Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Бондал, Операции с t -структурами и превратные когерентные пучки, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 4, 5–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8024>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:35:37

УДК 512.73+512.66

А. И. Бондал

Операции с t -структурами и превратные когерентные пучки

Вводятся понятия согласованных пар и согласованных цепей t -структур. Доказывается, что две согласованные цепи t -структур порождают дистрибутивную решетку. Развитая техника применяется к случаю пары цепей, полученных из стандартной t -структуры на производной категории когерентных пучков и двойственной к ней применением функтора сдвига. В результате получается семейство t -структур, сердцевины которых известны как превратные когерентные пучки.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: производные категории когерентных пучков, превратные пучки, t -структуры.

DOI: 10.4213/im8024

Посвящая И. Р. Шафаревичу к его 90-летию

Введение

Предположим, что в нашем распоряжении имеется эквивалентность $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}(\mathcal{B})$ между производными категориями двух абелевых категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Возникает вопрос: как она помогает в изучении $\mathcal{D}(\mathcal{A})$? Реальная польза заключается в том, что мы можем перенести с помощью эквивалентности стандартную t -структуру из $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и проследить ее взаимодействие со стандартной t -структурой в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$; в частности, можно строить новые t -структуры с помощью этих двух.

Мы будем рассматривать две бинарные операции на t -структурах в триангулированной категории $\mathcal{D}$. Точнее, на множестве t -структур имеется частичный порядок, и рассматриваемые операции – это операции объединения и пересечения такие, как они определяются в теории решеток. Основная проблема состоит в том, чтобы доказать существование объединения и пересечения для данных t -структур.

Мы определяем *нижне- и верхнесогласованные пары* t -структур. Это такие пары, которые удовлетворяют неким элементарным условиям, гарантирующим существование объединения или пересечения. Затем мы рассматриваем тройку t -структур и изучаем в парах этой тройки различные условия согласованности, из которых следует согласованность пары, состоящей из одной t -структуры тройки и t -структуры, полученной объединением или пересечением двух других. В результате получаем правила, которые позволяют итерировать операции объединения и пересечения.

Решетка векторных подпространств в векторном пространстве не удовлетворяет закону дистрибутивности, но удовлетворяет *модулярному закону*. Частично упорядоченное множество t -структур чем-то похоже на эту решетку. Мы доказываем версии модулярного закона при подходящих условиях согласованности в парах. Рассматривается абстрактное частично упорядоченное множество с двумя бинарными отношениями и аксиомами, которым удовлетворяют отношения верхней и нижней согласованности. Такое множество мы называем *множеством с согласованностями*. Доказывается, что такое множество P допускает отображение в универсальную *решетку* с согласованностями $U(P)$.

Цепь в частично упорядоченном множестве – это полностью упорядоченное подмножество. Теорема Биркгофа [1] утверждает, что две цепи в модулярной решетке порождают дистрибутивную подрешетку. Пара цепей $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ называется *согласованной*, если все пары (a_i, b_j) верхне- и нижнесогласованы. Мы доказываем теорему, утверждающую, что согласованная пара цепей в множестве с согласованностями порождает дистрибутивную решетку L .

Мы применяем развитую технику к теории превратных пучков на схемах конечного типа над полем. Рассмотрим производную категорию $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)$ когерентных пучков над такой схемой X . В ней имеется стандартная t -структура. Эта категория обладает функтором двойственности Серра–Гротендика $D: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(X)^{\text{opp}}$, определяемого для $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$ по правилу

$$D\mathcal{F} = \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \omega_X^\bullet),$$

где $\omega_X^\bullet$ – дуализирующий комплекс на X . Поскольку D – антиэквивалентность, она позволяет определить другую, “двойственную”, t -структуру на $\mathcal{D}(X)$ переносом стандартной t -структуры с помощью D . Рассмотрим две цепочки t -структур: одна получена сдвигами стандартной t -структуры, а другая – сдвигами двойственной t -структуры. Мы доказываем, что эта пара цепочек согласованна. Они порождают дистрибутивную решетку t -структур, что следует из версии теоремы Биркгофа, описанной выше. Это множество превратных t -структур когерентных пучков (тех, что не зависят от стратификации X), которые независимо рассматривались П. Делинем, Р. Безрукавниковым [2], М. Кашиварой [3], О. Габбером [4].

Сложность при построении t -структуры с требуемым свойством состоит в том, чтобы доказать существование сопряженного функтора к вложению подходящей подкатегории $\mathcal{D}^{\leq 0}$ в $\mathcal{D}$. Стандартный способ строить такой функтор – использовать пределы в категории.

В соответствии с программой, предложенной в работе [5], производные категории когерентных пучков должны играть решающую роль в программе минимальных моделей бирациональной геометрии. Ожидается, что такие важные ингредиенты программы минимальных моделей, как флипы и флопы, могут быть поняты и сконструированы с помощью преобразований t -структур (см. [6] для 3-мерных флопов). Эта проблема требует рассмотрения триангулированных категорий “малых” размеров, возникающих в “реалистической” алгебраической геометрии и таких, как ограниченные категории когерентных пучков в противовес неограниченным категориям квазикогерентных пучков. В таких категориях нет подходящих общих свойств существования пределов, поэтому стандартные конструкции априори часто выводят нас за пределы категории

“малых” размеров. Например, производный функтор когомологий с носителем переводит когерентные комплексы в квазикогерентные.

Одну из основных технических проблем в изучении алгебраической геометрии методами триангулированных категорий можно сформулировать следующим образом: найти подходящие условия конечности для подходящих подкатегорий в производных категориях когерентных пучков и научиться отслеживать эти свойства при преобразованиях категорий, соответствующих геометрическим операциям.

Надеемся, настоящая работа даст подход к пониманию условий конечности, имеющих отношение к t -структурам. Было бы интересно сравнить методы настоящей статьи с подходом Т. Бриджленда к конструированию условий стабильности (а значит, многочисленных t -структур) деформационным аргументом [7].

Автор благодарен М. Ван-ден-Бергу за полезные обсуждения и рецензенту за полезные замечания.

Настоящая работа была выполнена более 15 лет назад, и первый доклад на эту тему автор сделал на семинаре И. Р. Шафаревича в Математическом институте им. В. А. Стеклова во второй половине 1990-х годов. Мне приятно посвятить эту работу И. Р. Шафаревичу к его 90-летию. Влияние Шафаревича на развитие алгебраической геометрии в России трудно переоценить.

§ 1. Согласованные системы t -структур

1.1. Частично упорядоченное множество t -структур. Пусть k – поле, а $\mathcal{D}$ – k -линейная триангулированная категория с автоэквивалентностью T , называемой *функтором сдвига* (см. [8]).

Для подкатегории $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ ее *правый ортогонал* $\mathcal{C}^\perp$ (соответственно, *левый* ${}^\perp\mathcal{C}$) – это строго полная подкатегория в $\mathcal{D}$, состоящая из объектов X таких, что $\text{Hom}(\mathcal{C}, X) = 0$ (соответственно, $\text{Hom}(X, \mathcal{C}) = 0$).

Мы используем стандартное обозначение $X[k] := T^k X$, $k \in \mathbb{Z}$.

Напомним (см. [9]), что t -структура в триангулированной категории $\mathcal{D}$ – это пара $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 1})$ строго полных подкатегорий, удовлетворяющих следующим условиям:

i) $T\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$, $T^{-1}\mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 1}$;

ii) $\text{Hom}(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 1}) = 0$;

iii) для любого $X \in \mathcal{D}$ существуют $X_- \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $X_+ \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ и точный треугольник

$$X_- \rightarrow X \rightarrow X_+ \rightarrow X_-[1]. \quad (1)$$

Основной пример t -структуры получается, когда триангулированная категория $\mathcal{D}$ эквивалентна ограниченной производной категории $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ некоторой абелевой категории $\mathcal{A}$. В этом случае $\mathcal{D}^{\geq 1}$ (соответственно, $\mathcal{D}^{\leq 0}$) состоит из комплексов с когомологиями в положительных (соответственно, не положительных) степенях.

С категорной точки зрения основное преимущество понятия t -структуры состоит в том, что ввиду условий (i) и (ii) треугольник (1) для данного X единствен с точностью до единственного изоморфизма [9]. Другими словами,

формулы

$$\tau_{\leq 0}(X) = X_-, \quad \tau_{\geq 1}(X) = X_+$$

определяют функторы обрезания $\tau_{\leq 0}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{\leq 0}$, $\tau_{\geq 1}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{\geq 1}$, которые, как легко видеть, являются соответственно правым и левым сопряженным к функторам включения $i_{\leq 0}: \mathcal{D}^{\leq 0} \rightarrow \mathcal{D}$, $i_{\geq 1}: \mathcal{D}^{\geq 1} \rightarrow \mathcal{D}$. Это приводит к следующей переформулировке данных, определяющих t -структуру.

ЛЕММА 1. *Определение t -структуры в триангулированной категории $\mathcal{D}$ эквивалентно заданию одних из следующих данных:*

- 1) строго полной подкатегории $\mathcal{D}^{\leq 0}$ в $\mathcal{D}$, замкнутой под действием T и такой, что функтор включения $i_{\leq 0}: \mathcal{D}^{\leq 0} \rightarrow \mathcal{D}$ имеет правый сопряженный $\tau_{\leq 0}$;
- 2) строго полной подкатегории $\mathcal{D}^{\geq 1}$ в $\mathcal{D}$, замкнутой под действием T^{-1} и такой, что функтор включения $i_{\geq 1}: \mathcal{D}^{\geq 1} \rightarrow \mathcal{D}$ имеет левый сопряженный $\tau_{\geq 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку мы уже построили сопряженные функторы для данной t -структуры, остается объяснить, как построить t -структуру, скажем, из данных 1).

Положим $\mathcal{D}^{\geq 1} = (\mathcal{D}^{\leq 0})^{\perp}$. Так как $T\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 0}$, то, очевидно, $T^{-1}\mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 1}$.

Для любого $X \in \mathcal{D}$ морфизм сопряжения $i_{\leq 0}\tau_{\leq 0}X \rightarrow X$ может быть включен в треугольник:

$$i_{\leq 0}\tau_{\leq 0}X \rightarrow X \rightarrow X_+ \rightarrow i_{\leq 0}\tau_{\leq 0}X[1].$$

Легко видеть, что объект X_+ принадлежит $\mathcal{D}^{\geq 1}$. Следовательно, треугольник имеет вид (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вообще, ни функтор включения, ни функтор обрезания не являются точными. Однако легко видеть, что если $A \rightarrow B \rightarrow C$ – точный треугольник с $A, C \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ (соответственно, $A, C \in \mathcal{D}^{\geq 1}$), то $B \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ (соответственно, $B \in \mathcal{D}^{\geq 1}$). Отсюда “поворотом треугольника” получаем, что если $A, B \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ (соответственно, $B, C \in \mathcal{D}^{\geq 1}$), то также $C \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ (соответственно, $A \in \mathcal{D}^{\geq 1}$).

Любая t -структура порождает две последовательности подкатегорий $\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$, $\mathcal{D}^{\geq n} := \mathcal{D}^{\geq 1}[1-n]$. Подкатегория $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$ имеет естественную структуру абелевой категории (см. [9]), она называется *сердцевиной t -структуры*. Объекты, которые лежат в сердцевине (а также их сдвиги) называются *чистыми*.

Когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, сердцевина стандартной t -структуры состоит из комплексов над $\mathcal{A}$ с когомологиями в степени 0. Таким образом, сердцевина эквивалентна исходной абелевой категории $\mathcal{A}$. Мы отождествляем $\mathcal{A}$ с этой полной подкатегорией в $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$.

Если категория $\mathcal{D}$ триангулирована, то противоположная категория $\mathcal{D}^{\text{op}}$ также естественно триангулирована. Именно, $T_{\mathcal{D}^{\text{op}}} = T_{\mathcal{D}}^{-1}$, и треугольники в $\mathcal{D}^{\text{op}}$ определяются обращением стрелок в треугольниках $\mathcal{D}$; t -структура $\mathcal{T}$ в $\mathcal{D}$ определяет t -структуру $\mathcal{T}^{\text{op}}$ в $\mathcal{D}^{\text{op}}$, обращая роли $\mathcal{D}^{\leq 0}$ и $\mathcal{D}^{\geq 1}$. Сердцевина для $\mathcal{T}^{\text{op}}$ – это противоположная абелева категория к сердцевине для $\mathcal{T}$.

Рассмотрим важный частный случай, когда t -структура удовлетворяет $T^{-1}\mathcal{D}^{\leq 0} \in \mathcal{D}^{\leq 0}$. Из замечания 2 следует, что для такой t -структуры и $\mathcal{D}^{\leq 0}$,

и $\mathcal{D}^{\geq 1}$ – триангулированные подкатегории. Мы называем такие t -структуры *трансляционно инвариантными*, или просто T -инвариантными.

Строго полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A}$ в $\mathcal{D}$, которая имеет правый (соответственно, левый) сопряженный к включению $i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$, называется *допустимой справа* (соответственно, *слева*) [10]. Для T -инвариантной t -структуры категория $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (соответственно, $\mathcal{D}^{\geq 1}$) является допустимой справа (соответственно, слева). Это дает однозначное соответствие между T -инвариантными t -структурами и допустимыми справа (или слева) подкатегориями.

Для T -инвариантной t -структуры все подкатегории $\mathcal{D}^{\leq k}$, $k \in \mathbb{Z}$, равны (то же верно для $\mathcal{D}^{\geq k}$, $k \in \mathbb{Z}$). Следовательно, сердцевина T -инвариантной t -структуры равна нулю.

Для данной триангулированной категории $\mathcal{D}$ рассмотрим следующий частичный порядок на множестве ее t -структур (мы игнорируем возможные теоретико-множественные вопросы, возникающие из того факта, что объекты категории образуют класс, а не множество, как не имеющие отношения к существу обсуждаемых вопросов). Для пары $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ t -структур мы полагаем $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, если $\mathcal{D}_1^{\leq 0} \subseteq \mathcal{D}_2^{\leq 0}$. Тогда также имеем $\mathcal{D}_2^{\geq 1} \subseteq \mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Минимальный элемент $\mathbf{0}$ в этом упорядоченном множестве – это t -структура с $\mathcal{D}^{\leq 0} = 0$; максимальный $\mathbf{1}$ – с $\mathcal{D}^{\leq 0} = \mathcal{D}$.

Следуя стандартному определению объединения и пересечения для частично упорядоченных множеств, мы вводим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем (*абстрактным*) *пересечением* $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ множества $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ t -структур в $\mathcal{D}$ супремум t -структур $\mathcal{T}$ в $\mathcal{D}$ таких, что $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$ для всех $i \in I$. Если супремум существует, то он единствен. Определим (*абстрактное*) *объединение* $\bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i$ двойственным образом.

Будем использовать символы $\cdot$ и $+$ для обозначения операций пересечения и объединения и называть их *произведением* и *суммой*. В самом деле, они являются произведением и копроизведением в категории, связанной с частично упорядоченным множеством.

Пересечение и объединение T -инвариантных t -структур, если существуют, также T -инвариантны.

Имеется естественный *наивный* кандидат на роль $\mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0}$ (соответственно, $\mathcal{D}_{\cup}^{\geq 1}$) для пересечения (соответственно, объединения) t -структур из множества $\{\mathcal{T}_i\}$: $\mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_i^{\leq 0}$, (соответственно, $\mathcal{D}_{\cup}^{\geq 1} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_i^{\geq 1}$).

На категории частично упорядоченных множеств действует функтор двойственности, который обращает частичный порядок. Он переставляет операции пересечения и объединения. Мы будем часто обращаться к этой двойственности в настоящей работе.

1.2. Пример. Следующий пример геометрического происхождения дает пару $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ t -структур таких, что $\mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_2^{\leq 0}$ не имеет правого сопряженного к вложению. Это показывает, что наивное пересечение не обязательно совпадает с абстрактным.

Мы предполагаем здесь, что k алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathbb{P}^2)$ – ограниченная производная категория когерентных пучков на проективной плоскости $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = 3$. Рассмотрим

две трансляционно инвариантные t -структуры в $\mathcal{D}$: определим соответствующие праводопустимые триангулированные подкатегории $\mathcal{D}_1^{\leq 0}$ и $\mathcal{D}_2^{\leq 0}$ по правилу

$$\mathcal{D}_1^{\leq 0} = \langle \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-1) \rangle, \quad \mathcal{D}_2^{\leq 0} = \langle \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle,$$

т. е. минимальные строго полные триангулированные подкатегории, порожденные указанными пучками.

ЛЕММА 4. *Категория $\mathcal{D}_\cap = \mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_2^{\leq 0}$ не является праводопустимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Категория $\mathcal{D}_2^{\leq 0}$ как триангулированная категория эквивалентна $\mathcal{D}^b(\text{mod-}A)$ – ограниченной производной категории представлений алгебры путей колчана (см. [10])

$$\cdot \xrightarrow{V} \cdot$$

Эквивалентность может быть задана функтором, который сопоставляет комплексу представлений $\cdot \xrightarrow{U} \cdot$ со структурным отображением $\varphi: U \otimes V \rightarrow W$ комплекс пучков $U \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow W \otimes \mathcal{O}(2)$ в $\mathcal{D}_2^{\leq 0}$ с дифференциалом, индуцированным φ .

Поскольку алгебра A наследственна, любой неразложимый объект в категории $\mathcal{D}^b(\text{mod-}A)$ чист, т. е. он определяется отображением $\varphi: U \otimes V \rightarrow W$, где U, W – векторные пространства (с точностью до общего сдвига). Соответствующий комплекс пучков в $\mathcal{D}_2^{\leq 0}$ имеет форму

$$U \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow W \otimes \mathcal{O}(2) \quad (2)$$

с компонентами в степенях 0 и 1.

Опишем неразложимые объекты в $\mathcal{D}_\cap$. Заметим, что объект $X \in \mathcal{D}$ лежит в $\mathcal{D}_1^{\leq 0}$, если и только если $\text{Ext}^*(\mathcal{O}, X) = 0$. Применяя это к (2), выводим, что отображение

$$\widehat{\varphi}: U \otimes V^* \rightarrow W \otimes S^2 V^*,$$

полученное из φ частичной дуализацией $\widetilde{\varphi}: U \rightarrow W \otimes V^*$, тензорным умножением на тождественное отображение в V^* и затем частичной симметризацией, должно быть изоморфизмом. Поскольку $\dim V = 3$, видим, что для $X \in \mathcal{D}_\cap = \mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_2^{\leq 0}$ имеет место равенство $\dim U = 2 \dim W$.

Если пространство W одномерно, то $\dim U = 2$, следовательно, образ $\widetilde{\varphi}$ аннулирует прямую в V . Отсюда вытекает, что образ $\widehat{\varphi}$ состоит из квадрик, которые равны нулю на этой прямой, т. е. $\widehat{\varphi}$ не является изоморфизмом. Следовательно, не существует неразложимых объектов в $\mathcal{D}_\cap$ с $\dim W = 1$.

Однако, категория $\mathcal{D}_\cap$ не пуста. В самом деле, возьмем любое исключительное векторное расслоение на $\mathbb{P}^2$, т. е. такое, что

$$\text{Hom}(E, E) = k, \quad \text{Ext}^i(E, E) = 0, \quad i \neq 0. \quad (3)$$

Рассмотрим пучок $F = \mathcal{E}nd_0 E$ бесследных локальных эндоморфизмов E . Он ненулевой, если $\text{rk } E > 1$. Тогда из (3) следует, что $\text{Ext}^*(\mathcal{O}, F) = H^*(F) = 0$. Поскольку $\mathcal{D}_1^{\leq 0} = \mathcal{O}^\perp$ в $\mathcal{D}$, то $F \in \mathcal{D}_1^{\leq 0}$. Так как $F^* = F$, имеем $\text{Ext}^*(F, \mathcal{O}) = H^*(F^*) = 0$. Поскольку $\mathcal{D}_2^{\leq 0} = {}^\perp \mathcal{O}$, то $F \in \mathcal{D}_2^{\leq 0}$, т. е. $F \in \mathcal{D}_\cap$.

Альтернативный пример ненулевого объекта в категории $\mathcal{D}_\cap$ был предложен рецензентом. Можно рассмотреть F – любое стабильное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с классами Чженя $c_1(F) = 0$ и $c_2(F) = 2$. Такие расслоения могут быть построены с помощью *общих* расширений вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow F \rightarrow I_Z(1) \rightarrow 0,$$

где I_Z – пучок идеалов подсхемы тройки неколлинеарных точек в $\mathbb{P}^2$ (это в сущности конструкция Серра). Можно увидеть из этой короткой точной последовательности, что $H^*(F) = 0$. Поскольку F – векторное расслоение ранга 2 с первым классом Чженя $c_1(F) = 0$, оно самодвойственно, что влечет $H^*(F^*) = 0$, и, следовательно, $F \in \mathcal{D}_\cap$.

Возьмем теперь $G = \mathcal{O}(-1)[1]$. Если $F \in \mathcal{D}_\cap$ вида (2), то

$$\mathrm{Hom}^1(F, G) = W^*, \quad \mathrm{Hom}^i(F, G) = 0, \quad i \neq 1. \quad (4)$$

Предположим, что категория $\mathcal{D}_\cap$ праводопустима и τ – правый сопряженный к функтору вложения $\mathcal{D}_\cap \hookrightarrow \mathcal{D}$. Пусть $G' = \tau G$. Тогда $G' \in \mathcal{D}_\cap$. Если G' вида $U' \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow W' \otimes \mathcal{O}(2)$, а F вида (2), то $\mathrm{Hom}^*(F, G')$ – это когомологии комплекса

$$U^* \otimes U' \oplus W^* \otimes W' \rightarrow U^* \otimes W' \otimes V^* \quad (5)$$

с двумя нетривиальными компонентами в степенях 0 и 1. Поскольку $\dim U = 2 \dim W$ и $\dim U' = 2 \dim W'$, эйлерова характеристика этих комплексов равна $-\dim W \cdot \dim W'$.

Из свойства сопряженности и соотношения (4) заключаем, что

$$-\dim W = \chi(F, G) = \chi(F, G') = -\dim W \cdot \dim W'.$$

Следовательно, $\dim W'$ должна быть равна 1, что, как мы видели, невозможно.

Вообще говоря, G' , будучи объектом из $\mathcal{D}_\cap$, разлагается в сумму объектов вида (2) и их сдвигов. Любой нетривиальный сдвиг дает ненулевой вклад в $\mathrm{Hom}^i(F, G')$ для $i \neq 1$, так как эти Hom -группы могут быть вычислены сдвигами комплексов (5). Однако это противоречит свойству сопряженности для τ . Таким образом, объект G' не может существовать. Лемма доказана.

Аналогично можно показать, что абстрактное пересечение $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ равно $\mathbf{0}$.

1.3. Согласованные t -структуры и операции. Здесь мы определим ниже- и верхнесогласованные пары t -структур. Различные способы обобщения этого понятия мы надеемся обсудить в будущем.

Мы снабжаем функторы обрезания и включения для различных t -структур соответствующими верхними индексами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пара t -структур $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ называется *нижнесогласованной*, если

$$\tau_{\leq 0}^1 \mathcal{D}_2^{\leq 0} \subset \mathcal{D}_2^{\leq 0},$$

и *верхнесогласованной*, если

$$\tau_{\geq 1}^2 \mathcal{D}_1^{\geq 1} \subset \mathcal{D}_1^{\geq 1}.$$

Пара называется *согласованной*, если она одновременно ниже- и верхнесогласованна.

Для согласованных t -структур пересечение (объединение) существует и является наивным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ – нижнесогласованная (соответственно, верхнесогласованная) пара t -структур. Тогда формулы

$$\mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0} = \mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_2^{\leq 0}, \quad \mathcal{D}_{\cap}^{\geq 1} = (\mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0})^{\perp}$$

с функтором обрезания $\tau_{\leq 0}^{\cap} := \tau_{\leq 0}^1 \tau_{\leq 0}^2$ (соответственно, формулы

$$\mathcal{D}_{\cup}^{\geq 1} = \mathcal{D}_1^{\geq 1} \cap \mathcal{D}_2^{\geq 1}, \quad \mathcal{D}_{\cup}^{\leq 0} = {}^{\perp}(\mathcal{D}_{\cup}^{\geq 1})$$

с функтором обрезания $\tau_{\geq 1}^{\cup} := \tau_{\geq 1}^2 \tau_{\geq 1}^1$) определяют новую t -структуру в $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нижнесогласованной пары $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ t -структур категория $\mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0} = \mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_2^{\leq 0}$ образует данные 1) из леммы 1. В самом деле, эта категория, очевидно, сохраняется функтором сдвига T . Более того, образ функтора $\tau_{\leq 0}^{\cap} := \tau_{\leq 0}^1 \tau_{\leq 0}^2$ содержится в $\mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0}$ ввиду нижней согласованности пары. Легко видеть, что это правый сопряженный к функтору включения $i_{\leq 0}^{\cap}: \mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0} \rightarrow \mathcal{D}$. Для верхнесогласованной пары доказательство аналогично.

Пример, рассмотренный в п. 1.2, дает несогласованную пару t -структур.

Теперь определим условия, налагаемые на последовательность t -структур, которые позволяют итерировать операции пересечения и объединения.

Пересечение определяет ассоциативную операцию на упорядоченных последовательностях с попарно нижнесогласованными элементами, сохраняя нижнюю согласованность на промежуточных шагах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ – тройка t -структур с нижнесогласованными парами $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)$ для $i < j$. Тогда пары $(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ и $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованны. Более того, $(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2) \cap \mathcal{T}_3$ совпадает с $\mathcal{T}_1 \cap (\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 6 функтор обрезания для t -структуры $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ есть композиция $\tau_{\leq 0}^1$ и $\tau_{\leq 0}^2$. Поскольку оба функтора сохраняют $\mathcal{D}_3^{\leq 0}$, отсюда следует нижняя согласованность пары $(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$.

Далее, $\mathcal{D}_{2 \cap 3}^{\leq 0} = \mathcal{D}_2^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_3^{\leq 0}$. Категории $\mathcal{D}_2^{\leq 0}$ и $\mathcal{D}_3^{\leq 0}$ сохраняются функтором $\tau_{\leq 0}^1$. Значит, $\tau_{\leq 0}^1 \mathcal{D}_{2 \cap 3}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}_{2 \cap 3}^{\leq 0}$, т. е. вторая пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна.

Наконец, для t -структур $(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2) \cap \mathcal{T}_3$ и $\mathcal{T}_1 \cap (\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_3)$ категории $\mathcal{D}^{\leq 0}$ совпадают с $\mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_2^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_3^{\leq 0}$, что дает совпадение этих t -структур.

В силу двойственности доказываемся

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ – тройка t -структур с верхнесогласованными парами $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)$ для $i < j$. Тогда пары $(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ и $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3)$ верхнесогласованны. Более того, $(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) \cup \mathcal{T}_3$ и $\mathcal{T}_1 \cup (\mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3)$ совпадают.

Из предложений 7, 8 следует, что для любой конечной последовательности $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in [1, n]}$ t -структур такой, что для $i < j$ пары $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)$ нижнесогласованны (соответственно, верхнесогласованны), можно построить новую t -структуру $\bigcap_{i \in [1, n]} \mathcal{T}_i$ (соответственно, $\bigcup_{i \in [1, n]} \mathcal{T}_i$) с подкатегорией $\mathcal{D}_{\cap}^{\leq 0} = \bigcap_{i \in [1, n]} \mathcal{D}_i^{\leq 0}$ (соответственно, $\mathcal{D}_{\cup}^{\geq 1} = \bigcap_{i \in [1, n]} \mathcal{D}_i^{\geq 1}$) и функтором обрезания $\tau_{\leq 0}^{\cap} = \tau_{\leq 0}^1 \tau_{\leq 0}^2 \cdots \tau_{\leq 0}^n$ (соответственно, $\tau_{\geq 1}^{\cup} = \tau_{\geq 1}^n \cdots \tau_{\geq 1}^1$).

Следующие два предложения описывают условия, которые позволяют пере-
межать операции пересечения и объединения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть (T_1, T_2, T_3) – тройка t -структур таких, что пары (T_1, T_2) и (T_1, T_3) верхнесогласованны и пара (T_2, T_3) нижнесогласованна. Тогда пара $(T_1, T_2 \cap T_3)$ верхнесогласованна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tau_{\leq 0}^\cap$ и $\tau_{\geq 1}^\cap$ функторы обрезания для t -структуры $T_2 \cap T_3$. В силу предложения 6 известно, что $\tau_{\leq 0}^\cap = \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\leq 0}^3$. Отсюда для любого $X \in \mathcal{D}$ по аксиомам триангулированной категории коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & \tau_{\leq 0}^3 X & \\ \nearrow & & \searrow \\ \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\leq 0}^3 X & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

может быть вложен в следующий “октаэдр”, где все строки и столбцы – точные треугольники (для удобства мы изображаем его в виде квадрата):

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\geq 1}^2 \tau_{\leq 0}^3 X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^\cap X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^3 X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \wr \\ \tau_{\leq 0}^3 X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^3 X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\leq 0}^3 X & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\leq 0}^3 X & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (6)$$

Покажем, что $\tau_{\geq 1}^\cap \mathcal{D}_1^{\geq 1} \subset \mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Пусть $X \in \mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Тогда, так как пара (T_1, T_3) верхнесогласованна, выполнено $\tau_{\geq 1}^3 X \in \mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Из средней строки в (6) и замечания 2 следует, что $\tau_{\leq 0}^3 X \in \mathcal{D}_1^{\geq 1}$. В силу верхней согласованности пары (T_1, T_2) выводим, что $\tau_{\geq 1}^2 \tau_{\leq 0}^3 X \in \mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Теперь из верхней строки в (6) следует, что $\tau_{\geq 1}^\cap X \in \mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Это доказывает предложение.

Таким образом, в условиях предложения 9 можно построить новую t -структуру $T_1 \cup (T_2 \cap T_3)$.

В силу двойственности доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть (T_1, T_2, T_3) – тройка t -структур такая, что пары (T_1, T_3) и (T_2, T_3) нижнесогласованны и пара (T_1, T_2) верхнесогласованна. Тогда пара $(T_1 \cup T_2, T_3)$ нижнесогласованна.

Пусть имеется пара (T_1, T_2) t -структур такая, что $T_1 \subseteq T_2$. Легко видеть, что она ниже- и верхнесогласованна. Более того, (T_2, T_1) – также ниже- и верхнесогласованная пара. В частности, пары $(T_1, T_1[k])$ согласованны для любого $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что функторы обрезания коммутируют:

$$\tau_{\leq 0}^1 \tau_{\leq 0}^2 = \tau_{\leq 0}^1 = \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\leq 0}^1, \quad \tau_{\geq 1}^1 \tau_{\geq 1}^2 = \tau_{\geq 1}^2 = \tau_{\geq 1}^2 \tau_{\geq 1}^1.$$

В заключение этого пункта докажем лемму, которая будет использована далее, о коммутировании функторов обрезания для упорядоченных пар t -структур.

ЛЕММА 11. *Для упорядоченной пары $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ t -структур такой, что $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, функторы обрезания коммутируют:*

$$\tau_{\leq 0}^2 \tau_{\geq 1}^1 = \tau_{\geq 1}^1 \tau_{\leq 0}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $X \in \mathcal{D}$ имеется изоморфизм $\tau_{\geq 1}^2 \tau_{\geq 1}^1 X = \tau_{\geq 1}^2 X$. Отсюда по аксиоме октаэдра имеем следующую диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\geq 1}^1 X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^1 X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^2 \tau_{\geq 1}^1 X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \wr \\ \tau_{\leq 0}^2 X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^2 X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \tau_{\leq 0}^1 X & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq 0}^1 X & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (7)$$

В верхней строке два объекта $\tau_{\geq 1}^1 X$ и $\tau_{\geq 1}^2 \tau_{\geq 1}^1 X$ лежат в $\mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Следовательно, третий объект $\tau_{\leq 0}^2 \tau_{\geq 1}^1 X$ лежит в $\mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Тогда в левом столбце нижний объект лежит в $\mathcal{D}_1^{\leq 0}$, а верхний – в $\mathcal{D}_1^{\geq 1}$. Следовательно, этот столбец – каноническое разложение среднего члена $\tau_{\leq 0}^2 X$ относительно первой t -структуры. Таким образом, имеется канонический изоморфизм $\tau_{\leq 0}^2 \tau_{\geq 1}^1 X \simeq \tau_{\geq 1}^1 \tau_{\leq 0}^2 X$.

1.4. Стандартные постулаты для решеток. Теория решеток позволяет интерпретировать решетки, т. е. частично упорядоченные множества с подходящими свойствами, как абстрактные алгебры с операциями объединения (суммы) и пересечения (произведения), которые удовлетворяют так называемым стандартным постулатам [1]. Такая интерпретация полезна при манипуляциях с решетками, к примеру при рассмотрении факторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Решетка* – это частично упорядоченное множество, в котором существуют объединение и пересечение любых двух элементов.

Напомним *стандартные постулаты*, которые выполняются для частично упорядоченных множеств. Мы будем использовать обозначения $(\cdot, +)$ с обычным приоритетом операции $\cdot$ над $+$. В формулах, приведенных ниже, предполагается, что обе части уравнений корректно определены для элементов $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ частично упорядоченного множества (когда это не является ясным априори, как, скажем, для решеток):

$$\mathcal{T} \cdot \mathcal{T} = \mathcal{T}, \quad \mathcal{T} + \mathcal{T} = \mathcal{T}, \quad (8)$$

$$\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_1, \quad \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1, \quad (9)$$

$$(\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2) \cdot \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cdot (\mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3), \quad (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) + \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 + (\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3), \quad (10)$$

$$\mathcal{T}_1 \cdot (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1. \quad (11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13 [1]. *Решетки отождествляются с абстрактными алгебрами, снабженными двумя бинарными операциями $\cdot$ и $+$, удовлетворяющими стандартным постулатам (8)–(11). Для такой алгебры частичный порядок на множестве ее элементов может быть восстановлен по правилу*

$$x \leq y, \quad \text{если} \quad x \cdot y = x. \quad (12)$$

Если $\mathbf{0}$ и/или $\mathbf{1}$ существуют, они могут быть добавлены как нуль-арные операции.

Отношение эквивалентности $\sim$ на решетке L называется *конгруэнтностью*, если $p \sim q$ влечет $p+l \sim q+l$ и $p \cdot l \sim q \cdot l$ для любого элемента $l \in L$. Если задано некоторое количество пар эквивалентностей $p_i \sim q_i$, $i \in I$, то можно определить конгруэнтность, порожденную ими, как минимальную конгруэнтность, содержащую их. Она является пересечением всех конгруэнтностей, которые содержат $\{p_i \sim q_i\}_{i \in I}$. Пересечение произвольного числа конгруэнтностей (как подмножеств в $L \times L$) также является конгруэнтностью.

Для конгруэнтности $\sim$ в решетке L , рассматриваемой как абстрактная алгебра, факторалгебра $L' = L / \sim$ корректно определена. Будучи абстрактной алгеброй того же типа (т.е. удовлетворяющей тем же стандартным постулатам), она также будет решеткой.

Заметим, что для $x', y' \in L$ имеем $x' \leq y'$ в L' тогда и только тогда, когда существуют $x, y \in L$ такие, что $x \sim x'$, $y \sim y'$ и $x \leq y$ в L . В самом деле, если $x' \leq y'$ в L' , то $x' \sim x'y'$ в силу (12). Добавляя y' к обеим частям последней эквивалентности, получаем $x' + y' \sim x'y' + y' = y'$. Следовательно, можно положить $x = x'y'$, $y = x' + y'$ для требуемых x и y .

К сожалению, мне не известно какого-либо достаточно “большого” класса t -структур, который составлял бы решетку. Найти такой класс – важная проблема.

1.5. Модулярные законы. Для любого частично упорядоченного множества выполнены неравенства дистрибутивности (также в предположении, что обе части неравенства корректно определены)

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \cdot \mathcal{T}_3 \geq \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3, \quad (13)$$

$$\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3 \leq (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \cdot (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_3). \quad (14)$$

Законы дистрибутивности, т.е. когда (13) и (14) заменяются уравнениями с теми же правыми и левыми частями, не всегда выполнены для t -структур.

ПРИМЕР 14. Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ – T -инвариантные t -структуры из примера, рассмотренного в п. 1.2. Определим T -инвариантную t -структуру $\mathcal{T}_3$, положив

$$\mathcal{D}_3^{\leq 0} = \langle \mathcal{O} \rangle.$$

Тогда $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \mathbf{1}$, так как $\mathcal{D}_1^{\geq 1} \cap \mathcal{D}_2^{\geq 1} = \langle \mathcal{O}(-3) \rangle \cap \langle \mathcal{O} \rangle = \mathbf{0}$. Также имеем $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3 = \mathbf{0}$ ввиду того, что $\mathcal{D}_1^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_3^{\leq 0} = \mathcal{D}_2^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_3^{\leq 0} = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что закон дистрибутивности

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \cdot \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3$$

нарушен, так как левая часть последнего равенства равна $\mathcal{T}_3$, в то время как правая равна $\mathbf{0}$.

Если $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$, то неравенства (13) и (14) переписываются в виде следующего автодуального неравенства:

$$(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \cdot \mathcal{T}_3 \geq \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3. \quad (15)$$

При замене в (15) неравенства на равенство это соотношение называется *модулярным законом*.

Мы докажем *при подходящих условиях согласованности* несколько утверждений, которые можно рассматривать как модулярные законы для t -структур. Следующая теорема автодуальна.

ТЕОРЕМА 15 (модулярный закон 1). *Пусть $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ – тройка t -структур таких, что $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$, пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ верхнесогласованна, а пара $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна. Тогда:*

- i) пара $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна;
- ii) пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3)$ верхнесогласованна;
- iii) $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \cdot \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$, пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна. Следовательно, нижняя согласованность пары $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ следует из предложения 10. Аналогично, пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$ верхнесогласованна, следовательно, пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3)$ верхнесогласованна по предложению 9.

Таким образом, обе части равенства из iii) корректно определены.

В нашем распоряжении имеется неравенство (15). Противоположное неравенство к (15) по определению эквивалентно включению подкатегорий

$$\mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\leq 0}, \quad (16)$$

а оно, в свою очередь, эквивалентно следующему утверждению:

(*) *если $X \in \mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0}$ и $Y \in \mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\geq 1}$, то $\text{Hom}(X, Y) = 0$.*

Докажем его. Для этого разложим X в точный треугольник

$$\tau_{\leq 0}^1 X \rightarrow X \rightarrow \tau_{\geq 1}^1 X. \quad (17)$$

Поскольку $\mathcal{T}_1 \subseteq (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)\mathcal{T}_3$, пара $(\mathcal{T}_1, (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)\mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна. Следовательно, $\tau_{\leq 0}^1 X \in \mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0}$. Тогда в силу замечания 2 имеем $\tau_{\geq 1}^1 X \in \mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0}$.

Теперь, так как $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_3$, выполнено $\text{Hom}(\mathcal{D}_1^{\leq 0}, \mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\geq 1}) = 0$. Отсюда следует, что $\text{Hom}(\tau_{\leq 0}^1 X, Y) = 0$. Применяя функтор $\text{Hom}(\cdot, Y)$ к треугольнику (17), видим, что достаточно показать, что $\text{Hom}(\tau_{\geq 1}^1 X, Y) = 0$. Следовательно, мы свели утверждение (*) к случаю, когда $X \in \mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_1^{\geq 1}$, $Y \in \mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\geq 1}$.

Теперь разложим Y по третьей t -структуре:

$$\tau_{\leq 0}^3 Y \rightarrow Y \rightarrow \tau_{\geq 1}^3 Y. \quad (18)$$

Поскольку $\mathcal{T}_{1+2 \cdot 3} \subseteq \mathcal{T}_3$, пара $(\mathcal{T}_{1+2 \cdot 3}, \mathcal{T}_3)$ верхнесогласованна. Следовательно, $\tau_{\geq 1}^3 Y \in \mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\geq 1}$. Отсюда, также в силу замечания 2 имеем $\tau_{\leq 0}^3 Y \in \mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\geq 1}$. Так как $\mathcal{T}_{(1+2)3} \subseteq \mathcal{T}_3$, то $\text{Hom}(\mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0}, \mathcal{D}_3^{\geq 1}) = 0$. Отсюда следует, что

$\text{Hom}(X, \tau_{\geq 1}^3 Y) = 0$. Применяя $\text{Hom}(X, \cdot)$ к (18), мы видим, что достаточно показать, что $\text{Hom}(X, \tau_{\leq 0}^3 Y) = 0$. Следовательно, мы свели утверждение (*) к следующему утверждению:

(**) если $X \in \mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_1^{\geq 1}$ и $Y \in \mathcal{D}_3^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_{1+2,3}^{\geq 1}$, то $\text{Hom}(X, Y) = 0$.

Покажем, что:

a) $\mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_1^{\geq 1} \subset \mathcal{D}_2^{\leq 0}$;

b) $\mathcal{D}_3^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_{1+2,3}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}_2^{\geq 1}$.

Согласно предложению 6 так как пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ верхнесогласованна, то $\tau_{\geq 1}^{1+2} = \tau_{\geq 1}^2 \tau_{\geq 1}^1$. Отсюда следует, что если $X \in \mathcal{D}_1^{\geq 1}$, то $\tau_{\geq 1}^{1+2} X = \tau_{\geq 1}^2 X$. Если, в дополнение, $X \in \mathcal{D}_{(1+2)3}^{\leq 0}$, то $\tau_{\geq 1}^2 X = \tau_{\geq 1}^{1+2} X = 0$, так как $\mathcal{T}_{(1+2)3} \subseteq \mathcal{T}_{1+2}$. Это доказывает а).

Двойственным образом, в силу предложения 6 так как пара $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна, то $\tau_{\leq 0}^{2,3} = \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\leq 0}^3$. Следовательно, для $Y \in \mathcal{D}_3^{\leq 0}$ имеем $\tau_{\leq 0}^{2,3} Y = \tau_{\leq 0}^2 Y$. Если, в дополнение, $Y \in \mathcal{D}_{1+2,3}^{\geq 1}$, то $\tau_{\leq 0}^2 Y = \tau_{\leq 0}^{2,3} Y = 0$, так как $\mathcal{T}_{2,3} \subseteq \mathcal{T}_{1+2,3}$. Это доказывает б).

Поскольку из а) и б), очевидно, следует (**), мы завершили доказательство теоремы.

Далее понадобится следующее воплощение модулярного закона.

ТЕОРЕМА 16 (модулярный закон 2). Пусть $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ – тройка t -структур таких, что $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$, пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ верхнесогласованна, а пара $(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ нижнесогласованна. Тогда:

- i) пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3)$ верхнесогласованна;
- ii) пара $(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)$ нижнесогласованна;
- iii) $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \cdot \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3$.

Отметим, что в противоположность теореме 15 нижняя согласованность пары $(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)$ не является формальным следствием предположений из п. 1.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 16. Поскольку $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$, пара $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$ верхнесогласованна. Следовательно, можно применить предложение 9 к тройке $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_2)$ и получить верхнюю согласованность пары $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3)$. Это доказывает утверждение i) и факт существования $\mathcal{T}_{1+2,3}$.

Из предложения 6 известно, что $\tau_{\leq 0}^{2,3} = \tau_{\leq 0}^3 \tau_{\leq 0}^2$. Тогда для любого $X \in \mathcal{D}$ по аксиоме октаэдра имеем следующую диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tau_{\geq 1}^3 \tau_{\leq 0}^2 X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^{2,3} X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^2 X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \tau_{\leq 0}^2 X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tau_{\geq 1}^2 X \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \tau_{\leq 0}^3 \tau_{\leq 0}^2 X & \xrightarrow{\sim} & \tau_{\leq 0}^3 \tau_{\leq 0}^2 X & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{19}$$

По предложению 6 получаем $\tau_{\geq 1}^{1+2} = \tau_{\geq 1}^2 \tau_{\geq 1}^1$ и $\tau_{\geq 1}^{1+2,3} = \tau_{\geq 1}^{2,3} \tau_{\geq 1}^1$. Следовательно, при подстановке $X = \tau_{\geq 1}^1 Y$ получаем, что верхняя строка октаэдра (19) как

точный треугольник

$$\tau_{\geq 1}^3 \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\geq 1}^1 Y \rightarrow \tau_{\geq 1}^{2 \cdot 3 + 1} Y \rightarrow \tau_{\geq 1}^{1+2} Y. \quad (20)$$

Теперь, подставляя $Y = \tau_{\leq 0}^{1+2} Z$ в (20), получаем естественный изоморфизм

$$\tau_{\geq 1}^3 \tau_{\leq 0}^2 \tau_{\geq 1}^1 \tau_{\leq 0}^{1+2} Z \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq 1}^{1+2 \cdot 3} \tau_{\leq 0}^{1+2} Z.$$

Отсюда следует, что для любого $Z \in \mathcal{D}$

$$\tau_{\leq 0}^3 \tau_{\geq 1}^{1+2 \cdot 3} \tau_{\leq 0}^{1+2} Z = 0.$$

Отметим очевидное неравенство $\mathcal{T}_{1+2 \cdot 3} \leq \mathcal{T}_3$. Следовательно, по лемме 11 получаем, что $\tau_{\leq 0}^3$ и $\tau_{\geq 1}^{1+2 \cdot 3}$ коммутируют. Отсюда следует

$$\tau_{\geq 1}^{1+2 \cdot 3} \tau_{\leq 0}^3 \tau_{\leq 0}^{1+2} = 0.$$

Эквивалентно, образ $\tau_{\leq 0}^3 \tau_{\leq 0}^{1+2}$ лежит в $\mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\leq 0}$. С другой стороны, $\mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}_{1+2}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_3^{\leq 0}$. Следовательно, образ $\tau_{\leq 0}^3 \tau_{\leq 0}^{1+2}$ лежит в $\mathcal{D}_{1+2}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_3^{\leq 0}$. Тогда $\tau_{\leq 0}^3 \mathcal{D}_{1+2}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}_{1+2}^{\leq 0}$, откуда следует нижняя согласованность пары $(\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)$.

По предложению 6 функтор $\tau_{\leq 0}^3 \tau_{\leq 0}^{1+2}$ является функтором обрезания для $\mathcal{T}_{(1+2) \cdot 3}$. Его образ – это $\mathcal{D}_{(1+2) \cdot 3}^{\leq 0} = \mathcal{D}_{1+2}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_3^{\leq 0}$. Ранее было показано, что образ лежит в $\mathcal{D}_{1+2 \cdot 3}^{\leq 0}$. Вместе с противоположным включением (15) это влечет утверждение iii).

Двойственным утверждением к теореме 16 является

ТЕОРЕМА 17 (модулярный закон 2'). Пусть $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ – тройка t -структур таких, что $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_3$, пара $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1)$ верхнесогласованна, а пара $(\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна. Тогда:

- i) пара $(\mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_1)$ верхнесогласованна;
- ii) пара $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3)$ нижнесогласованна;
- iii) $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \cdot \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_3$.

§ 2. Множества с согласованностями и пары цепей

Для ясного и логического изложения мы формализуем свойства согласованности, доказанные в § 1, и представляем удобное диаграммное описание. Затем мы докажем, что согласованная пара цепей порождает дистрибутивную решетку.

2.1. Множества с согласованностями. Под *множеством с согласованностями* мы понимаем частично упорядоченное множество, содержащее **0** и **1** с двумя бинарными (нерефлексивными) отношениями, называемыми *верхней* и *нижней согласованностями*, такими, что для любой нижней (соответственно, верхней) согласованной пары абстрактное пересечение (соответственно, объединение) существует и удовлетворяет следующим аксиомам (штрих означает двойственную аксиому).

SC1. Если $a \leq b$, то обе пары (a, b) и (b, a) верхне- и нижнесогласованны.

SC2. Выполнена импликация нижней согласованности при взятии пересечения, как в предложении 7.

SC2'. Выполнена импликация верхней согласованности при взятии объединения, как в предложении 8.

SC3. Выполнена импликация верхней согласованности при взятии пересечения, как в предложении 9.

SC3'. Выполнена импликация нижней согласованности при взятии объединения, как в предложении 10.

SC4. Выполнен модулярный закон, как в теореме 15.

SC5. Выполнен модулярный закон, как в теореме 16.

SC5'. Выполнен модулярный закон, как в теореме 17.

В этом формализме сформулированных аксиом упоминание о t -структурах должно быть убрано из всех цитируемых утверждений. Ниже мы иногда прямо ссылаемся на соответствующие утверждения, имея в виду приведенные выше аксиомы для общих множеств с согласованностями.

Заметим, что стандартные постулаты (8)–(11) автоматически выполнены для множеств с согласованностями. Из аксиомы SC1 следует, что $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ образуют верхне- и нижнесогласованную пару с любым другим элементом.

В противоположность решеткам, множество с согласованностями не является абстрактной алгеброй.

2.2. Диаграммы. Полезно использовать следующее диаграммное описание для согласованностей и операций с ними.

Пусть задано множество с согласованностями V . Рассмотрим граф $\Gamma(V)$ с вершинами, помеченными элементами из V . Мы будем использовать сплошную стрелку

$$a \longrightarrow b,$$

если (a, b) – нижнесогласованная пара в V , и прерывистую стрелку

$$a \dashrightarrow b,$$

если (a, b) – верхнесогласованная пара.

Теперь операции объединения и пересечения интерпретируются как стягивания сплошных и прерывистых стрелок. Для пересечения это имеет следующий вид:

$$a \longrightarrow b \implies a \cdot b,$$

а для объединения – следующий:

$$a \dashrightarrow b \implies a + b.$$

Двойственность для t -структур, описанная в п. 1.1, меняет роли сплошных и прерывистых стрелок и обращает их направление.

В действительности, мы будем рассматривать подграфы $\Gamma(V)$, которые будут важны для того, чтобы гарантировать итерированные стягивания.

Аксиомы SC2–SC3' определения множеств с согласованностями представляют образцы того, что позволяет связать стрелками новую вершину, полученную

в результате стягивания стрелки, с другими (старыми) вершинами графа. Аксиома SC2 (предложение 7) можно воспринимать как возможность стянуть два ребра треугольника со сплошными стрелками:

$$a \longrightarrow b \cdot c \iff \begin{array}{ccc} & b & \\ a \nearrow & & \searrow c \\ a \longrightarrow & & \longrightarrow \end{array} \implies a \cdot b \longrightarrow c.$$

Аксиома SC2' приводит к аналогичному рисунку с прерывистыми стрелками. Аксиома SC3 (предложение 9) – это импликация вида

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a \dashrightarrow & & \searrow c \\ a \dashrightarrow & & \longrightarrow \end{array} \implies a \dashrightarrow b \cdot c.$$

Аксиома SC3' представляется импликацией

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a \dashrightarrow & & \searrow c \\ a \longrightarrow & & \longrightarrow \end{array} \implies a + b \longrightarrow c.$$

Отметим, что, вообще говоря, отсутствуют импликации, которые получаются из последних двух диаграмм заменой полных стрелок на прерывистые, и наоборот (с сохранением направлений стрелок).

Иногда удобно ставить вершину с отметкой пересечения (объединения) t -структур в середину соответствующей сплошной (прерывистой) стрелки.

2.3. Универсальная решетка с согласованностями. Морфизм множеств с согласованностями – это морфизм соответствующих частично упорядоченных множеств, который отображает любую верхнесогласованную (нижнесогласованную) пару в верхнесогласованную (нижнесогласованную) пару.

Множество с согласованностями, которое является решеткой, называется *решеткой с согласованностями*. Морфизм решеток с согласованностями определяется очевидным образом.

Морфизм $\phi: P \rightarrow L$, где P – частично упорядоченное множество, а L – решетка, является отображением, сохраняющим порядок, таким, что $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ всегда, когда $x+y$ или xy существуют.

Рассмотрим частично упорядоченное множество P , на котором заданы две произвольные бинарные операции. Нас будут интересовать морфизмы $P \rightarrow L$ множества P в решетку с согласованностями L такие, что образ любой пары элементов из P , которая лежит в первом (соответственно, втором) отношении, нижнесогласован (соответственно, верхнесогласован) в L . Такой морфизм $P \rightarrow U$ называется *универсальным*, если для любого другого морфизма $P \rightarrow L$ того же вида существует единственный морфизм решеток с

согласованностями $U \rightarrow L$, который включается в следующую коммутативную диаграмму (морфизмов):

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ P \nearrow & & \searrow L \\ & P \longrightarrow & \end{array}$$

В таком случае мы называем $U = U(P)$ *универсальной решеткой с согласованностями*, порожденной P .

Если убрать отношения согласованности в выше приведенных определениях, возникает понятие *универсальной решетки* $L(P)$, порожденной частично упорядоченным множеством P . Согласно классическому результату [1] универсальная решетка $L(P)$ существует. В самом деле, напомним, что понятие решетки эквивалентно понятию абстрактной алгебры, удовлетворяющей стандартным постулатам. Тогда можно рассмотреть свободную абстрактную алгебру $F(P)$, порожденную P как дизъюнктивным множеством, и взять ее фактор по конгруэнтности, порожденной соотношениями $x + y = "x + y"$ и $x \cdot y = "x \cdot y"$ для всех x и y , для которых объединение $"x + y"$ (соответственно, пересечение $"x \cdot y"$) в частично упорядоченном множестве P существует (см. п. 1.4). Этот фактор и есть $L(P)$.

Решетка называется *дистрибутивной*, если для любых x, y, z

$$\begin{aligned} x(y + z) &= xy + xz, \\ x + yz &= (x + y)(x + z). \end{aligned}$$

Эти постулаты взаимно двойственны, и каждый из них влечет другой.

Аналогично можно определить *универсальную дистрибутивную решетку* $D(P)$, порожденную частично упорядоченным множеством P ; $D(P)$ – это фактор $L(P)$ по конгруэнтности, порожденной эквивалентностями $(x + y)z \sim xz + yz$ для любых $x, y, z \in L(P)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. Пусть P – частично упорядоченное множество с двумя бинарными отношениями. Тогда существует универсальная решетка с согласованностями, порожденная P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим универсальную решетку $L(P)$, порожденную P . Снабдим $L(P)$ двумя бинарными отношениями, которые назовем соответственно, верхней и нижней согласованностью. Во-первых, потребуем, чтобы образ в $L(P)$ всех пар в P , которые принадлежат первому (соответственно, второму) заданному бинарному отношению, был верхнесогласованным (соответственно, нижнесогласованным), во-вторых, расширим два бинарных отношения согласованности минимальным набором пар, которые удовлетворяют аксиомам SC1–SC3' и аксиомам SC5, SC5' в той части, где выводятся согласованности (напомним, что не все эти импликации данных аксиом формально следуют из остальных аксиом).

Заметим, что такая процедура не делает $L(P)$ множеством с согласованностями, потому что уравнения модулярности в аксиомах SC4–SC5' пока еще не удовлетворены. Чтобы добиться этого, рассмотрим факторрешетку $L_1(P)$ решетки $L(P)$ по конгруэнтности, порожденной эквивалентностями $(t_1 + t_2)t_3 \sim t_1 + t_2t_3$ для всех троек $(t_1, t_2, t_3) \in L(P)$, которые удовлетворяют условиям

одного из законов модулярности SC4–SC5'. Снабдим $L_1(P)$ отношениями согласованности, наследуемыми из $L(P)$. Аксиома SC1, очевидно, следует из того факта (доказанного в п. 1.4), что $x' \leq y'$ в $L_1(P)$, если и только если существуют $x, y \in L(P)$ такие, что $x \sim x'$, $y \sim y'$ и $x \leq y$ в $L(P)$.

Другие аксиомы не обязательно выполнены в факторрешетке $L_1(P)$. Поэтому подвергнем $L_1(P)$ (с ее отношениями согласованности) той же процедуре, что и $L(P)$, т. е. расширим подходящим образом бинарные отношения и возьмем аналогичный фактор, чтобы получить $L_2(P)$ из $L_1(P)$. Итерируя этот процесс, мы получим последовательность решеток $L_i(P)$ вместе с отображениями $P \rightarrow L_i(P)$, совместимыми с факторотображениями. Тогда $U(P) = \text{colim } L_i(P)$ с двумя копредельными бинарными отношениями будет универсальной решеткой с согласованностями.

В самом деле, рассмотрим любой морфизм $P \rightarrow L$, где L – решетка с согласованностями и морфизм переводит пары из первого (соответственно, второго) бинарного отношения на P в нижнесогласованные (соответственно, верхнесогласованные) пары в L . Универсальность $P \rightarrow L(P)$ влечет существование гомоморфизма решеток $L(P) \rightarrow L$, который делает коммутативной соответствующую диаграмму. Ясно, что этот гомоморфизм спускается до гомоморфизма $L_i(P) \rightarrow L$, который после перехода к пределу дает гомоморфизм $U(P) \rightarrow L$. Легко видеть, что такой гомоморфизм единственный.

Можно рассматривать дистрибутивную решетку как решетку с согласованностями, в которой все пары элементов верхне- и нижнесогласованы. Поскольку дистрибутивность влечет модулярность, получится корректно определенная решетка с согласованностями.

Канонический гомоморфизм

$$\psi: U(P) \rightarrow D(P)$$

следует из универсальности $U(P)$. Он, очевидно, является эпиморфизмом, так как конгруэнтности, использованные для построения $U(P)$ как фактора решетки $L(P)$ в предложении 18, находятся среди тех, которые использовались для построения $D(P)$ как фактора $L(P)$.

2.4. Согласованные пары цепей. *Цепь* в частично упорядоченном множестве – это полностью упорядоченная последовательность элементов. Пара цепей $a_1 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_m$ в множестве с согласованностями такая, что (a_i, b_j) верхне- и нижнесогласована для любой пары индексов (i, j) , называется *согласованной парой цепей*. Наша цель в этом пункте – доказать, что согласованная пара цепей порождает (при использовании операций объединения и пересечения) дистрибутивную решетку.

Известна теорема Биркгофа [1] о том, что две цепи в модулярной решетке порождают дистрибутивную решетку. Рассматривая множества с согласованностями, мы сталкиваемся с двумя новыми сложностями, в отличие от предположений теоремы Биркгофа: во-первых, пересечение и объединение не существуют априори, во-вторых, модулярные законы выполняются только при некоторых условиях согласования.

Понятия суммы и пересечения любого числа элементов в частично упорядоченном множестве определено внутренним образом. Например, сумма данного подмножества S элементов есть элемент, который больше любого элемента

из S , но меньше любого другого элемента с тем же свойством. Сумма может не существовать. Следующее тривиальное наблюдение несколько усиливает постулаты ассоциативности (10).

ЛЕММА 19. Пусть (a, b, c) – тройка элементов в частично упорядоченном множестве. Если $a + b$ существует, то существование элемента, выраженного одной стороной уравнения

$$(a + b) + c = a + b + c, \quad (21)$$

влечет существование элемента, выраженного другой стороной, и само уравнение.

В двойственном утверждении операция $+$ заменяется на операцию $\cdot$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. В конструкциях из этого пункта лемма 19 является единственным средством для вывода существования объединения (соответственно, пересечения) пар элементов (здесь $(a + b, c)$), которые не образуют априори верхнесогласованную (соответственно, нижнесогласованную) пару. Типичная ситуация такова. Предположим, что задана тройка (a_1, a_2, a_3) элементов (скажем, t -структур) таких, что $a_i \rightarrow a_j$ для $i < j$. Тогда по предложению 10 и лемме 19 существует $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$. Следовательно, также по лемме 19 существует $(a_1 + a_3) + a_2$, хотя ни $(a_1 + a_3, a_2)$, ни $(a_2, a_1 + a_3)$ не являются априори нижнесогласованными.

До конца настоящего пункта мы предполагаем заданными согласованную пару цепей $a_1 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_m$. Обозначим

$$u_{ij} = a_i b_j, \quad v_{ij} = a_i + b_j.$$

ЛЕММА 21. Пусть $j \leq l$. Тогда пара (u_{kl}, u_{ij}) верхнесогласованна. Двойственным образом, пара (v_{ij}, v_{kl}) нижнесогласованна для $i \leq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что $i \leq k$, потому что если $i > k$, то $u_{ij} \leq u_{kl}$, откуда следует верхняя согласованность для (u_{kl}, u_{ij}) .

Применяя аксиому SC3 к тройке (a_k, a_i, b_j) , получаем верхнюю согласованность пары $(a_k, a_i b_j)$.

Следовательно, аксиома SC5' (модулярный закон 2') применима к тройке $(a_i b_j, a_k, b_l)$. Отсюда заключаем, что пара $(u_{kl}, u_{ij}) = (a_k b_l, a_i b_j)$ верхнесогласована. Остальное следует в силу двойственности.

Напомним, что разложение $x = x_1 + \dots + x_n$ называется *неприводимым*, если $x \neq x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n$ для любого i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. Любая конечная сумма элементов u_{ij} существует и имеет разложение вида

$$u = u_{i_1 j_1} + \dots + u_{i_k j_k}, \quad i_1 < \dots < i_k, \quad j_1 < \dots < j_k. \quad (22)$$

Двойственным образом, любое конечное произведение элементов v_{ij} существует и имеет вид

$$v = v_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot v_{i_k j_k}, \quad i_1 < \dots < i_k, \quad j_1 < \dots < j_k. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая сумма вида (22) существует. В самом деле, суммирование может быть выполнено шаг за шагом слева направо в силу леммы 21 и аксиомы SC2'. Далее доказательство выполняется индукцией по числу слагаемых u_{ij} . Добавим к сумме u вида (22) некоторый элемент u_{ij} . В действительности достаточно доказать только существование

$$u' = u + u_{ij}. \quad (24)$$

В самом деле, если эта сумма существует, то мы можем редуцировать, если необходимо, разложение u' , чтобы получить неприводимое разложение. Любое неприводимое разложение автоматически имеет вид (22), потому что в противном случае существовали бы слагаемые u_{pq} и u_{rs} такие, что $u_{pq} \leq u_{rs}$.

Если $i \leq i_t$ и $j \geq j_t$ для некоторого t , то $u_{ij} \geq u_{i_t j_t}$. Аналогично, если $i \geq i_t$ и $j \leq j_t$ для некоторого t , то $u_{ij} \leq u_{i_t j_t}$. В обоих случаях один из двух элементов в сумме для u' , u_{ij} или $u_{i_t j_t}$, может быть поглощен по правилу (11). Тогда по лемме 19 и индукционному предположению сумма u' существует.

Альтернативой тому, что неравенства $i \leq i_t$ и $j \geq j_t$ выполнены для некоторого t , является возможность упорядочить все слагаемые в разложении (24) для u' , поэтому оно будет иметь вид (22). Как уже было показано, любая такая сумма существует.

Назовем цепь *расширенной*, если она содержит **0** и **1** как крайние элементы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. Пусть $a_1 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_m$ – согласованная пара расширенных цепей. Выберем два упорядоченных множества индексов $I = \{i_1 \leq \dots \leq i_k\}$, $i_l \in [1, n]$, и $J = \{j_1 \leq \dots \leq j_k\}$, $j_l \in [1, m]$. Обозначим

$$\begin{aligned} r_{IJ} &= a_{i_1}(b_{j_1} + a_{i_2}) \cdots (b_{j_{k-1}} + a_{i_k})b_{j_k}, \\ s_{IJ} &= a_{i_1}b_{j_1} + a_{i_2}b_{j_2} + \dots + a_{i_k}b_{j_k}. \end{aligned}$$

Тогда:

- i) $r_{IJ} = s_{IJ}$;
- ii) $a_i \dashrightarrow s_{IJ} \longrightarrow b_j$ для всех $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Если расширить цепи $\{a_i\}_{i \in I}$ и $\{b_j\}_{j \in J}$ с помощью **0**, то формула для r_{IJ} – это просто произведение подходящих v_{ij} . Позволяем индексам в $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ совпадать, чтобы упростить запись доказательства предложения 23 по индукции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 23. Оба элемента r_{IJ} и s_{IJ} существуют по предположению 22.

Докажем утверждения i), ii) предложения одновременной индукцией по $k = |I| = |J|$. Для $k = 1$ имеем $r_{IJ} = a_{i_1}b_{j_1} = s_{IJ}$, утверждение ii) следует из аксиом SC2 и SC3'.

Теперь будем считать утверждение ii) выполненным для $|I| = |J| = k - 1$.

Обозначим $I' = I \setminus i_k$, $J' = J \setminus j_k$. Очевидно, что $s_{I'J'} \leq b_{j_k}$. По предположению индукции имеем $a_{ij} \dashrightarrow s_{I'J'}$. Тогда можно применить аксиому SC5' (теорему 17) к тройке $(s_{I'J'}, a_{i_k}, b_{j_k})$, чтобы получить

$$(r_{I'J'} + a_{i_k})b_{j_k} = (s_{I'J'} + a_{i_k})b_{j_k} = s_{I'J'} + a_{i_k}b_{j_k} = s_{IJ}. \quad (25)$$

Покажем, что выражение, выписанное в (25) слева, равно r_{IJ} . Разложим $r_{I'J'}$ в произведение: $r_{I'J'} = qb_{j_{k-1}}$, где

$$q = a_{i_1}(b_{j_1} + a_{i_2}) \cdots (b_{j_{k-2}} + a_{i_{k-1}}).$$

Поскольку вторая цепь расширенная, последний элемент b_m в ней – это **1**. Тогда $q = s_{I'J''}$, где $J'' = \{j_1, \dots, j_{k-2}, m\}$. Следовательно, применяя предположение индукции к подмножествам I' и J'' , получаем $q \longrightarrow b_{j_{k-1}}$. Поскольку дополнительно $a_{i_k} \leq q$ и $a_{i_k} \dashrightarrow b_{j_{k-1}}$, можно применить аксиому SC5 к тройке $(a_{i_k}, b_{j_{k-1}}, q)$:

$$r_{I'J'} + a_{i_k} = qb_{j_{k-1}} + a_{i_k} = q(b_{j_{k-1}} + a_{i_k}).$$

Отсюда следует, что выражение слева в (25) равно r_{IJ} . Тем самым, утверждение i) доказано.

В силу $a_{i_k} \dashrightarrow s_{I'J'}$ и предположения индукции можно применить аксиомы SC2' и SC3', чтобы получить

$$a_i \dashrightarrow (s_{I'J'} + a_{i_k}) \longrightarrow b_j$$

для всех (i, j) . Тогда в силу $s_{I'J'} + a_{i_k} \longrightarrow b_{j_k}$ можно применить аксиомы SC2 и SC3, чтобы получить

$$a_i \dashrightarrow (s_{I'J'} + a_{i_k})b_{j_k} \longrightarrow b_j.$$

Из (25) следует, что среднее выражение совпадает с s_{IJ} . Это доказывает утверждение ii).

ТЕОРЕМА 25. *Согласованная пара цепей в множестве с согласованностями порождает в этом множестве дистрибутивную решетку, в которой все элементы имеют вид (22).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Добавляя, если необходимо, **0** и **1** как крайние элементы цепей, мы можем считать цепи расширенными. Тогда все a_i и b_j находятся среди u_{ij} . По предложению 22 сумма любых u_{ij} существует и имеет вид (22).

Покажем, что любое произведение элементов вида (22) существует и имеет тот же вид. По предложению 23 любую сумму вида (22) можно переписать как произведение некоторых v_{ij} (в формуле для r_{IJ} элементы a_{i_1} и b_{j_k} можно интерпретировать как $v_{i_1 m}$ и $v_{1 j_k}$ соответственно). Произведение этих элементов существует также согласно предложению 22 и имеет форму (23), которая, в свою очередь, по предложению 23 может быть переписана как сумма вида (22). Отсюда следует доказательство того, что множество элементов вида (22) составляет решетку L . Это и есть решетка, порожденная парой цепей.

Рассмотрим частично упорядоченное множество $P = \sigma \cup \tau$, являющееся дизъюнктивным объединением двух цепей $\sigma = \{a_1 \geq \dots \geq a_n\}$ и $\tau = \{b_1 \leq \dots \leq b_m\}$ как абстрактное частично упорядоченное множество. Пусть $D(P)$ – универсальная дистрибутивная решетка, порожденная P .

Снабдим P двумя совпадающими бинарными отношениями, которые состоят из всех пар (a_i, b_j) . Пусть $U(P)$ – универсальная решетка с согласованностями, порожденная P , которая существует по предложению 18, и $\psi: U(P) \rightarrow D(P)$ – канонический эпиморфизм. Покажем, что он является изоморфизмом.

Поскольку $U(P)$ – фактор универсальной решетки $L(P)$, он содержит только элементы вида (22). Следовательно, чтобы показать, что ψ – изоморфизм, достаточно представить дистрибутивную решетку, порожденную двумя цепями и такую, что все элементы вида (22) переводятся с помощью ψ в различные элементы.

Такая решетка может быть реализована как подрешетка подмножеств в конечном множестве точек с целыми координатами в прямоугольнике $\{(x, y) \in [1, m] \times [-1, -n]\}$. Элементы a_i представлены подмножествами $\{y \leq -i\}$, а b_j – подмножествами $\{x \leq j\}$. Любой элемент решетки – это множество целых точек под лестницей, спускающейся из точки $(1, -1)$ к точке $(m, -n)$. Будучи подрешеткой в решетке подмножеств, она дистрибутивна, и образы под действием ψ различных элементов вида (22), очевидно, различны. Следовательно, гомоморфизм ψ инъективен. Отсюда решетка $U(P)$ дистрибутивна и по свойству универсальности решетка L также дистрибутивна.

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Элемент x в решетке называется *неразложимым*, если $x = a + b$ влечет $x = a$ или $x = b$, и *разложимым* в противоположном случае. По другой теореме Биркгофа [1] любой элемент в конечной дистрибутивной решетке может быть единственным образом разложен в неприводимую сумму неразложимых элементов. Ясно, что все неразложимые элементы находятся среди u_{ij} . Легко видеть, что элемент u_{ij} неразложим в L тогда и только тогда, когда $u_{ij} = u_{i+1,j} + u_{i,j-1}$.

§ 3. Превратные когерентные пучки

3.1. Двойственность Гротендика и двойственная t -структура.

Пусть k – поле характеристики нуль. В этом пункте мы предполагаем для простоты, что все схемы имеют конечный тип над k . Для такой схемы X рассмотрим ограниченную производную категорию $\mathcal{D}(X) := \mathcal{D}_{\text{coh}}^b(X)$ когерентных пучков. Построим некоторые превратные t -структуры в $\mathcal{D}(X)$, используя технику, развитую в § 1, 2.

Пусть $\mathcal{T}$ – стандартная t -структура в $\mathcal{D}(X)$ с подкатегорией $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (соответственно, $\mathcal{D}^{\geq 0}$), состоящей из комплексов когерентных пучков на X с тривиальными пучками когомологий в положительных (соответственно, отрицательных) степенях.

Обозначим через $\mathcal{H}^i(\mathcal{F})$ i -й пучок когомологий комплекса $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$, а через $\mathcal{O}_X$ – структурный пучок колец на X . Будем записывать f_* , f^* , Hom для производных функторов прямого и обратного образа и производного функтора локальных гомоморфизмов. Если задан функтор $\Phi: \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$, будем использовать обозначение $\mathbb{R}^k \Phi := \mathcal{H}^k \cdot \Phi$ для соответствующих когомологических функторов $\mathcal{D}(X) \rightarrow \text{Coh}(Y)$. Здесь Φ , обычно, производный функтор от точного слева функтора $\text{Coh}(X) \rightarrow \text{Coh}(Y)$. Если Φ – производный от точного справа функтора $\text{Coh}(X) \rightarrow \text{Coh}(Y)$, то в соответствии с традицией будем записывать $\mathbb{L}^k \Phi := \mathcal{H}^{-k} \cdot \Phi$ для когомологических функторов.

Для морфизма $f: X \rightarrow Y$ определен скрученный функтор обратного образа $f^!: \mathcal{D}_{\text{coh}}^+(Y) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{coh}}^+(X)$ между ограниченными снизу производными категориями квазикогерентных пучков (см. [11] и [12]). Он определяется по формуле

$$f^!(-) = f^*(-) \otimes f^!(\mathcal{O}_Y),$$

где объект $f^!(\mathcal{O}_Y)$ определяется применением к структурному пучку $\mathcal{O}_Y$ правого сопряженного функтора к f_* . Когда морфизм f собственный и имеет конечную Тог-размерность, $f^!$ совпадает с правым сопряженным к f_* , а $f^!$ отображает $\mathcal{D}(Y)$ в $\mathcal{D}(X)$. В частном случае, когда f – замкнутое вложение, это свойство дает очевидную конструкцию для $f^!$ по крайней мере локально над базой. Когда морфизм f гладкий относительной размерности n , $f^!$ определяется скручиванием с помощью относительного канонического класса $\omega_{X/Y}$:

$$f^!(-) = f^*(-) \otimes \omega_{X/Y}[n].$$

Если морфизм f проективный, то он может быть разложен в произведение: $f = pi$, где i – замкнутое вложение, p – гладкий морфизм. Тогда $f^! = p^!i^!$. Отметим, что f автоматически имеет конечную Тог-размерность, если Y – гладкое многообразие.

Для собственного f конечной Тог-размерности имеется изоморфизм двойственности для локальных гомоморфизмов:

$$f_* \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, f^! \mathcal{G}) = \mathcal{H}om_Y(f_* \mathcal{F}, \mathcal{G}), \quad (26)$$

естественный по $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$, $\mathcal{G} \in \mathcal{D}(Y)$ [13].

Обозначим через $\omega_X^\bullet$ дуализирующий комплекс для X . По определению $\omega_X^\bullet = \pi_X^! \mathcal{O}_{\text{pt}}$, где $\pi_X: X \rightarrow \text{pt}$ – проекция в точку pt . Для гладкого многообразия X размерности n имеем $\omega_X^\bullet = \omega_X[n]$, где $\omega_X = \Omega_X^n$ – канонический пучок дифференциальных форм высшей степени. Для общего X известно, что $\omega_X^\bullet$ лежит в $\mathcal{D}(X)$.

Для замкнутого вложения $i: X \rightarrow Y$ схемы X в гладкую схему Y имеем

$$\omega_X^\bullet = i^! \omega_Y^\bullet = i^! \omega_Y[\dim Y]. \quad (27)$$

Категория $\mathcal{D}(X)$ обладает контравариантным инволютивным точным функтором $D = D_X$. Для $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(X)$ он определяется по правилу

$$D\mathcal{F} = D_X \mathcal{F} = \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \omega_X^\bullet). \quad (28)$$

Функтор D согласован с триангулированной структурой, т.е. DT естественно изоморфен $T^{-1}D$, и D переводит точный треугольник $A \rightarrow B \rightarrow C$ в точный треугольник $DC \rightarrow DB \rightarrow DA$.

Если $j: U \rightarrow X$ – открытое вложение, то дуализирующий комплекс на U получается ограничением дуализирующего комплекса на X :

$$\omega_U^\bullet = j^* \omega_X^\bullet. \quad (29)$$

Отсюда следует, что D локален, т.е. для открытого вложения, как и выше, имеем

$$j^* D_X = D_U j^*. \quad (30)$$

Мы будем использовать обозначение $D^{(i)} \mathcal{F} := \mathcal{H}^i(D\mathcal{F})$ для пучков когомологий $D\mathcal{F}$. Функтор D сохраняет $\mathcal{D}(X)$, и $D \cdot D$ естественно изоморфен тождественному функтору [13].

Используя D , можно определить другую t -структуру $\tilde{T} = (\tilde{\mathcal{D}}^{\leq 0}, \tilde{\mathcal{D}}^{\geq 1})$ на $\mathcal{D}(X)$, потребовав

$$\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{D}}^{\leq 0} \iff D\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\geq 0}, \quad (31)$$

$$\mathcal{F} \in \tilde{\mathcal{D}}^{\geq 0} \iff D\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\leq 0}. \quad (32)$$

Поскольку D – антиэквивалентность, $\tilde{T}$ является t -структурой. Мы будем называть ее *двойственной t -структурой*. Отметим, что дуализирующий комплекс – чистый объект для двойственной t -структуры.

3.2. Согласованная пара цепей и превратные пучки. Обозначим через $\tau_{\leq k}$, $\tau_{\geq k}$ (соответственно, $\tilde{\tau}_{\leq k}$, $\tilde{\tau}_{\geq k}$) функтор обрезания для T (соответственно, $\tilde{T}$).

Из определения $\tilde{T}$ следует, что

$$\tilde{\tau}_{\leq r} = D\tau_{\geq -r}D, \quad \tilde{\tau}_{\geq r} = D\tau_{\leq -r}D. \quad (33)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. Пусть X – схема конечного типа над полем k . Предположим, что $G \in \mathcal{D}^{\geq 0}(X)$. Тогда для любого $r \in \mathbb{Z}$ имеем $D(\tau_{\leq r}DG) \in \mathcal{D}^{\geq 0}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (30) утверждение предложения локально. Следовательно, мы можем считать схему X аффинной и (так как она конечного типа) вложить в гладкое многообразие над k . Фиксируем именно такое замкнутое вложение $i: X \rightarrow Y$ схемы X в гладкое многообразие Y размерности l . Поскольку морфизм i собственный и конечной Тор-размерности, ввиду (26) и (27) для любого $G \in \mathcal{D}(X)$ имеем

$$i_*DG = i_*\mathcal{H}om_X(G, \omega_X) = i_*\mathcal{H}om_X(G, i^!\omega_Y) = \mathcal{H}om_Y(i_*G, \omega_Y[l]).$$

Поскольку i_* – точный функтор по отношению к стандартной t -структуре, то

$$i_*D^{(k)}G = \mathbb{R}^k i_*DG = \mathbb{R}^k \mathcal{H}om_Y(i_*G, \omega_Y[l]). \quad (34)$$

Пусть $G \in \mathcal{D}^{\geq 0}(X)$. Тогда $\mathbb{R}^k i_*G$ равны нулю для $k < 0$.

Рассмотрим спектральную последовательность с $E_2^{mj} = \mathcal{E}xt_Y^{m+l}(\mathbb{R}^{-j}i_*G, \omega_Y)$, которая сходится к $\mathbb{R}^{m+j}\mathcal{H}om_Y(i_*G, \omega_Y[l])$. Так как ω_Y – локально свободный пучок, для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на Y пучки $\mathcal{E}xt_Y^k(\mathcal{F}, \omega_Y)$ имеют носитель в коразмерности $\geq k$ в Y (ср. [14, с. 142]). Мы следуем соглашению о том, что носитель нулевого пучка, который является пустым множеством, имеет бесконечную коразмерность.

Поскольку $E_2^{mj} = 0$ для $j > 0$, из спектральной последовательности следует, что носитель пучка $\mathbb{R}^s\mathcal{H}om_Y(i_*G, \omega_Y[l])$ имеет коразмерность по меньшей мере $s + l$. Теперь из формулы (34) следует, что такое же ограничение на коразмерность носителя выполнено для $i_*D^{(s)}G$. Так как пучки когомологий обрезания $\tau_{\leq r}i_*DG$ либо совпадают с когомологиями комплекса i_*DG , либо равны нулю, коразмерность носителя $\mathcal{H}^s(\tau_{\leq r}i_*DG)$ в Y не меньше $s + l$ для любого $r \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим спектральную последовательность с $E_2^{js} = D^j\mathcal{H}^{-s}(\tau_{\leq r}DG)$, которая сходится к пучкам когомологий $\mathcal{H}^{j+s}(D(\tau_{\leq r}DG))$.

В силу формулы (34) и точности i_* получаем

$$\begin{aligned} i_*D^j\mathcal{H}^{-s}(\tau_{\leq r}DG) &= \mathbb{R}^j\mathcal{H}om_Y(i_*\mathcal{H}^{-s}(\tau_{\leq r}DG), \omega_Y[l]) \\ &= \mathcal{E}xt_Y^{j+l}(\mathcal{H}^{-s}(\tau_{\leq r}i_*DG), \omega_Y). \end{aligned} \quad (35)$$

Используя тот факт, что $\mathcal{E}xt_Y^k(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = 0$ для любого локально свободного пучка $\mathcal{E}$ и для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ с коразмерностью носителя больше k , убеждаемся в том, что правая часть соотношения (35) тривиальна для $j < -s$.

Тогда из спектральной последовательности следует, что

$$i_* \mathcal{H}^j(D(\tau_{\leq r} DG)) = 0.$$

Это доказывает предложение.

Рассмотрим множество t -структур в $\mathcal{D}(X)$ как множество с согласованностями, где бинарные отношения согласованности определяются так же, как в п. 1.3. Последовательности $\mathcal{T}[r]$ и $\tilde{\mathcal{T}}[r]$ можно рассматривать как цепи в этом частично упорядоченном множестве. Назовем упорядоченную пару t -структур T -согласованной, если согласованна пара цепей, полученная из этих двух t -структур применением функтора сдвига.

ТЕОРЕМА 28. *Пара $(\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{T}})$ является T -согласованной парой t -структур.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо показать, что для любого $r \in \mathbb{Z}$ пара $(\mathcal{T}[r], \tilde{\mathcal{T}}[r])$ нижне- и верхнесогласованна.

Если для $F \in \tilde{\mathcal{D}}^{\leq 0}$ обозначить $G = DF$, то $G \in \mathcal{D}^{\geq 0}$. Согласно предложению 27 имеем, что $D\tau_{\leq r} DG = D\tau_{\leq r} F$ принадлежит $\mathcal{D}^{\geq 0}$. Следовательно, $\tau_{\leq r} \tilde{\mathcal{D}}^{\leq 0} \subset \tilde{\mathcal{D}}^{\leq 0}$, что является условием нижней согласованности.

Далее, ввиду (33) имеем

$$\tilde{\tau}_{\geq r} \mathcal{D}^{\geq 0} = D\tau_{\leq -r} D\mathcal{D}^{\geq 0} \subset \mathcal{D}^{\geq 0},$$

откуда следует верхняя согласованность.

Согласно теореме 28 пара цепей $\mathcal{T}[r]$ и $\tilde{\mathcal{T}}[r]$ согласованна. Следовательно, по теореме 25 мы получаем дистрибутивную решетку t -структур; t -структуры, которые лежат в этой решетке, являются в действительности когерентными вариантами превратных t -структур (ср. [2]).

Теперь вспомним, что для t -структур существует понятие наивного пересечения (соответственно, объединения), определяемого пересечением подкатегорий $\mathcal{D}^{\leq 0}$ (соответственно, $\mathcal{D}^{\geq 1}$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. *Любое пересечение и объединение t -структур в полученной решетке наивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пересечение и объединение согласованных пар наивно. Тогда, как следует из замечания 20, ситуация, описанная в лемме 19, является единственным случаем, в котором надо проверить наивность объединения и пересечения. Таким образом, утверждение вытекает из следующей переформулировки леммы 19 для t -структур: если $a + b$ существует и наивно, то существование и наивность элемента, выраженного одной стороной уравнения (21), влечет существование и наивность элемента, выраженного другой стороной, и само уравнение. Доказательство последнего утверждения также просто, как и самой леммы 19.

Список литературы

1. Г. Биркгоф, *Теория решеток*, Наука, М., 1984; пер. с англ.: G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **25**, Amer. Math. Soc., New York, 1948.
2. R. Bezrukavnikov, *Perverse coherent sheaves (after Deligne)*, arXiv:math/0005152.
3. M. Kashiwara, “ t -structures on the derived categories of holonomic $\mathcal{D}$ -modules and coherent $\mathcal{O}$ -modules”, *Mosc. Math. J.*, **4**:4 (2004), 847–868.
4. O. Gabber, “Notes on some t -structures”, *Geometric aspects of Dwork theory*, v. I, II, de Gruyter, Berlin, 2004, 711–734.
5. A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, arXiv:alg-geom/9506012.
6. T. Bridgeland, “Flops and derived categories”, *Invent. Math.*, **147**:3 (2002), 613–632.
7. T. Bridgeland, “Stability conditions on triangulated categories”, *Ann. of Math.* (2), **166**:2 (2007), 317–345.
8. J.-L. Verdier, “Categories derivees”, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$* , Lecture Notes in Math., **569**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, 262–311.
9. A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, “Faisceaux pervers”, *Analysis and topology on singular spaces*, v. I (Luminy, 1981), Asterisque, **100**, Soc. Math. France, Paris, 1983.
10. А. И. Бондал, “Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 25–44; англ. пер.: A. I. Bondal, “Representations of associative algebras and coherent sheaves”, *Math. USSR Izv.*, **34**:1 (1990), 23–42.
11. J.-L. Verdier, “Base change for twisted inverse image of coherent sheaves”, *Algebraic geometry* (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 393–408.
12. J. Lipman, M. Hashimoto, *Foundations of Grothendieck duality for diagrams of schemes*, Lecture Notes in Math., **1960**, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
13. R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lect. Notes in Math., **20**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
14. К. Оконек, М. Шнейдер, Х. Шпиндлер, *Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах*, Математика. Новое в зарубежной науке, **36**, Мир, М., 1984; пер. с англ.: С. Okonek, М. Schneider, Н. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progr. Math., **3**, Birkhäuser, Boston, MA, 1980.

А. И. БОНДАЛ (A. I. BONDAL)
 Математический институт им. В. А. Стеклова;
 Institute for the Physics and Mathematics
 of the Universe, University of Tokyo, Japan
E-mail: bondal@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 02.07.2012
 07.10.2012