Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, Спорадические простые группы и факторособенности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 4, 215–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8022>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:35:19

УДК 512.761+512.542.2

И. А. Чельцов, К. А. Шрамов

Спорадические простые группы и факторособенности

Показано, что если некоторое точное неприводимое представление центрального расширения спорадической простой группы с центром, содержащимся в коммутанте, дает исключительную (соответственно, слабо исключительную, но не исключительную) факторособенность, то соответствующая группа является группой Холла–Янко (соответственно, группой Судзуки).

Библиография: 26 наименований.

Ключевые слова: слабо исключительные особенности, логканонический порог, спорадические простые группы.

DOI: 10.4213/im8022

Игорю Ростиславовичу Шафаревичу с глубоким уважением

§ 1. Введение

Конечные подгруппы в $SL_2(\mathbb{C})$ были классифицированы более ста лет назад. Особенности, возникающие при факторизации $\mathbb{C}^2$ по этим группам известны как особенности типа $A-D-E$ (а также как клейновы особенности, двовалевские особенности, рациональные двойные точки поверхностей, двумерные канонические особенности и т. д.). В. Шокуров предложил многомерное обобщение для особенностей типа E , а также для класса, состоящего из особенностей типов D или E . Он назвал их исключительными и слабо исключительными соответственно. Точные определения этих классов особенностей довольно техничны (см. [1, определение 1.5] и [2, определение 4.1] соответственно). При этом они весьма неожиданным образом связаны с большим количеством разнообразных алгебраических и геометрических вопросов.

Как выяснилось недавно, исключительные и слабо исключительные особенности имеют прямое отношение к проблеме Калаби для орбифолдов с положительным первым классом Черна (см. [3]).

ПРИМЕР 1.1. Пусть $(V \ni O)$ – росток трехмерной изолированной квазиродной гиперповерхностной особенности, заданной уравнением

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \subset \mathbb{C}^4 \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 11-01-00336-а), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-4713.2010.1), Программы Президента РФ “Поддержка молодых кандидатов наук России” (грант № МК-6612.2012.1) и Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ (договор 11.G34.31.0023).

где $\varphi(x, y, z, t)$ – квазиоднородный многочлен степени d относительно весов $\text{wt}(x) = a_0$, $\text{wt}(y) = a_1$, $\text{wt}(z) = a_2$, $\text{wt}(t) = a_3$, причем $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $\gcd(a_0, a_1, a_2, a_3) = 1$. Пусть S – взвешенная гиперповерхность в $\mathbb{P}(a_0, a_1, a_2, a_3)$ степени d , заданная тем же уравнением $\varphi(x, y, z, t) = 0$. Предположим дополнительно, что $\sum_{i=0}^n a_i > d$ и гиперповерхность S хорошо сформирована (см. [4, определение 6.9]). Тогда S является поверхностью дель Педро с факторособенностями. Более того, если особенность $(V \ni O)$ исключительна или слабо исключительна, то S допускает орбифолдную метрику Кэлера–Эйнштейна (это следует, например, из [5], [2, теорема 4.9], [6, теорема 2.1], [7, теорема A.3]).

Многие старые, но всё ещё актуальные теоретико-групповые вопросы имеют алгебро-геометрические версии, которые связаны с исключительностью факторособенностей (см., например, [8] и [3, гипотеза 1.25]). Возможно, что изучение исключительных и слабо исключительных особенностей способно дать новый подход к некоторым задачам теории групп.

ПРИМЕР 1.2. Пусть G и G' – конечные подгруппы в $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, не содержащие отражений¹, причем проекции G' и G в $\text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ совпадают. Тогда из [3, теоремы 3.15, 3.16] следует, что особенность $\mathbb{C}^{n+1}/G$ исключительна (соответственно, слабо исключительна) в том и только в том случае, если исключительна (соответственно, слабо исключительна) особенность $\mathbb{C}^{n+1}/G'$. Более того, из [3, теоремы 1.30, 3.15] следует, что если особенность $\mathbb{C}^{n+1}/G$ слабо исключительна, то группа $G \subset \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ транзитивна (т. е. соответствующее $(n+1)$ -мерное представление неприводимо). Аналогично, из [3, теорема 1.29] следует, что если особенность $\mathbb{C}^{n+1}/G$ исключительна, то группа G примитивна (см. [9] или, например, [3, определение 1.21]). Наконец, из [3, теорема 3.16] (соответственно, из [3, теорема 3.15]) следует, что $\mathbb{C}^{n+1}/G$ не является исключительной, если G имеет полуинвариант² степени не больше $n+1$ (соответственно, степени не больше n).

Далее мы рассматриваем только факторособенности.

В малых размерностях изучение исключительных и слабо исключительных факторособенностей тесно связано с классификацией конечных групп автоморфизмов проективного пространства (см. [9]–[14]). Классические результаты Г. Бlichфельда, Р. Брауэра и Дж. Линдси позволили Д. Г. Маркушевичу, Ю. Г. Прохорову и авторам настоящей статьи классифицировать исключительные факторособенности размерностей 3–6 (см. [3], [15], [16]). Более того, используя классификационные результаты Уэйлса (см. [12] и [13]), мы доказали, что семимерных исключительных факторособенностей вовсе не бывает (см. [16]). Д. Сакович классифицировал слабо исключительные факторособенности размерностей 3 и 4 (см. [17]). Многомерные слабо исключительные факторособенности были исследованы в [18]. К сожалению, мы до сих пор не имеем полной картины того, какие конечные подгруппы в $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ соответствуют исключительным или слабо исключительным особенностям при $n \gg 0$.

¹Напомним, что элемент $g \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ называется *отражением* (или *квазиотражением*), если он имеет ровно одно собственное значение, отличное от 1.

²Напомним, что *полуинвариантом* степени d группы $G \subset \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ называется одномерное подпредставление в $\text{Sym}^d(\mathbb{C}^{n+1})$.

Удивительный факт, отмеченный в [16], состоит в том, что среди (очень немногих) групп, соответствующих шестимерным исключительным факторособенностям, имеется центральное расширение $2.J_2$ спорадической простой группы Холла–Янко (см. [19]). На самом деле это свойство не характерно для проективных представлений спорадических простых групп, так что существует еще только один пример такого поведения в этом классе групп. Он связан со спорадической простой группой Судзуки (см. [20]).

В настоящей работе мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.3 (ср. с [21, теорема 14]). *Пусть G – спорадическая простая группа или ее центральное расширение с центром, содержащимся в коммутанте³. Пусть $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(U)$ – точное конечномерное комплексное представление группы G . Тогда особенность U/G исключительна в том и только в том случае, если $G \cong 2.J_2$ и U является 6-мерным неприводимым представлением G . Особенность U/G является слабо исключительной, но не исключительной в том и только в том случае, если $G \cong 6.Suz$ является центральным расширением простой группы Судзуки при помощи циклической группы порядка 6 и U является 12-мерным неприводимым представлением G .*

Теорема 1.3 показывает, что группы J_2 и Suz некоторым образом выделены среди спорадических простых групп с геометрической точки зрения, и мотивирует следующий

ВОПРОС 1.4. Существует ли теоретико-групповое свойство, которое выделяет группы J_2 и Suz среди спорадических простых групп?

Как видно из изложенного в приложении (см. § 3), один из способов охарактеризовать группы $2.J_2$ и $6.Suz$ состоит в том, что они имеют неприводимые представления без полуинвариантов малой степени. Однако отметим, что это свойство не эквивалентно слабой исключительности факторособенности, так что геометрическая характеристика через слабую исключительность возможна только в силу целого ряда дальнейших совпадений. С другой стороны, было бы интересно понимать, существует ли какое-то внутреннее определяющее свойство групп J_2 и Suz , более глубокое, чем наблюдение о полуинвариантах, и, возможно, даже совсем не обращающееся к теории представлений.

Одной из целей работы является попытка привлечь внимание специалистов по теории групп к вопросу 1.4 и, в общем, к более широкому кругу вопросов о возможных связях между свойствами групп и геометрическими свойствами соответствующих факторособенностей⁴.

При изучении вопроса об исключительности или слабой исключительности особенности $\mathbb{C}^{n+1}/G$ для конечной группы $G \subset \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ можно предполагать, что G не содержит отражений (ср. пример 1.2 и [16, замечание 1.16]). Учитывая

³Напомним, что для совершенной группы G всякое такое расширение является фактором универсального расширения G при помощи мультипликатора Шура (см., например, [22, § 9.4]).

⁴Имеется интересная характеристика групп $2.J_2$ и $6.Suz$, одновременно выделяющая их представления, описанные в теореме 1.3, через неприводимость симметрических степеней. Она получена в [23, теорема 1.1] и применяется в [23, следствие 1.3] и [24] к стабильным векторным расслоениям.

пример 1.2, мы видим, что для доказательства теоремы 1.3 можно ограничиться рассмотрением случая неприводимых представлений. Аналогичным образом, из примера 1.2 следует, что мы можем исключить из рассмотрения группы, имеющие полуинварианты малых степеней в соответствующих представлениях. Это сводится к бесхитроустному перебору случаев. Результаты соответствующих вычислений перечислены в § 3. Они были получены А. Заварницыным с использованием системы компьютерной алгебры GAP (см. [25]) и классификации конечных простых групп (см. [26]). Теперь остается рассмотреть всего два случая: группу $2.J_2$, действующую на $U \cong \mathbb{C}^6$, и группу $6.Suz$, действующую на $U \cong \mathbb{C}^{12}$. Исключительность особенности, возникающей в первом случае, была доказана в [16]. Таким образом, единственный новый геометрический результат настоящей работы – следующая теорема, которую мы докажем в § 2.

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть $G \cong 6.Suz$, и пусть U является 12-мерным неприводимым представлением группы G . Тогда особенность U/G слабо исключительна, но не исключительна.*

§ 2. Группа Судзуки

Здесь мы доказываем теорему 1.5, используя методы, которые мы ранее применяли в работе [21], и следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1 [18, теорема 1.12]. *Пусть G – конечная подгруппа в $GL_{n+1}(\mathbb{C})$, не содержащая отражений. Пусть $\bar{G}$ – образ группы G в $PGL_{n+1}(\mathbb{C})$. Если особенность $\mathbb{C}^{n+1}/G$ не является слабо исключительной, то существует $\bar{G}$ -инвариантное проективно нормальное многообразие $V \subset \mathbb{P}^n$ типа Фано⁵, причем*

$$\deg(V) \leq \binom{n}{\dim(V)},$$

и для любых $i \geq 1$ и $m \geq 0$ выполнены равенства $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \mathcal{I}_V) = h^i(\mathcal{O}_V(m)) = 0$, а также выполнено неравенство

$$h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\dim(V) + 1) \otimes \mathcal{I}_V) \geq \binom{n}{\dim(V) + 1},$$

где $\mathcal{I}_V$ – пучок идеалов подмногообразия $V \subset \mathbb{P}^n$. Пусть Π – общее линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$ коразмерности $k \leq \dim(V)$. Положим $X = V \cap \Pi$. Тогда

$$h^i(\mathcal{O}_\Pi(m) \otimes \mathcal{I}_X) = 0$$

для любых $i \geq 1$ и $m \geq k$, где $\mathcal{I}_X$ – пучок идеалов подмногообразия $X \subset \Pi$. Более того, если $k = 1$ и $\dim(V) \geq 2$, то многообразие X неприводимо, проективно нормально и $h^i(\mathcal{O}_X(m)) = 0$ для любых $i \geq 1$ и $m \geq 1$.

⁵Многообразие V называется *многообразием типа Фано*, если оно неприводимо, нормально, существует такой эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор Δ_V на V , что $-(K_V + \Delta_V)$ является обильным $\mathbb{Q}$ -картье дивизором, и логпара (V, Δ_V) логтерминальна по Кавамате.

Пусть $G \cong 6.\text{Suz}$ – центральное расширение спорадической простой группы Судзуки. Тогда имеется вложение $G \hookrightarrow \text{SL}_{12}(\mathbb{C})$, соответствующее неприводимому 12-мерному представлению U группы G .

Обозначим через Δ_k набор размерностей неприводимых подпредставлений $\text{Sym}^k(U^\vee)$. Мы будем использовать следующее соглашение: запись $\Delta_k = [\dots, r \times m, \dots]$ означает, что в разложении $\text{Sym}^k(U^\vee)$ на неприводимые подпредставления имеется ровно r слагаемых размерности m (не обязательно изоморфных друг другу). Далее, мы обозначаем через Σ_k множество частичных сумм элементов набора Δ_k , т. е. множество всех чисел вида $s = \sum_i r'_i m_i$, где $\Delta_k = [r_1 \times m_1, r_2 \times m_2, \dots, r_i \times m_i, \dots]$ и $0 \leq r'_i \leq r_i$ при всех i . Мы используем краткую запись m_i вместо записи $1 \times m_i$.

Нам понадобятся следующие свойства представления U . Их можно проверить прямым вычислением; мы использовали систему компьютерной алгебры GAP (см. [25]) для этой проверки.

ЛЕММА 2.2. *Представления $\text{Sym}^k(U^\vee)$ неприводимы при $2 \leq k \leq 5$ (и имеют размерности 78, 364, 1365 и 4368 соответственно). Кроме того,*

$$\begin{aligned}\Delta_6 &= [364, 12012], & \Delta_7 &= [4368, 27456], \\ \Delta_8 &= [1365, 4290, 27027, 42900], & \Delta_9 &= [2 \times 364, 2 \times 16016, 35100, 100100], \\ \Delta_{10} &= [78, 1365, 3003, 4290, 2 \times 27027, 2 \times 75075, 139776], \\ \Delta_{11} &= [12, 924, 2 \times 4368, 2 \times 12012, 2 \times 27456, 112320, 144144, 2 \times 180180], \\ \Delta_{12} &= [1, 143, 2 \times 364, 1001, 2 \times 5940, 2 \times 12012, 2 \times 14300, 2 \times 15015, 15795, 25025, \\ & \quad 2 \times 40040, 54054, 75075, 88452, 2 \times 93555, 2 \times 100100, 163800, 168960, 197120].\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Группа G не имеет полуинвариантов степени $d \leq 11$ и имеет один полуинвариант степени $d = 12$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Предположим, что особенность U/G не является слабо исключительной. Пусть $\bar{G}$ – образ группы G в $\text{PGL}_{12}(\mathbb{C})$. Из теоремы 2.1 следует, что существует $\bar{G}$ -инвариантное проективно нормальное многообразие $V \subset \mathbb{P}^{11}$ типа Фано такое, что

$$\deg(V) \leq \binom{11}{\dim(V)},$$

причем для любых $i \geq 1$ и $m \geq 0$ выполнены равенства $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{11}}(m) \otimes \mathcal{I}_V) = h^i(\mathcal{O}_V(m)) = 0$, где $\mathcal{I}_V$ – пучок идеалов подмногообразия $V \subset \mathbb{P}^{11}$. Положим $n = \dim(V)$.

ЛЕММА 2.4. *Выполнены неравенства $1 \leq n \leq 9$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, $n \neq 0$, так как U – неприводимое представление группы G . С другой стороны, если $n = 10$, то V является $\bar{G}$ -инвариантной гиперповерхностью, для которой $\deg(V) \leq 11$, что невозможно по следствию 2.3. Лемма доказана.

Пусть $h_m = h^0(\mathcal{O}_V(m))$ и $q_m = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{11}}(m) \otimes \mathcal{I}_V)$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$q_m = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{11}}(m)) - h_m = \binom{11+m}{m} - h_m$$

при всех $m \geq 1$, так как $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{11}}(m) \otimes \mathcal{I}_V) = 0$ при всех $m \geq 0$.

Пусть H – общее гиперплоское сечение многообразия V . Положим $d = H^n = \deg(V)$ и $H_V(m) = \chi(\mathcal{O}_V(m))$. Тогда $H_V(m) = h_m$ при всех $m \geq 1$, так как $h^i(\mathcal{O}_V(mH)) = 0$ при всех $i \geq 1$ и $m \geq 0$. Напомним, что многочлен Гильберта $H_V(m)$ многообразия V является многочленом степени n от m и его старший коэффициент равен $d/n!$.

Из теоремы 2.1 следует, что V обладает еще одним полезным свойством. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ – общие гиперплоскости в $\mathbb{P}^{11}$. Положим

$$\Pi_j = \Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_j, \quad V_j = V \cap \Pi_j, \quad H_j = V_j \cap H$$

для всех $j \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $V_0 = V$, $H_0 = H$, $\Pi_0 = \mathbb{P}^{11}$. Для всех $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ через $\mathcal{I}_{V_j}$ обозначим пучок идеалов подмногообразия $V_j \subset \Pi_j$. Тогда из теоремы 2.1 следует, что $h^i(\mathcal{O}_{\Pi_j}(m) \otimes \mathcal{I}_{V_j}) = 0$ при всех $i \geq 1$ и $m \geq j$.

Отметим, что $\Pi_j \cong \mathbb{P}^{11-j}$, и положим $q_i(V_j) = h^0(\mathcal{O}_{\Pi_j}(i) \otimes \mathcal{I}_{V_j})$ для всех $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

ЛЕММА 2.5. *Предположим, что $i \geq j + 1$ и $j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда*

$$q_i(V_j) = q_i - \binom{j}{1} q_{i-1} + \binom{j}{2} q_{i-2} - \dots + (-1)^j q_{i-j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [21, доказательство леммы 27].

Поскольку представление U неприводимо, то $q_1 = 0$. Более того, $q_i = 0$ при $2 \leq i \leq 5$ по лемме 2.2. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Если $n = 9$, то $q_9 - 8q_8 + 28q_7 - 56q_6 = q_9(V_8) \geq 0$.*

Кроме того, несложно получить следующее утверждение.

ЛЕММА 2.7 (ср. с [21, лемма 35]). *Имеют место неравенства*

$$\binom{12}{n} - \frac{(n+1)d}{2} > q_n(V_{n-1}) \geq \binom{12}{n} - nd - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие $V_{n-1} \subset \Pi_{n-1} \cong \mathbb{P}^{12-n}$ является неособой кривой степени d , так как многообразие V нормально. Более того, многообразие V_{n-1} неприводимо, так как неприводимо V . Пусть g обозначает род кривой V_{n-1} . Из формулы присоединения следует, что

$$2g - 2 = (K_V + (n-1)) \cdot H^{n-1} = K_V \cdot H^{n-1} + (n-1)d < (n-1)d,$$

так как $K_V \cdot H^{n-1} < 0$ (это неравенство следует из того, что антиканонический класс $-K_V$ объемен). С другой стороны, при всех $m \geq n$ имеет место равенство

$$q_m(V_{n-1}) = \binom{11-n+1+m}{m} - h^0(\mathcal{O}_{V_{n-1}}(mH_{n-1})),$$

так как $h^1(\mathcal{O}_{\Pi_{n-1}}(m) \otimes \mathcal{I}_{V_{n-1}}) = 0$ при всех $m \geq n-1$. Из неравенства $2g-2 < nd$ следует, что дивизор nH_{n-1} не специален. Применяя теорему Римана–Роха, получаем

$$q_n(V_{n-1}) = \binom{12}{n} - nd + g - 1,$$

откуда следуют нужные нам неравенства, так как $2g - 2 < (n-1)d$ и $g \geq 0$.

Объединяя лемму 2.7 со следствием 2.6, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Если $n = 9$, то

$$\max(0, 219 - 9d) \leq q_9 - 8q_8 + 28q_7 - 56q_6 < 220 - 5d.$$

Из следствия 2.8, в частности, легко вывести

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Если $n = 9$, то $1 \leq d \leq 43$.

Полученные ограничения позволяют свести доказательство теоремы к задаче перечисления всех многочленов H_V степени n со старшим коэффициентом $d/n!$, для которых значения $h_m = H_V(m)$ лежат в Σ_m для достаточно большого количества значений аргумента $m \geq 1$, причем числа h_m , $q_m = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{11}}(m)) - h_m$ и d удовлетворяют условиям, налагаемым следствиями 2.8, 2.9. Это перечисление может быть сделано прямым перебором, хотя количество случаев, которые при этом приходится рассматривать, настолько велико, что нам пришлось использовать компьютер. В конце концов все это приводит к следующим результатам, которые мы оставляем без доказательств.

ЛЕММА 2.10. Не существует многочленов $H(t)$ степени $n \leq 8$, для которых значения $h_m = H(m)$ лежат в Σ_m при $1 \leq m \leq 12$.

ЛЕММА 2.11. Не существует многочленов $H(t)$ степени $n = 9$ со старшим коэффициентом вида $d/n!$, где $d \in \mathbb{Z}$ и $1 \leq d \leq 43$, для которых значения $h_m = H(m)$ лежат в Σ_m при $1 \leq m \leq 12$, при этом числа h_m и $q_m = \binom{11+m}{m} - h_m$ удовлетворяют ограничениям, налагаемым следствием 2.8.

Последние результаты завершают доказательство теоремы.

§ 3. Приложение. Полуинварианты малых степеней

В этом параграфе мы приводим результаты вычислений полуинвариантов малых степеней для неприводимых представлений рассматриваемых нами групп (эти результаты были сообщены нам А. Заварницыным). Для вычислений использовалась система компьютерной алгебры GAP (см. [25]).

Следующие таблицы содержат информацию о таких представлениях центральных расширений спорадических простых групп с центром, содержащимся в коммутанте, для которых достигается минимум отношения $\mu(U) = d(U)/\dim(U)$ среди всех неприводимых представлений U соответствующей группы G , где $d(U)$ – минимальная степень полуинварианта⁶ группы G для представления U . В каждом случае мы приводим значения $d(U)$ и $\dim(U)$, при которых отношение $\mu(U)$ достигает минимума (за исключением групп 2.J₂ и 6.Suz, для которых мы приводим несколько иную информацию; подробности см. далее). При этом оказывается, что для всех наших групп значения $\dim(U)$, а значит, и $d(U)$, при которых $\mu(U)$ достигает минимума, единственны.

Приведем таблицу, содержащую информацию о группах Матье:

⁶Нетрудно заметить, что для неприводимых представлений таких групп полуинварианты на самом деле являются инвариантами.

G	M_{11}	M_{12}	$2.M_{12}$	M_{22}	$2.M_{22}$	$3.M_{22}$	$4.M_{22}$	$6.M_{22}$	$12.M_{22}$	M_{23}	M_{24}
$d(U)$	4	3	6	2	4	3	4	6	12	2	4
$\dim(U)$	10	16	10	21	10	21	56	66	120	22	45

Следующая таблица содержит информацию о группах Конвея:

G	Co_1	$2.Co_1$	Co_2	Co_3
$d(U)$	2	2	2	2
$\dim(U)$	276	24	23	23

Следующая таблица содержит информацию о группах, связанных с решеткой Лича, кроме групп Конвея (для группы $2.J_2$ мы пропускаем при вычислениях d и n все 6-мерные представления, а для группы $6.Suz$ пропускаем 12-мерные представления, эти представления соответствуют слабо исключительным особенностям и дают значения d и n такие, что $d/n \geq 1$):

G	HS	2. HS	J_2	$2.J_2$	McL	3. McL	Suz	2. Suz	3. Suz	6. Suz
$d(U)$	2	2	2	4	2	3	2	4	6	6
$\dim(U)$	22	56	14	14	22	126	143	220	78	780

Приведем таблицу, содержащую информацию о группах Фишера:

G	Fi_{22}	$2.Fi_{22}$	$3.Fi_{22}$	$6.Fi_{22}$	Fi_{23}	Fi'_{24}	$3.Fi'_{24}$
$d(U)$	2	2	3	6	2	2	3
$\dim(U)$	78	352	351	1728	782	8671	783

Следующая таблица содержит информацию о прочих подфакторах Монстра:

G	He	HN	Th	B	2.B	M
$d(U)$	3	2	2	2	2	2
$\dim(U)$	51	133	248	4371	96256	196883

И наконец, приведем таблицу, содержащую информацию о группах Титса и париях:

G	T	J_1	O'N	3.O'N	J_3	3. J_3	Ru	2. Ru	J_4	Ly
$d(U)$	6	2	4	6	3	6	4	4	4	6
$\dim(U)$	26	56	13376	342	85	18	378	28	1333	2480

Авторы выражают благодарность А. Заварницыну за помощь в вычислениях и П. Х. Тиепу за интересные обсуждения. Мы благодарим Дж. Парка за приглашение в Институт математики в Поханге, где была завершена эта работа. Наконец, мы благодарим В. Пржиялковского, который создавал для нас вдохновляющую атмосферу во время работы над этой статьей.

Список литературы

1. V. Shokurov, “Complements on surfaces”, *J. Math. Sci. (New York)*, **102**:2 (2000), 3876–3932.
2. Yu. G. Prokhorov, “Blow-ups of canonical singularities”, *Algebra* (Moscow, 1998), de Gruyter, Berlin, 2000, 301–317.
3. I. Cheltsov, C. Shramov, “On exceptional quotient singularities”, *Geom. Topol.*, **15**:4 (2011), 1843–1882.
4. A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 101–173.
5. G. Tian, “On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $c_1(M) > 0$ ”, *Invent. Math.*, **89**:2 (1987), 225–246.
6. С. А. Кудрявцев, “О чисто логтерминальных раздутиях”, *Матем. заметки*, **69**:6 (2001), 892–898; англ. пер.: S. A. Kudryavtsev, “Pure log terminal blow-ups”, *Math. Notes*, **69**:6 (2001), 814–819.
7. И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Лог-канонические пороги неособых трехмерных многообразий Фано”, *УМН*, **63**:5 (2008), 73–180; англ. пер.: I. Cheltsov, C. Shramov, “Log canonical thresholds of smooth Fano threefolds”, *Russian Math. Surveys*, **63**:5 (2008), 73–180.
8. J. G. Thompson, “Invariants of finite groups”, *J. Algebra*, **69**:1 (1981), 143–145.
9. H. F. Blichfeldt, *Finite collineation groups*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1917.
10. R. Brauer, “Über endliche lineare Gruppen von Primzahlgrad”, *Math. Ann.*, **169**:1 (1967), 73–96.
11. J. H. Lindsey, II, “Finite linear groups of degree six”, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 771–790.
12. D. B. Wales, “Finite linear groups of degree seven. I”, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 1042–1056.
13. D. B. Wales, “Finite linear groups of degree seven. II”, *Pacific J. Math.*, **34** (1970), 207–235.
14. W. Feit, “The current situation in the theory of finite simple groups”, *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, 1971, 55–93.
15. D. Markushevich, Yu. G. Prokhorov, “Exceptional quotient singularities”, *Amer. J. Math.*, **121**:6 (1999), 1179–1189.
16. I. Cheltsov, C. Shramov, “Six-dimensional exceptional quotient singularities”, *Math. Res. Lett.*, **18**:6 (2011), 1121–1139.
17. D. Sakovics, “Weakly-exceptional quotient singularities”, *Cent. Eur. J. Math.*, **10**:3 (2012), 885–902.
18. I. Cheltsov, C. Shramov, “Weakly-exceptional singularities in higher dimensions”, *J. Reine Angew. Math.* (to appear); arXiv:1111.1920.
19. J. H. Lindsey, II, “On a six dimensional projective representation of the Hall–Janko group”, *Pacific J. Math.*, **35** (1970), 175–186.
20. M. Suzuki, “A simple group of order 448, 345, 497, 600”, *Theory of finite groups* (Cambridge, MA, 1968), Benjamin, New York, 1968, 113–119.
21. I. Cheltsov, C. Shramov, “Nine-dimensional exceptional quotient singularities exist”, *Proceedings of 18-th Gokova Geometry-Topology Conference*, 2011, 85–96.
22. J. J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
23. R. M. Guralnick, P. H. Tiep, “Symmetric powers and a problem of Kollár and Larsen”, *Invent. Math.*, **174**:3 (2008), 505–554.

24. V. Balaji, J. Kollár, “Holonomy groups of stable vector bundles”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **44**:2 (2008), 183–211.
25. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, <http://www.gap-system.org>.
26. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

И. А. ЧЕЛЬЦОВ (I. A. CHELTSOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

University of Liverpool, United Kingdom

E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступило в редакцию

29.06.2012

19.09.2012

К. А. ШРАМОВ (C. A. SHRAMOV)

University of Liverpool, United Kingdom

E-mail: shramov@mccme.ru