Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. О. Горчинский, Порождаемость модулей и трансцендентность нуль-циклов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 4, 55–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:40:34

УДК 512.7

С. О. Горчинский

Порождаемость модулей и трансцендентность нуль-циклов

Строится пример гладкой комплексной алгебры размерности d и проективного модуля ранга r над ней, не порождаемого $d + r - 1$ элементами. Это усиливает известный пример Суона над полем вещественных чисел. Библиография: 7 наименований.

Ключевые слова: модули над кольцами, группы Чжоу.

DOI: 10.4213/im8023

И. Р. Шафаревичу с глубоким уважением

§ 1. Введение

Пусть R – конечно порожденная коммутативная алгебра с единицей над полем k , а M – конечно порожденный проективный R -модуль ранга r . Положим d равным размерности по Крулю алгебры R . Из теоремы Форстера–Суона [1], [2] следует, что M всегда можно породить над R при помощи $d + r$ элементов (сама теорема относится к гораздо более широкому ряду колец и модулей). В данном случае это также несложно выводится из теоремы Бертини.

Возникает естественный вопрос: является ли точной оценка $d + r$ числа порождающих? Другими словами, вопрос заключается в нахождении R и M таких, что M не порождается никакими $d + r - 1$ элементами (при $d = 1$ вопрос является тривиальным). В [3, теорема 4] построен такой пример для произвольных d , r и $k = \mathbb{R}$ при существенном использовании незамкнутости поля вещественных чисел. Насколько известно автору, ранее не было предложено ни одного примера для случая, когда основное поле k алгебраически замкнуто. Настоящая работа посвящена построению такого примера.

Метод построения заключается в использовании классов Черна со значениями в группах Чжоу для того, чтобы свести исходную задачу к вопросу о нетривиальности элементов в группе Чжоу нуль-циклов на аффинных многообразиях, что близко следует работе [3], где используются классы Штифеля–Уитни. Затем применяется введенный в работе [4] инвариант нуль-циклов – их степень трансцендентности. Установление нетривиальности элементов в группе Чжоу нуль-циклов при помощи их степени трансцендентности существенно опирается на разложение диагонали по Блоху–Шпринивасу [5].

Примеры алгебр и модулей из настоящей статьи могут быть применены для построения новых нетривиальных примеров простых йордановых супералгебр

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00145-а, 12-01-31506_мол-а, 12-01-33024_мол-а-вед), МК-4881.2011.1, НШ-5139.2012.1, ЛАГ ГУ-ВШЭ по гранту Правительства РФ (договор 11.G34.31.0023).

при помощи метода из [6]. Однако для этого необходимо, чтобы R и M удовлетворяли некоторым дополнительным условиям относительно дифференцирований. Построение таких примеров остается открытым вопросом.

Настоящая работа является результатом обсуждений с К. А. Шрамовым одного близкого вопроса, поставленного В. Н. Желябиным. Автор глубоко благодарен им обоим за стимулирующую душевную атмосферу во время их общего пребывания в Новосибирске осенью 2011 г.

§ 2. Основной результат и редукция к нуль-циклам

Приведем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых $d, r \in \mathbb{N}$ существуют конечно порожденная гладкая алгебра R над $\mathbb{C}$ размерности d и конечно порожденный проективный R -модуль M ранга r такие, что M не порождается $d + r - 1$ элементами над R .*

Пусть k – произвольное поле. Положим $U := \text{Spec}(R)$, и пусть N – проективный R -модуль ранга один, $M = N \oplus R^{\oplus(r-1)}$ и линейное расслоение L на U соответствует R -модулю N . Для произвольного многообразия X над k через $CH^p(X)$ обозначим группу Чжоу алгебраических циклов на X коразмерности p . Для расслоения E на X через $c_p(E) \in CH^p(X)$ обозначим соответствующий класс Черна. Следующая лемма является непосредственным аналогом метода из [3, § 2].

ЛЕММА 2. *Предположим, что M порождается $d + r - 1$ элементами. Тогда имеется равенство $c_1(L)^d = 0$ в группе $CH^d(U)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы вытекает существование точной тройки расслоений на U

$$0 \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus(d+r-1)} \rightarrow L \oplus \mathcal{O}_U^{\oplus(r-1)} \rightarrow 0.$$

По формуле Уитни выполняется равенство

$$1 + c_1(E) + \dots + c_d(E) = (1 + c_1(L))^{-1}.$$

В частности, имеем $c_d(E) = (-1)^d c_1(L)^d$. С другой стороны, поскольку ранг расслоения E равен $d - 1$, то $c_d(E) = 0$. Лемма доказана.

Таким образом, для построения основного примера полезно устанавливать нетривиальность элементов из $CH^d(U)$. Заметим, что здесь важно рассматривать классы Черна именно со значениями в группах Чжоу, а не в группах когомологий (Бетти, де Рама или этальных), поскольку когомологии с номером $2d$ тривиальны для любого d -мерного аффинного многообразия. Ниже приведена интерпретация примера из [3, § 2, теорема 4] в терминах групп Чжоу.

ПРИМЕР 3. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^d$ – гладкая проективная квадрика без точек над k , $U = \text{Spec}(R)$ – дополнение к Q в $\mathbb{P}^d$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)|_U$, N – соответствующий R -модуль и $M = N \oplus R^{\oplus(r-1)}$. Тогда $c_1(L)^d$ является ограничением на U класса точки в $CH^d(\mathbb{P}^d) \cong \mathbb{Z}$. Если $c_1(L)^d = 0$, то из точной последовательности

$$CH^{d-1}(Q) \rightarrow CH^d(\mathbb{P}^d) \rightarrow CH^d(U) \rightarrow 0$$

следует, что на квадрике Q есть нуль-цикл над k степени один. По известному результату Спрингера [7, ч. VII, теорема 2.3] это противоречило бы тому, что

на Q нет точек над k (при $k = \mathbb{R}$ противоречие также получается из рассмотрения действия комплексной инволюции на эффективном нуль-цикле нечетной степени). Значит, по лемме 2 модуль M не порождается $d + r - 1$ элементами.

§ 3. Трансцендентность нуль-циклов и доказательство основного результата

Напомним несколько понятий и фактов из работы [4]. Для подполя $k_0 \subset k$ и многообразия X_0 над k_0 через $(X_0)_k$ обозначим расширение скаляров многообразия X_0 с k_0 на k :

$$(X_0)_k = \operatorname{Spec}(k) \times_{\operatorname{Spec}(k_0)} X_0.$$

Пусть X – многообразие над полем k . Для простоты будем считать, что X неприводимо и имеет размерность d . Предположим, что X является расширением скаляров некоторого многообразия X_0 , определенного над подполем $k_0 \subset k$, т. е. зафиксирован изоморфизм $X \cong (X_0)_k$. Будем говорить, что открытое (соотв., замкнутое) подмножество в X *определено над k_0* , если оно является расширением скаляров открытого (соотв., замкнутого) подмножества в X_0 .

Точка $P \in X(k) = X_0(k)$ соответствует морфизму схем $P: \operatorname{Spec}(k) \rightarrow X_0$. Обозначим через ξ_P его образ и положим

$$\operatorname{tr. deg}(P/k_0) := \operatorname{tr. deg}(k_0(\xi_P)/k_0).$$

Равносильно, $\operatorname{tr. deg}(P/k_0)$ является степенью трансцендентности над k_0 поля, порожденного координатами точки P относительно ее произвольной аффинной окрестности, определенной над k_0 . Для элемента $\alpha \in CH^d(X)$ его степень трансцендентности $\operatorname{tr. deg}(\alpha/k_0)$ определяется как минимальное натуральное число n , для которого существует нуль-цикл $\sum_i n_i P_i$ на X над k , представляющий класс α и такой, что для любого i выполнено неравенство $\operatorname{tr. deg}(P_i/k_0) \leq n$. Аналогично определяется степень трансцендентности для элементов в $CH^d(X)_{\mathbb{Q}} := CH^d(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (при этом рассматриваются все представители с рациональными коэффициентами).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В введенных выше обозначениях предположим, что существует определенное над k_0 открытое подмножество $U \subset X$, для которого $\alpha|_U = 0$ в группе $CH^d(U)$. Тогда α представлен нуль-циклом, имеющим носитель на дополнении $Z = X \setminus U$. Поскольку размерность многообразия Z строго меньше, чем d , и оно определено над k_0 , из определения степени трансцендентности нуль-циклов следует, что $\operatorname{tr. deg}(\alpha/k_0) < d$. Данный факт остается верным также после перехода к группам Чжоу с рациональными коэффициентами.

Следующее предложение непосредственно вытекает из [4, теорема 7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть X – неприводимое проективное гладкое многообразие размерности d над полем k характеристики нуль. Предположим, что X является расширением скаляров некоторого многообразия X_0 , определенного над подполем $k_0 \subset k$, причем k содержит любое конечно порожденное поле над k_0 (эквивалентно, поле k алгебраически замкнуто и имеет бесконечную степень трансцендентности над k_0). Пусть существует точка $P \in X(k)$ с $\operatorname{tr. deg}(P/k_0) = d$, класс которой $[P]$ в $CH^d(X)_{\mathbb{Q}}$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{tr. deg}([P]/k_0) < d$. Тогда $H^0(X, \Omega_X^d) = 0$.

Идея доказательства предложения 5 заключается в рассмотрении точки P как ограничение класса диагонали в $X_0 \times X_0$ на подсхему $X_0 \times \operatorname{Spec}(k_0(X_0))$ и в использовании разложения диагонали по Блоху–Шринивасу [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть C – гладкая проективная кривая над $\overline{\mathbb{Q}}$ положительного рода, и положим $X_0 = C^d$, $X = (X_0)_{\mathbb{C}}$. Рассмотрим произвольную комплексную точку $P = (P_1, \dots, P_d) \in X(\mathbb{C})$, не лежащую ни на одном отличном от X подмногообразии в X , определенном над $\overline{\mathbb{Q}}$. Такая точка существует, поскольку подмногообразий в X , определенных над $\overline{\mathbb{Q}}$, имеется счетное число, а поле $\mathbb{C}$ несчетно. В явном виде условие для P можно задать следующим образом. Выберем аффинную карту в C , определенную над $\overline{\mathbb{Q}}$, расширение скаляров которой на $\mathbb{C}$ содержит $P_1, \dots, P_d$. Требуется, чтобы координаты точек $P_1, \dots, P_d$ в данной карте порождали расширение поля $\overline{\mathbb{Q}}$ степени трансцендентности d .

Далее, рассмотрим дивизоры в X

$$D_i := \{(x_1, \dots, x_d) \in X \mid x_i = P_i\}, \quad 1 \leq i \leq d,$$

и (приводимый) дивизор $D = \bigcup_i D_i$. Заметим, что D не определен над $\overline{\mathbb{Q}}$. Наконец, пусть $U = \operatorname{Spec}(R)$ – произвольное открытое аффинное подмножество в X , определенное над $\overline{\mathbb{Q}}$, $L = \mathcal{O}_X(D)|_U$, N – соответствующий R -модуль и $M = N \oplus R^{\oplus(r-1)}$. Тогда выполняются равенства

$$c_1(L)^d = c_1(\mathcal{O}_X(D))^d|_U = d! \cdot [P]|_U \in CH^d(U).$$

Пусть $[P]|_U = 0$ в $CH^d(U)_{\overline{\mathbb{Q}}}$. По замечанию 4 имеем $\operatorname{tr. deg}([P]/k_0) < d$ в $CH^d(X)_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Вследствие предложения 5 это противоречит тому, что

$$H^0(X, \Omega_X^d) \cong H^0(C, \Omega_C^1)^{\otimes d}_{\mathbb{C}} \neq 0.$$

Значит, $[P]|_U \neq 0$ в $CH^d(U)_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Следовательно, $d! \cdot [P]|_U \neq 0$ в $CH^d(U)$, и по лемме 2 модуль M не порождается $d + r - 1$ элементами над R . Это завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. O. Forster, “Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring”, *Math. Z.*, **84**:1 (1964), 80–87.
2. R. G. Swan, “The number of generators of a module”, *Math. Z.*, **102**:4 (1967), 318–322.
3. R. G. Swan, “Vector bundles and projective modules”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105**:2 (1962), 264–277.
4. S. Gorchinskiy, V. Guletskiĭ, “Transcendence degree of zero-cycles and the structure of Chow motives”, *Cent. Eur. J. Math.*, **10**:2 (2012), 559–568.
5. S. Bloch, V. Srinivas, “Remarks on correspondences and algebraic cycles”, *Amer. J. Math.*, **105**:5 (1983), 1235–1253.
6. В. Н. Желябин, “Дифференциальные алгебры и простые йордановы супералгебры”, *Матем. тр.*, **12**:2 (2009), 41–51; англ. пер.: V. N. Zhelyabin, “Differential algebras and simple Jordan superalgebras”, *Siberian Adv. Math.*, **20**:3 (2010), 223–230.
7. T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*, Benjamin, Reading, MA, 1973.

С. О. Горчинский (S. O. GORCHINSKIY)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: gorchins@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
02.07.2012
09.11.2012