ann. of Math.* (2), **167**:3 (2008), 867–943.
 42. A. Kasprzyk, “Canonical toric Fano threefolds”, *Canad. J. Math.*, **62**:6 (2010), 1293–1309.
 43. P. Hacking, Yu. Prokhorov, “Smoothable del Pezzo surfaces with quotient singularities”, *Compos. Math.*, **146**:1 (2010), 169–192.
 44. S. Galkin, A. Usnich, *Mutations of potentials*, [arXiv: http://arxiv.org/abs/member.ipmu.jp/sergey.galkin/papers/ipmu-10-0100.pdf](#).

В. В. Пржиялковский (V. V. Przyjalkowski)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 E-mail: victorprz@mi.ras.ru, victorprz@gmail.com

Поступило в редакцию
 26.06.2012
 15.10.2012