Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Попов, Торы в группах Кремоны, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 4, 103–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:23:44

УДК 512.745.4

В. Л. Попов

Торы в группах Кремоны

Для некоторых типов подгрупп в полных, аффинных и специальных аффинных группах Кремоны получены классификации с точностью до сопряженности. Доказана теорема об алгебраичности нормализатора таких подгрупп. В качестве приложения получены новые результаты в проблеме линеаризуемости: результаты Бялыницкого-Бирули 1966–67 гг. обобщены на несвязный случай. Доказаны теоремы слияния (fusion theorems) для n -мерных торов в аффинной группе Кремоны и в специальной аффинной группе Кремоны рангов n . Для групп Кремоны вводятся и обсуждаются понятия разложения Жордана и простых чисел кручения.

Библиография: 37 наименований.

Ключевые слова: группа Кремоны, аффинная группа Кремоны, алгебраический тор, диагонализруемая алгебраическая группа, сопряженные подгруппы, теоремы слияния, простые числа кручения.

DOI: 10.4213/im8021

И. Р. Шафаревичу к девяностолетию

§ 1. Введение

Настоящая работа возникла в результате попытки решить задачу, поставленную в [1], [2], где были введены понятия корня α и корневого вектора δ аффинного алгебраического многообразия X относительно алгебраического тора $T \subseteq \text{Aut } X$. А именно, δ – это локально нильпотентное дифференцирование координатной алгебры многообразия X и α – характер тора T такие, что $t^* \circ \delta \circ (t^*)^{-1} = \alpha(t)\delta$ для всех $t \in T$. Введенное определение навеяно аналогией с классическими определениями теории алгебраических групп и подразумевает попытку применить к, вообще говоря, бесконечномерной группе $\text{Aut } X$ технику, существенную в теории обычных алгебраических групп¹.

В [1], [2] были поставлены две следующие задачи, относящиеся к классическому случаю, когда $X = \mathbf{A}^n$, а $T = D_n^*$ – максимальный диагональный тор, сохраняющий форму объема (см. ниже формулу (9)):

(R) найти все корни и корневые векторы многообразия $\mathbf{A}^n$ относительно D_n^* ;

¹В [1], [2] рассматривался случай, когда $X = \mathbf{A}^n$, а T – максимальный диагональный тор, сохраняющий форму объема, но в определениях корня и корневого вектора это ограничение не играет никакой роли.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00185-а), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-5139.2012.1) и Программы “Современные проблемы теоретической математики” отделения математики РАН.

(W) описать нормализатор и централизатор тора D_n^* в группе $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ автоморфизмов пространства $\mathbf{A}^n$, сохраняющих форму объема.

Задача (R) была решена А. Лиендо (A. Liendo) в [3], который получил следующий ответ. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – стандартные координатные функции на $\mathbf{A}^n$, а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – “координатные” характеры стандартного n -мерного диагонального тора D_n в $\text{Aut} \mathbf{A}^n$ (см. ниже формулы (7) и (10)). Тогда с точностью до умножения на ненулевую константу корневые векторы – это только всевозможные дифференцирования δ вида

$$x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1)$$

где $l_1, \dots, l_n$ – неотрицательные целые числа, а $l_i = 0$. Корнем α , отвечающим корневому вектору (1), является ограничение на D_n^* характера

$$\varepsilon_i^{-1} \prod_{j=1}^n \varepsilon_j^{l_j}.$$

Задача, упомянутая в начале данного введения, – это задача (W). Понятно, что она нацелена на описание “группы Вейля” системы корней из задачи (R). Мы решаем ее в настоящей работе. А именно, мы доказываем (теорема 6, (ii), (a) и теорема 12), что нормализатор (централизатор) тора D_n^* в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ совпадает с его нормализатором (централизатором) в SL_n , так что группа Вейля группы D_n^* в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ такая же, как у группы D_n^* в SL_n , – это группа всех перестановок характеров $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

На самом деле этот результат является лишь одним из специальных случаев ряда общих результатов, которые мы здесь получаем. А именно, D_n^* – лишь одна из бесконечного множества попарно несопряженных диагонализируемых алгебраических подгрупп G размерности не менее $n - 1$ в группе $\text{Aut} \mathbf{A}^n$. Мы доказываем, что нормализатор G в $\text{Aut} \mathbf{A}^n$ всегда является *алгебраической* подгруппой в $\text{Aut} \mathbf{A}^n$ (теорема 14). Это свойство является характеристическим для указанных размерностей: для диагонализируемых подгрупп размерности не более $n - 2$ оно, вообще говоря, уже не имеет места. Более того, если на $\mathbf{A}^n$ существуют непостоянные G -инвариантные полиномиальные функции, мы явно описываем нормализатор G в $\text{Aut} \mathbf{A}^n$, устанавливая, в частности, что, за одним исключением, он совпадает с нормализатором G в группе, сопряженной GL_n (теорема 6).

Используя эту информацию, мы получаем новые результаты в проблеме линеаризации действий. А. Бялыницкий-Бирула в 1966–67 гг. доказал [4], [5], что всякое алгебраическое действие на $\mathbf{A}^n$ алгебраического тора размерности не менее $n - 1$ эквивалентно линейному. Мы распространяем это утверждение на несвязные группы, доказав, что всякое алгебраическое действие на $\mathbf{A}^n$ либо n -мерной алгебраической группы, связная компонента единицы которой есть тор, либо $(n - 1)$ -мерной диагонализируемой группы эквивалентно линейному (теоремы 11, 13).

Мы получаем также следующие полные классификации:

(i) классификацию диагонализированных подгрупп группы Aff_n аффинных преобразований (см. ниже (6)) с точностью до сопряженности в полной группе Кремоны $\text{Cr}_n = \text{Bir } \mathbf{A}^n$ (теорема 1);

(ii) классификацию n -мерных диагонализированных подгрупп в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ (теорема 9);

(iii) классификацию $(n-1)$ -мерных диагонализированных подгрупп в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ (теорема 10);

(iv) классификацию с точностью до сопряженности в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ (соответственно, в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$) максимальных $(n-1)$ -мерных (соответственно, n -мерных) алгебраических подгрупп G в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ (соответственно, в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$), у которых G^0 – тор (теорема 12 и, соответственно, теорема 11);

(v) классификацию $(n-1)$ -мерных диагонализированных подгрупп в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ (теорема 13);

(vi) классификацию диагонализированных подгрупп в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ размерности не менее $n-1$ с точностью до сопряженности в Cr_n (теоремы 9, 15);

(vii) классификацию одномерных торов в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ (теорема 16).

Например, мы доказываем, что множество классов $(n-1)$ -мерных сопряженных в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ диагонализированных подгрупп группы $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ взаимно однозначно параметризуются такими ненулевыми неубывающими последовательностями

$$(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad (2)$$

что $(l_1, \dots, l_n) \leq (-l_n, \dots, -l_1)$ относительно лексикографического порядка. При этой параметризации последовательности (2) сопоставляется класс сопряженности подгруппы $\ker \varepsilon_1^{l_1} \dots \varepsilon_n^{l_n}$.

Другой пример: мы показываем, что диагонализированные подгруппы в Aff_n сопряжены в Cr_n тогда и только тогда, когда они изоморфны, и указываем канонические представители таких подгрупп. В частности (см. следствие 5), любые две изоморфные конечные абелевы подгруппы в Aff_n сопряжены в Cr_n (для конечных циклических подгрупп это было доказано в [6]).

В [7] Серр доказал теорему слияния (fusion theorem) для тора D_n в Cr_n . Мы доказываем и используем теорему слияния для n -мерных торов в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $\text{Aut}^* \mathbf{A}^{n+1}$ (теорема 7).

В заключительном параграфе, развивая тему аналогий между группами Кремоны и алгебраическими группами, мы вводим для групп Кремоны понятия разложения Жордана и простых чисел кручения. По ходу их обсуждения мы формулируем некоторые открытые вопросы.

Я признателен Ж.-П. Серру за комментарии.

§ 2. Обозначения и соглашения

Далее термин “многообразие” означает “алгебраическое многообразие над фиксированным алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики”, понимаемое в смысле Серра [8].

Помимо стандартных обозначений и соглашений из [9], [10], употребляемых без напоминаний, мы используем также следующие: $\text{Mat}_{m \times n}(R)$ – множество всех матриц с m строками, n столбцами и элементами из R ; $N_H(S)$ и $Z_H(S)$ – соответственно нормализатор и централизатор подгруппы S в группе H ; μ_d – подгруппа порядка d в $\mathbf{G}_m$; $X(D)$ – группа рациональных характеров диагонализированной алгебраической группы D ; $\chi(X)$ – эйлерова характеристика многообразия X относительно l -адических когомологий (при $k = \mathbb{C}$ она совпадает в силу [11] с эйлеровой характеристикой относительно обычных когомологий с компактными носителями; см. также [12, приложение]).

Если группа G действует на множестве M и $\varphi: G \times M \rightarrow M$ – задающее это действие отображение, то для подмножеств $S \subseteq G$ и $X \subseteq M$ подмножество $\varphi(S \times X) \subseteq M$ обозначается через $S \cdot X$ (из контекста каждый раз ясно, какое φ имеется в виду). В частности, через $G \cdot a$ обозначается G -орбита точки a . Через G_a обозначается G -стабилизатор точки a . Далее, $x_1, \dots, x_n$ – стандартные координатные функции на $\mathbf{A}^n$:

$$x_i(a) := a_i, \quad a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n.$$

Все алгебраические группы считаются аффинными, а гомоморфизмы таких групп – алгебраическими. Все торы и диагонализированные группы предполагаются алгебраическими.

Действие группы G на векторном пространстве V называется *локально конечным*, если для любого вектора $v \in V$ линейная оболочка орбиты $G \cdot v$ конечномерна.

Группа $\text{Cr}_n := \text{Bir } \mathbf{A}^n$ называется *группой Кремоны ранга n* . Отображение $\varphi \mapsto (\varphi^*)^{-1}$ отождествляет ее с $\text{Aut}_k k(x_1, \dots, x_n)$, а любой бирациональный изоморфизм $X \dashrightarrow \mathbf{A}^n$ отождествляет ее с $\text{Bir } X$. Для любого $g \in \text{Cr}_n$ функции

$$g_i = g^*(x_i) \in k(\mathbf{A}^n) \quad (3)$$

определяют g по формуле

$$g(a) = (g_1(a), \dots, g_n(a)), \quad \text{если } g \text{ определено в } a \in \mathbf{A}^n; \quad (4)$$

мы используем обозначение

$$(g_1, \dots, g_n) := g. \quad (5)$$

С помощью понятия “алгебраического семейства” $S \rightarrow \text{Cr}_n$ (см. [13]) группа Cr_n наделяется топологией Зарисского (см. [7], [14]). Образ гомоморфизма $G \rightarrow \text{Cr}_n$, являющегося алгебраическим семейством, называется *алгебраической подгруппой* в Cr_n (см. [15]).

Аффинной группой Кремоны ранга n называется подгруппа $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ в Cr_n :

$$\text{Aut } \mathbf{A}^n := \{(g_1, \dots, g_n) \in \text{Cr}_n \mid g_1, \dots, g_n \in k[\mathbf{A}^n] = k[x_1, \dots, x_n]\}.$$

В ней имеется алгебраическая подгруппа аффинных преобразований

$$\text{Aff}_n := \{(g_1, \dots, g_n) \in \text{Aut } \mathbf{A}^n \mid \deg g_1 = \dots = \deg g_n = 1\}, \quad (6)$$

а в Aff_n – алгебраическая подгруппа линейных преобразований

$$\text{GL}_n := \{g \in \text{Aff}_n \mid g(0) = 0\}.$$

Для $g = (g_1, \dots, g_n) \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$ (см. (5)) положим

$$\text{Jac}(g) := \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right).$$

Поскольку $g \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$, то $\text{Jac}(g) \in k \setminus \{0\}$. Поэтому $g \mapsto \text{Jac}(g)$ – гомоморфизм группы $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ в мультипликативную группу поля k . Ядро данного гомоморфизма

$$\text{Aut}^* \mathbf{A}^n := \{g \in \text{Aut } \mathbf{A}^n \mid \text{Jac}(g) = 1\}$$

состоит из автоморфизмов $\mathbf{A}^n$, сохраняющих стандартную форму объема, и называется *специальной аффинной группой Кремоны ранга $n - 1$* (о рангах в этих названиях см. теорему 2, (i) и теорему 4, (i)). Последняя группа содержит алгебраическую подгруппу

$$\text{SL}_n := \text{GL}_n \cap \text{Aut}^* \mathbf{A}^n.$$

Вложения $\text{Cr}_n \hookrightarrow \text{Cr}_{n+1}$, $(g_1, \dots, g_n) \mapsto (g_1, \dots, g_n, x_{n+1})$, определяют башню $\text{Cr}_1 \hookrightarrow \text{Cr}_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Cr}_n \hookrightarrow \dots$. Ее прямой предел Cr_∞ называется *группой Кремоны бесконечного ранга* (см. [15, § 1]).

В GL_n выделяется “стандартный” максимальный тор

$$D_n := \{(t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \mid t_1, \dots, t_n \in k\} \subset \text{GL}_n. \quad (7)$$

Его нормализатором в GL_n является совокупность всех содержащихся в GL_n мономиальных преобразований:

$$N_{\text{GL}_n}(D_n) := \{(t_1 x_{\sigma(1)}, \dots, t_n x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n, t_1, \dots, t_n \in k\} \subset \text{GL}_n, \quad (8)$$

где S_n – симметрическая группа степени n . В $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ лежит тор

$$D_n^* := D_n \cap \text{Aut}^* \mathbf{A}^n = \{(t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \mid t_1, \dots, t_n \in k, t_1 \cdots t_n = 1\}. \quad (9)$$

“Координатные” характеры $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ тора D_n , где

$$\varepsilon_i: D_n \rightarrow \mathbf{G}_m, \quad (t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \mapsto t_i, \quad (10)$$

образуют базис (свободной абелевой) группы $X(D_n)$.

§ 3. Некоторые подгруппы в Cr_n

Будем далее считать элементы группы $\mathbb{Z}^n$ целочисленными строками длины n . Тогда строки любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ являются элементами этой группы и мы будем использовать следующие обозначения:

$$\mathcal{R}_A := \text{подгруппа в } \mathbb{Z}^n, \text{ порожденная строками матрицы } A, \quad (11)$$

$$D_n(A) = \bigcap_{i=1}^m \ker \lambda_i, \quad \text{где } \lambda_i := \varepsilon_1^{a_{i,1}} \cdots \varepsilon_n^{a_{i,n}}. \quad (12)$$

При $m = 1$ вместо $D_n((l_1 \dots l_n))$ мы пишем $D_n(l_1, \dots, l_n)$. В частности,

$$D_n(0, \dots, 0) = D_n, \quad D_n(1, \dots, 1) = D_n^*. \quad (13)$$

Ясно, что $D_n(A)$ – замкнутая подгруппа в D_n и что (см. (11))

$$D_n(A) = \bigcap_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{R}(A)} \ker \varepsilon_1^{l_1} \dots \varepsilon_n^{l_n}. \quad (14)$$

Напомним используемую ниже терминологию (см., например, [16] и [17]).

Каждая конечная абелева группа G разлагается в прямую сумму циклических групп порядков $d_1, \dots, d_m$, где d_i делит d_{i+1} при $i = 1, \dots, m-1$, и $d_1 > 1$ при $|G| > 1$. Числа $d_1, \dots, d_s$ однозначно определяются по G и называются *инвариантными множителями группы G* .

Всякая ненулевая целочисленная матрица A преобразуется элементарными преобразованиями строк и столбцов в такую матрицу $S = (s_{ij})$, что только s_{ii} при $i = 1, \dots, r$ отличны от нуля, а s_{ii} делит $s_{i+1, i+1}$ при $i = 1, \dots, r-1$. Числа $s_{11}, \dots, s_{rr}$ по A определяются однозначно ($s_{ii} = f_i/f_{i-1}$, где f_i – это НОД миноров i -порядка матрицы A , а $f_0 := 1$) и называются *инвариантными множителями матрицы A* . Матрица S называется *нормальной формой Смита матрицы A* .

ЛЕММА 1. *Если B получается из $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ элементарными преобразованиями строк и столбцов, то подгруппы $D_n(A)$ и $D_n(B)$ сопряжены в Cgr_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_n$ – какой-либо базис группы $X(D_n)$. Тогда (см. (12)) $\lambda_i = \tau_1^{c_{i1}} \dots \tau_n^{c_{in}}$ для некоторых $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ и

$$D_n(A) = \bigcap_{i=1}^m \ker \tau_1^{c_{i1}} \dots \tau_n^{c_{in}}. \quad (15)$$

Группа $\text{Aut}_{\text{gr}} D_n$ автоморфизмов алгебраической группы D_n естественно отождествляется с $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Ее естественное действие на множестве базисов группы $X(D_n)$ транзитивно. Поэтому найдется такой автоморфизм

$$\varphi \in \text{Aut}_{\text{gr}} D_n, \quad (16)$$

что $\tau_i \circ \varphi = \varepsilon_i$ для всех i . Из (15) тогда следует, что

$$\varphi^{-1}(D_n(A)) = D_n(C), \quad \text{где } C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z}). \quad (17)$$

Поскольку отображение многообразий $D_n \rightarrow \mathbf{A}^n$, $(t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n)$, является бирациональным изоморфизмом, мы можем отождествить с его помощью группу $\text{Cgr}_n = \text{Bir } \mathbf{A}^n$ с группой бирациональных автоморфизмов группового многообразия тора D_n . Тогда φ становится элементом группы Cgr_n и из (16) и (17) легко вывести, что в ней имеет место равенство

$$\varphi^{-1} D_n(A) \varphi = D_n(C).$$

Заметим, что если базис $\tau_1, \dots, \tau_n$ получается из базиса $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ элементарным преобразованием, то матрица C получается из A элементарным преобразованием столбцов, и что всякое элементарное преобразование столбцов матрицы A именно так реализуется. Заметим также, что если последовательность $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in X(D_n)$ получается элементарным преобразованием из последовательности $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, то $D_n(A) = \bigcap_{i=1}^m \ker \varphi_i$, а матрица (c_{ij}) , определенная равенствами $\varphi_i = \varepsilon_1^{c_{i1}} \dots \varepsilon_n^{c_{in}}$, получается из A элементарным преобразованием строк, и что всякое элементарное преобразование строк матрицы A реализуется таким способом. Ясно, что отсюда вытекает утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если S – нормальная форма Смита матрицы A , то подгруппы $D_n(A)$ и $D_n(S)$ сопряжены в Cr_n .

ЛЕММА 2. Имеют место следующие утверждения:

(i) если $q_1 \leq \dots \leq q_r$ – все инвариантные множители матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$, то группа $D_n(A)$ изоморфна

$$\mu_{q_1} \times \dots \times \mu_{q_r} \times \mathbf{G}_m^{n-r}; \quad (18)$$

(ii) замкнутые $(n - m)$ -мерные подгруппы в D_n – это всевозможные подгруппы $D_n(A)$, где $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{rk} A = m$, и только они;

(iii) $\mathcal{R}_A = \{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \mid D_n(A) \subseteq \ker \varepsilon_1^{l_1} \dots \varepsilon_n^{l_n}\}$ для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$;

(iv) если $A \in \mathrm{Mat}_{s \times n}(\mathbb{Z})$, $B \in \mathrm{Mat}_{t \times n}(\mathbb{Z})$, то:

(a) $D_n(A) = D_n(B)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$;

(b) следующие свойства эквивалентны:

(b₁) $D_n(A)$ и $D_n(B)$ сопряжены в GL_n ;

(b₂) $D_n(A)$ и $D_n(B)$ сопряжены в $N_{\mathrm{GL}_n}(D_n)$;

(b₃) перестановкой столбцов из B можно получить такую матрицу C , что $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $S = (s_{ij})$ – нормальная форма Смита матрицы A . Тогда $s_{11} = q_1, \dots, s_{rr} = q_r$ и $s_{ij} = 0$ в остальных случаях. Следовательно, $D_n(S)$ изоморфна группе (18), но $D_n(A)$ изоморфна $D_n(S)$ по следствию 1.

(ii) Как следует из (i),

$$\dim D_n(A) = n - \mathrm{rk} A, \quad (19)$$

поэтому $\dim D_n(A) = n - m$ при $\mathrm{rk} A = m$. Наоборот, пусть H – такая замкнутая подгруппа в D_n , что $\dim H = n - m$. Тогда D_n/H является m -мерным тором [9, с. 114] и, значит, существует изоморфизм $\alpha: D_n/H \rightarrow \mathbf{G}_m^m$. Пусть $\lambda_i \in X(D_n)$ – композиция гомоморфизмов

$$D_n \xrightarrow{\pi} D_n/H \xrightarrow{\alpha} \mathbf{G}_m^m \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} \mathbf{G}_m,$$

где π – каноническая проекция, а pr_i – проекция на i -й сомножитель. Тогда $H = \bigcap_{i=1}^m \ker \lambda_i$. Значит, из (12) мы получаем, что $H = D_n(A)$, а из (19) – что $\mathrm{rk} A = m$.

(iii) Из (11), (12) следует, что левая часть доказываемого равенства содержится в правой. Доказывая обратное включение, рассмотрим какой-либо характер $\lambda = \varepsilon_1^{l_1} \cdots \varepsilon_n^{l_n}$, в ядре которого содержится $D_n(A)$. Не меняя $D_n(A)$ и $\mathcal{R}_A$, мы можем оставить в A лишь строки, образующие базис группы $\mathcal{R}_A$, удалив остальные, т. е. свести рассмотрение к случаю, когда $\text{rk } A = m$. Рассмотрим тогда характеры $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, определенные формулой (12), и гомоморфизм

$$\varphi: D_n \rightarrow \mathbf{G}_m^m, \quad g \mapsto (\lambda_1(g), \dots, \lambda_m(g)).$$

Ввиду (12) мы имеем $\ker \varphi = D_n(A)$. Отсюда и из соотношения (19) следует, что $\dim \varphi(D_n) = m$. Значит, φ – сюръекция. Следовательно, $\mathbf{G}_m^m$ является факторгруппой D_n по $D_n(A)$, а φ – каноническим гомоморфизмом на нее. Поскольку характер λ постоянен на слоях φ , из универсального свойства фактора вытекает существование такого характера $\mu: \mathbf{G}_m^m \rightarrow \mathbf{G}_m$, что $\lambda = \mu \circ \varphi$. Следовательно, $\lambda = \lambda_1^{c_1} \cdots \lambda_m^{c_m}$ для некоторых $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{Z}$, а это означает, что $(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{R}_A$.

(iv), (a) Если $D_n(A) = D_n(B)$, то $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$ ввиду (iii). Наоборот, если $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$, то $D_n(A) = D_n(B)$ ввиду (14).

(iv), (b) По теореме слияния [18, п. 1.1.1] подгруппы $D_n(A)$ и $D_n(B)$ сопряжены в GL_n тогда и только тогда, когда они сопряжены в $N_{\text{GL}_n}(D_n)$. Однако из (8), (12) следует, что $D_n(A)$ и $D_n(B)$ сопряжены в $N_{\text{GL}_n}(D_n)$ тогда и только тогда, когда из B можно получить перестановкой столбцов такую матрицу C , что $D_n(A) = D_n(C)$. Ввиду (iii), (a) последнее равенство эквивалентно равенству $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_A$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеют место следующие утверждения:*

(i) *если $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$ и $d := \text{НОД}(l_1, \dots, l_n)$, то $D_n(l_1, \dots, l_n)$ изоморфна $\mu_d \times \mathbf{G}_m^{n-1}$; в частности, $D_n(l_1, \dots, l_n)$ связна (т. е. является тором) тогда и только тогда, когда $d = 1$;*

(ii) *замкнутыми $(n-1)$ -мерными подгруппами в D_n являются всевозможные подгруппы $D_n(l_1, \dots, l_n)$ при $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$, и только они;*

(iii) *$D_n(l_1, \dots, l_n) = D_n(l'_1, \dots, l'_n)$ тогда и только тогда, когда*

$$(l_1, \dots, l_n) = \pm(l'_1, \dots, l'_n);$$

(iv) *следующие свойства эквивалентны:*

(iv₁) *$D_n(l_1, \dots, l_n)$ и $D_n(l'_1, \dots, l'_n)$ сопряжены в GL_n ;*

(iv₂) *$D_n(l_1, \dots, l_n)$ и $D_n(l'_1, \dots, l'_n)$ сопряжены в $N_{\text{GL}_n}(D_n)$;*

(iv₃) *существует такая перестановка $\sigma \in S_n$, что*

$$(l_1, \dots, l_n) = \pm(l'_{\sigma(1)}, \dots, l'_{\sigma(n)}).$$

Следующая лемма дает эффективный численный критерий равенства $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$ из леммы 2, (iii).

Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$, $\text{rk } A = m$. Для любой строго возрастающей последовательности из m целых чисел $i_1, \dots, i_m$, взятых из отрезка $[1, n]$, положим

$$p_{i_1, \dots, i_m}(A) := \det A_{i_1, \dots, i_m}, \quad (20)$$

где $A_{i_1, \dots, i_m}$ – подматрица матрицы A , расположенная в строках с номерами $1, \dots, m$ и столбцах с номерами $i_1, \dots, i_m$ (естественно назвать $p_{i_1, \dots, i_m}(A)$ плюккеровыми координатами матрицы A).

ЛЕММА 3. Для любых двух матриц $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ ранга m следующие свойства эквивалентны:

- (i) $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$;
- (ii) выполнены два условия:
 - (а) либо $p_{i_1, \dots, i_m}(A) = p_{i_1, \dots, i_m}(B)$ для всех $i_1, \dots, i_m$, либо $p_{i_1, \dots, i_m}(A) = -p_{i_1, \dots, i_m}(B)$ для всех $i_1, \dots, i_m$;
 - (б) для любой такой последовательности $i_1, \dots, i_m$, что $p_{i_1, \dots, i_m}(A) \neq 0$, имеет место включение

$$B_{i_1, \dots, i_m}(A_{i_1, \dots, i_m})^{-1} \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{Z}). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{rk } A = \text{rk } B = m$, строки A и B образуют соответственно базисы в $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$. Поэтому $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$ тогда и только тогда, когда существует такая матрица $Q \in \text{GL}_m(\mathbb{Z})$, что

$$A = QB. \quad (22)$$

Пусть $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$. Тогда из (22) следует, что

$$A_{i_1, \dots, i_m} = QB_{i_1, \dots, i_m} \quad (23)$$

для любых $i_1, \dots, i_m$, а значит, $p_{i_1, \dots, i_m}(A) = \det Q p_{i_1, \dots, i_m}(B)$ ввиду (20). Так как $Q \in \text{GL}_m(\mathbb{Z})$, то $\det Q = \pm 1$. Значит, выполнено условие (ii), (а). Если $p_{i_1, \dots, i_m}(A) \neq 0$, то и $p_{i_1, \dots, i_m}(B) \neq 0$, следовательно, $B_{i_1, \dots, i_m}$ невырождена, и из равенства (23) следует, что $Q = A_{i_1, \dots, i_m}(B_{i_1, \dots, i_m})^{-1}$. Значит, выполнено условие (ii), (б). Это доказывает импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii).

Доказывая обратную импликацию, будем рассматривать $\mathbb{Z}^n$ как подмножество координатного векторного пространства (строк) $\mathbb{Q}^n$. Условие (ii), (а) показывает, что $\mathbb{Q}$ -линейные оболочки множеств $\mathcal{R}_A$ и $\mathcal{R}_B$ в $\mathbb{Q}^n$ имеют одинаковые плюккеровы координаты. Значит, эти оболочки являются одним и тем же линейным подпространством L (см., например, [19, теорема 10.1]). Поскольку строки A и строки B образуют в L два базиса, существует такая матрица $P \in \text{GL}_m(\mathbb{Q})$, что $A = PB$. Следовательно, $A_{i_1, \dots, i_m} = PB_{i_1, \dots, i_m}$ для любых $i_1, \dots, i_m$, и, значит, $P = A_{i_1, \dots, i_m}(B_{i_1, \dots, i_m})^{-1}$, если $p_{i_1, \dots, i_m}(B) \neq 0$. Из (ii), (б) тогда следует, что $P \in \text{GL}_m(\mathbb{Z})$. Значит, $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$. Это доказывает импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В доказательстве леммы 3 установлено, что на самом деле из (ii), (а) следует независимость матрицы $B_{i_1, \dots, i_m}(A_{i_1, \dots, i_m})^{-1}$ от выбора последовательности $i_1, \dots, i_m$, для которой $p_{i_1, \dots, i_m}(A) \neq 0$. Поэтому (ii), (б) следует из (ii), (а) и выполнимости (21) для какой-либо одной такой последовательности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $m = 1$, то условие (ii), (б) леммы 3 следует из (ii), (а) (но при $m > 1$ это не так).

ТЕОРЕМА 1 (классификация диагонализированных подгрупп в Aff_n с точностью до сопряженности в Cr_n). *Имеют место следующие утверждения:*

- (i) *две диагонализированные подгруппы группы Aff_n сопряжены в Cr_n тогда и только тогда, когда они изоморфны;*
- (ii) *любая диагонализированная подгруппа G группы Aff_n сопряжена в Cr_n единственной замкнутой подгруппе тора D_n , имеющей вид*

$$\ker \varepsilon_{r+1}^{d_1} \cap \cdots \cap \ker \varepsilon_{r+s}^{d_s} \cap \ker \varepsilon_{r+s+1} \cap \cdots \cap \ker \varepsilon_n, \quad (24)$$

где $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq n$, $r + s \leq n$, $2 \leq d_1$ и d_i делит d_{i+1} для любого $i < s$; определяющие подгруппу (24) целые числа имеют следующий смысл: $r = \dim G$, а $d_1, \dots, d_s$ – все инвариантные множители конечной абелевой группы G/G^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку максимальные редуктивные подгруппы алгебраической группы сопряжены (см. [20, п. 5.1]), а GL_n является одной из них в Aff_n , любая диагонализированная подгруппа в Aff_n переводится сопряжением в GL_n . В свою очередь, любая диагонализированная подгруппа в GL_n переводится сопряжением в подгруппу тора D_n (см. [9, гл. I, п. 4.6]). Ввиду леммы 2, (ii) это показывает, что (i) достаточно доказать для подгрупп $D_n(A)$ и $D_n(B)$ тора D_n . Далее, добавляя, если нужно, нулевые строки, можно считать, что A и B имеют одинаковые количества строк. Пусть теперь группы $D_n(A)$ и $D_n(B)$ изоморфны. Тогда их размерности равны, а у групп $D_n(A)/D_n(A)^0$ и $D_n(B)/D_n(B)^0$ совпадают инвариантные множители. Отсюда и из леммы 2, (i) следует, что матрицы A и B имеют одинаковые инвариантные множители (ибо они получаются дописыванием одинакового количества единиц к инвариантным множителям указанных групп). Значит, A и B имеют одинаковые нормальные формы Смита. Ввиду следствия 1 отсюда вытекает, что $D_n(A)$ и $D_n(B)$ сопряжены в Cr_n . Это доказывает (i).

Ясно, что определяющие подгруппу (24) целые числа имеют указанный в (ii) смысл. Поскольку всякая диагонализированная группа является прямым произведением конечной абелевой группы и тора, она однозначно с точностью до изоморфизма определяется своей размерностью и инвариантными множителями группы связных компонент. Отсюда и из (i) следует (ii).

СЛЕДСТВИЕ 3. *Подгруппы $D_n(A)$ и $D_n(B)$ сопряжены в Cr_n тогда и только тогда, когда A и B имеют одинаковые инвариантные множители.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Всякий тор T в Aff_n сопряжен в Cr_n тору D_r , где $r = \dim T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1, (ii).

СЛЕДСТВИЕ 5. *Любые две изоморфные конечные абелевы подгруппы в Aff_n сопряжены в Cr_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{char } k = 0$, всякий элемент из Aff_n конечного порядка полупрост. Значит, любая конечная абелева подгруппа в Aff_n редуктивна и потому сопряжена в Aff_n подгруппе группы GL_n (см. доказательство

теоремы 1). Однако любая коммутативная подгруппа в GL_n , содержащая только полупростые элементы, диагонализируема (см. [9, предложение 4.6, (b)]). Утверждение теперь следует из теоремы 1, (i).

СЛЕДСТВИЕ 6 [6, теорема 1]. *Любые два элемента из Aff_n , имеющие одинаковые конечные порядки, сопряжены в Cr_n .*

§ 4. Торы в Cr_n , $Aut A^n$ и $Aut^* A^n$

ТЕОРЕМА 2 (торы в Cr_n). *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) в Cr_n нет торов размерности больше n ;
- (ii) в Cr_n всякий r -мерный тор при $r = n, n-1, n-2$ сопряжен тору D_r ;
- (iii) при $n \geq 5$ в Cr_n существуют $(n-3)$ -мерные торы, не сопряженные подторам тора D_n ;
- (iv) всякий r -мерный тор в Cr_n сопряжен в Cr_{n+r} тору D_r ;
- (v) в Cr_∞ всякий r -мерный тор сопряжен тору D_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) доказано, например, в [21] (см. также [15, следствие 2.2]).

Согласно [4, следствие 2] (см. также [15, следствие 2.4, (b)]) всякий r -мерный тор в Cr_n при $r = n, n-1, n-2$ сопряжен подтору тора D_n . Поэтому утверждение (ii) вытекает из следствия 4.

Утверждение (iii) доказано в [15, следствие 2.5].

Согласно [15, теорема 2.6] всякий r -мерный тор в Cr_n сопряжен в Cr_{n+r} подтору тора D_{n+r} . Поэтому утверждение (iv) вытекает из следствия 4.

Утверждение (v) следует из утверждения (iv).

СЛЕДСТВИЕ 7. *Справедливы следующие утверждения:*

- (i) в Cr_n всякий n -мерный тор максимален;
- (ii) в Cr_n нет максимальных $(n-1)$ - и $(n-2)$ -мерных торов;
- (iii) при $n \geq 5$ в Cr_n существуют максимальные $(n-3)$ -мерные торы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $n \leq 3$ теорема 2 дает классификацию торов в Cr_n с точностью до сопряженности: классы сопряженных нетривиальных торов исчерпываются классами торов $D_1, \dots, D_n$.

Пусть $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ – ненулевой элемент с $\text{НОД}(l_1, \dots, l_n) = 1$. Легко видеть, что гомоморфизм

$$\mathbf{G}_m \rightarrow D_n, \quad t \mapsto (t^{l_1} x_1, \dots, t^{l_n} x_n), \quad (25)$$

является вложением и любое вложение $\mathbf{G}_m \hookrightarrow D_n$ имеет такой же вид. Обозначим через $T(l_1, \dots, l_n)$ образ вложения (25). Это одномерный тор в D_n , и всякий одномерный тор в D_n имеет такой же вид.

ЛЕММА 4. *Следующие свойства эквивалентны:*

- (i) $T(l_1, \dots, l_n) = T(l'_1, \dots, l'_n)$;
- (ii) $(l_1, \dots, l_n) = \pm(l'_1, \dots, l'_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) очевидна.

Докажем (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть выполнено (i). Возьмем какой-либо элемент $t \in \mathbf{G}_m$ бесконечного порядка. Из (i) и определения $T(l_1, \dots, l_n)$ следует, что найдется такое $s \in \mathbf{G}_m$, что $t^{l_i} = s^{l'_i}$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Значит, $t^{l_i l'_j} = s^{l'_i l'_j} = t^{l'_j l'_i}$ для любых двух различных целых чисел i и j из отрезка $[1, n]$. Поскольку порядок t бесконечен, отсюда следует, что $l_i l'_j - l_j l'_i = 0$. Значит,

$$\text{rk} \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_n \\ l'_1 & \cdots & l'_n \end{pmatrix} = 1.$$

Таким образом, $(l_1, \dots, l_n) = \gamma(l'_1, \dots, l'_n)$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{Q}$, или, эквивалентно, $p(l_1, \dots, l_n) = q(l'_1, \dots, l'_n)$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, $\text{НОД}(p, q) = 1$. Значит, p делит каждое из $l'_1, \dots, l'_n$, а q — каждое из $l_1, \dots, l_n$. Тогда из взаимной простоты чисел каждой такой группы следует, что $\gamma = \pm 1$, т. е. выполнено (ii).

ТЕОРЕМА 3 (торы в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$). *Имеют место следующие утверждения:*

- (i) в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ всякий n -мерный тор сопряжен тору D_n ;
- (ii) в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ все $(n-1)$ -мерные торы исчерпываются с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ всевозможными группами вида $D_n(l_1, \dots, l_n)$, где $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$ и $\text{НОД}(l_1, \dots, l_n) = 1$;
- (iii) в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ одномерные торы исчерпываются с точностью до сопряженности в группе $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ всевозможными группами вида $T(l_1, l_2, l_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [4] и [5] всякий r -мерный тор в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ при, соответственно, $r = n$ и $r = n-1$ сопряжен подтору тора D_n . Отсюда и из следствия 2 вытекают утверждения (i) и (ii).

Согласно [22] всякий одномерный тор в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ сопряжен подтору тора D_3 . Отсюда следует (iii).

ТЕОРЕМА 4 (торы в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$). *Имеют место следующие утверждения:*

- (i) в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ нет торов размерности более $n-1$;
- (ii) в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ всякий $(n-1)$ -мерный тор максимален и сопряжен тору D_n^* (см. (9)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ содержит n -мерный тор T , то по теореме 3, (i) в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ найдется такой элемент $g \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$, что

$$T = gD_n g^{-1}. \quad (26)$$

Заменяя g на gz , где $z \in D_n$ — какой-либо элемент с $\text{Jac}(z) = \det z = 1/\text{Jac}(g)$, мы можем считать, что $g \in \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$, откуда ввиду (26) следует, что $D_n \subset \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$. Противоречие.

(ii) Пусть S — какой-либо $(n-1)$ -мерный тор в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$. Ввиду теоремы 3, (i) и следствия 2, (ii) найдутся такие $g \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, что

$$S = gD_n(l_1, \dots, l_n)g^{-1}. \quad (27)$$

Как и в доказательстве (i), можно считать, что $g \in \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$. Тогда из равенства (27) следует, что $D_n(l_1, \dots, l_n) \subset \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$. Отсюда и из $D_n \cap \ker \text{Jac} = D_n^* :=$

$D_n(1, \dots, 1)$ вытекает включение $D_n(l_1, \dots, l_n) \subseteq D_n^*$. Ввиду следствия 2, (i) обе части включения являются $(n-1)$ -мерными торами. Значит, это включение является равенством, что доказывает (ii).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для групп $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$, в отличие от Cr_n (см. следствие 7, (iii)), в настоящее время ничего не известно о существовании максимальных торов не максимальной размерности. Этот вопрос тесно связан с *проблемой сокращения*: существует ли такое аффинное многообразие X , не изоморфное $\mathbf{A}^m$, $m = \dim X$, что $X \times \mathbf{A}^d$ изоморфно $\mathbf{A}^{m+d}$ для некоторого d ? Если ответ положительный, то в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ при $n = m + d$ найдется максимальный тор T не максимальной размерности. Действительно, умножая, если необходимо, $X \times \mathbf{A}^d$ на $\mathbf{A}^1$, можно считать, что $d \geq 2$. Пусть λ – характер $t \mapsto t$ тора $\mathbf{G}_m$. Рассмотрим линейное действие $\mathbf{G}_m$ на $\mathbf{A}^d$, имеющее ровно две изотипные компоненты: $(d-1)$ -мерную типа λ и одномерную типа λ^{1-d} . Оно определяет действие $\mathbf{G}_m$ на $X \times \mathbf{A}^d$ через второй сомножитель, а значит, и действие $\mathbf{G}_m$ на $\mathbf{A}^n$. Рассмотрим в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ тор, являющийся образом $\mathbf{G}_m$ при гомоморфизме, определенном указанным действием. Из конструкции следует, что этот тор лежит в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$. Пусть T (соответственно, T') – какой-либо максимальный тор в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ (соответственно, в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$), содержащий этот образ. Если бы T был n -мерным (соответственно, T' был $(n-1)$ -мерным), то по теореме 3, (i) (соответственно, по теореме 4) он был бы сопряжен подтору тора D_n , а значит, указанное действие T (соответственно, T') на $\mathbf{A}^n$ было эквивалентно линейному. Следовательно, и действие $\mathbf{G}_m$ на $\mathbf{A}^n$ было бы эквивалентно линейному, и потому множество F его неподвижных точек было изоморфно аффинному пространству. Однако, по конструкции, в $\mathbf{A}^d$ есть только одна неподвижная относительно $\mathbf{G}_m$ точка, и поэтому F изоморфно X . Противоречие².

§ 5. Орбиты и стабилизаторы действия $D_n(l_1, \dots, l_n)$ на $\mathbf{A}^n$

Здесь мы установим некоторые нужные для дальнейшего свойства орбит и стабилизаторов естественного действия на $\mathbf{A}^n$ группы

$$G := D_n(l_1, \dots, l_n). \quad (28)$$

Ясно, что каждая координатная гиперплоскость

$$H_i := \{a \in \mathbf{A}^n \mid x_i(a) = 0\} \quad (29)$$

G -инвариантна.

²Добавлено 2 августа 2012 г. Теоремы 3, 4 и замечание 4 остаются в силе и в том случае, когда характеристика p основного поля k положительна. В опубликованном сегодня препринте [23] доказано, что гиперповерхность X в $\mathbf{A}^4$, заданная уравнением $x_1^m x_2 + x_3^{p^e} + x_4 + x^{sp} = 0$, где m, e, s – такие положительные целые числа, что $p^e \nmid sp$ и $sp \nmid p^e$, не изоморфна $\mathbf{A}^3$, но $X \times \mathbf{A}^1$ изоморфно $\mathbf{A}^4$. Отсюда согласно замечанию 4 следует, что если $\text{char } k > 0$, то для любого $n \geq 5$ в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ существуют максимальные торы не максимальной размерности.

ЛЕММА 5. G -стабилизатор любой точки из $\mathbf{A}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ тривиален.

(i) Если $(l_1, \dots, l_n) = (0, \dots, 0)$, то $\mathbf{A}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ является G -орбитой, а размерность G -стабилизатора любой точки из $\bigcup_{i=1}^n H_i$ положительна.

(ii) Если $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$, то $\dim G \cdot a = n - 1$ для любой точки $a \in \mathbf{A}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из (28), (12), (4) и леммы 2.

Далее мы рассмотрим случай

$$(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0).$$

ЛЕММА 6. Если $l_i \neq 0$, то открытое в H_i подмножество $\mathcal{O}_i := H_i \setminus \bigcup_{j \neq i} H_j$ является G -орбитой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду G -инвариантности подмножества $\mathcal{O}_i$ достаточно показать, что оно содержится в некоторой G -орбите. Поскольку $l_i \neq 0$, уравнение $x^{l_i} = \alpha$ имеет решение для любого $\alpha \in k$, $\alpha \neq 0$. Отсюда и из соотношений (28), (12) следует, что для любых двух точек

$$b = (b_1, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_n), c = (c_1, \dots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \dots, c_n) \in H_i \setminus \bigcup_{j \neq i} H_j$$

существует такой элемент $g = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \in G$, что $t_j = b_j^{-1} c_j$ для каждого $j \neq i$. Из (4) тогда получаем, что $g \cdot b = c$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7. Следующие свойства эквивалентны:

- (i) все числа $l_1, \dots, l_n$ отличны от нуля и имеют одинаковый знак;
- (ii) G -орбита любой точки из $\mathbf{A}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ замкнута в $\mathbf{A}^n$;
- (iii) G -орбита какой-либо точки из $\mathbf{A}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ замкнута в $\mathbf{A}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим какую-либо точку

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i.$$

Пусть выполнено (i). Предположим, что G -орбита точки a незамкнута в $\mathbf{A}^n$. Тогда в ее границу можно выйти по однопараметрической подгруппе, т. е. найдется такой гомоморфизм $\varphi: \mathbf{G}_m \rightarrow G$, что существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \cdot a = b \in \overline{G \cdot a} \setminus G \cdot a \quad (30)$$

(см. [10, теорема 6.9]); последнее означает, что морфизм $\mathbf{G}_m = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{A}^n$, $t \mapsto \varphi(t) \cdot a$, продолжается до морфизма $\mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^n$, отображающего 0 в точку b . Ввиду алгебраичности φ найдется такой вектор $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n$, что $\varphi(t) = (t^{d_1} x_1, \dots, t^{d_n} x_n)$ для любого $t \in \mathbf{G}_m$. Поскольку $\varphi(t) \cdot a = (t^{d_1} a_1, \dots, t^{d_n} a_n)$ и $a_i \neq 0$ для любого i , существование указанного предела означает, что

$$d_1 \geq 0, \dots, d_n \geq 0. \quad (31)$$

С другой стороны, из $\varphi(t) \in G$ и (28), (12) следует, что $t^{d_1 l_1 + \dots + d_n l_n} = 1$ для любого t , т. е.

$$d_1 l_1 + \dots + d_n l_n = 0. \quad (32)$$

Однако из (31), (32) и условия (i) вытекает, что $d_1 = \dots = d_n = 0$. Значит, $b = a$ вопреки (30). Это противоречие доказывает импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii).

Наоборот, пусть (i) не выполнено, т. е. среди чисел $l_1, \dots, l_n$ найдутся либо два ненулевых с разными знаками, либо одно нулевое. В первом случае пусть, например, $l_1 > 0, l_2 < 0$. Тогда из (12) следует, что образ гомоморфизма $\varphi: \mathbf{G}_m \rightarrow D_n, t \mapsto (t^{-l_2} x_1, t^{l_1} x_2, x_3, \dots, x_n)$, лежит в G . Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \cdot a = (0, 0, a_3, \dots, a_n) \notin G \cdot a,$$

это показывает, что орбита $G \cdot a$ незамкнута. Во втором случае пусть, скажем, $a_1 = 0$. Тогда в G лежит образ гомоморфизма $\varphi: \mathbf{G}_m \rightarrow D_n, t \mapsto (t x_1, x_2, \dots, x_n)$, и так как

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \cdot a = (0, a_2, \dots, a_n) \notin G \cdot a,$$

орбита $G \cdot a$ незамкнута. Это доказывает импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i).

Из лемм 5–7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8. Если все числа $l_1, \dots, l_n$ отличны от нуля и имеют одинаковые знаки, то в $\mathbf{A}^n$ имеется ровно n незамкнутых $(n-1)$ -мерных G -орбит, это орбиты $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ из леммы 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Напомним [24], что действие алгебраической группы на алгебраическом многообразии называется *стабильным*, если орбита точки общего положения замкнута. Лемма 7 показывает, что следующие свойства эквивалентны:

- (i) все числа $l_1, \dots, l_n$ отличны от нуля и имеют одинаковые знаки;
- (ii) действие G на $\mathbf{A}^n$ стабильно.

ЛЕММА 8. Пусть ни одно из чисел $l_1, \dots, l_n$ не равно ± 1 . Тогда следующие свойства точки $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n$ эквивалентны:

- (i) a имеет нетривиальный G -стабилизатор;
- (ii) $a \in \bigcup_{i=1}^n H_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует импликация (i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим теперь, что выполнено (ii). Тогда существуют такие индексы $i_1, \dots, i_s, s \geq 1$, что $a_j = 0$ при $j = i_1, \dots, i_s$ и $a_j \neq 0$ при остальных j . Из (4), (28), (12) следует, что элемент $(t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \in D_n$ лежит в G -стабилизаторе точки a в том и только в том случае, когда $t_j = 1$ при $j \neq i_1, \dots, i_s$ и

$$t_{i_1}^{l_{i_1}} \dots t_{i_s}^{l_{i_s}} = 1. \quad (33)$$

Из того, что среди чисел $l_1, \dots, l_n$ нет ± 1 , а k – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, следует, что соотношение (33), рассматриваемое как уравнение относительно $t_{i_1}, \dots, t_{i_s}$, имеет не менее двух решений. Значит, G -стабилизатор точки a нетривиален. Это доказывает импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i).

ЛЕММА 9. Если среди $l_1, \dots, l_n$ есть два ненулевых числа разных знаков, то каждая G -орбита содержит в своем замыкании $(0, \dots, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности пусть, например,

$$l_1 > 0, \quad l_2 \geq 0, \quad \dots, \quad l_s \geq 0, \quad l_{s+1} < 0, \quad l_{s+2} \leq 0, \quad \dots, \quad l_n \leq 0.$$

Выберем столь большое целое положительное число d , что

$$q := l_2 + \dots + l_s + dl_{s+1} + l_{s+2} + \dots + l_n < 0.$$

Поскольку $-ql_1 + l_1l_2 + \dots + l_1l_s + l_1dl_{s+1} + l_1l_{s+2} + \dots + l_1l_n = 0$, из соотношений (28) и (12) следует, что образ гомоморфизма

$$\varphi: \mathbf{G}_m \rightarrow D_n, \quad t \mapsto (t^{-q}x_1, t^{l_1}x_2, \dots, t^{l_1}x_s, t^{l_1d}x_{s+1}, t^{l_1}x_{s+2}, \dots, t^{l_1}x_n), \quad (34)$$

лежит в G . С другой стороны, поскольку $-q$, l_1 и d – положительные числа, из (4) вытекает, что для любой точки $a \in \mathbf{A}^n$ предел $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \cdot a$ существует и равен $(0, \dots, 0)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда среди $l_1, \dots, l_n$ содержатся 0 и ± 1 , имеется не менее двух ненулевых l_i и все они имеют одинаковые знаки. Ввиду (12) без ограничения общности можно считать этот знак положительным. С точностью до замены G на сопряженную с помощью элемента из $N_{\text{GL}_n}(D_n)$ группу, можно считать, что

$$\begin{aligned} l_1 = \dots = l_p = 1, \quad l_{p+1} \geq 2, \quad \dots, \quad l_q \geq 2, \quad l_{q+1} = \dots = l_n = 0, \\ p \geq 1, \quad n > q \geq p, \quad q \geq 2. \end{aligned} \quad (35)$$

ЛЕММА 10. Пусть выполнено (35). Рассмотрим точку $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) если $a \notin \bigcup_{i=1}^n H_i$, то орбита $G \cdot b$, где $b = (a_1, \dots, a_q, 0, \dots, 0)$, лежит в замыкании орбиты $G \cdot a$, замкнута и $\dim G \cdot b = q - 1$;
- (ii) если $a \in H_i$, то группа G_a :
 - (a) тривиальна, если $1 \leq i \leq p$ и $a \in \mathcal{O}_i$ (см. лемму 6);
 - (b) нетривиальна и конечна, если $p + 1 \leq i \leq q$ и $a \in \mathcal{O}_i$;
 - (c) имеет положительную размерность, если $i > q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (28), (12), (35) следует, что образ гомоморфизма

$$\varphi: \mathbf{G}_m \rightarrow D_n, \quad t \mapsto (x_1, \dots, x_q, tx_{q+1}, \dots, tx_n),$$

лежит в G . Следовательно, точка

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) \cdot a = (a_1, \dots, a_q, 0, \dots, 0) = b \quad (36)$$

лежит в замыкании орбиты $G \cdot a$.

Пусть теперь $a \notin \bigcup_{i=1}^n H_i$. Если бы орбита $G \cdot b$ была незамкнута, то, как и в доказательстве леммы 7, существовал такой гомоморфизм

$$\psi: \mathbf{G}_m \rightarrow G, \quad t \mapsto (t^{d_1}x_1, \dots, t^{d_n}x_n), \quad (37)$$

что $c := \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) \cdot b \in \overline{G \cdot b} \setminus G \cdot b$. Из (36) следует, что $d_1 \geq 0, \dots, d_q \geq 0$, а из (35), (28), (12) – что $d_1 l_1 + \dots + d_q l_q = 0$. Поскольку $l_1, \dots, l_q$ положительны, это дает $d_1 = \dots = d_q = 0$. Ввиду (36) отсюда получаем $\psi(t) \cdot b = b$ для любого t и, значит, $c = b$. Противоречие. Таким образом, орбита $G \cdot b$ замкнута. Поскольку $a_1, \dots, a_q$ отличны от нуля, из (28), (12), (4), (35), (36) следует, что элемент $(t_1 x_1, \dots, t_n x_n) \in D_n$ лежит в G_b тогда и только тогда, когда $t_1 = \dots = t_q = 1$. Это доказывает (i).

Рассуждения, аналогичные тем, что использовались в доказательстве леммы 8, дают (ii). Лемма доказана.

Наконец, рассмотрим случай, когда одно из чисел $l_1, \dots, l_n$ равно ± 1 (без ограничения общности можно считать его равным 1 ввиду (12)), а остальные равны нулю.

ЛЕММА 11. Пусть $l_i = 1$ и $l_j = 0$ при $j \neq i$. Для любого $s \in k$ обозначим через $H(s)$ гиперплоскость в $\mathbf{A}^n$, заданную уравнением $x_i + s = 0$. Тогда:

- (i) $\bigcup_{j \neq i} H_j$ – множество всех точек с нетривиальным G -стабилизатором (который автоматически имеет положительную размерность);
- (ii) открытое в $H(s)$ множество $H(s) \setminus \bigcup_{j \neq i} H_j$ является $(n-1)$ -мерной G -орбитой и всякая $(n-1)$ -мерная G -орбита имеет такой вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) непосредственно следует из соотношений (4), (28) и (12), а утверждение (ii) вытекает из (i), инвариантности $H(\alpha)$ и того, что $\dim G = \dim H(\alpha) = n-1$.

§ 6. Группа $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$

Мы докажем сначала несколько утверждений о нормализаторах для действий на любых аффинных многообразиях.

ЛЕММА 12. Пусть X – неприводимое аффинное многообразие и G – алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } X$. Следующие свойства эквивалентны:

- (i) $N_{\text{Aut } X}(G)$ – алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } X$;
- (ii) естественное действие $N_{\text{Aut } X}(G)$ на $k[X]$ локально конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из того, что любая алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } X$ действует на $k[X]$ локально конечно (см. [9, предложение 1.9]).

Докажем (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть выполнено (ii). Тогда в $k[X]$ найдется $N_{\text{Aut } X}(G)$ -инвариантное конечномерное k -линейное подпространство V , содержащее систему образующих k -алгебры $k[X]$. Следовательно, определенный действием $N_{\text{Aut } X}(G)$ на V гомоморфизм

$$\rho: N_{\text{Aut } X}(G) \rightarrow \text{GL}(V^*)$$

является вложением. Рассмотрим $N_{\text{Aut } X}(G)$ -эквивариантное отображение

$$\iota: X \rightarrow V^*, \quad \iota(x)(f) := f(x) \quad \forall x \in X, f \in V.$$

Стандартное рассуждение (см. [9, предложение 1.12]) показывает, что $\rho|_G$ – морфизм алгебраических групп, а ι – замкнутое вложение. отождествим X с $\iota(X)$ посредством ι , а $N_{\text{Aut } X}(G)$ с $\rho(N_{\text{Aut } X}(G))$ посредством ρ . Тогда X – замкнутое подмногообразие в V^* , а $N_{\text{Aut } X}(G)$ и G – подгруппы в $\text{GL}(V^*)$, причем G замкнута и

$$N_{\text{Aut } X}(G) \subset N_{\text{GL}(V^*)}(G) \cap \text{Tran}_{\text{GL}(V^*)}(X, X), \quad (38)$$

где

$$\text{Tran}_{\text{GL}(V^*)}(X, X) := \{g \in \text{GL}(V^*) \mid g \cdot X \subset X\}. \quad (39)$$

На самом деле справа в (39) автоматически имеет место равенство $g \cdot X = X$: действительно, X неприводимо и замкнуто в V^* , а поскольку $g \in \text{Aut } V^*$, то $g \cdot X$ – неприводимое замкнутое множество в X той же размерности, что и X . Следовательно, $\text{Tran}_{\text{GL}(V^*)}(X, X)$, как и $N_{\text{GL}(V^*)}(G)$, является подгруппой в $\text{GL}(V^*)$, и потому правая часть в (38) – подгруппа в $\text{GL}(V^*)$. Ее элементы нормализуют G и, будучи ограниченными на X , являются автоморфизмами X , поэтому они лежат в $N_{\text{Aut } X}(G)$. Значит,

$$N_{\text{Aut } X}(G) = N_{\text{GL}(V^*)}(G) \cap \text{Tran}_{\text{GL}(V^*)}(X, X). \quad (40)$$

Из замкнутости G в $\text{GL}(V^*)$ и X в V^* вытекает соответственно замкнутость $N_{\text{GL}(V^*)}(G)$ и $\text{Tran}_{\text{GL}(V^*)}(X, X)$ в $\text{GL}(V^*)$ (см. [9, предложение 1.7]). Отсюда и из (40) следует замкнутость $N_{\text{Aut } X}(G)$ в $\text{GL}(V^*)$. Значит, $N_{\text{Aut } X}(G)$ – алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } X$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – неприводимое аффинное многообразие и G – такая редуктивная алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } X$, что

$$k[X]^G = k. \quad (41)$$

Тогда в любом из следующих случаев $N_{\text{Aut } X}(G)$ является алгебраической подгруппой в $\text{Aut } X$:

- (i) G имеет в X неподвижную точку;
- (ii) G^0 полупроста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in k[X]$. Докажем, что в каждом из этих случаев k -линейная оболочка орбиты $N_{\text{Aut } X}(G) \cdot f$ конечномерна. Утверждение теоремы будет тогда следовать из леммы 12.

Пусть $\mathcal{M}(G)$ – множество классов простых алгебраических G -модулей. Если L – алгебраический G -модуль, обозначим через L_μ его изотипную компоненту типа $\mu \in \mathcal{M}(G)$.

Поскольку G редуктивна, то (см. [10, п. 3.13])

$$k[X] = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}(G)} k[X]_\mu. \quad (42)$$

Группа $N_{\text{Aut } X}(G)$ переставляет изотипные компоненты G -модуля $k[X]$.

Поскольку $k[X]_\mu$ – конечно порожденный $k[X]^G$ -модуль (см. [10, теорема 3.24]), из (41) следует, что

$$\dim_k k[X]_\mu < \infty \quad \forall \mu. \quad (43)$$

Ввиду (42) существуют такие элементы $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathcal{M}(G)$, что

$$k[X]_{\mu_i} \neq 0 \quad \forall i, \quad f \in k[X]_{\mu_1} \oplus \dots \oplus k[X]_{\mu_s}. \quad (44)$$

(i) Предположим, что в X имеется G -неподвижная точка a . Так как замкнутые орбиты разделяются G -инвариантными регулярными функциями (см. [10, теорема 4.7]), из (41) следует, что других неподвижных точек в X нет. Значит, точка a неподвижна и относительно $N_{\text{Aut } X}(G)$. Следовательно, идеал

$$\mathfrak{m}_a := \{f \in k[X] \mid f(a) = 0\}$$

$N_{\text{Aut } X}(G)$ -инвариантен. Поэтому $N_{\text{Aut } X}(G)$ -инвариантен и каждый член убывающей фильтрации

$$\mathfrak{m}_a \supset \dots \supset \mathfrak{m}_a^d \supset \mathfrak{m}_a^{d+1} \supset \dots. \quad (45)$$

Эта фильтрация обладает следующим свойством (см. [25, следствие 10.18]):

$$\bigcap_d \mathfrak{m}_a^d = 0. \quad (46)$$

Ввиду (45) мы имеем убывающую систему вложенных линейных подпространств $\{k[X]_\mu \cap \mathfrak{m}_a^d \mid d = 1, 2, \dots\}$. Поскольку они конечномерны (см. (43)), существует такое d_μ , что $k[X]_\mu \cap \mathfrak{m}_a^d = k[X]_\mu \cap \mathfrak{m}_a^{d+1}$ при любом $d \geq d_\mu$. Из свойства (46) тогда следует, что в действительности

$$k[X]_\mu \cap \mathfrak{m}_a^d = 0 \quad \forall d \geq d_\mu. \quad (47)$$

Пусть $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq \max\{d_{\mu_1}, \dots, d_{\mu_s}\}$. Из (47) следует, что

$$k[X]_{\mu_i} \cap \mathfrak{m}_a^l = 0 \quad \forall i = 1, \dots, s. \quad (48)$$

Поскольку естественная проекция $\pi: k[X] \rightarrow k[X]/\mathfrak{m}_a^l$ – эпиморфизм G -модулей, то $\pi(k[X]_\mu) = (k[X]/\mathfrak{m}_a^l)_\mu$ для любого $\mu \in \mathcal{M}(G)$. Так как

$$\dim_k k[X]/\mathfrak{m}_a^l < \infty$$

(см. [25, предложение 11.4]), отсюда следует конечность множества таких $\mu \in \mathcal{M}(G)$, для которых

$$k[X]_\mu \neq 0, \quad k[X]_\mu \cap \mathfrak{m}_a^l = 0. \quad (49)$$

Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ – это множество. Так как условия (49) выполнены при $\mu = \mu_1, \dots, \mu_s$ (см. (44), (48)), можно считать, что

$$\lambda_i = \mu_i, \quad i = 1, \dots, s. \quad (50)$$

Поскольку группа $N_{\text{Aut } X}(G)$ переставляет изотипные компоненты G -модуля $k[X]$ и переводит в себя $\mathfrak{m}_a^l$, она переставляет между собой $k[X]_{\lambda_1}, \dots, k[X]_{\lambda_t}$. Значит, $k[X]_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus k[X]_{\lambda_t}$ – инвариантное относительно $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(G)$ подпространство в $k[X]$. Ввиду (43), (44), (50) оно конечномерно и содержит f . Следовательно, k -линейная оболочка орбиты $N_{\text{Aut } X}(G) \cdot f$ конечномерна, что и требовалось доказать.

(ii) Пусть группа G^0 полупроста. Из формулы Г. Вейля для размерности простого G^0 -модуля и конечности индекса $[G : G^0]$ следует, что с точностью до изоморфизма существует лишь конечное число таких простых алгебраических G -модулей, размерность которых не превосходит любой наперед заданной константы. Отсюда следует конечность множества таких $\mu \in \mathcal{M}(G)$, что

$$k[X]_{\mu} \neq 0, \quad \dim_k k[X]_{\mu} \leq \max_i \dim_k k[X]_{\mu_i}.$$

Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ – это множество. Можно считать, что выполнено (50). Поскольку группа $N_{\text{Aut } X}(G)$, переставляя изотипные компоненты, сохраняет их размерности, $k[X]_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus k[X]_{\lambda_t}$ инвариантно относительно $N_{\text{Aut } X}(G)$. Доказательство теперь завершается, как и в случае (i).

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть X и G – те же, что в теореме 5, и $k = \mathbb{C}$. Предположим, что X односвязно, гладко и $\chi(X) = 1$. Тогда $N_{\text{Aut } X}(G)$ – алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию из теоремы об этальном слайсе (см. [26, ч. III, следствие 2], [10, теорема 6.7]) из (41) и гладкости X вытекает, что X – однородное векторное расслоение над единственной замкнутой G -орбитой $\mathcal{O}$ в X . Следовательно, орбита $\mathcal{O}$ односвязна, и $\chi(X) = \chi(\mathcal{O})$. Будучи аффинной, $\mathcal{O}$ изоморфна G/H для некоторой редуктивной подгруппы H (см. [10, теорема 4.17]). Из того, что G/H односвязно и $\chi(G/H) = 1$, следует (см. [12, п. 5.1]), что $G = H$. Значит, $\mathcal{O}$ – неподвижная точка. Утверждение теперь следует из теоремы 5, (i).

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть G – редуктивная алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $k[\mathbf{A}^n]^G = k$. Тогда $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(G)$ – алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того, что $\text{char } k = 0$, по принципу Лефшеца [27, п. 15.1] можно считать, что $k = \mathbb{C}$. Поскольку $\mathbf{A}^n$ односвязно, гладко и $\chi(\mathbf{A}^n) = 1$, утверждение вытекает из следствия 9.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Следующий пример показывает, что только из условия (41) (для неприводимого аффинного X и редуктивной G), вообще говоря, не следует, что $N_{\text{Aut } X}(G)$ – алгебраическая подгруппа.

ПРИМЕР 1. Пусть G – алгебраический тор размерности $n \geq 2$. Возьмем в качестве X групповое многообразие алгебраической группы G . Ее группа автоморфизмов $\text{Aut}_{\text{gr}} G$ вложена в $\text{Aut } X$ и изоморфна $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Действие G на X левыми сдвигами вкладывает G в $\text{Aut } X$. Эти две подгруппы порождают $\text{Aut } X$, а точнее, $\text{Aut } X = \text{Aut}_{\text{gr}} G \ltimes G$. Поэтому $N_{\text{Aut } X}(G) = \text{Aut } X$.

Пусть $g \in \text{Aut}_{\text{gr}} G$ – элемент бесконечного порядка, а $f_1, \dots, f_n \in k[X]$ – база в $X(G)$. Тогда $g^d \cdot f_i \in X(G)$ для любых $d \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$, и множество $C_i := \{g^d \cdot f_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ конечно тогда и только тогда, когда стабилизатор f_i относительно порожденной g циклической группы нетривиален. Допустим, все $C_1, \dots, C_n$ конечны. Тогда найдется такое $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, что $g^d \cdot f_i = f_i$ для любого $i = 1, \dots, n$. Поскольку $f_1, \dots, f_n$ – база в $X(G)$, это значит, что g^d – тривиальный автоморфизм вопреки тому, что g – элемент бесконечного порядка и $d \neq 0$. Значит, C_i бесконечно для некоторого i . Поскольку различные характеры линейно независимы над k (см. [9, лемма 8.1]), отсюда следует, что k -линейная оболочка множества C_i (а потому и орбиты $N_{\text{Aut } X}(G) \cdot f_i$) бесконечномерна.

Мы используем теперь полученную информацию в доказательстве алгебраичности групп $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$.

ТЕОРЕМА 6. *Подгруппа $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$ для любых $l_1, \dots, l_n$ является алгебраической в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$. При этом:*

- (i) $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n) = N_{\text{GL}_n}(D_n)$;
- (ii) если $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$, то

$$N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n)) \subseteq N_{\text{GL}_n}(D_n) \quad (51)$$

в любом из следующих случаев:

- (а) все числа $l_1, \dots, l_n$ отличны от нуля и имеют одинаковый знак;
- (б) ни одно из чисел $l_1, \dots, l_n$ не равно ± 1 ;
- (с) среди чисел $l_1, \dots, l_n$ содержатся 0 и ± 1 , а также не менее двух ненулевых, и все ненулевые имеют одинаковый знак;
- (iii) если $l_i = 1$ и $l_j = 0$ при $j \neq i$, то группа $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$ изоморфна $N_{\text{GL}_{n-1}}(D_{n-1}) \times \text{Aff}_1$ и состоит из всех $(g_1, \dots, g_n) \in \text{Aff}_n$ вида

$$g_j = \begin{cases} t_j x_{\sigma(j)} & \text{при } j \neq i, \\ t_j x_j + s & \text{при } j = i, \end{cases} \quad (52)$$

где $t_1, \dots, t_n, s \in k$, а σ – перестановка множества $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $g \in N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(G)$, $a \in \mathbf{A}^n$, то выполнены условия

$$g(G \cdot a) = G \cdot g(a), \quad gG_ag^{-1} = G_{g(a)}, \quad g(\overline{G \cdot a}) = \overline{g(G \cdot a)} \quad (53)$$

и, если G алгебраическая, $\dim G \cdot a = \dim g(G \cdot a)$.

Пусть $G = D_n$. Из леммы 5, (i) следует, что $\bigcup_{i=1}^n H_i$ – множество тех точек, G -стабилизатор которых имеет положительную размерность. Ввиду (53) оно g -инвариантно. Поскольку ограничение g на многообразие $\bigcup_{i=1}^n H_i$ является его автоморфизмом, g переставляет между собой его неприводимые компоненты $H_1, \dots, H_n$, т. е. существует такая подстановка $\sigma \in S_n$, что

$$g(H_i) = H_{\sigma(i)} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (54)$$

Поскольку идеал в $k[\mathbf{A}^n]$, определенный H_i , порожден x_i , это показывает, что полином $g^*(x_i)$ делит $x_{\sigma(i)}$, а потому $g^*(x_i) = t_i x_{\sigma(i)}$ для некоторого ненулевого $t_i \in k$. Значит, $g \in N_{\text{GL}_n}(D_n)$ (см. (3), (8)). Это доказывает (i).

Пусть, далее, $G = D_n(l_1, \dots, l_n)$, $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Предположим, что выполнено условие (a). Тогда из (53) и следствия 8 вытекает, что g переставляет между собой орбиты $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ (см. лемму 6), т.е. существует такая подстановка $\sigma \in S_n$, что $g(\mathcal{O}_i) = \mathcal{O}_{\sigma(i)}$ для любого i . Ввиду леммы 6 и (53) отсюда следует, что g обладает свойством (54), а, как показано выше, из него вытекает, что $g \in N_{\text{GL}_n}(D_n)$. Таким образом, (51) доказано в случае, когда выполнено условие (a).

Пусть выполнено условие (b). Тогда, g -инвариантность $\bigcup_{i=1}^n H_i$ следует из (53) и леммы 8. Теперь то же рассуждение, что и для $G = D_n$, завершает доказательство (51) в случае, когда выполнено условие (b).

Пусть выполнено условие (c). Доказывая вложение (51), можно заменить G на группу, сопряженную G с помощью подходящего элемента из $N_{\text{GL}_n}(D_n)$, и считать, что выполнено (35). Множество $\{a \in \mathbf{A}^n \mid \dim G_a > 0\}$ замкнуто (см. [10, п. 1.4]). Ввиду (53) оно g -инвариантно, а из лемм 5, 10, (ii) следует, что его $(n-1)$ -мерные неприводимые компоненты – это $H_{q+1}, \dots, H_n$. Следовательно, g переставляет $H_{q+1}, \dots, H_n$ между собой. Далее, из лемм 5, 10, (ii) следует, что $\mathcal{O}_{p+1}, \dots, \mathcal{O}_q$ – все такие G -орбиты $\mathcal{O}$ в $\mathbf{A}^n$, что стабилизатор G_a конечен и нетривиален для $a \in \mathcal{O}$. Из (53) тогда следует, что g переставляет между собой $\mathcal{O}_{p+1}, \dots, \mathcal{O}_q$, а значит, и их замыкания $H_{p+1}, \dots, H_q$. Наконец, ввиду лемм 5, 10, (ii) такие G -орбиты $\mathcal{O}$ в $\mathbf{A}^n$, что G_a тривиален для $a \in \mathcal{O}$, исчерпываются орбитами $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$ и $G \cdot a$, где $a \notin \bigcup_{i=1}^n H_i$. Поскольку G редуктивна, каждая G -орбита в $\mathbf{A}^n$ содержит в своем замыкании единственную замкнутую G -орбиту (см. [10, следствие на с. 189]). Ввиду леммы 6 для каждой из $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$ такой замкнутой орбитой является неподвижная точка $(0, \dots, 0)$. С другой стороны, по лемме 10, (i) лежащая в $\overline{G \cdot a}$ для $a \notin \bigcup_{i=1}^n H_i$ замкнутая орбита имеет размерность $q-1 \geq 1$, и потому неподвижной точкой не является. Следовательно, g переставляет между собой $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$, а значит, и их замыкания $H_1, \dots, H_p$. Тем самым, доказано, что для некоторой подстановки $\sigma \in S_n$ выполнено (54). Как и выше, это позволяет заключить, что (51) выполнено в случае (c). Таким образом, доказано (ii).

Предположим теперь, что $l_i = 1$ и $l_j = 0$ при $j \neq i$. Из (53) и леммы 11, (i) следует, что замкнутое множество $\bigcup_{j \neq i} H_j$ инвариантно относительно g . Значит, g переставляет местами его неприводимые компоненты $H_1, \dots, H_{i-1}, H_{i+1}, \dots, H_n$. Отсюда, как и выше, заключаем, что при $j \neq i$ имеет место равенство $g_j = t_j x_{\sigma(j)}$ для некоторых $t_j \in k$ и подстановки σ множества $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Далее, из (53) и леммы 11 следует, что $g(\mathcal{O}_i)$ является орбитой, открытой в некоторой гиперплоскости $H(c)$ (см. обозначение в лемме 11). Поскольку $\overline{\mathcal{O}_i} = H_i$, а x_i и $x_i + c$ являются соответственно образующими идеалов гиперплоскостей H_i и $H(c)$, мы заключаем, что $g_i = g^*(x_i)$ отличается от $x_i + c$ лишь ненулевым постоянным множителем: $g_i = t_i x_i + s$ для некоторых $t_i, s \in k, t_i \neq 0$. Таким образом, g имеет вид (52). Наоборот,

легко видеть, что каждый элемент $g \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$ вида (52) нормализует G . Это доказывает (iii).

Наконец, докажем, что подгруппа $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$ для любых чисел $l_1, \dots, l_n$ является алгебраической в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$. Согласно утверждениям (i)–(iii) группа $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$ является алгебраической, если либо $(l_1, \dots, l_n) = (0, \dots, 0)$, либо $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$ и выполнено или любое из условий (a) и (b), (c) утверждения (ii), или условие утверждения (iii). Единственным случаем, который не охватывается указанными условиями, является тот, когда среди $l_1, \dots, l_n$ существуют числа разных знаков. В этом случае, однако, из леммы 9 следует, что на $\mathbf{A}^n$ нет непостоянных $D_n(l_1, \dots, l_n)$ -инвариантных регулярных функций. Однако тогда по следствию 10 мы заключаем, что группа $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$ алгебраична.

§ 7. Теоремы слияния для торов в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$

Теоремы слияния описывают подгруппы, контролирующие слияние (fusion) подмножеств при сопряжении. А именно, пусть G – группа (абстрактная) и H – ее подгруппа. Мы говорим, что $N_G(H)$ контролирует слияние подмножеств в H при сопряжении элементами из G , если выполнено следующее свойство:

(F) для любого подмножества $S \subseteq H$ и всякого элемента $g \in G$ таких, что $gSg^{-1} \subseteq H$, существует такой элемент $w \in N_G(H)$, что $gsg^{-1} = wsw^{-1}$ для любого элемента $s \in S$.

Если пара (G, H) обладает свойством (F), то мы говорим, что для H в G имеет место *теорема слияния*. Отметим, что действие $N_G(H)$ на H сопряжениями сводится к действию “группы Вейля” $N_G(H)/Z_G(H)$.

ПРИМЕР 2. Теорема слияния для H в G имеет место в следующих случаях:

1) группа G конечная, а H – ее абелева силовская p -подгруппа (это классический результат Бернсайда);

2) группа G аффинная алгебраическая, а H – ее максимальный тор (это классический результат теории алгебраических групп; см., например, [18, п. 1.1.1]);

3) $G = \text{Cr}_n$, а $H = D_n$ (это результат Серра [7, теорема 1.1]); поскольку всякий n -мерный тор в Cr_n максимален и сопряжен D_n (см. теорему 2, (i), (ii)), можно заменить D_n на любой n -мерный тор.

Напомним, что при $n \geq 5$ в Cr_n существуют $(n - 3)$ -мерные максимальные торы (см. следствие 7, (iii)).

ВОПРОС 1. Имеет ли место теорема слияния, если заменить D_n на такой тор?

Мы докажем, что теорема слияния имеет место для n -мерных торов в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и $(n - 1)$ -мерных торов в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$.

ЛЕММА 13. Для всякого элемента $g = (g_1, \dots, g_n) \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$ существует такой элемент $g' \in \text{SL}_n$, что если $s, gsg^{-1} \in \text{GL}_n$, то

$$gsg^{-1} = g's(g')^{-1}. \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_i = g_i^{(0)} + g_i^{(1)} + \dots$, где $g_i^{(s)}$ – форма степени s от $x_1, \dots, x_n$. Поскольку $\text{Jac}(g) \in k$, то $\text{Jac}(g) = \det(\partial g_i / \partial x_j |_{x_1=\dots=x_n=0})$. Однако правая часть этого равенства равна $\det(\partial g_i^{(1)} / \partial x_j)$. Следовательно,

$$g^{(1)} := (g_1^{(1)}, \dots, g_n^{(1)}) \in \text{GL}_n. \quad (56)$$

Автоморфизм $g^{(1)}$ является дифференциалом автоморфизма g в точке $(0, \dots, 0)$. Из (56) следует, что:

- (a) $g = g^{(1)}$, если $g \in \text{GL}_n$;
- (b) $(ga)^{(1)} = g^{(1)}a$ и $(ag)^{(1)} = ag^{(1)}$, если $a \in \text{GL}_n$.

Пусть теперь s и $t := gsg^{-1}$ – элементы из GL_n . Ввиду (56) мы имеем $g^{(1)} \in \text{GL}_n$, а из $gs = tg$ и (a), (b) следует, что $g^{(1)}s = tg^{(1)}$. Значит, в качестве g' можно взять произведение $g^{(1)}$ на такую константу $\alpha \in k$, что $\alpha^n \det g^{(1)} = 1$.

ТЕОРЕМА 7. Следующие пары (G, H) обладают свойством (F):

- (i) (теорема слияния для n -мерных торов в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$)

$$(G, H) = (\text{Aut } \mathbf{A}^n, n\text{-мерный тор});$$

- (ii) (теорема слияния для $(n-1)$ -мерных торов в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$)

$$(G, H) = (\text{Aut}^* \mathbf{A}^n, (n-1)\text{-мерный тор}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $G = \text{Aut } \mathbf{A}^n$, H – тор и $\dim H = n$. Тогда ввиду теоремы 3 можно считать, что H – максимальный тор в GL_n . Сохраним обозначения из формулировки свойства (F). По лемме 13 существует такой элемент $g' \in \text{GL}_n$, что для любого элемента $s \in S$ выполнено равенство (55). Значит, $g'S(g')^{-1} = gSg^{-1} \subseteq H$. Поскольку $g' \in \text{GL}_n$, это показывает, что

$$H' := (g')^{-1}Hg' \quad (57)$$

– еще один максимальный тор в GL_n , содержащий S . Торы H и H' лежат в (замкнутой [9, гл. I, § 1, п. 7]) подгруппе $Z_{\text{GL}_n}(S)$ группы GL_n и, значит, являются в ней максимальными торами. Ввиду сопряженности максимальных торов в любой аффинной алгебраической группе [9, гл. IV, § 11, п. 3], существует элемент

$$z \in Z_{\text{GL}_n}(S), \quad (58)$$

для которого

$$H' = zHz^{-1}. \quad (59)$$

Из (57), (59) следует, что $w := g'z \in N_{\text{GL}_n}(H)$, а из (58), (55) – что $gsg^{-1} = wsw^{-1}$ для любого $s \in S$.

(ii) Те же рассуждения используем, когда $G = \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$, H – тор и $\dim H = n-1$: нужно лишь заменить GL_n на SL_n , ссылку на теорему 3 ссылкой на теорему 4 и заметить, что по лемме 13 элемент g' можно считать лежащим в SL_n .

§ 8. Приложения: классификации классов сопряженных подгрупп

В этом параграфе с помощью полученных результатов мы устанавливаем классификации, указанные во введении, и, в частности, доказываем обобщения на несвязный случай теорем Бялыницкого-Бирули [4], [5] о линеаризации действий на $\mathbf{A}^n$ тором размерности не менее $n - 1$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть G – алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ и G^0 – тор. Тогда:

- (i) если $\dim G = n$ или $\dim G = n - 1$, то существует такой элемент $g \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$, что $gGg^{-1} \subset \text{GL}_n$ и $gG^0g^{-1} \subset D_n$;
- (ii) если $G \subset \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ и $\dim G = n - 1$, то существует такой элемент $g \in \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$, что $gGg^{-1} \subset \text{SL}_n$ и $gG^0g^{-1} = D_n^*$ (см. (9)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Ввиду сопряженности максимальных тором в GL_n достаточно доказать существование такого $g \in \text{Aut } \mathbf{A}^n$, что $gGg^{-1} \subset \text{GL}_n$.

Группа G редуктивна. Поэтому по следствию из теоремы об этальном слайсе [26, следствие 2, с. 98] утверждение верно, если $k[\mathbf{A}^n]^G = k$ (здесь используется лишь редуктивность G , а не более сильное условие того, что G^0 – тор). Поэтому далее можно считать, что $k[\mathbf{A}^n]^G \neq k$. Это эквивалентно условию

$$k[\mathbf{A}^n]^{G^0} \neq k. \quad (60)$$

Ввиду теоремы 3 и равенства (13), заменяя G на сопряженную группу, можно считать, что

$$G^0 = D_n(l_1, \dots, l_n) \subset \text{GL}_n. \quad (61)$$

Утверждение о существовании g будет доказано, если мы установим, что из соотношений (61) и (60) вытекает включение

$$G \subset \text{GL}_n. \quad (62)$$

Пусть F – конечная подгруппа группы G , пересекающая каждую связную компоненту этой группы. Такая подгруппа существует (см. [20, лемма 5.11]). Тогда

$$G = FG^0. \quad (63)$$

Поскольку G^0 – нормальный делитель в G , то $F \subset N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(D_n(l_1, \dots, l_n))$. В силу теоремы 6 получаем

$$F \subset N_{\text{GL}_n}(D_n) \subset \text{GL}_n, \quad (64)$$

если либо $(l_1, \dots, l_n) = (0, \dots, 0)$, либо $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$ и выполнено любое из условий (а)–(с) утверждения (ii) теоремы 6. Ввиду (61) и (63) это доказывает (62) для указанных $(l_1, \dots, l_n)$. Из леммы 9 и соотношения (60) теперь следует, что единственный случай для $(l_1, \dots, l_n)$, который остается рассмотреть, – это когда $l_i = 1$ и $l_j = 0$ при $j \neq i$ для некоторого i . Рассматривая этот случай, возьмем какой-либо элемент $g \in F$. Тогда ввиду теоремы 6, (iii)

выполнены равенства (52). Поскольку F конечна, g имеет конечный порядок. Отсюда следует, что в соотношении (52) должно быть $s = 0$, а это вместе с определением (8) означает, что в рассматриваемом случае также выполнены вложения (64), а следовательно, и (62).

(ii) Доказательство то же, что и для (i), если заменить $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ на $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$, GL_n на $\text{SL}_n = \text{GL}_n \cap \text{Aut}^* \mathbf{A}^n$, $D_n(l_1, \dots, l_n)$ на D_n^* , ссылку на теорему 3 ссылкой на теорему 4 и учесть, что D_n^* – максимальный тор в SL_n .

ТЕОРЕМА 9 (классификация n -мерных диагонализующих подгрупп в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$). *С точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ тор D_n является единственной n -мерной диагонализующей подгруппой в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 8 утверждение теоремы следует из того, что в GL_n всякая диагонализующая подгруппа сопряжена подгруппе тора D_n (см. [9, гл. 3, п. 8.2, предложение, (d)]).

ТЕОРЕМА 10 (классификация $(n-1)$ -мерных диагонализующих подгрупп в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$). *С точностью до сопряженности в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ тор D_n^* является единственной $(n-1)$ -мерной диагонализующей подгруппой в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 8 утверждение теоремы вытекает из того, что в SL_n всякая диагонализующая подгруппа сопряжена подгруппе тора D_n^* (это легко следует из [9, гл. 3, п. 8.2, предложение, (d)]).

ТЕОРЕМА 11 (классификация с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ максимальных n -мерных алгебраических подгрупп G в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$, у которых G^0 – тор). *С точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ подгруппа $N_{\text{GL}_n}(D_n)$ (см. (8)) является единственной максимальной алгебраической подгруппой в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$, связная компонента единицы которой есть n -мерный тор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует ввиду теоремы 8 из того, что $D_n = N_{\text{GL}_n}(D_n)^0$.

ТЕОРЕМА 12 (классификация с точностью до сопряженности в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ максимальных $(n-1)$ -мерных алгебраических подгрупп G в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$, у которых G^0 – тор). *С точностью до сопряженности в $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$ подгруппа*

$$N_{\text{SL}_n}(D_n^*) = N_{\text{GL}_n}(D_n) \cap \text{SL}_n$$

является единственной максимальной алгебраической подгруппой в $\text{Aut}^ \mathbf{A}^n$, связная компонента единицы которой есть $(n-1)$ -мерный тор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует ввиду теоремы 8 из того, что $D_n^* = N_{\text{SL}_n}(D_n^*)^0$. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathcal{L}_n$ аддитивный моноид всех таких $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, что:

(a) $l_1 \leq \dots \leq l_n$;

(b) $(l_1, \dots, l_n) \leq (-l_n, \dots, -l_1)$ относительно лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^n$.

ТЕОРЕМА 13 (классификация $(n-1)$ -мерных диагонализированных подгрупп в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$). *Имеют место следующие утверждения:*

(i) *каждая $(n-1)$ -мерная диагонализированная подгруппа группы $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ сопряжена в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ единственной подгруппе вида*

$$D_n(l_1, \dots, l_n), \quad (l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_n \setminus \{(0, \dots, 0)\}; \quad (65)$$

(ii) *любая подгруппа (65) является $(n-1)$ -мерной диагонализированной группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – какая-нибудь $(n-1)$ -мерная диагонализированная подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$. Учитывая теорему 8, (i), сопряженность в GL_n всякой диагонализированной подгруппы этой группы подгруппе тора D_n и следствие 2, (ii), мы заключаем, что G сопряжена в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ некоторой подгруппе вида $D_n(l_1, \dots, l_n)$, $(l_1, \dots, l_n) \neq (0, \dots, 0)$. Из определения $\mathcal{L}_n$ и следствия 2, (iv) вытекает, что можно считать $(l_1, \dots, l_n) \in \mathcal{L}_n$. Допустим, что G сопряжена в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ также подгруппе $D_n(l'_1, \dots, l'_n)$ при $(l'_1, \dots, l'_n) \in \mathcal{L}_n$. Тогда $D_n(l_1, \dots, l_n)$ и $D_n(l'_1, \dots, l'_n)$ сопряжены в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$, а потому из теоремы 7, (i) следует, что они сопряжены в $N_{\text{GL}_n}(D_n)$. Ввиду следствия 2, (iv) и определения $\mathcal{L}_n$ отсюда вытекает, что $(l_1, \dots, l_n) = (l'_1, \dots, l'_n)$, что и доказывает (i).

Утверждение (ii) вытекает из следствия 2, (ii). Теорема доказана.

Из теорем 6, 9 и 13 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 14. *Если G – диагонализированная подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ размерности не менее $n-1$, то $N_{\text{Aut } \mathbf{A}^n}(G)$ – алгебраическая подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Легко видеть, что $n-1$ в теореме 14 нельзя заменить на меньшее целое число.

ТЕОРЕМА 15 (классификация $(n-1)$ -мерных диагонализированных подгрупп в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в Cgr_n). *Имеют место следующие утверждения:*

(i) *две диагонализированные $(n-1)$ -мерные подгруппы группы $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ сопряжены в Cgr_n тогда и только тогда, когда они изоморфны;*

(ii) *любая $(n-1)$ -мерная диагонализированная подгруппа группы $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ сопряжена в Cgr_n единственной замкнутой подгруппе в D_n вида $\ker \varepsilon_n^d$, $d \in \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 13, (i) и следствия 2, (i). Теорема доказана.

При $n \leq 3$ теоремы 2, (i), 9, 13 доставляют классификацию всех торов в группе $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$, за исключением одномерных торов в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$. Классификация последних дана в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 16 (классификация одномерных торов в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ с точностью до сопряженности в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$). *Каждый одномерный тор в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ сопряжен в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ единственному тору вида $T(l_1, l_2, l_3)$, где $(l_1, l_2, l_3) \in \mathcal{L}_3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – одномерный тор в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$. По теореме 3 он сопряжен в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ некоторому тору $T(l_1, l_2, l_3)$. Ввиду (8) и равенства $T(l_1, l_2, l_3) = T(-l_1, -l_2, -l_3)$ можно считать, что $(l_1, l_2, l_3) \in \mathcal{L}_3$. Допустим, G сопряжен в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$ еще и тору $T(l'_1, l'_2, l'_3)$ при $(l'_1, l'_2, l'_3) \in \mathcal{L}_3$. Тогда $T(l_1, l_2, l_3)$ и $T(l'_1, l'_2, l'_3)$ сопряжены в $\text{Aut } \mathbf{A}^3$, а потому, по теореме 7, (i), и в $N_{\text{GL}_3}(D_3)$. Отсюда с помощью следствия 2, (iv), определения $\mathcal{L}_n$ и леммы 4 нетрудно вывести, что $(l_1, l_2, l_3) = (l'_1, l'_2, l'_n)$.

§ 9. Разложение Жордана в Cr_n .

Простые числа кручения групп Кремоны

Хотя группы Кремоны бесконечномерны (это имеет точный смысл; см. [13]), в глаза бросаются их аналогии с алгебраическими группами: в них есть топология Зарисского, алгебраические подгруппы, торы, корни, группы Вейля и т.д. В [7, п. 1.2] Серр пишет об аналогии

“groupe de Cremona de rang $n \longleftrightarrow$ groupe semi-simple de rang n ”.

Далее мы кратко обсудим две темы, показывающие, что эти аналогии простираются и дальше. Вторая из этих тем непосредственно связана с торами в группах Кремоны.

9.1. Разложение Жордана в Cr_n . Пусть X – алгебраическое многообразие. “Алгебраические семейства” наделяют $\text{Bir } X$ топологией Зарисского [13], [14, § 2], [7, п. 1.6]: подмножество в $\text{Bir } X$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнут его прообраз в любом алгебраическом семействе $S \rightarrow \text{Bir } X$. Для всякой алгебраической подгруппы G в $\text{Bir } X$ и ее подмножества Z совпадают замыкания Z в этой топологии и топологии Зарисского группы G . В частности, G замкнута в $\text{Bir } X$.

Назовем элемент $g \in \text{Bir } X$ *алгебраическим*, если в $\text{Bir } X$ существует алгебраическая подгруппа G , содержащая g . Это эквивалентно тому, что замыкание в $\text{Bir } X$ циклической подгруппы, порожденной g , является алгебраической подгруппой. Если G аффинна, то для g определено разложение Жордана в G (см. [9, ч. I, § 4]):

$$g = g_s g_n. \quad (66)$$

На самом деле g_s и g_n зависят лишь от g , а не от выбора G . Действительно, пусть G' – еще одна аффинная алгебраическая подгруппа в $\text{Bir } X$, содержащая g , и $g = g'_s g'_n$ – разложение Жордана в G' . Поскольку $G \cap G'$ – замкнутая подгруппа в G и G' , существует разложение Жордана $g = g''_s g''_n$ в $G \cap G'$. Применяя теорему о сохранении разложения Жордана при гомоморфизмах (см. [9, теорема 4.4, (4)]) к вложениям $G \hookrightarrow G \cap G' \hookrightarrow G'$, получаем, что $g_s = g''_s$, $g_n = g''_n$, $g'_s = g''_s$, $g'_n = g''_n$. Значит, назвав (66) *разложением Жордана в $\text{Bir } X$* , мы получаем корректное определение.

Согласно [28] любая алгебраическая подгруппа в Cr_n является аффинной. Поэтому в Cr_n любой алгебраический элемент допускает разложение Жордана.

Разложение Жордана в алгебраических группах обладает рядом известных свойств [29], [9], например:

- (а) всякий полупростой элемент связной группы содержится в ее торе;
- (б) множество всех унипотентных элементов замкнуто;
- (с) класс сопряженности полупростого элемента связной редуктивной группы замкнут;
- (д) замыкание класса сопряженности любого элемента g связной редуктивной группы содержит g_s .

Напомним, что Cr_n связна и при $n = 1, 2$ проста [14], $\mathrm{Aut} \mathbf{A}^n$, $\mathrm{Aut}^* \mathbf{A}^n$ связны, а $\mathrm{Aut}^* \mathbf{A}^n$ проста [30], [31]. Естественно возникает

ВОПРОС 2. Существуют ли аналоги или модификации упомянутых свойств для групп Cr_n , $\mathrm{Aut} \mathbf{A}^n$ и $\mathrm{Aut}^* \mathbf{A}^n$?

Например, свойство (а) для Cr_n выполнено при $n = 1$, но не выполнено при $n > 1$. Действительно, если $n > 2$, то согласно [15, теорема 4.3] в Cr_n имеется полупростой элемент второго порядка, не содержащийся ни в какой связной алгебраической подгруппе группы Cr_n . Если же $n = 2$, то ввиду теоремы 2, (ii) и следствия 5 все элементы порядка $d < \infty$ в Cr_n , включаемые в торы, образуют один класс сопряженности, тогда как, например, при четном d совокупность всех элементов порядка d разбивается на бесконечное число классов сопряженности [32]. С другой стороны, в группах $\mathrm{Aut} \mathbf{A}^2$ и $\mathrm{Aut}^* \mathbf{A}^2$ свойство (а) выполнено, поскольку действие любой конечной группы на $\mathbf{A}^2$ линейризуется [33].

9.2. Простые числа кручения групп Кремоны. Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа и p – простое число. Напомним (см. [18, п. 1.3] и цитируемые в этой статье работы), что p называется *простым числом кручения группы G* , если в G имеется конечная абелева p -подгруппа, не содержащаяся ни в каком торе группы G . Совокупность $\mathrm{Tors}(G)$ всех простых чисел кручения группы G допускает различные интерпретации. Например, $p \in \mathrm{Tors}(G)$ при $k = \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда в $\bigoplus_i H_i(G, \mathbb{Z})$ имеется элемент порядка p (что мотивирует название). Вычисление $\mathrm{Tors}(G)$ сводится к случаю, когда G односвязна. Для каждой простой группы G множество $\mathrm{Tors}(G)$ явно описано.

Возможность говорить о торах в группах вида $\mathrm{Bir} X$, где X – алгебраическое многообразие, позволяет заменить G в приведенном выше определении на $\mathrm{Bir} X$ или ее подгруппу, получив определение, имеющее смысл. В частности, то, что получается при замене G на Cr_n , $\mathrm{Aut} \mathbf{A}^n$ или $\mathrm{Aut}^* \mathbf{A}^n$, мы примем за определения простых чисел кручения этих групп. Обозначим совокупности этих чисел соответственно через $\mathrm{Tors}(\mathrm{Cr}_n)$, $\mathrm{Tors}(\mathrm{Aut} \mathbf{A}^n)$ и $\mathrm{Tors}(\mathrm{Aut}^* \mathbf{A}^n)$. Естественно задать следующий вопрос (в отношении $\mathrm{Tors}(\mathrm{Cr}_n)$ он был поставлен и обсуждался в [34]).

ВОПРОС 3. Чему равны $\mathrm{Tors}(\mathrm{Cr}_n)$, $\mathrm{Tors}(\mathrm{Aut} \mathbf{A}^n)$ и $\mathrm{Tors}(\mathrm{Aut}^* \mathbf{A}^n)$?

Поскольку $\mathrm{Cr}_1 = \mathrm{PGL}_2$, то

$$\mathrm{Tors}(\mathrm{Cr}_1) = \{2\}. \quad (67)$$

Согласно [32] для каждого $d = 2, 3, 5$ в Cr_2 имеется бесконечно много классов сопряженности элементов порядка d . С другой стороны, как объяснено в конце п. 9.1, в Cr_2 имеется единственный класс сопряженности таких элементов порядка d , которые включаются в торы. Значит, 2, 3 и 5 – числа кручения группы Cr_2 . Рассмотрим простое число $p > 5$. Согласно [35, теорема E] любой элемент $g \in \text{Cr}_2$ порядка p лежит в подгруппе, изоморфной $\text{Aut } \mathbf{P}^2 = \text{PGL}_3$. Значит, g лежит в торе. Наконец, согласно [36, теорема B, с. 146] в Cr_2 имеется единственная с точностью до сопряженности нециклическая конечная абелева p -группа (она обозначается $0.mn$) и эта группа содержится в максимальном торе подгруппы, изоморфной $(\text{Aut}(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1))^0 = \text{PGL}_2 \times \text{PGL}_2$. Мы приходим к заключению, что простые числа кручения у Cr_2 такие же, как у простой исключительной алгебраической группы E_8 :

$$\text{Tors}(\text{Cr}_2) = \{2, 3, 5\}. \quad (68)$$

Из равенства $\text{Aut } \mathbf{A}^1 = \text{Aff}_1$ и работы [33] следует, что всякая конечная подгруппа в $\text{Aut } \mathbf{A}^n$ (соответственно, $\text{Aut}^* \mathbf{A}^n$) при $n \leq 2$ содержится в подгруппе, изоморфной группе GL_n (соответственно, SL_n). Поэтому

$$\text{Tors}(\text{Aut } \mathbf{A}^n) = \text{Tors}(\text{Aut}^* \mathbf{A}^n) = \{\emptyset\} \quad \text{при } n \leq 2.$$

При $n \geq 3$ о множествах $\text{Tors}(\text{Cr}_n)$, $\text{Tors}(\text{Aut } \mathbf{A}^n)$ и $\text{Tors}(\text{Aut}^* \mathbf{A}^n)$ исчерпывающей информации пока нет. Из [15, теорема 4.3] и (67), (68) следует, что

$$\text{Tors}(\text{Cr}_n) = \{2, \dots\} \quad \forall n. \quad (69)$$

Согласно [37] в Cr_2 имеется 3-элементарная абелева подгруппа ранга 3 (т. е. изоморфная $(\mu_d)^3$). Поскольку Cr_1 содержит циклическую подгруппу порядка 3, а в Cr_n при $n \geq 3$ можно вложить прямое произведение $n - 2$ копий Cr_1 на Cr_2 , в Cr_n имеется 3-элементарная абелева подгруппа G ранга $n + 1$. Однако из леммы 2, (i) следует, что для любого простого числа p ранг любой элементарной абелевой p -подгруппы r -мерного тора не превосходит r . Отсюда и из теоремы 2, (i) следует, что G не вкладывается в содержащийся в Cr_n тор. С учетом (68) и (69) это дает

$$\text{Tors}(\text{Cr}_n) = \{2, 3, \dots\} \quad \forall n \geq 2.$$

ВОПРОС 4. Каково наименьшее n , для которого 7 входит в одно из множеств $\text{Tors}(\text{Cr}_n)$, $\text{Tors}(\text{Aut } \mathbf{A}^n)$ и $\text{Tors}(\text{Aut}^* \mathbf{A}^n)$?

ВОПРОС 5. Конечны ли эти множества?

Список литературы

1. V. L. Popov, *Problems for problem session*, 2005, [arXiv: math/0504517](https://arxiv.org/abs/math/0504517).
2. V. L. Popov, “Roots of the affine Cremona group”, *Affine algebraic geometry* (Seville, Spain, 2003), *Contemp. Math.*, **369**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 12–13.

3. A. Liendo, “Roots of the affine Cremona group”, *Transform. Groups*, **16**:4 (2011), 1137–1142.
4. A. Białynicki-Birula, “Remarks on the action of an algebraic torus on k^n ”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **14** (1966), 177–181.
5. A. Białynicki-Birula, “Remarks on the action of an algebraic torus on k^n . II”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **15** (1967), 123–125.
6. J. Blanc, “Conjugacy classes of affine automorphisms of $\mathbf{K}^n$ and linear automorphisms of $\mathbf{P}^n$ in the Cremona groups”, *Manuscripta Math.*, **119**:2 (2006), 225–241.
7. J.-P. Serre, “Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis.”, *Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997-1011*, Astérisque, **332**, Soc. Math. de France, Paris, 2010, 75–100.
8. J.-P. Serre, “Faisceaux algébriques cohérents”, *Ann. of Math. (2)*, **61**:2 (1955), 197–278.
9. A. Borel, *Linear algebraic groups*, Grad. Texts in Math., **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.
10. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, **55**, ВИНИТИ, М., 1989, 137–309; англ. пер.: V. L. Popov, E. B. Vinberg, “Invariant theory”, *Algebraic Geometry IV*, Encyclopaedia Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–284.
11. G. Laumon, “Comparaison de caractéristiques d’Euler-Poincaré en cohomologie l -adique”, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, **292** (1981), 209–212.
12. H. Kraft, V. L. Popov, “Semisimple group actions on the three-dimensional affine space are linear”, *Comment. Math. Helv.*, **60**:3 (1985), 466–479.
13. C. P. Ramanujam, “A note on automorphism groups of algebraic varieties”, *Math. Ann.*, **156**:1 (1964), 25–33.
14. J. Blanc, “Groupes de Cremona, connexité et simplicité”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, **43**:2 (2010), 357–364.
15. V. L. Popov, “Some subgroups of the Cremona groups”, *Proceedings of Conference on Affine Algebraic Geometry* (Osaka, 2011), World Scientific; arXiv: 1110.2410.
16. Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, Факториал Пресс, М., 2002; англ. пер.: E. B. Vinberg, *A course in algebra*, Grad. Stud. Math., **56**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
17. М. Маркус, Х. Минк, *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*, Наука, М., 1972; пер. с англ.: M. Marcus, H. Minc, *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Allyn and Bacon, Boston, MA, 1964.
18. J.-P. Serre, “Sous-groupes finis des groupes de Lie”, *Séminaire Bourbaki. Volume 1998/99. Exposés 850–864*, Soc. Math. de France, **266**, Paris, 2000, 415–430.
19. И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов, *Линейная алгебра и геометрия*, Физматлит, М., 2009; англ. пер.: I. R. Shafarevich, A. O. Remizov, *Linear algebra and geometry*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2013.
20. A. Borel, J.-P. Serre, “Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne”, *Comment. Math. Helv.*, **39** (1964), 111–164.
21. M. Demazure, “Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **3** (1970), 507–588.
22. S. Kaliman, M. Koras, L. Makar-Limanov, P. Russell, “ $\mathbb{C}^*$ -actions on $\mathbb{C}^3$ are linearizable”, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1997), 63–71.
23. N. Gupta, *A counter-example to the Cancellation Problem for the affine space $\mathbf{A}^3$ in characteristic p* , arXiv: 1208.0483.
24. В. Л. Попов, “Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:3 (1970), 523–531; англ. пер.: V. L. Popov, “Stability criteria for the action of a semisimple group on a factorial manifold”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:3 (1970), 527–535.

25. М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. G. McDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
26. D. Luna, “Slices étalés”, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81–105.
27. Дж. Харрис, *Алгебраическая геометрия*, Изд-во МЦНМО, М., 2006; пер. с англ.: J. Harris, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **133**, Springer-Verlag, New York, 1992.
28. H. Matsumura, “On algebraic groups of birational transformations”, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), **34** (1963), 151–155.
29. R. Steinberg, “Regular elements of semisimple algebraic groups”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **25**:1 (1965), 49–80.
30. I. R. Shafarevich, “On some infinite dimensional groups”, *Rend. Mat. e Appl.* (5), **25**:1–2 (1966), 208–212.
31. И. Р. Шафаревич, “О некоторых бесконечномерных группах. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 214–226; англ. пер.: I. R. Šafarevič, “On some infinite-dimensional groups. II”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 185–194.
32. J. Blanc, “The number of conjugacy classes of elements of the Cremona group of some given finite order”, *Bull. Soc. Math. France*, **135**:3 (2007), 419–434.
33. T. Igarashi, *Finite subgroups of the automorphism group of the affine plane*, Thesis, Osaka University, 1977.
34. V. L. Popov, *Tori in Cremona groups*, Essential Dimension and Cremona Groups, talk delivered at the International workshop, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China, June 11–15, 2012, <http://www.nim.nankai.edu.cn/activites/conferences/hy20120611/index.htm>.
35. T. de Fernex, “On planar Cremona maps of prime order”, *Nagoya Math. J.*, **174** (2004), 1–28.
36. J. Blanc, *Finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane*, Thèse № 3777, Université de Genève, Faculté des Sciences, 2006.
37. A. Beauville, “ p -elementary subgroups of the Cremona group”, *J. Algebra*, **314**:2 (2007), 553–564.

В. Л. Попов (V. L. Popov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

Национальный исследовательский университет

Высшая школа экономики, г. Москва

E-mail: popovvl@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

01.07.2012