Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ойнаров, Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 4, 207–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8026>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:59:48

УДК 517.51

Р. Ойнаров

Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева

Получены критерии ограниченности из одного весового пространства Соболева в другое весовое пространство Соболева для некоторых классов интегральных операторов типа Вольтерра.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: интегральные операторы, весовое пространство Лебега, весовое пространство Соболева, ограниченность.

DOI: 10.4213/im8026

§ 1. Введение

Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Пусть $1 < p, r, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и пусть v, ρ, u и ω – неотрицательные на I функции такие, что $v^p, \rho^p, \omega^p, u^r, \rho^{-p'}, \omega^{-q'}$ локально суммируемы на I .

Обозначим через $W_{p,r}^1(u, v) \equiv W_{p,r}^1(u, v, I)$ пространство всех локально абсолютно непрерывных на I функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_{p,r}^1} = \|uf'\|_r + \|vf\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ – обычная норма пространства $L_p(I)$. В случае $p = r$ и $u \equiv \rho$ положим $W_{p,p}^1(\rho, v) \equiv W_p^1(\rho, v)$, $\|f\|_{W_{p,p}^1} \equiv \|f\|_{W_p^1}$.

Пусть $\mathring{AC}(I)$ – множество всех локально абсолютно непрерывных на I функций с компактным носителем. Через $\mathring{W}_p^1(\rho, v) \equiv \mathring{W}_p^1(\rho, v, I)$ обозначим замыкание множества $\mathring{AC}(I) \cap W_p^1(\rho, v)$ по норме пространства $W_p^1(\rho, v)$. Пусть $L_{p,v} \equiv L_p(v, I)$ – пространство всех измеримых на I функций с конечной нормой $\|f\|_{p,v} \equiv \|vf\|_p$.

Рассмотрим интегральные операторы

$$\mathcal{K}^+ f(x) = \int_a^x K(x, s) f(s) ds, \quad x \in I, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{K}^- g(s) = \int_s^b K(x, s) g(x) dx, \quad s \in I, \quad (1.2)$$

с измеримым на $\Omega = \{(x, s): a < s \leq x < b\}$ ядром $K(\cdot, \cdot) \geq 0$.

Пусть $T \equiv \mathcal{K}^+$ или $T \equiv \mathcal{K}^-$. Сначала при некоторых предположениях относительно ядра $K(\cdot, \cdot)$ мы устанавливаем критерий ограниченности оператора T из $\mathring{W}_p^1(\rho, v)$ в $L_q(\omega, I)$, т. е. выполнение неравенства

$$\|\omega T f\|_q \leq C(\|\rho f'\|_p + \|vf\|_p), \quad f \in \mathring{W}_p^1(\rho, v). \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (грант № 1529/ГФ).

Отсюда при дополнительном предположении относительно ядра $K(\cdot, \cdot)$ мы получаем критерий ограниченности оператора T из $\dot{W}_p^1(\rho, v)$ в $W_{q,r}^1(u, \omega)$.

В случае $\rho \equiv 0$ неравенство (1.3) означает ограниченность интегрального оператора T из $L_{p,v}$ в $L_{q,\omega}$. Исследованию этого вопроса в последние годы посвящены многочисленные статьи и монографии (см., например, [1]–[4]). В работе [5] неравенство (1.3) для оператора (1.1) исследовано при более жестких условиях, налагаемых на его ядро $K(\cdot, \cdot)$, чем в настоящей работе. Трехвесовые неравенства типа (1.3) исследованы в [6], [7].

Статья организована следующим образом. В § 2 приведены основные понятия, определения и известные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов, в § 3, 4 мы получаем необходимые и достаточные условия выполнения неравенства (1.3) для операторов (1.1), (1.2) соответственно. В § 5 мы рассматриваем вопрос об ограниченности операторов (1.1) и (1.2) из $W_p^1(\rho, v)$ в $W_{q,r}^1(u, \omega)$.

В работе соотношение $A \approx B$ означает $c_1 B \leq A \leq c_2 B$, где константы $c_2 > c_1 > 0$ могут зависеть только от несущественных параметров.

§ 2. Предварительные сведения

Как и в работе [6] (см. также [5]), введем функцию

$$\delta(x, y) = \sup \left\{ d > 0 : \int_{x-d}^x \rho^{-p'}(t) dt \leq \int_x^{x+y} \rho^{-p'}(t) dt, (x-d, x) \subset I \right\}$$

с областью определения $D(\delta) = \{(x, y) : x \in I, y > 0, [x, x+y] \in I\}$. Если $x \in I$ фиксированы, то по крайней мере для достаточно малых $y > 0$ мы имеем

$$\int_{x-\delta(x,y)}^x \rho^{-p'}(t) dt = \int_x^{x+y} \rho^{-p'}(t) dt. \quad (2.1)$$

Пусть $x \in I$ и D_x — множество таких $y > 0$, для которых $x+y \in I$ и выполнено равенство (2.1). Для всех $x \in I$ мы определим

$$d^+(x) = \sup \{d : \|\rho^{-1}\|_{p', (x-\delta(x,d), x+d)} \|v\|_{p, (x-\delta(x,d), x+d)} \leq 1, d \in D_x\}$$

и положим $d^-(x) = \delta(x, d^+(x))$, $\mu^-(x) = x - d^-(x)$, $\mu^+(x) = x + d^+(x)$, $\psi^-(x) = \mu^-(\mu^-(x))$, $\psi^+(x) = \mu^+(\mu^+(x))$.

Пусть для некоторого $c \in I$

$$\|\rho^{-1}\|_{p', (a,c)} + \|v\|_{p, (a,c)} = \infty, \quad \|\rho^{-1}\|_{p', (c,b)} + \|v\|_{p, (c,b)} = \infty. \quad (2.2)$$

Тогда (см. [5], [6])

$$\int_{\mu^-(x)}^x \rho^{-p'}(t) dt = \int_x^{\mu^+(x)} \rho^{-p'}(t) dt \quad \forall x \in I. \quad (2.3)$$

Далее для простоты мы предполагаем выполнение (2.2), что равносильно условию $\dot{W}_p^1(\rho, v) = W_p^1(\rho, v)$ (см. [6]); как обойти возникающие трудности при нарушении условия (2.2), указано в [6].

Согласно [6, леммы 1.1–1.3] функции $\mu^-(x) = x - d^-(x)$ и $\mu^+(x) = x + d^+(x)$ являются строго возрастающими непрерывными на I . Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow a} \mu^\pm(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow b} \mu^\pm(x) = b, \quad (2.4)$$

откуда вытекает, что $a < \mu^\pm(x) < b$ для любого $x \in I$. Далее нам будет необходимо следующее утверждение из [5].

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнено условие (2.2). Тогда функции $\mu^-(x)$ и $\mu^+(x)$ локально абсолютно непрерывны на I .

Доказательство леммы 2.1 в [5] очень кратко. Поскольку основные результаты настоящей работы существенно опираются на утверждение леммы 2.1, для полноты изложения приведем ее подробное доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Предположим противное, т.е. функция μ^- не является локально абсолютно непрерывной на I . Тогда существуют отрезок $[\alpha, \beta] \subset I$ и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\delta > 0$ существует конечное число попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_k, \beta_k) \subset [\alpha, \beta]$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n = n(\delta)$, $\alpha_k = \alpha_k(\delta)$, $\beta_k = \beta_k(\delta)$, для которых

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta, \quad \sum_{k=1}^n (\mu^-(\beta_k) - \mu^-(\alpha_k)) > \varepsilon_0 > 0. \quad (2.5)$$

Пусть $I_k = (\alpha_k, \beta_k)$ и $I_{1,n} = \bigcup_{k=1}^n I_k$. Поскольку функция μ^- строго возрастает, интервалы $\mu^-(I_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, взаимно не пересекаются.

Пусть $\mu^-(I_{1,n}) = \bigcup_{k=1}^n \mu^-(I_k)$. Тогда $\mu^-(I_{1,n}) \subset [\alpha^-, \beta] \subset I$ и $|\mu^-(I_{1,n})| > \varepsilon_0 > 0$, где $|\mu^-(I_{1,n})|$ – мера Лебега множества $\mu^-(I_{1,n})$. Пусть Q_{ε_0} – множество всех измеримых подмножеств $Q \subset [\alpha^-, \beta]$ таких, что $|Q| > \varepsilon_0$. Пусть

$$M = \inf_{Q \in Q_{\varepsilon_0}} \int_Q \rho^{-p'}(t) dt. \quad (2.6)$$

Покажем, что $M > 0$. Действительно, если $M = 0$, то существует последовательность $Q_m \in Q_{\varepsilon_0}$, $m \geq 1$, такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Q_m} \rho^{-p'}(t) dt = 0. \quad (2.7)$$

Поскольку по условию функция ρ^p локально суммируема на I , на основании неравенства Гёльдера имеем

$$0 < \varepsilon_0 < |Q_m| \leq \left(\int_{Q_m} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{1/p'} \left(\int_{Q_m} \rho^p(t) dt \right)^{1/p}.$$

Отсюда и из соотношения (2.7) следует, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{Q_m} \rho^p(t) dt = \infty$. Тогда $\int_{\alpha^-}^{\beta} \rho^p(t) dt = \infty$, что противоречит условию локальной суммируемости функций ρ^p на I . Поэтому $M > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для $\varepsilon = \frac{1}{4}M > 0$ существует число $\delta_1 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $Q \subset [\alpha, \beta]$, $|Q| < \delta_1$, выполнено неравенство

$$\int_Q \rho^{-p'}(t) dt < \frac{1}{4}M. \quad (2.8)$$

По определению имеем $d^\pm(x) > 0$ для любого $x \in I$. Из непрерывности функций $\mu^\pm$ следует непрерывность функций $d^\pm$ в I . Поэтому существуют точки $\tilde{x}^\pm \in [\alpha, \beta]$ такие, что

$$\inf_{\alpha \leq x \leq \beta} d^\pm(x) = \min_{\alpha \leq x \leq \beta} d^\pm(x) = d^\pm(\tilde{x}^\pm) \equiv \delta^\pm > 0.$$

Положим $\delta_2 = \min\{\delta^+, \delta^-\}$ и $\delta_{12} = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Пусть δ в (2.5) удовлетворяет условию $0 < \delta < \delta_{12}$. Тогда $0 < \beta_k - \alpha_k < \delta$, $k = 1, 2, \dots, n$. В силу того, что $0 < \delta < \delta_{12} \leq \delta^\pm$, имеем

$$\begin{aligned}\beta_k^- &= \beta_k - d^-(\beta_k) \leq \beta_k - \delta^- < \beta_k - \delta < \alpha_k, \\ \alpha_k^+ &= \alpha_k + d^+(\alpha_k) \geq \alpha_k + \delta^+ > \alpha_k + \delta > \beta_k,\end{aligned}$$

т. е. $\beta_k > \alpha_k > \beta_k^-$ и $\alpha_k^+ > \beta_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда из (2.3) имеем

$$\begin{aligned}2 \int_{I_k} \rho^{-p'}(t) dt &= 2 \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \rho^{-p'}(t) dt = \left(\int_{\alpha_k}^{\alpha_k^+} - \int_{\beta_k}^{\alpha_k^+} + \int_{\beta_k}^{\beta_k^-} - \int_{\beta_k^-}^{\alpha_k} \right) \rho^{-p'}(t) dt \\ &= \left(\int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k} - \int_{\beta_k}^{\alpha_k^+} + \int_{\beta_k}^{\beta_k^+} - \int_{\beta_k^-}^{\alpha_k} \right) \rho^{-p'}(t) dt \\ &= \left[\left(\int_{\alpha_k^-}^{\alpha_k} - \int_{\beta_k^-}^{\alpha_k} \right) + \left(\int_{\beta_k}^{\beta_k^+} - \int_{\beta_k}^{\alpha_k^+} \right) \right] \rho^{-p'}(t) dt \\ &= \int_{\alpha_k^-}^{\beta_k^-} \rho^{-p'}(t) dt + \int_{\alpha_k^+}^{\beta_k^+} \rho^{-p'}(t) dt = \int_{\mu^-(I_k)} \rho^{-p'}(s) ds + \int_{\mu^+(I_k)} \rho^{-p'}(s) ds,\end{aligned}$$

откуда получаем

$$2 \int_{I_{1,n}} \rho^{-p'}(t) dt = \int_{\mu^-(I_{1,n})} \rho^{-p'}(s) ds + \int_{\mu^+(I_{1,n})} \rho^{-p'}(s) ds, \quad (2.9)$$

так как $\{I_k\}$, $\{\mu^-(I_k)\}$ и $\{\mu^+(I_k)\}$ – последовательности взаимно не пересекающихся интервалов.

Из (2.5) имеем, что $|I_{1,n}| < \delta < \delta_{12} \leq \delta_1$ и $|\mu^-(I_{1,n})| > \varepsilon_0$, причем $\mu^-(I_{1,n}) \subset [\alpha^-, \beta]$. Тогда из (2.6), (2.8) и (2.9) следует, что

$$\frac{1}{2}M > 2 \int_{I_{1,n}} \rho^{-p'}(t) dt \geq \int_{\mu^-(I_{1,n})} \rho^{-p'}(s) ds \geq M.$$

Полученное противоречие показывает, что функция μ^- локально абсолютно непрерывна на I .

Аналогичным образом доказывается локальная абсолютная непрерывность функции μ^+ . Лемма доказана.

Из свойств функций μ^- , μ^+ вытекает, что функции ψ^- , ψ^+ строго возрастают и локально абсолютно непрерывны на I как суперпозиции функций μ^- , μ^+ соответственно и $\psi^-(x) < \psi^+(x)$, $x \in I$, а также $\lim_{x \rightarrow a+} \psi^\pm(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b-} \psi^\pm(x) = b$ в силу (2.4).

Обозначим через ν^+ , ν^- обратные функции к функциям μ^- , μ^+ соответственно. Тогда функции ν^+ , ν^- являются непрерывными и строго возрастающими на I и $\nu^+(x) > \nu^-(x)$, $x \in I$, $\lim_{x \rightarrow a+} \nu^\pm(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b-} \nu^\pm(x) = b$.

Однако, как обратил внимание автора Д.В. Прохоров, для установления локальной абсолютной непрерывности функций ν^+ , ν^- необходимо показать (см. [8, с. 297]), что для любого $J = [c, d] \subset I$, $d > c$, мера множеств $J^\pm = \{x \in J : (\mu^\pm)'(x) = 0\}$ равна нулю, что было пропущено в [5].

Из (2.9) для любого $\omega = [\alpha, \beta] \subset I$, $\beta > \alpha$, следует

$$2 \int_{\omega} \rho^{-p'}(t) dt > \int_{\mu^{\pm}(\omega)} \rho^{-p'}(s) ds,$$

однако этого соотношения недостаточно для установления $|J^{\pm}| = 0$.

ЛЕММА 2.2. *Если для любого $J = [c, d] \subset I$, $d > c$, выполнено*

$$F_J^{\pm} = \sup_{\omega \subset J} \left(\int_{\omega} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{-1} \int_{\mu^{\pm}(\omega)} \rho^{-p'}(s) ds < 2, \quad (2.10)$$

то функции $\nu^{\mp}$ локально абсолютно непрерывны на I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J = [c, d] \subset I$, $d > c$. Покажем, что функции $\nu^{\pm}$ абсолютно непрерывны на J . Пусть $x \in J$ и $x + h \in J$. Положим $\alpha_h = \min\{x, x + h\}$, $\beta_h = \max\{x, x + h\}$ и $\omega_h = [\alpha_h, \beta_h]$. Очевидно, что $|\omega_h| = |h|$. Из соотношения (2.10) имеем

$$\begin{aligned} 2 > F_J^{\pm} &\geq \sup_{\omega_h \subset J} \left(\int_{\omega_h} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{-1} \int_{\mu^{\pm}(\omega_h)} \rho^{-p'}(s) ds \\ &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|h|} \int_{\omega_h} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{-1} \frac{1}{|h|} \int_{\mu^{\pm}(\omega_h)} \rho^{-p'}(s) ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|h|} \int_{\omega_h} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} \int_{\omega_h} \rho^{-p'}(\mu^{\pm}(s)) (\mu^{\pm}(s))' ds \\ &= \rho^{p'}(x) \rho^{-p'}(\mu^{\pm}(x)) (\mu^{\pm}(x))' \end{aligned}$$

в точках $x \in J$, где существуют и конечны последние пределы. Отсюда имеем

$$2\rho^{-p'}(x) > \rho^{-p'}(\mu^{\pm}(x)) (\mu^{\pm}(x))' \quad (2.11)$$

для почти всех $x \in J$.

С другой стороны, дифференцируя тождество (2.3) по $x \in J$, получим

$$2\rho^{-p'}(x) = \rho^{-p'}(\mu^{+}(x)) (\mu^{+}(x))' + \rho^{-p'}(\mu^{-}(x)) (\mu^{-}(x))' \quad (2.12)$$

для почти всех $x \in J$.

Пусть $J^{\pm} = \{x \in J: (\mu^{\pm}(x))' = 0\}$. Тогда из (2.12) следует выполнение равенства $2\rho^{-p'}(x) = \rho^{-p'}(\mu^{\mp}(x)) (\mu^{\mp}(x))'$ для всех $x \in J^{\pm}$. Отсюда и из (2.11) вытекает, что $|J^{\pm}| = 0$. Тогда на основании утверждения М. А. Зарецкого (см. [8, с. 297]) функции $\nu^{\mp}$ как обратные к непрерывным строго возрастающим функциям $\mu^{\pm}$ абсолютно непрерывны на J . Следовательно, в силу произвольности $J \subset I$ функции $\nu^{\mp}$ локально абсолютно непрерывны на I . Лемма доказана.

Теперь из свойств функций ν^{+}, ν^{-} следует, что функции $\varphi^{+}(x) = (\psi^{-})^{-1}(x) = \nu^{+}(\nu^{+}(x))$, $\varphi^{-}(x) = (\psi^{+})^{-1}(x) = \nu^{-}(\nu^{-}(x))$ являются локально абсолютно непрерывными и строго возрастающими на I и $\varphi^{+}(x) > \varphi^{-}(x)$, $x \in I$, $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi^{\pm}(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b-} \varphi^{\pm}(x) = b$.

Согласно [5, теорема 2] имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА А. Пусть $1 < p, q < \infty$. Неравенство (1.3) для всех функций $f \in \dot{W}_p^1(\rho, v)$ эквивалентно неравенству

$$\left(\int_a^b \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} (T^*g)(t) dt \right)^{p'} \rho^{-p'}(x) dx \right)^{1/p'} \leq C_1 \left(\int_a^b \omega^{-q'}(t) g^{q'}(t) dt \right)^{1/q'} \quad (2.13)$$

для всех неотрицательных функций $g \in L_{q'}(\omega^{-1}, I)$, где T^* – двойственный оператор к оператору T относительно билинейной формы $\int_a^b f(t)g(t) dt$. Кроме того, $C \approx C_1$, где $C > 0$ и $C_1 > 0$ – наилучшие константы в (1.3) и (2.13) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Теорема 2 из [5] утверждает, что теорема А справедлива для любого линейного положительного оператора T и, в частности, для тождественного оператора $Tf = f$.

Для каждого целого $n \geq 0$ определим классы $\mathcal{O}_n^\pm(\Omega)$ (см. [1]) ядер операторов (1.1) и (1.2). Обозначим $K(\cdot, \cdot) \equiv K_n(\cdot, \cdot)$, если $K(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_n^\pm(\Omega)$.

Пусть $K^+(\cdot, \cdot)$ и $K^-(\cdot, \cdot)$ – неотрицательные измеримые и определенные на Ω функции, причем функция $K^+(\cdot, \cdot)$ не убывает по первому аргументу, а функция $K^-(\cdot, \cdot)$ не возрастает по второму аргументу.

Функции $K^\pm(\cdot, \cdot) \equiv K_0^\pm(\cdot, \cdot)$ принадлежат классам $\mathcal{O}_0^\pm(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $K_0^+(x, s) = v(s) \geq 0$, $K_0^-(x, s) = u(x) \geq 0$ для всех $(x, s) \in \Omega$.

Пусть определены классы $\mathcal{O}_i^\pm(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$. Функция $K(\cdot, \cdot) \equiv K_n^\pm(\cdot, \cdot)$ принадлежит классам $\mathcal{O}_n^\pm(\Omega)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $K_i^\pm(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^\pm(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, такие, что

$$K_n^+(x, s) \approx \sum_{i=0}^n K_{n,i}^+(x, t) K_i^+(t, s), \quad (2.14)$$

$$K_n^-(x, s) \approx \sum_{i=0}^n K_i^-(x, t) K_{i,n}^-(t, s) \quad (2.15)$$

при $a < s \leq t \leq x < b$, причем $K_{n,n}^\pm(\cdot, \cdot) \equiv 1$, где функции $K_{n,i}^+(\cdot, \cdot)$, $K_{i,n}^-(\cdot, \cdot)$, $i = 0, 1, \dots, n$, вообще говоря, являются произвольными неотрицательными измеримыми и определенными на Ω функциями, удовлетворяющими соответственно условиям (2.14), (2.15). Однако эти функции можно считать определенными следующим образом (см. [1]):

$$K_{n,i}^+(x, t) = \inf_{a < s < t} \frac{K_n^+(x, s)}{K_i^+(t, s)}, \quad K_{i,n}^-(t, s) = \inf_{t < x < b} \frac{K_n^-(x, s)}{K_i^-(x, t)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Здесь и далее константы эквивалентности между функциями не зависят от изменения их аргументов.

В силу [1, теоремы 5, 6] имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА В⁺. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (1.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда оператор (1.1) ограничен из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$,

если и только если выполнено одно из условий

$$B_1^+ = \sup_{z \in I} \left(\int_z^b \omega^q(x) \left(\int_a^z K^{p'}(x, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q} < \infty,$$

$$B_2^+ = \sup_{z \in I} \left(\int_a^b \rho^{-p'}(s) \left(\int_z^b K^q(x, s) \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} ds \right)^{1/p'} < \infty,$$

при этом для нормы $\|\mathcal{K}^+\|$ оператора $\mathcal{K}^+$ из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ имеет место соотношение $\|\mathcal{K}^+\| \approx B_1^+ \approx B_2^+$.

ТЕОРЕМА В⁻. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (1.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда оператор (1.2) ограничен из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$, если и только если выполнено одно из условий

$$B_1^- = \sup_{z \in I} \left(\int_a^z \omega^q(s) \left(\int_z^b K^{p'}(x, s) \rho^{-p'}(x) dx \right)^{q/p'} ds \right)^{1/q} < \infty,$$

$$B_2^- = \sup_{z \in I} \left(\int_z^b \rho^{-p'}(x) \left(\int_a^z K^q(x, s) \omega^q(s) ds \right)^{p'/q} dx \right)^{1/p'} < \infty,$$

при этом для нормы $\|\mathcal{K}^-\|$ оператора $\mathcal{K}^-$ из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ имеет место соотношение $\|\mathcal{K}^-\| \approx B_1^- \approx B_2^-$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Многие работы посвящены исследованию вопроса ограниченности операторов вида (1.1) и (1.2) в весовых пространствах Лебега, и в работе [5] предполагается, что ядро этих операторов удовлетворяет условию $K(x, s) \approx K(x, t) + K(t, s)$ при $a < s \leq t \leq x < b$. Легко видеть, что ядро, удовлетворяющее этому условию, принадлежит $\mathcal{O}_1^+(\Omega) \cap \mathcal{O}_1^-(\Omega)$ (см. [1]).

Рассмотрим интегральные операторы

$$(\mathcal{K}_+ f)(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, s) f(s) ds, \quad x \in I, \quad (2.16)$$

$$(\mathcal{K}_- g)(s) = \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} K(x, s) g(x) dx, \quad s \in I. \quad (2.17)$$

В случае $K(\cdot, \cdot) \equiv 1$ положим $\mathcal{K}_+ \equiv \mathcal{K}_- \equiv H_{\alpha, \beta}$, т. е.

$$(H_{\alpha, \beta} f)(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s) ds,$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – локально абсолютно непрерывные и строго возрастающие функции на I такие, что $\alpha(x) < \beta(x)$ для любого $x \in I$ и $\lim_{x \rightarrow a+} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \beta(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b-} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow b-} \beta(x) = b$.

Пусть $\Omega^+ = \{(x, s) : a < x < b, \alpha(x) \leq s \leq \beta(x)\}$, $\Omega^- = \{(x, s) : a < s < b, \alpha(s) \leq x \leq \beta(s)\}$, и пусть функции $K^\pm(\cdot, \cdot) \geq 0$ определены и измеримы на $\Omega^\pm$, причем $K^+(\cdot, \cdot)$ не убывает по первому, а $K^-(\cdot, \cdot)$ не возрастает по второму аргументу. Как и ранее, определим (см. [9]) классы $\mathcal{O}_n^\pm(\Omega^\pm)$, $n \geq 0$, ядер операторов (2.16) и (2.17). Классы $\mathcal{O}_0^+(\Omega^+)$, $\mathcal{O}_0^-(\Omega^-)$ состоят соответственно из функций $K_0^+(x, s) = v(s)$, $K_0^-(x, s) = u(x)$ при всех $(x, s) \in \Omega^+$, $(x, s) \in \Omega^-$.

Пусть определены классы $\mathcal{O}_i^\pm(\Omega^\pm)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$. Функции $K_n^\pm(\cdot, \cdot)$ принадлежат классам $\mathcal{O}_n^\pm(\Omega^\pm)$ тогда и только тогда, когда для $K_n^+(\cdot, \cdot)$, $K_n^-(\cdot, \cdot)$ существуют соответственно функции $K_i^+(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^+(\Omega^+)$ и $K_i^-(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^-(\Omega^-)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, и имеют место соотношения (2.14), (2.15) при $a < t \leq x < b$, $\alpha(x) \leq s \leq \beta(t)$ и $a < s \leq t < b$, $\alpha(t) \leq x \leq \beta(s)$ соответственно, где $K_{n,n}^\pm(\cdot, \cdot) \equiv 1$. Функции $K_{n,i}^+(\cdot, \cdot)$, $K_{i,n}^-(\cdot, \cdot)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, как отмечено выше, вообще говоря, являются произвольными неотрицательными функциями, но их можно определить следующим образом:

$$K_{n,i}^+(x, t) = \inf_{\alpha(x) \leq s \leq \beta(t)} \frac{K_n^+(x, s)}{K_i^+(s, t)}, \quad K_{i,n}^-(t, s) = \inf_{\alpha(t) \leq x \leq \beta(s)} \frac{K_n^-(x, s)}{K_i^-(x, t)}$$

при $a < t \leq x < b$, $a < s \leq t < b$ соответственно.

Положим

$$\begin{aligned} G_1^+ &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^+(z)} \left(\int_y^z \omega^q(x) \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(y)} K^{p'}(x, s) \rho^{-p'}(s) ds \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q}, \\ G_2^+ &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^+(z)} \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(y)} \rho^{-p'}(s) \left(\int_y^z K^q(x, s) \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} ds \right)^{1/p'}, \\ G_1^- &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^-(z)} \left(\int_z^y \omega^q(s) \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(z)} K^{p'}(x, s) \rho^{-p'}(x) dx \right)^{q/p'} ds \right)^{1/q}, \\ G_2^- &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^-(z)} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(z)} \rho^{-p'}(x) \left(\int_z^y K^q(x, s) \omega^q(s) ds \right)^{p'/q} dx \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

где $\Delta^+(z) = [\beta^{-1}(\alpha(z)), z]$, $\Delta^-(z) = [z, \alpha^{-1}(\beta(z))]$.

Из результатов работы [9] получаем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА $\mathcal{C}^+$. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (2.16) принадлежит $\mathcal{O}_n^+(\Omega^+) \cup \mathcal{O}_n^-(\Omega^-)$, $n \geq 0$. Тогда оператор (2.16) ограничен из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$, если и только если выполнено условие $G_i^+ < \infty$ хотя бы при одном $i = 1, 2$, при этом для нормы $\|\mathcal{K}_+\|$ оператора $\mathcal{K}_+$ из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ имеет место соотношение $\|\mathcal{K}_+\| \approx G_1^+ \approx G_2^+$.

ТЕОРЕМА $\mathcal{C}^-$. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (2.17) принадлежит $\mathcal{O}_n^+(\Omega^+) \cup \mathcal{O}_n^-(\Omega^-)$, $n \geq 0$. Тогда оператор (2.17) ограничен из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$, если и только если выполняется условие $G_i^- < \infty$ хотя бы при одном $i = 1, 2$, при этом для нормы $\|\mathcal{K}_-\|$ оператора $\mathcal{K}_-$ из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ имеет место соотношение $\|\mathcal{K}_-\| \approx G_1^- \approx G_2^-$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Отметим, что ограниченность операторов (2.16) и (2.17) в весовых пространствах Лебега, в основном, исследованы в предположении $K(x, s) \approx K(x, \beta(t)) + K(t, s)$ при $a < t \leq x < b$, $\alpha(x) \leq s \leq \beta(t)$ или $K(x, s) \approx K(x, t) + K(t, \alpha(s))$ при $a < s \leq t < b$, $\alpha(t) \leq x \leq \beta(s)$ (см. [2] и приведенные в этой работе ссылки).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если $K_n^\pm(x, s) \in \mathcal{O}_n^\pm(\Omega)$, то $K^+(\beta(x), s) \in \mathcal{O}_n^+(\Omega^+)$ и $K^-(x, \alpha(s)) \in \mathcal{O}_n^-(\Omega^-)$.

Пусть $K_0^+(x, s) \in \mathcal{O}_0^+(\Omega)$. Тогда $K_0^+(x, s) = v(s) = K_0^+(\beta(x), s) \in \mathcal{O}_0^+(\Omega^+)$. Допустим, что из $K_i^+(x, s) \in \mathcal{O}_i^+(\Omega)$ следует $K_i^+(\beta(x), s) \in \mathcal{O}_i^+(\Omega^+)$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$. Пусть $K_n^+(x, s) \in \mathcal{O}_n^+(\Omega)$ и $a < t \leq x < b$, $\alpha(x) \leq s \leq \beta(t)$. Тогда $a < \beta(t) \leq \beta(x) < b$ и $a < s \leq \beta(t) \leq \beta(x) < b$. Поэтому в силу $K_n^+(x, s) \in \mathcal{O}_n^+(\Omega)$ имеем

$$K_n^+(\beta(x), s) \approx \sum_{i=0}^n K_{n,i}^+(\beta(x), \beta(t)) K_i^+(\beta(t), s)$$

при $a < t < x < b$, $\alpha(x) \leq s \leq \beta(t)$, т. е. по определению класса $\mathcal{O}_n^+(\Omega^+)$ имеем $K_n^+(\beta(x), s) \in \mathcal{O}_n^+(\Omega^+)$. Аналогично доказывается $K_n^-(x, \alpha(s)) \in \mathcal{O}_n^-(\Omega^-)$, если $K_n^-(x, s) \in \mathcal{O}_n^-(\Omega)$.

§ 3. Критерий выполнения неравенства (1.3) для оператора (1.1)

Здесь и далее будем считать, что выполнены условия (2.2) и (2.10).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (1.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда для оператора (1.1) неравенство (1.3) выполнено, если и только если $\max\{E_i^-, D_j^-\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j) , $i, j = 1, 2$, при этом для наилучшей постоянной $C > 0$ в (1.3) имеет место соотношение $C \approx \max\{E_i^-, D_j^-\}$, $i, j = 1, 2$, где

$$\begin{aligned} E_1^- &= \sup_{z \in I} \left(\int_a^z \rho^{-p'}(x) \left(\int_{\varphi^+(z)}^b \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t, s) ds \right)^q \omega^q(t) dt \right)^{p'/q} dx \right)^{1/p'}, \\ E_2^- &= \sup_{z \in I} \left(\int_{\varphi^+(z)}^b \omega^q(t) \left(\int_a^z \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t, s) ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(x) dx \right)^{q/p'} dt \right)^{1/q}, \\ D_1^- &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta_\varphi^-(z)} \left(\int_z^y \rho^{-p'}(x) \left(\int_{\varphi^-(y)}^{\varphi^+(z)} \left(\int_{\varphi^-(x)}^t K(t, s) ds \right)^q \omega^q(t) dt \right)^{p'/q} dx \right)^{1/p'}, \\ D_2^- &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta_\varphi^-(z)} \left(\int_{\varphi^-(y)}^{\varphi^+(z)} \omega^q(t) \left(\int_z^y \left(\int_{\varphi^-(x)}^t K(t, s) ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(x) dx \right)^{q/p'} dt \right)^{1/q}; \end{aligned}$$

здесь $\Delta_\varphi^-(z) = [z, \psi^+(\varphi^+(z))]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим на основании теоремы А при использовании следующего более общего утверждения.

Рассмотрим оператор

$$(H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^- g)(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_s^b K(t, s) g(t) dt ds, \quad x \in I, \quad (3.1)$$

из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$. Пусть

$$\begin{aligned} F_1^- &= \sup_{z \in I} \left(\int_a^z \omega^q(x) \left(\int_{\beta(z)}^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(t, s) ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q}, \\ F_2^- &= \sup_{z \in I} \left(\int_{\beta(z)}^b \rho^{-p'}(t) \left(\int_a^z \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(t, s) ds \right)^q \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} dt \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

$$G_1^- = \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^-(z)} \left(\int_z^y \omega^q(x) \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(z)} \left(\int_{\alpha(x)}^t K(t, s) ds \right)^{p'} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q},$$

$$G_2^- = \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^-(z)} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(z)} \rho^{-p'}(t) \left(\int_z^y \left(\int_{\alpha(x)}^t K(t, s) ds \right)^q \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} dt \right)^{1/p'}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (1.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда оператор (3.1) ограничен из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$, если и только если $\max\{F_i^-, G_j^-\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j) , $i, j = 1, 2$, при этом для нормы $\|H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^-\|$ оператора $H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^-$ из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ имеет место соотношение

$$\|H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^-\| \approx \max\{F_i^-, G_j^-\}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать справедливость (3.2). Пусть $K(t, s) \in \mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geq 0$, и $0 \leq g \in L_p(\rho, I)$. Тогда

$$\begin{aligned} (H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^- g)(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_s^b K(t, s) g(t) dt ds \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{\beta(x)}^b K(t, s) g(t) dt ds + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_s^{\beta(x)} K(t, s) g(t) dt ds \\ &= \int_{\beta(x)}^b g(t) \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(t, s) ds dt + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t) \int_{\alpha(x)}^t K(t, s) ds dt \\ &= (\tilde{\mathcal{K}}_1^- g)(x) + (\tilde{\mathcal{K}}_2^- g)(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{K}}_1^- g)(x) &= \int_{\beta(x)}^b \tilde{K}_1^-(t, x) g(t) dt, & \tilde{K}_1^-(t, x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(t, s) ds, \\ (\tilde{\mathcal{K}}_2^- g)(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \tilde{K}_2^-(t, x) g(t) dt, & \tilde{K}_2^-(t, x) &= \int_{\alpha(x)}^t K(t, s) ds. \end{aligned}$$

Следовательно, для нормы операторов $\tilde{\mathcal{K}}_1^-$ и $\tilde{\mathcal{K}}_2^-$ из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ имеет место соотношение

$$\|H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^-\| \approx \max\{\|\tilde{\mathcal{K}}_1^-\|, \|\tilde{\mathcal{K}}_2^-\|\}. \quad (3.3)$$

Оценим величины $\|\tilde{\mathcal{K}}_1^-\|$, $\|\tilde{\mathcal{K}}_2^-\|$. Поскольку $K(t, s) \in \mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geq 0$, при $b > t \geq \beta(x) \geq s > a$ имеем

$$\tilde{K}_1^-(t, x) \approx \sum_{i=0}^n K_i^-(t, \beta(x)) \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{i, n}^-(\beta(x), s) ds, \quad (3.4)$$

где $K_i^-(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^-(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $K_n^-(\cdot, \cdot) \equiv K(\cdot, \cdot)$. Тогда

$$(\tilde{\mathcal{K}}_1^- g)(x) \approx \sum_{i=0}^n \Phi_i^-(x) \int_{\beta(x)}^b K_i^-(t, \beta(x)) g(t) dt, \quad (3.5)$$

где $\Phi_i^-(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{i, n}^-(\beta(x), s) ds$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Обозначим через $\|\mathcal{K}_{i,\beta}^-\|$ норму оператора

$$(\mathcal{K}_{i,\beta}^- g)(x) = \Phi_i^-(x) \int_{\beta(x)}^b K_i^-(t, \beta(x)) g(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$. Тогда из (3.5) следует, что

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_1^-\| \approx \sum_{i=0}^n \|\mathcal{K}_{i,\beta}^-\|. \quad (3.6)$$

В силу замены переменных $\beta(x) = y$ в области значения оператора $\mathcal{K}_{i,\beta}^-$ получаем

$$\|\mathcal{K}_{i,\beta}^-\| = \|\mathcal{K}_i^-\|, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

где $\|\mathcal{K}_i^-\|$ – норма оператора

$$(\mathcal{K}_i^- g)(y) = \int_y^b K_i^-(t, y) g(t) dt$$

из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\tilde{\omega}, I)$, $\tilde{\omega}(y) = \Phi_i^-(\beta^{-1}(y))\omega(\beta^{-1}(y))\left[\frac{d\beta^{-1}(y)}{dy}\right]^{1/q}$. Поскольку $K_i^-(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^-(\Omega)$, $0 \leq i \leq n$, на основании теоремы В- имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_i^-\| &\approx \sup_{z \in I} \left(\int_0^z \tilde{\omega}^q(y) \left(\int_z^b (K_i^-(t, y))^{p'} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{q/p'} dy \right)^{1/q} \\ &= \sup_{z \in I} \left(\int_a^{\beta^{-1}(z)} \omega^q(x) (\Phi_i^-(x))^q \left(\int_z^b (K_i^-(t, \beta(x)))^{p'} \rho^{-p'}(t) dt \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q} \\ &= \sup_{z \in I} \left(\int_a^z \omega^q(x) \left(\int_{\beta(z)}^b \left(K_i^-(t, \beta(x)) \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{i,n}^-(\beta(x), s) ds \right)^{p'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \rho^{-p'}(t) dt \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q} \end{aligned} \quad (3.8)$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_i^-\| &\approx \sup_{z \in I} \left(\int_{\beta(z)}^b \rho^{-p'}(t) \left(\int_a^z \left(K_i^-(t, \beta(x)) \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{i,n}^-(\beta(x), s) ds \right)^q \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.8), (3.7), (3.6) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{K}}_1^-\| &\approx \sup_{z \in I} \left(\int_a^z \omega^q(x) \left(\int_{\beta(z)}^b \left(\sum_{i=0}^n K_i^-(t, \beta(x)) \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{i,n}^-(\beta(x), s) ds \right)^{p'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \rho^{-p'}(t) dt \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q} \approx F_1^-. \end{aligned}$$

Аналогично, из (3.9), (3.7), (3.6) и (3.4) следует, что $\|\tilde{\mathcal{K}}_1^-\| \approx F_2^-$, т. е.

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_1^-\| \approx F_1^- \approx F_2^-. \quad (3.10)$$

Теперь оценим величину $\|\tilde{\mathcal{K}}_2^-\|$. Рассмотрим ядро оператора $\tilde{\mathcal{K}}_2^-$:

$$\tilde{K}_2^-(t, x) \equiv K_{n+1}^-(t, x) = \int_{\alpha(x)}^t K(t, s) ds.$$

В операторе $\tilde{\mathcal{K}}_2^-$ область изменения переменных x, t и s следующая: $a < x < b$, $\alpha(x) \leq s \leq t \leq \beta(x)$. Пусть $a < x \leq \tau < b$, $\alpha(\tau) \leq t \leq \beta(x)$. Тогда

$$K_{n+1}^-(t, x) = \int_{\alpha(x)}^{\alpha(\tau)} K(t, s) ds + \int_{\alpha(\tau)}^t K(t, s) ds = \int_{\alpha(x)}^{\alpha(\tau)} K(t, s) ds + K_{n+1}^-(t, \tau). \quad (3.11)$$

В выражении $\int_{\alpha(x)}^{\alpha(\tau)} K(t, s) ds$ переменные t, s меняются в пределах $\alpha(x) \leq s \leq \alpha(\tau) \leq t \leq \beta(x)$, поэтому из условия $K(t, s) \in \mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(\tau)} K(t, s) ds &\approx \sum_{i=0}^n K_i^-(t, \alpha(\tau)) \int_{\alpha(x)}^{\alpha(\tau)} K_{i,n}^-(\alpha(\tau), s) ds \\ &= \sum_{i=0}^n K_i^-(t, \alpha(\tau)) K_{i,n+1}^-(\tau, x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $K_{i,n+1}^-(\tau, x) = \int_{\alpha(x)}^{\alpha(\tau)} K_{i,n}^-(\alpha(\tau), s) ds$, $i = 0, 1, \dots, n$, $K_i^-(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^-(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $K_n^-(t, \alpha(\tau)) = K(t, \alpha(\tau))$. Из (3.11) и (3.12) получим

$$\tilde{K}_2^-(t, x) \equiv K_{n+1}^-(t, x) \approx K_{n+1}^-(t, \tau) + \sum_{i=0}^n \hat{K}_i^-(t, \tau) K_{i,n+1}^-(\tau, x)$$

при $a < x \leq \tau < b$, $\alpha(\tau) \leq t \leq \beta(x)$, где $\hat{K}_i^-(t, \tau) \equiv K_i^-(t, \alpha(\tau))$, $i = 0, 1, \dots, n$, $K_{n+1,n+1}^-(\cdot, \cdot) \equiv 1$. В силу замечания 2.4 функция $\hat{K}_i^-(\cdot, \cdot)$ принадлежит классу $\mathcal{O}_i^-(\Omega^-)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда по определению класса $\mathcal{O}_{n+1}^-(\Omega^-)$ ядро $\tilde{K}_2^-(t, x)$ оператора $\tilde{\mathcal{K}}_2^-$ принадлежит классу $\mathcal{O}_{n+1}^-(\Omega^-)$. Следовательно, по теореме C- имеем

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_2^-\| \approx G_1^- \approx G_2^-. \quad (3.13)$$

Из соотношений (3.13), (3.10) и (3.3) имеем (3.2). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Согласно теореме A выполнение неравенства (1.3) при $T = \mathcal{K}^+$ эквивалентно выполнению неравенства (2.13) при $T^* = \mathcal{K}^-$, т. е. ограниченности оператора $H_{\varphi^-, \varphi^+} \mathcal{K}^-$ из $L_{q', \omega^{-1}}$ в $L_{p', \rho^{-1}}$, при этом $\|H_{\varphi^-, \varphi^+} \mathcal{K}^-\| \approx C$, где $C > 0$ – наилучшая постоянная в (1.3). Тогда по теореме 3.2 неравенство (1.3) при $1 < p \leq q < \infty$ для оператора (1.1) выполнено, если и только если $\max\{E_i^-, D_j^-\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j) , $i, j = 1, 2$, и имеет место соотношение $C \approx \max\{E_i^-, D_j^-\}$, $i, j = 1, 2$. Теорема доказана.

§ 4. Критерий выполнения неравенства (1.3) для оператора (1.2)

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (1.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда неравенство (1.3) для оператора (1.2) выполнено, если и только если $\max\{E_i^+, D_j^+\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j) , $i, j = 1, 2$,

при этом для наилучшей постоянной $C > 0$ в (1.3) имеет место соотношение $C \approx \max\{E_i^+, D_j^+\}$, $i, j = 1, 2$, где

$$\begin{aligned} E_1^+ &= \sup_{z \in I} \left(\int_z^b \rho^{-p'}(x) \left(\int_a^{\varphi^-(z)} \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t, s) dt \right)^q \omega^q(s) ds \right)^{p'/q} dx \right)^{1/p'}, \\ E_2^+ &= \sup_{z \in I} \left(\int_a^{\varphi^-(z)} \omega^q(s) \left(\int_z^b \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} K(t, s) dt \right)^{p'} \rho^{-p'}(x) dx \right)^{q/p'} ds \right)^{1/q}, \\ D_1^+ &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta_\varphi^+(z)} \left(\int_y^z \rho^{-p'}(x) \left(\int_{\varphi^-(z)}^{\varphi^+(y)} \left(\int_s^{\varphi^+(x)} K(t, s) dt \right)^q \omega^q(s) ds \right)^{p'/q} dx \right)^{1/p'}, \\ D_2^+ &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta_\varphi^+(z)} \left(\int_{\varphi^-(z)}^{\varphi^+(y)} \omega^q(s) \left(\int_y^z \rho^{-p'}(x) \left(\int_s^{\varphi^+(x)} K(t, s) dt \right)^{p'} dx \right)^{q/p'} ds \right)^{1/q}; \end{aligned}$$

здесь $\Delta_\varphi^+(z) = [\psi^-(\varphi^-(z)), z]$.

Как и в §3, сначала установим ограниченность из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ оператора

$$(H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^+ g)(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_a^t K(t, s) g(s) ds dt, \quad x \in I. \quad (4.1)$$

Положим

$$\begin{aligned} F_1^+ &= \sup_{z \in I} \left(\int_z^b \omega^q(x) \left(\int_a^{\alpha(z)} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(t, s) dt \right)^{p'} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q}, \\ F_2^+ &= \sup_{z \in I} \left(\int_a^{\alpha(z)} \rho^{p'}(s) \left(\int_z^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(t, s) dt \right)^q \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} ds \right)^{1/p'}, \\ G_1^+ &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^+(z)} \left(\int_y^z \omega^q(x) \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(y)} \left(\int_s^{\beta(x)} K(t, s) dt \right)^{p'} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q}, \\ G_2^+ &= \sup_{z \in I} \sup_{y \in \Delta^+(z)} \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(y)} \rho^{-p'}(s) \left(\int_y^z \left(\int_s^{\beta(x)} K(t, s) dt \right)^q \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} ds \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и ядро оператора (1.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда оператор (4.1) ограничен из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$, если и только если $\max\{F_i^+, G_j^+\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j) , $i, j = 1, 2$, при этом для нормы $\|H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^+\|$ оператора $H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^+$ из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\omega, I)$ имеет место соотношение

$$\|H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^+\| \approx \max\{F_i^+, G_j^+\}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в доказательстве теоремы 3.2, достаточно показать выполнение (4.2). Пусть $K(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_n^+(\Omega)$, $n \geq 0$, и $0 \leq g \in L_p(\rho, I)$. Тогда

$$(H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^+ g)(x) = (\tilde{\mathcal{K}}_1^+ g)(x) + (\tilde{\mathcal{K}}_2^+ g)(x), \quad x \in I,$$

где

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathcal{K}}_1^+ g)(x) &= \int_a^{\alpha(x)} \tilde{K}_1^+(x, s) g(s) ds, & \tilde{K}_1^+(x, s) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(t, s) dt, \\(\tilde{\mathcal{K}}_2^+ g)(x) &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \tilde{K}_2^+(x, s) g(s) ds, & \tilde{K}_2^+(x, s) &= \int_s^{\beta(x)} K(t, s) dt.\end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\|H_{\alpha, \beta} \mathcal{K}^+\| \approx \max\{\|\tilde{\mathcal{K}}_1^+\|, \|\tilde{\mathcal{K}}_2^+\|\}, \quad (4.3)$$

где $\|\tilde{\mathcal{K}}_i^+\|$ – норма оператора $\tilde{\mathcal{K}}_i^+$, $i = 1, 2$, из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\hat{\omega}, I)$.

Теперь рассмотрим операторы $\tilde{\mathcal{K}}_1^+$ и $\tilde{\mathcal{K}}_2^+$. В операторе $\tilde{\mathcal{K}}_1^+$ переменные x , s и t изменяются в пределах $a < x < b$, $a < s \leq \alpha(x) \leq t \leq \beta(x) < b$. Поэтому с учетом того, что $K(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_n^+(\Omega)$, имеем

$$\tilde{K}_1^+(x, s) \approx \sum_{i=0}^n \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{n,i}^+(t, \alpha(x)) dt K_i^+(\alpha(x), s) = \sum_{i=0}^n \Phi_i^+(x) K_i^+(\alpha(x), s), \quad (4.4)$$

где $\Phi_i^+(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{n,i}^+(t, \alpha(x)) dt$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$(\tilde{\mathcal{K}}_1^+ g)(x) \approx \sum_{i=0}^n (\mathcal{K}_{i, \alpha}^+ g)(x), \quad (\mathcal{K}_{i, \alpha}^+ g)(x) = \Phi_i^+(x) \int_a^{\alpha(x)} K_i^+(\alpha(x), s) g(s) ds,$$

$i = 0, 1, \dots, n$, откуда с учетом замены переменных $\alpha(x) = y$ в области значения операторов $\mathcal{K}_{i, \alpha}^+$, $i = 0, 1, \dots, n$, получим

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_1^+\| \approx \sum_{i=0}^n \|\mathcal{K}_{i, \alpha}^+\|, \quad (4.5)$$

где $\|\mathcal{K}_{i, \alpha}^+\|$ – норма оператора

$$(\mathcal{K}_{i, \alpha}^+ g)(y) = \int_a^y K_i^+(y, s) g(s) ds, \quad y \in I,$$

из $L_p(\rho, I)$ в $L_q(\hat{\omega}, I)$, $\hat{\omega}(y) = \Phi_i^+(\alpha^{-1}(y)) \omega(\alpha^{-1}(y)) \left[\frac{d\alpha^{-1}(y)}{dy} \right]^{1/q}$. Поскольку $K_i^+(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^+(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n$, по теореме B⁺ имеем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}_{i, \alpha}^+\| &\approx \sup_{z \in I} \left(\int_z^b \hat{\omega}^q(y) \left(\int_a^z (K_i^+(y, s))^{p'} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{q/p'} dy \right)^{1/q} \\&= \sup_{z \in I} \left(\int_{\alpha^{-1}(z)}^b \omega^q(x) \left(\int_a^z (K_i^+(\alpha(x), s) \Phi_i^+(x))^{p'} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q} \\&= \sup_{z \in I} \left(\int_z^b \omega^q(x) \left(\int_a^{\alpha(z)} \left[K_i^+(\alpha(x), s) \right. \right. \right. \\&\quad \times \left. \left. \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{n,i}^+(t, \alpha(x)) dt \right]^{p'} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{q/p'} dx \right)^{1/q}, \quad i = 0, 1, \dots, n,\end{aligned} \quad (4.6)$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_i^+\| \approx \sup_{z \in I} \left(\int_a^{\alpha(z)} \rho^{-p'}(s) \left(\int_z^b \left[K_i^+(\alpha(x), s) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K_{n,i}^+(t, \alpha(x)) dt \right]^q \omega^q(x) dx \right)^{p'/q} ds \right)^{1/p'}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из соотношений (4.7) и (4.6), (4.5) с учетом (4.4) имеем

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_1^+\| \approx F_1^+ \approx F_2^+. \quad (4.8)$$

Теперь рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{K}}_2^+$ и его ядро. Пусть $a < \tau \leq x < b$, $\alpha(x) \leq s \leq \beta(\tau)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_2^+(x, s) \equiv K_{n+1}^+(x, s) &= \int_s^{\beta(x)} K(t, s) dt = \int_{\beta(\tau)}^{\beta(x)} K(t, s) dt + \int_s^{\beta(\tau)} K(t, s) dt \\ &= \int_{\beta(\tau)}^{\beta(x)} K(t, s) dt + K_{n+1}^+(\tau, s). \end{aligned} \quad (4.9)$$

В выражении $\int_{\beta(\tau)}^{\beta(x)} K(t, s) dt$ переменные t, s меняются в пределах $\beta(x) \geq t \geq \beta(\tau) \geq s \geq \alpha(x)$, поэтому, учитывая, что $K(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_n^+(\Omega)$, $n \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\beta(\tau)}^{\beta(x)} K(t, s) ds &\approx \sum_{i=0}^n \int_{\beta(\tau)}^{\beta(x)} K_{n,i}^+(\tau, \beta(\tau)) dt K_i^+(\beta(\tau), s) \\ &= \sum_{i=0}^n K_{n+1,i}^+(x, \tau) K_i^+(\beta(\tau), s), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $K_{n+1,i}^+(x, \tau) = \int_{\beta(\tau)}^{\beta(x)} K_{n,i}(t, \beta(\tau)) dt$, $K_i^+(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_i^+(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $K_n^+(\cdot, \cdot) \equiv K(\cdot, \cdot)$. Из (4.9) и (4.10) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_2^+(x, s) \equiv K_{n+1}^+(x, s) &\approx \sum_{i=0}^{n+1} K_{n+1,i}^+(x, \tau) K_i^+(\beta(\tau), s), \\ K_{n+1,n+1}^+(\cdot, \cdot) &\equiv 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

при $a < \tau \leq x < b$, $\alpha(x) \leq s \leq \beta(\tau)$. Поскольку в силу замечания 2.4 имеет место $K_i^+(\beta(\tau), s) \in \mathcal{O}_i^+(\Omega^+)$, $i = 0, 1, \dots, n$, из (4.11) и определения класса $\mathcal{O}_{n+1}^+(\Omega^+)$ следует $\tilde{\mathcal{K}}_2^+(\cdot, \cdot) \equiv K_{n+1}^+(\cdot, \cdot) \in \mathcal{O}_{n+1}^+(\Omega^+)$. Тогда по теореме B⁺ имеем

$$\|\tilde{\mathcal{K}}_2^+\| \approx G_1^+ \approx G_2^+. \quad (4.12)$$

В силу (4.12), (4.8) и (4.3) получаем (4.2). Теорема доказана.

Из теоремы 4.2, как и в § 3, вытекает теорема 4.1.

§ 5. Ограниченность интегральных операторов в весовых пространствах Соболева

Пусть, как и во введении, T – либо оператор (1.1), либо оператор (1.2). Рассмотрим оператор T из $\dot{W}_p^1(\rho, v)$ в $W_{q,r}^1(u, \omega)$. В силу неотрицательности ядра оператора T его ограниченность из $\dot{W}_p^1(\rho, v)$ в $W_{q,r}^1(u, \omega)$ эквивалентна выполнению неравенства (1.3) и неравенства

$$\left\| u \frac{d}{dx} T f \right\|_r \leq C' (\|\rho f'\|_p + \|v f\|_p), \quad f \in \dot{W}_p^1(\rho, v), \quad (5.1)$$

при этом для нормы $\|T\|$ оператора T из $\dot{W}_p^1(\rho, v)$ в $W_{q,r}^1(u, \omega)$ имеет место соотношение $\|T\| \approx \max\{C, C'\}$, где $C > 0$ и $C' > 0$ – наилучшие постоянные в неравенствах (1.3) и (5.1) соответственно. Поэтому нам достаточно рассмотреть неравенство (5.1) для операторов (1.1) и (1.2).

Пусть ядро $K(x, s)$ оператора (1.1) локально абсолютно непрерывно на I по переменной x при всех $(x, s) \in \Omega$. Тогда для п. в. $x \in I$ имеем

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{K}^+ f)(x) = K(x, x)f(x) + \int_a^x K_x(x, s)f(s) ds, \quad (5.2)$$

где $K_x(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} K(x, s)$. Из (5.2) следует, что неравенство (5.1), в свою очередь, эквивалентно выполнению неравенств

$$\|ukf\|_r \leq C'_0 (\|\rho f'\|_p + \|v f\|_p), \quad f \in \dot{W}_p^1(\rho, v), \quad (5.3)$$

$$\|u\mathcal{K}_\partial^+ f\|_r \leq C'_1 (\|\rho f'\|_p + \|v f\|_p), \quad f \in \dot{W}_p^1(\rho, v), \quad (5.4)$$

где $k(x) = K(x, x)$, $(\mathcal{K}_\partial^+ f)(x) = \int_a^x K_x(x, s)f(s) ds$.

Пусть функция $\sigma(x)$ такова (см. [2]), что

$$\int_{\sigma(x)}^{\varphi^+(x)} u^r(t)k^r(t) dt = \int_{\varphi^-(x)}^{\sigma(x)} u^r(t)k^r(t) dt, \quad x \in I.$$

Положим $\sigma^-(x) = x - d^-(\sigma(x))$, $\sigma^+(x) = x - d^+(\sigma(x))$. Тогда согласно [5, теорема 2.4] неравенство (5.3) при $1 < p \leq r < \infty$ выполнено, если и только если

$$A_0 = \sup_{x \in I} \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} u^r(t)k^r(t) dt \right)^{1/r} \left(\int_{\sigma^-(x)}^{\sigma^+(x)} \rho^{-p'}(s) ds \right)^{1/p'} < \infty,$$

при этом $A_0 \approx C'_0$, где C'_0 – наилучшая постоянная в (5.3). Неравенство (5.4) – это неравенство вида (1.3). Поэтому имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $1 < p \leq r < \infty$, и пусть ядро $K(x, s)$ оператора (1.1) локально абсолютно непрерывно на I по переменной x при всех $(x, s) \in \Omega$ и ядро $K_x(x, s)$ оператора $\mathcal{K}_\partial^+$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда неравенство (5.1) для оператора (1.1) выполнено, если и только если $\max\{A_0, E_{\partial, i}^-, D_{\partial, j}^-\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j) , $i, j = 1, 2$, при этом $C' \approx \max\{A_0, E_{\partial, i}^-, D_{\partial, j}^-\}$, $i, j = 1, 2$, где величины $E_{\partial, i}^-$, $D_{\partial, j}^-$ получаются соответственно из величин E_i^- , D_j^- , $i, j = 1, 2$, при замене ω на u , $K(t, s)$ на $K_t(t, s)$ и q на r .

Аналогично имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $1 < p \leq r < \infty$, и пусть ядро $K(x, s) \geq 0$ оператора (1.2) локально абсолютно непрерывно на I по переменной s при всех $(x, s) \in \Omega$ и ядро $\frac{\partial}{\partial s} K(x, s) \equiv K_s(x, s)$ оператора $(K_{\partial}^- g)(s) = \int_s^b K_s(x, s)g(x) dx$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+(\Omega)$, $n \geq 0$. Тогда неравенство (5.1) для оператора (1.2) выполнено, если и только если $\max\{A_0, E_{\partial, i}^+, D_{\partial, j}^+\} < \infty$ хотя бы при одной паре (i, j) , $i, j = 1, 2$, при этом $C' \approx \max\{A_0, E_{\partial, i}^+, D_{\partial, j}^+\}$, $i, j = 1, 2$, где величины $E_{\partial, i}^+$, $D_{\partial, j}^+$ получаются соответственно из величин E_i^+ , D_j^+ при замене ω на u , $K(t, s)$ на $K_s(t, s)$ и q на r .

Теперь из теорем 3.1, 5.1 и теорем 4.1, 5.2 при соответствующих условиях для ядра $K(\cdot, \cdot) \geq 0$ можно получить критерий ограниченности соответственно операторов (1.1), (1.2) из $\dot{W}_p^1(\rho, v)$ в $W_{q, r}^1(u, \omega)$.

Автор выражает признательность Д. В. Прохорову, обратившему его внимание на упущение в работе [5].

Список литературы

1. Р. Ойнаров, “Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтерровского типа”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:5 (2007), 1100–1115; англ. пер.: R. Oinarov, “Boundedness and compactness of Volterra type integral operators”, *Siberian Math. J.*, **48**:5 (2007), 884–896.
2. V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, “Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications”, *Math. Inequal. Appl.*, **13**:3 (2010), 449–510.
3. A. Kufner, L.-E. Persson, *Weighted inequalities of Hardy type*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003, xviii+357 pp.
4. A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson, *The Hardy inequality. About its history and some related results*, Vydavatelský Servis, Plzeň, 2007, 162 pp.
5. R. Oinarov, “Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **56**:10–11 (2011), 1021–1038.
6. R. Oinarov, “On weighted norm inequalities with three weights”, *J. London Math. Soc.* (2), **48**:1 (1993), 103–116.
7. R. Oinarov, “Reversion of Hölder type inequalities for sums of weighted norms and additive weighted estimates of integral operators”, *Math. Inequal. Appl.*, **6**:3 (2003), 421–436.
8. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, 2-е изд., Гостехиздат, М., 1957, 552 с.; англ. пер.: I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, v. 1, 2, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955, 1961, 277 pp., 265 pp.
9. Р. Ойнаров, “Ограниченность и компактность интегральных операторов с переменными пределами интегрирования в весовых пространствах Лебега”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:6 (2011), 1313–1328; англ. пер.: R. Oinarov, “Boundedness and compactness in weighted Lebesgue spaces of integral operators with variable integration limits”, *Siberian Math. J.*, **52**:6 (2011), 1042–1055.

РЫСКУЛ ОЙНАРОВ
(RYSKUL OINAROV)
Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
E-mail: o_ryskul@mail.ru, oinaruly_r@enu.kz

Поступило в редакцию
02.07.2012
11.03.2013