Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Кан, Д. А. Фроленков, Усиление теоремы
Бургейна–Конторовича, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014,
том 78, выпуск 2, 87–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8032>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:48:28

УДК 511.321+511.31

И. Д. Кан, Д. А. Фроленков

Усиление теоремы Бургейна–Конторовича

Доказано, что в натуральном ряду существует положительная пропорция чисел, удовлетворяющих гипотезе Зарембы с константой $A = 7$. Данный результат является усилением аналогичной теоремы Бургейна–Конторовича, полученной при $A = 50$.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: цепная дробь, континуант, тригонометрическая сумма.

DOI: 10.4213/im8032

Светлой памяти Н. М. Коробова посвящается

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. Для произвольного конечного алфавита $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ (всюду далее $|\mathcal{A}| \geq 2$) обозначим через $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ множество рациональных чисел, представление которых конечными цепными дробями имеет неполные частные из алфавита $\mathcal{A}$:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}} = \left\{ \frac{b}{d} = [d_1, \dots, d_k] \mid d_j \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, k \right\},$$

где

$$[d_1, \dots, d_k] = \frac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{d_k}}}} \quad (1.1)$$

– конечная цепная дробь, $d_1, \dots, d_k$ – ее неполные частные. Обозначим через $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ множество знаменателей чисел из $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \left\{ d \mid \exists b: (b, d) = 1, \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \right\},$$

положим также $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) = \{d \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \mid d \leq N\}$.

ГИПОТЕЗА 1.1 (гипотеза Зарембы [1, с. 76]). *Для алфавитов вида $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, A\}$ при достаточно большом A имеет место равенство $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$.*

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00681-а), работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00759-а и № 12-01-31165) и фонда “Династия”.

Таким образом, согласно гипотезе 1.1 каждое $d \geq 1$ представимо в виде знаменателя конечной цепной дроби $\frac{b}{d}$ с неполными частными, ограниченными величиной A . Фактически С. К. Заремба предположил, что значения $A = 5$ достаточно для справедливости его гипотезы. Несколько раньше, в 50-е годы прошлого века, Н. С. Бахвалов, Н. Н. Ченцов и Н. М. Коробов, рассматривая вопросы приближенного интегрирования, также пришли к аналогичной гипотезе, но нигде ее не опубликовали. Коробов доказал [2], что для простого p существует a такое, что максимальное неполное частное дроби $\frac{a}{p}$ меньше $\log p$. Подробный обзор результатов, касающихся гипотезы Зарембы, можно найти в [3], [4].

Пусть $\mathfrak{E}_A$ – множество бесконечных цепных дробей с неполными частными из алфавита A :

$$\mathfrak{E}_A = \{[d_1, \dots, d_j, \dots] : d_j \in A, j = 1, 2, \dots\},$$

и δ_A – хаусдорфова размерность множества $\mathfrak{E}_A$. Я. Бургейн и А. Конторович доказали следующее утверждение [3, теорема 1.25].

ТЕОРЕМА 1.1. *Для произвольного алфавита A такого, что*

$$\delta_A > 1 - \frac{5}{312} = 0.983914\dots, \quad (1.2)$$

справедливо неравенство (“положительная пропорция”)

$$\#\mathfrak{D}_A(N) \gg N.$$

Для ряда алфавитов неравенство вида (1.2) может быть проверено двумя способами. Именно, для алфавитов вида $A = \{1, 2, \dots, A-1, A\}$ Д. Хенсли [5] доказал, что

$$\delta_A = \delta_A = 1 - \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{A} - \frac{72}{\pi^4} \frac{\log A}{A^2} + O\left(\frac{1}{A^2}\right).$$

Кроме того, О. Дженкинсон [6] получил приближенные значения некоторых величин δ_A . Ввиду этих результатов предполагается, что неравенству (1.2) удовлетворяет алфавит

$$\{1, 2, \dots, A-1, A\} \quad (1.3)$$

при $A = 50$. В [3] также доказаны более сильные утверждения, чем теорема 1.1, однако в настоящей работе мы не будем их рассматривать.

1.2. Формулировка основного результата. Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1.2. *Для произвольного алфавита A такого, что*

$$\delta_A > 1 - \frac{5}{\sqrt{369} + 23} = 0.8815\dots,$$

имеет место неравенство (“положительная пропорция”)

$$\#\mathfrak{D}_A(N) \gg N.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В статье [6] получено, что $\delta_7 = 0.8889\dots$, откуда следует, что условию теоремы 1.2 удовлетворяет алфавит $\{1, 2, \dots, 7\}$, а также получено, что для алфавита $A = \{1, 2, \dots, 6, 8\}$ имеет место равенство $\delta_A = 0.8851\dots$. Следовательно, и алфавит $\{1, 2, \dots, 6, 8\}$ удовлетворяет условию теоремы 1.2.

Доказательство теоремы 1.2 основано на методе Бургейна–Конторовича из работы [3], где был разработан новый метод оценки тригонометрических сумм, берущихся по множеству континуантов. Мы улучшаем этот метод, усовершенствуя основное множество Ω_N . В [3] это множество получило название *ансамбль*. Доказательство теоремы 1.2 существенным образом опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 1.1 [3, лемма 7.1]. Пусть $K, X, Y \geq 1$ – действительные числа, q – натуральное число, и пусть векторы $\eta = (x, y)^t$, $\eta' = (u, v)^t \in \mathbb{Z}^2$ такие, что

$$|\eta| \asymp \frac{X}{Y}, \quad |\eta'| \asymp X, \quad (x, y) = 1, \quad (u, v) = 1.$$

Если выполнено соотношение

$$(qK)^{13/5} < Y < X, \quad (1.4)$$

то

$$\#\left\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \|\gamma\| \asymp Y, \quad |\gamma\eta - \eta'| < \frac{X}{K}, \quad \gamma\eta \equiv \eta' \pmod{q}\right\} \ll \frac{Y^2}{(qK)^2}.$$

Доказательство леммы 1.1, приведенное в статье [3], опирается на работу [7], где доказываются утверждения, схожие с леммой 1.1. При этом доказательство является довольно сложным ввиду использования методов спектральной теории автоморфных форм. В связи с этим Н. Г. Мощевитиным в [4] был поставлен вопрос о возможности доказательства аналогичного утверждения с использованием лишь оценок сумм Клоостермана. В настоящей работе мы на основе статьи Е. В. Подсыпанина [8] (в которой как раз и используются оценки сумм Клоостермана) доказываем следующий аналог леммы 1.1.

Определим множество матриц

$$M = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid 0 \leq a \leq b, \quad 1 \leq c \leq d, \quad 1 \leq b \leq d, \quad \det \gamma = 1 \right\}. \quad (1.5)$$

ЛЕММА 1.2. Пусть $K, X, Y \geq 1$ – действительные числа, q – натуральное число, A, κ_1 – абсолютные константы, и пусть векторы $\eta = (x, y)^t$, $\eta' = (u, v)^t \in \mathbb{Z}^2$ такие, что

$$\frac{y}{A} \leq x \leq y, \quad \frac{X}{Y} \ll y \ll \frac{X}{Y}, \quad (x, y) = 1, \quad (1.6)$$

$$\frac{v}{A} \leq u \leq v, \quad X \ll v \ll X, \quad \frac{2X}{K} \leq v, \quad (u, v) = 1. \quad (1.7)$$

Если выполнено соотношение

$$K^4 q^6 < Y < X,$$

то справедлива оценка

$$\#\left\{\gamma \in M \mid \frac{Y}{\kappa_1} \leq \|\gamma\| \leq Y, \quad |\gamma\eta - \eta'| < \frac{X}{K}, \quad \gamma\eta \equiv \eta' \pmod{q}\right\} \ll_{\varepsilon} \frac{Y^{2+\varepsilon}}{(qK)^2}. \quad (1.8)$$

Замена в доказательстве теоремы 1.2 леммы 1.1 на лемму 1.2 приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1.3. Для произвольного алфавита $\mathcal{A}$ такого, что

$$\delta_{\mathcal{A}} > 1 - \frac{1}{6 + 2\sqrt{10}} = 0.9188\dots,$$

имеет место неравенство (1.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В статье [6] получено, что $\delta_{10} = 0.9257\dots$, откуда следует, что условию теоремы 1.3 удовлетворяет алфавит $\{1, 2, \dots, 10\}$.

1.3. Благодарности. Авторы благодарят профессора Н. Г. Мощевитина за неоднократное обсуждение наших результатов, именно он обратил наше внимание на статью [3], а также выражают благодарность И. Д. Шкрёдову и И. С. Резвяковой за вопросы и комментарии во время наших докладов и рецензенту за указание на работу [8] и замечания, позволившие существенно упростить доказательства некоторых утверждений.

1.4. Обозначения. В дальнейшем $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mathcal{A}) \in (0, \frac{1}{2500})$. Для двух функций $f(x), g(x)$ используемый знак Виноградова $\ll$ в выражении $f(x) \ll g(x)$ означает существование константы C , зависящей от A, ε_0 и такой, что $|f(x)| \leq Cg(x)$. Аналогичный смысл имеет выражение $f(x) = O(g(x))$. Выражение $f(x) = O_1(g(x))$ означает, что $|f(x)| \leq g(x)$, а $f(x) \asymp g(x)$ означает, что $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$. Используется также традиционное обозначение $e(x) = \exp(2\pi ix)$. Мощность конечного множества S обозначена через $|S|$ или $\#S$. Через $[\alpha]$ и $\|\alpha\|$ обозначены соответственно целая часть числа α и расстояние от α до ближайшего целого: $[\alpha] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \alpha\}$, $\|\alpha\| = \min\{|z - \alpha| \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Обозначим через $\tau(q)$ следующую сумму: $\tau(q) = \sum_{d|q} 1$, и определим характеристическую функцию

$$\mathbf{1}_{\{S\}} = \begin{cases} 1, & \text{если условие } S \text{ выполнено,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

§ 2. Подготовка к оценкам тригонометрических сумм

2.1. Континуанты и матрицы. Здесь мы напомним простейшие приемы, касающиеся континуантов. Как правило, их можно найти в каждом исследовании по цепным дробям. Пусть $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, обозначим через $[D]$ цепную дробь (1.1), т. е. $[D] = [d_1, \dots, d_k]$, а через $\langle D \rangle$ – ее знаменатель, т. е. $\langle D \rangle = \langle d_1, \dots, d_k \rangle$. Этот знаменатель называется *континуантом* последовательности D . Континуант последовательности может быть также определен следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \rangle &= 1, & \langle d_1 \rangle &= d_1, \\ \langle d_1, \dots, d_k \rangle &= \langle d_1, \dots, d_{k-1} \rangle d_k + \langle d_1, \dots, d_{k-2} \rangle, & k &\geq 2. \end{aligned}$$

Пусть $\Gamma_{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ – полугруппа с единицей $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, порожденная

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_j \\ a_i & a_i a_j + 1 \end{pmatrix},$$

где $a_i, a_j \in \mathcal{A}$. Обозначим через $V_{\mathcal{A}}(k)$ множество слов длины k

$$V_{\mathcal{A}}(k) = \{(d_1, \dots, d_k) \mid d_j \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, k\},$$

а через $V_{\mathcal{A}} = \bigcup_{k \geq 1} V_{\mathcal{A}}(k)$ – множество всех конечных слов. Мы будем рассматривать в алфавите $\mathcal{A}$ слова только четной длины, множество которых обозначим через $V_{\mathcal{A}^2}$. Построим отображение $\mathcal{B}: V_{\mathcal{A}^2} \rightarrow \Gamma_{\mathcal{A}}$, положив

$$\mathcal{B}(d_1, d_2, \dots, d_k) = \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_k \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Хорошо известно, что отображение $\mathcal{B}$ является биекцией и что

$$\frac{a}{c} = [d_1, \dots, d_{k-1}], \quad \frac{b}{d} = [d_1, \dots, d_k].$$

Из этого факта следует, что $\Gamma_{\mathcal{A}}$ – свободная полугруппа (т. е. представление матрицы единственно). Отметим, что элементы матрицы γ могут быть выражены через континуанты

$$\begin{aligned} a &= \langle d_2, d_3, \dots, d_{k-1} \rangle, & b &= \langle d_2, d_3, \dots, d_k \rangle, \\ c &= \langle d_1, d_2, \dots, d_{k-1} \rangle, & d &= \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для матрицы $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ мы используем следующую норму:

$$\|\gamma\| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}.$$

Из (2.2) вытекает, что

$$\|\gamma\| = d = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle. \quad (2.3)$$

Следовательно, для доказательства положительной плотности континуантов в $\mathbb{N}$:

$$\#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) \gg N, \quad (2.4)$$

достаточно доказать аналогичное свойство для множества

$$\|\Gamma_{\mathcal{A}}\| = \{\|\gamma\| \mid \gamma \in \Gamma_{\mathcal{A}}\}. \quad (2.5)$$

Фактически для доказательства неравенства (2.4) будет использована лишь часть полугруппы $\Gamma_{\mathcal{A}}$, так называемый ансамбль Ω_N .

2.2. Метод Хенсли. Прежде чем оценивать количество континуантов, не превосходящих N , полезно было бы оценить количество цепных дробей, знаменатель которых ограничен N . Хотя эти задачи похожи, во втором случае каждый континуант должен учитываться вместе со своей кратностью. Обозначим $A = \max \mathcal{A}$. Пусть $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}$ – множество конечных цепных дробей, построенных из последовательностей в $V_{\mathcal{A}^2}$. Положим также

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}(N) &= \{D \in V_{\mathcal{A}^2} \mid \langle D \rangle \leq N\}, \\ F_{\mathcal{A}}(x) &= \#\{D \in V_{\mathcal{A}^2} \mid \langle D \rangle \leq x\} = \#\mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}(x), \end{aligned}$$

и пусть $D_{\mathcal{A}^2}(N)$ – множество знаменателей для дробей из $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}^2}(N)$. Обобщая метод Хенсли [9], можно доказать, что $\delta_{\mathcal{A}^2} = \delta_{\mathcal{A}}$ и справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\delta_{\mathcal{A}} > \frac{1}{2}$; тогда для любого $x \geq 4A^2$ выполнено

$$\frac{1}{32A^4} x^{2\delta_{\mathcal{A}}} \leq F_{\mathcal{A}}(x) - F_{\mathcal{A}}\left(\frac{x}{4A^2}\right) \leq F_{\mathcal{A}}(x) \leq 8x^{2\delta_{\mathcal{A}}}. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в работе [10]. Отметим, что для алфавита $\mathcal{A}$ вида (1.3) эта теорема была доказана в [9].

2.3. Стартовые идеи метода Бургейна–Конторовича. В этом пункте дадим представление о конструкциях, необходимых для доказательства теоремы 1.2.

С точки зрения теории тригонометрических сумм для изучения “плотности” множества (2.5) естественно попытаться оценить модуль суммы

$$S_N(\theta) := \sum_{\gamma \in \Omega_N} e(\theta \|\gamma\|),$$

где $\Omega_N \subseteq \Gamma_{\mathcal{A}} \cap \{\|\gamma\| \leq N\}$ – подходящее множество матриц (ансамбль), $\theta \in [0, 1]$, а норма $\|\gamma\|$ задается формулой (2.3). Коэффициент Фурье функции $S_N(\theta)$ определяется, как обычно, формулой

$$\widehat{S}_N(n) = \int_0^1 S_N(\theta) e(-n\theta) d\theta = \sum_{\gamma \in \Omega_N} \mathbf{1}_{\{\|\gamma\|=n\}}.$$

Заметим, что если $\widehat{S}_N(n) > 0$, то $n \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}^2}(N)$. Поскольку

$$S_N(0) = \sum_{\gamma \in \Omega_N} 1 = \sum_{n=1}^N \sum_{\gamma \in \Omega_N} \mathbf{1}_{\{\|\gamma\|=n\}} = \sum_{n=1}^N \widehat{S}_N(n) = \sum_{n=1}^N \widehat{S}_N(n) \mathbf{1}_{\{\widehat{S}_N(n) \neq 0\}},$$

то по неравенству Коши–Буняковского

$$(S_N(0))^2 \leq \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{\widehat{S}_N(n) \neq 0\}} \sum_{m=1}^N (\widehat{S}_N(m))^2. \quad (2.7)$$

Первый из множителей в правой части неравенства (2.7) равен $\#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}^2}(N)$. Применяя ко второму множителю равенство Парсеваля, имеем

$$\sum_{n=1}^N (\widehat{S}_N(n))^2 = \int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta.$$

Следовательно,

$$(S_N(0))^2 \leq \#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}^2}(N) \int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta. \quad (2.8)$$

Поэтому из (2.8) следует оценка снизу величины множества $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}^2}(N)$:

$$\#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}^2}(N) \geq \frac{(S_N(0))^2}{\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta}. \quad (2.9)$$

Таким образом, оценка $\#\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(N) \gg N$ будет доказана, если удастся предельно точно оценить интеграл из (2.9):

$$\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta \ll \frac{(S_N(0))^2}{N} = \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (2.10)$$

Из теоремы Дирихле следует, что для любого $\theta \in [0, 1]$ найдутся $a, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\theta = \frac{a}{q} + \beta, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}, \quad \beta = \frac{K}{N}, \quad |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}.$$

Для получения оценки (2.10) мы, следуя работе [3], воспользуемся видоизмененным круговым методом. Отличие от стандартного кругового метода заключается в отсутствии разбиения отрезка на большие и малые дуги. Мы просто представим интеграл (2.10) в виде суммы интегралов по различным областям в переменных (q, K) . Каждый из них будет оценен особым способом в зависимости от области интегрирования.

В дальнейшем нам потребуются следующие объекты. Для начала определим понятие “предансамбль”. Подмножество $\Xi(N)$ матриц $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{A}}$ назовем N -предансамблем, если выполнены два условия:

$$\forall \gamma \in \Xi(N) \quad \|\gamma\| \asymp N; \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \#\Xi(N) \gg_{\varepsilon} N^{2\delta_{\mathcal{A}} - \varepsilon}. \quad (2.11)$$

Заметим, что по теореме 2.1 из первого условия в (2.11) следует, что $\#\Xi(N) \ll N^{2\delta_{\mathcal{A}}}$. Для матриц вида (2.1) мы через $D(\gamma)$ будем обозначать последовательность $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$. В п. 2.4 мы алгоритмически построим предансамбль $\Xi(M)$, состоящий из матриц вида (2.1) таких, что:

1) первые и последние $p \asymp \log \log M$ элементов последовательности $D(\gamma)$ равны 1;

2) для некоторого $L \asymp M$ выполнено $L(1 - \log^{-1} L) \leq \|\gamma\| \leq L$;

3) для некоторого $k \asymp \log M$ выполнено $k(\gamma) = k = \text{const}$, т. е. длина $D(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Xi(M)$ фиксирована.

Пусть фиксировано ε_0 такое, что $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}$. В п. 2.6 мы построим искомым ансамбль Ω_N в виде

$$\Omega_N = \Xi_1(M_1)\Xi_2(M_2) \cdots \Xi_{2J}(M_{2J})\Xi_{2J+1}(M_{2J+1}),$$

где

$$M_j \asymp N^{\frac{\varepsilon_0}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^{|j-1-J|}}, \quad J \asymp \log \log N.$$

Заметим, что ввиду однозначности представления элементов из полугруппы $\Gamma_{\mathcal{A}}$ получаем, что представление $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_{2J}\gamma_{2J+1}$, где $\gamma \in \Omega_N$, $\gamma_1 \in \Xi_1$, $\gamma_2 \in \Xi_2, \dots, \gamma_{2J+1} \in \Xi_{2J+1}$, единственно. В п. 2.7 мы докажем, что для любого M такого, что $1 \ll M \ll N$, ансамбль Ω_N может быть представлен в виде $\Omega_N = \Xi(P_1)\Xi(P_2)$, причем $P_1^{1-\varepsilon_0} \ll M \ll P_1$. Далее, в п. 2.8 будут получены результаты о разбиениях множества Ω_N , которые мы будем использовать для доказательства оценки (2.10). Отметим, что именно выбор M_j отличает построенное нами множество Ω_N от аналогичного из работы [3], в которой $M_j \asymp N^{1/2^j}$.

2.4. Предансамбль $\Xi(M)$. Пусть $\delta := \delta_{\mathcal{A}} > \frac{1}{2}$, $\Gamma := \Gamma_{\mathcal{A}}$ и, как всегда, $A = \max \mathcal{A}$. Пусть фиксирован также действительный параметр M , удовлетворяющий неравенству

$$M \geq 2^9 A^3 \log^3 M. \quad (2.12)$$

В настоящем пункте мы построим предансамбль $\Xi(M) \subset \Gamma$. Это основной элемент, который будет использован при построении ансамбля Ω_N . Построение $\Xi(M)$ будет алгоритмическим, а число M будет входящим параметром алгоритма. В ходе этого алгоритма построим числа

$$L = L(M) \asymp M, \quad p = p(M) \asymp \log \log M, \quad k = k(M) \asymp \log M,$$

которые будут отвечать за свойства элементов $\Xi(M)$. Приступаем к описанию этого алгоритма, состоящего из четырех шагов.

Шаг 1. Сначала рассмотрим множество $S_1 \subset \Gamma$ матриц $\gamma \in \Gamma$ таких, что

$$\frac{M}{64A^2} \leq \|\gamma\| \leq M. \quad (2.13)$$

Шаг 2. Пусть $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для $n \geq 1$ — числа Фибоначчи. Определим натуральное число $p = p(M)$ из соотношения

$$F_{p-1} \leq \log^{\frac{1}{2}} M < F_p. \quad (2.14)$$

Отметим, что тогда

$$F_p \leq 2F_{p-1} \leq 2 \log^{\frac{1}{2}} M. \quad (2.15)$$

Рассмотрим множество $S_2 \subset S_1$ тех матриц $\gamma \in S_1$ вида (2.1), для которых

$$d_1 = d_2 = \dots = d_p = 1, \quad d_k = d_{k-1} = \dots = d_{k-p+1} = 1.$$

Другими словами, в последовательности $D = D(\gamma) = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ первые p и последние p элементов равны единице.

Шаг 3. Для L из отрезка

$$\left[\frac{M}{64A^2}, M \right] \quad (2.16)$$

рассмотрим множество $S_3(L) \subset S_2$ тех матриц $\gamma \in S_2$, для которых выполнено

$$\max \left\{ \frac{M}{64A^2}, L(1 - \log^{-1} L) \right\} \leq \|\gamma\| \leq L. \quad (2.17)$$

В отрезке (2.16) выберем любое L (например, максимальное), удовлетворяющее неравенству

$$|S_3(L)| \geq \frac{L^{2\delta}}{2^{16} A^5 \log^3 L} \quad (2.18)$$

(существование такого L будет доказано в лемме 2.2), и положим $S_3 := S_3(L)$.

Шаг 4. Пусть $k(\gamma)$ — длина последовательности $D(\gamma)$ для $\gamma \in S_3$. Представим множество S_3 в виде объединения множеств $S_4(k)$, состоящих из тех матриц $\gamma \in S_3$, для которых $k(\gamma) = k$ фиксировано. Выберем любое из k , удовлетворяющих неравенству

$$|S_4(k)| \geq \frac{L^{2\delta}}{2^{18} A^5 \log^4 L}, \quad (2.19)$$

и положим $S_4 := S_4(k)$ (существование такого k будет доказано в лемме 2.3).

Алгоритм завершен.

Теперь положим $\Xi(M) := S_4$ и докажем, что

$$\#\Xi(M) \geq \frac{L^{2\delta}}{2^{18} A^5 \log^4 L}. \quad (2.20)$$

Согласно теореме 2.1 имеем $\#S_1 \asymp M^{2\delta}$. Оценим снизу величину $\#S_2$.

ЛЕММА 2.1. *Имеет место оценка*

$$\#S_2 \geq \frac{M^{2\delta}}{2^{13} A^4 \log^2 M}. \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность D можно представить в виде

$$D = \{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, b_1, b_2, \dots, b_n, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_p\}.$$

Тогда требуемое неравенство (2.13) может быть представлено в виде

$$\frac{M}{64A^2} \leq \langle \underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, b_1, b_2, \dots, b_n, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_p \rangle \leq M. \quad (2.22)$$

Покажем, что неравенства (2.22) следуют из неравенств

$$\frac{M}{64A^2 \log M} \leq \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \leq \frac{M}{16 \log M}. \quad (2.23)$$

Действительно, пусть выполнены неравенства (2.23). Тогда, с одной стороны, ввиду неравенств (2.49) и (2.15) имеем

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, b_1, b_2, \dots, b_n, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_p \rangle &\leq 4F_p^2 \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \\ &\leq 16 \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \log M \leq M \end{aligned}$$

и, аналогично, с другой стороны, ввиду неравенства (2.14) имеем

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, b_1, b_2, \dots, b_n, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_p \rangle &\geq F_p^2 \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \\ &\geq \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \log M \geq \frac{M}{64A^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, импликация (2.23) $\Rightarrow$ (2.22) доказана.

Осталось оценить снизу количество последовательностей $B = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, удовлетворяющих неравенству (2.23). Положим $x = \frac{M}{16 \log M}$ и заметим, что ввиду неравенства (2.12) выполнено условие $x \geq 4A^2$ из теоремы 2.1. Следовательно, учитывая (2.6), имеем

$$\#S_2 \geq F_A(x) - F_A\left(\frac{x}{4A^2}\right) \geq \frac{1}{32A^4} \left(\frac{M}{16 \log M}\right)^{2\delta} \geq \frac{M^{2\delta}}{2^{13} A^4 \log^2 M},$$

так как $\delta < 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. На отрезке (2.16) найдется число L такое, что справедливо неравенство (2.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t – минимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$(1 - \log^{-1} M)^t \leq \frac{1}{64A^2}.$$

Заметим, что $t \leq 8A \log M$. Для $j = 1, 2, \dots, t$ рассмотрим множества $s(j)$, каждое из которых состоит из тех матриц $\gamma \in S_2$, для которых

$$M(1 - \log^{-1} M)^j \leq \|\gamma\| \leq M(1 - \log^{-1} M)^{j-1}.$$

Поскольку $S_2 \subset \bigcup_{1 \leq j \leq t} s(j)$, среди множеств $s(j)$ по принципу Дирихле найдется такое, которое содержит по крайней мере $\frac{|S_2|}{t}$ матриц. Пусть это множество $s(j_0)$. Положим

$$L = M(1 - \log^{-1} M)^{j_0-1};$$

тогда L принадлежит отрезку (2.16) и $s(j_0) \subset S_3(L)$. Следовательно, имеем $|S_3(L)| \geq \frac{|S_2|}{t}$. Используя оценку (2.21) и ограничение на t , получаем

$$|S_3(L)| \geq \frac{M^{2\delta}}{(2^{13}A^4 \log^2 M)8A \log M} = \frac{M^{2\delta}}{2^{16}A^5 \log^3 M}. \quad (2.24)$$

Поскольку функция $f(x) = x^{2\delta} \log^{-3} x$ возрастает и $M \geq L$, то, заменяя в соотношении (2.24) параметр M на L , приходим к неравенству (2.18). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. *Существует k такое, что справедливо неравенство (2.19).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\langle D \rangle \geq \langle \underbrace{1, 1, \dots, 1}_r \rangle$ для всех $D \in V_A(r)$, то

$$\langle D \rangle \geq \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{r-1}$$

и, следовательно,

$$k \leq \frac{\log \|\gamma\|}{\log \frac{\sqrt{5}+1}{2}} + 1 \leq 4 \log \|\gamma\| \leq 4 \log L. \quad (2.25)$$

Таким образом, по принципу Дирихле найдется k , для которого ввиду соотношений (2.18) и (2.25) имеем

$$|S_4(k)| \geq \frac{|S_3|}{4 \log L} \geq \frac{L^{2\delta}}{(4 \log L)2^{16}A^5 \log^3 L} = \frac{L^{2\delta}}{2^{18}A^5 \log^4 L}.$$

Лемма доказана.

Докажем одно важное свойство матриц $\gamma \in \Xi(M)$.

ЛЕММА 2.4. *Для каждой матрицы $\gamma \in \Xi(M)$ вида $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ выполнены неравенства*

$$\left| \frac{b}{d} - \frac{1}{\varphi} \right| \leq \frac{2}{\log L}, \quad \left| \frac{c}{d} - \frac{1}{\varphi} \right| \leq \frac{2}{\log L},$$

где φ – “золотое сечение”:

$$\varphi = 1 + [1, 1, \dots, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \quad (2.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношений (2.2) вытекает, что $\frac{b}{d} = [D(\gamma)]$, $\frac{c}{d} = [d_k, d_{k-1}, \dots, d_2, d_1]$. Следовательно, дробь $\alpha = \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_p$ является подхо-

дящей дробью к $\frac{b}{d}$ и $\frac{c}{d}$. Знаменатель α равен F_p , и из выбора параметров (2.14), (2.16) следует, что $F_p \geq \log^{\frac{1}{2}} L$. Таким образом,

$$\left| \frac{b}{d} - \alpha \right| \leq \frac{1}{\log L}, \quad \left| \frac{c}{d} - \alpha \right| \leq \frac{1}{\log L}.$$

Однако α является подходящей дробью и к $\frac{1}{\varphi}$, поэтому $\left| \alpha - \frac{1}{\varphi} \right| \leq \frac{1}{\log L}$. Применяя неравенство треугольника, получаем требуемые неравенства. Лемма доказана.

2.5. Параметры и их свойства. Пусть $N \geq N_{\min} = N_{\min}(\varepsilon_0, \mathcal{A})$; положим

$$J = J(N) = \left\lfloor \frac{\log \log N - 4 \log(10A) + 2 \log \varepsilon_0}{-\log(1 - \varepsilon_0)} \right\rfloor, \quad (2.27)$$

где, как всегда, $A \geq |\mathcal{A}| \geq 2$, и потребуем, чтобы выполнялось неравенство $J(N_{\min}) \geq 10$. Используя определение (2.27), получаем

$$\frac{10^4 A^4}{\log N} \leq \varepsilon_0^2 (1 - \varepsilon_0)^J \leq \frac{10^5 A^4}{\log N}. \quad (2.28)$$

Теперь определим конечную последовательность

$$\{N_{-J-1}, N_{-J}, \dots, N_{-1}, N_0, N_1, \dots, N_{J+1}\},$$

положив $N_{J+1} = N$ и

$$N_j = \begin{cases} N^{\frac{1}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^{1-j}}, & \text{если } -1-J \leq j \leq 1, \\ N^{1-\frac{1}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^j}, & \text{если } 0 \leq j \leq J. \end{cases} \quad (2.29)$$

Очевидно, что последовательность корректно определена при $j = 0$ и $j = 1$.

ЛЕММА 2.5. 1) При $-J \leq m \leq J-1$ выполнено равенство

$$N_{-m} N_{m+1} = N. \quad (2.30)$$

2) При $-J-1 \leq m \leq J-1$ имеют место соотношения

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} = \begin{cases} N_{m+1}^{\varepsilon_0}, & \text{если } m \leq 0, \\ \left(\frac{N}{N_m}\right)^{\varepsilon_0}, & \text{если } m \geq 0, \end{cases}$$

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} = N^{\frac{\varepsilon_0}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^{|m|}}, \quad (2.31)$$

$$N_m \geq N_{m+1}^{1-\varepsilon_0}. \quad (2.32)$$

3) Для $-1 \leq j < h \leq J+1$ выполнено $N_{h-J}^{(1-\varepsilon_0)^{h-j}} = N_{j-J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1)–3) получаются непосредственно из определения (2.29). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. При $-J \leq m \leq J-1$ имеет место оценка

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} \geq \exp\left(\frac{10^4 A^4}{2\varepsilon_0}\right); \quad (2.33)$$

кроме того,

$$\exp\left(\frac{10^4 A^4}{2\varepsilon_0^2}\right) \leq \frac{N}{N_J} = N_{1-J} \leq \exp\left(\frac{10^5 A^4}{\varepsilon_0^2}\right). \quad (2.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (2.33) следует из (2.31) и оценки снизу в (2.28). Теперь докажем неравенство (2.34). Равенство $\frac{N}{N_J} = N_{1-J}$ следует из (2.30) при $m = -J$. Оценки для N_{1-J} следуют из (2.29) и (2.28). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Для любого такого M , что

$$N_{1-J} \leq M \leq N_J, \quad (2.35)$$

найдутся индексы j и h , для которых выполнены соотношения

$$2 \leq j \leq 2J, \quad 1 \leq h \leq 2J-1, \quad h = 2J-j+1, \quad (2.36)$$

$$N_{j-J}^{1-\varepsilon_0} \leq M \leq N_{j-J}, \quad (2.37)$$

$$\left(\frac{N}{N_{h-J}} \right)^{1-\varepsilon_0} \leq M \leq \frac{N}{N_{h-J}}. \quad (2.38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду возрастания последовательности $\{N_j\}$ найдется индекс j из (2.36) такой, что

$$N_{j-1-J} \leq M \leq N_{j-J}. \quad (2.39)$$

Тогда (2.37) следует из (2.32). Неравенство (2.38) можно получить, если в соотношение (2.37) подставить равенство (2.30). Лемма доказана.

Для целого неотрицательного n положим

$$\tilde{N}_{n-J} = \begin{cases} N_{n-J}, & \text{если } n \geq 1, \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Кроме того, для целых j и h таких, что

$$0 \leq j < h \leq 2J+1, \quad (2.41)$$

положим

$$j_0(j, h) = \min\{|n-J-1| \mid j+1 \leq n \leq h\}. \quad (2.42)$$

Заметим, что для значения j_0 возможны лишь три варианта:

$$j_0 \in \{j-J, 0, J+1-h\}.$$

ЛЕММА 2.8. Для целых j и h из (2.41) имеет место оценка

$$\prod_{n=j+1}^h \left(2^9 A^3 \log \frac{N_{n-J}}{\tilde{N}_{n-1-J}} \right) \leq ((1-\varepsilon_0)^{j_0} \log N)^{\frac{7}{4}(h-j)},$$

где $j_0 = j_0(j, h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение носит технический характер и вытекает из определения и свойств последовательности $\{N_j\}$. Подробное доказательство дано в [11].

2.6. Построение множества Ω_N . Здесь при помощи индуктивного алгоритма с шагами, пронумерованными индексами $1, 2, \dots, 2J+1$, будет построено множество Ω_N .

1. *Первый (стартовый) шаг.* Положим

$$M = M_1 = N_{1-J}.$$

Условие (2.12) выполняется вследствие оценки снизу в (2.34). Поэтому мы можем запустить алгоритм из п. 2.4, чтобы построить множество $\Xi(M)$. При

этом мы также получаем числа $L = L(M)$, $p = p(M)$, $k = k(M)$. По построению число L принадлежит отрезку $\left[\frac{M}{64A^2}, M\right]$, так что мы можем положить

$$L = \alpha_1 M_1 = \alpha_1 N_{1-J}, \quad (2.43)$$

где α_1 – некоторое число из отрезка

$$\left[\frac{1}{64A^2}, 1\right]. \quad (2.44)$$

Предансамбль $\Xi(M)$ и величины L , p и k , появляющиеся на выходе алгоритма, вычислившего $\Xi(M)$, переобозначим следующим образом:

$$\Xi(M) = \Xi_1, \quad L = L_1, \quad p = p_1, \quad k = k_1.$$

Для следующего шага алгоритма определим число

$$M_2 = \frac{N_{2-J}}{(1 + \varphi^{-2})\alpha_1 N_{1-J}},$$

где φ определено в (2.26).

2. Шаг с номером j , где $2 \leq j \leq 2J + 1$ (индуктивный). Положим $M = M_j$. Согласно индуктивному предположению число M_j на шаге 1 было определено формулой

$$M_j = \frac{N_{j-J}}{(1 + \varphi^{-2})\alpha_{j-1} N_{j-1-J}},$$

где α_{j-1} – некоторое число из отрезка (2.44). Чтобы проверить для такого M условие (2.12), достаточно, положив $m = j - J$, применить оценки из леммы 2.6. Следовательно, мы можем запустить алгоритм из п. 2.4, вычисляющий $\Xi(M)$. При этом найдется такое α_j из отрезка (2.44), что для параметра L будет выполнено

$$L = \alpha_j M = \frac{\alpha_j N_{j-J}}{(1 + \varphi^{-2})\alpha_{j-1} N_{j-1-J}}. \quad (2.45)$$

Переобозначим $\Xi(M)$ через Ξ_j , число L – через L_j , величину p – через p_j , длину k – через k_j . Если при этом $j \leq 2J$, то число M_{j+1} , которое будет использоваться на следующем шаге, определим формулой

$$M_{j+1} = \frac{N_{j+1-J}}{(1 + \varphi^{-2})\alpha_j N_{j-J}}.$$

Если $j = 2J + 1$, то обозначение M_{j+1} нам не понадобится, так как алгоритм закончен.

Теперь определим ансамбль Ω_N , записывая друг за другом все построенные в алгоритме множества:

$$\Omega_N = \Xi_1 \Xi_2 \cdots \Xi_{2J} \Xi_{2J+1}.$$

Чтобы доказать основные свойства ансамбля Ω_N , нам понадобятся две следующие технические леммы о величинах L_j . Мы будем использовать следующее обозначение:

$$f(x) = O_1(g(x)), \quad \text{если} \quad |f(x)| \leq g(x).$$

ЛЕММА 2.9. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{n=1}^{2J+1} \frac{1}{\log L_n} \leq \frac{1}{16000}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться определением (2.45) величин L_j и свойствами последовательности $\{N_j\}$ из лемм 2.5, 2.6. Подробное доказательство приведено в препринте [11].

Для формулировки следующей леммы предположим, что действительные числа $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{2J+1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\Pi_j = \left(1 + 2O_1(\log^{-1} L_j)\right)^2 \prod_{n=1}^{j-1} \left(1 + 2O_1(\log^{-1} L_n)\right)^3, \quad (2.46)$$

где произведение по пустому множеству считается равным единице.

ЛЕММА 2.10. *При любом $j = 1, 2, \dots, 2J + 1$ верна оценка*

$$\exp(-10^{-3}) \leq \Pi_j \leq \exp(10^{-3}). \quad (2.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Логарифмируя равенство (2.46) и используя лемму 2.9, получаем (2.47). Подробное доказательство приведено в препринте [11].

2.7. Свойства множества Ω_N . Сначала докажем, что Ω_N является предансамблем. Для этого нам понадобится следующий хорошо известный (см., например, [12]) результат:

$$\langle D, B \rangle = \langle D \rangle \langle B \rangle (1 + [\overleftarrow{D}][B]), \quad (2.48)$$

где для $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ имеем

$$D, B = \{d_1, d_2, \dots, d_k, b_1, b_2, \dots, b_n\}, \quad \overleftarrow{D} = \{d_k, d_{k-1}, \dots, d_2, d_1\}.$$

Отметим, что из (2.48) следует, что

$$\langle D \rangle \langle B \rangle \leq \langle D, B \rangle \leq 2 \langle D \rangle \langle B \rangle. \quad (2.49)$$

ЛЕММА 2.11. *Для любого j из интервала $1 \leq j \leq 2J + 1$ и для любого набора матриц*

$$\xi_1 \in \Xi_1, \xi_2 \in \Xi_2, \dots, \xi_{2J+1} \in \Xi_{2J+1}, \quad (2.50)$$

найдется число Π_j , удовлетворяющее равенству (2.46) и такое, что

$$\|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\| = \alpha_j N_{j-j} \Pi_j. \quad (2.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $j = 1$. Тогда по построению предансамбля Ξ_1 (см. п. 2.4) и ввиду равенства (2.43) выполняется равенство

$$\|\xi_1\| = \alpha_1 N_{1-j} (1 + O_1(\log^{-1} L_1)). \quad (2.52)$$

Поскольку

$$1 + O_1(\log^{-1} L_1) = (1 + 2O_1(\log^{-1} L_1))^2 = \Pi_1,$$

то, подставляя последнее равенство в (2.52), получаем

$$\|\xi_1\| = \alpha_1 N_{1-j} \Pi_1,$$

и для случая $j = 1$ лемма доказана.

Предположим теперь, что лемма доказана при некотором j , для которого $1 \leq j \leq 2J$, и докажем ее для значения $j + 1$. Из (2.48) следует, что

$$\|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j \xi_{j+1}\| = \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\| \|\xi_{j+1}\| (1 + [\overleftarrow{D}(\xi_j), \overleftarrow{D}(\xi_{j-1}), \dots, \overleftarrow{D}(\xi_1)][D(\xi_{j+1})]), \quad (2.53)$$

где $D(\gamma)$, как всегда, обозначает последовательность $D(\gamma) = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ такую, что

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_k \end{pmatrix}.$$

Из леммы 2.4 сразу следует, что

$$[D(\xi_{j+1})] = \varphi^{-1} + 2O_1(\log^{-1} L_{j+1}), \quad [\overleftarrow{D}(\xi_j), \dots, \overleftarrow{D}(\xi_1)] = \varphi^{-1} + 2O_1(\log^{-1} L_j). \quad (2.54)$$

Подставляя (2.54) в равенство (2.53), получаем

$$\begin{aligned} \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j \xi_{j+1}\| \\ = \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\| \|\xi_{j+1}\| (1 + \varphi^{-2})(1 + 2O_1(\log^{-1} L_j))(1 + 2O_1(\log^{-1} L_{j+1})). \end{aligned} \quad (2.55)$$

По предположению индукции имеем

$$\|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\| = \alpha_j N_{j-J} \Pi_j, \quad (2.56)$$

а по построению ансамбля Ω_N (см. п. 2.6, шаг с номером $j + 1$) выполняется неравенство (2.17), ввиду которого

$$\|\xi_{j+1}\| = L_{j+1}(1 + O_1(\log^{-1} L_{j+1})) = \frac{\alpha_{j+1} N_{j+1-J}}{(1 + \varphi^{-2})\alpha_j N_{j-J}}(1 + O_1(\log^{-1} L_{j+1})). \quad (2.57)$$

Подставляя (2.56) и (2.57) в (2.55) и производя сокращения, получаем

$$\|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j \xi_{j+1}\| = \alpha_{j+1} N_{j+1-J} \tilde{\Pi}_{j+1},$$

где

$$\tilde{\Pi}_{j+1} = (1 + O_1(\log^{-1} L_{j+1}))(1 + 2O_1(\log^{-1} L_j))(1 + 2O_1(\log^{-1} L_{j+1}))\Pi_j.$$

Используя определение Π_j равенством (2.46), получаем

$$\tilde{\Pi}_{j+1} = (1 + 2O_1(\log^{-1} L_{j+1}))^2(1 + 2O_1(\log^{-1} L_j))\Pi_j = \Pi_{j+1}$$

и, следовательно,

$$\|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j \xi_{j+1}\| = \alpha_{j+1} N_{j+1-J} \Pi_{j+1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.12. Для любого набора матриц (2.50) и любых чисел j, h из интервалов $1 \leq j \leq 2J + 1$, $j < h \leq 2J + 1$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{70A^2} N_{j-J} \leq \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\| \leq 1.01 N_{j-J}, \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{70A^2} N \leq \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{2J+1}\| \leq 1.01 N, \quad (2.59)$$

$$\frac{1}{150A^2} \frac{N_{h-J}}{N_{j-J}} \leq \|\xi_{j+1} \xi_{j+2} \cdots \xi_h\| \leq 73A^2 \frac{N_{h-J}}{N_{j-J}}; \quad (2.60)$$

кроме того, при $j \leq 2J$ выполнено

$$\frac{1}{150A^2} \frac{N}{N_{j-J}} \leq \|\xi_{j+1}\xi_{j+2} \cdots \xi_{2J+1}\| \leq 73A^2 \frac{N}{N_{j-J}}. \quad (2.61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем неравенство (2.58). Напомним, что по построению множества Ω_N выполнены неравенства $(64A^2)^{-1} \leq \alpha_j \leq 1$. Подставляя эту оценку и (2.47) в (2.51), получаем (2.58). В частности, так как $N_{J+1} = N$, то, используя (2.58), при $j = 2J + 1$ получаем (2.59).

Докажем теперь неравенство (2.60). Для этого введем обозначение

$$W(j, h) = \|\xi_j \xi_{j+1} \cdots \xi_h\|$$

и перепишем неравенство (2.49) в виде

$$W(1, j)W(j + 1, h) \leq W(1, h) \leq 2W(1, j)W(j + 1, h).$$

Отсюда, дважды применяя неравенство (2.58), получаем

$$W(j + 1, h) \geq \frac{W(1, h)}{2W(1, j)} \geq \frac{N_{h-J}/(70A^2)}{2.02N_{j-J}} \geq \frac{1}{150A^2} \frac{N_{h-J}}{N_{j-J}}$$

и, аналогично,

$$W(j + 1, h) \leq \frac{W(1, h)}{W(1, j)} \leq \frac{1.01N_{h-J}}{N_{j-J}/(70A^2)} \leq 73A^2 \frac{N_{h-J}}{N_{j-J}},$$

что доказывает неравенство (2.60). Полагая в нем $h = 2J + 1$, получаем неравенства (2.61). Лемма доказана.

Для целых j и h таких, что

$$0 \leq j < h \leq 2J + 1, \quad (2.62)$$

положим

$$\Omega(j, h) = \Xi_{j+1}\Xi_{j+2} \cdots \Xi_h. \quad (2.63)$$

Непосредственно из неравенства (2.58) и теоремы 2.1 следует, что

$$|\Omega(0, j)| \leq 9N_{j-J}^{2\delta}. \quad (2.64)$$

Напомним, что параметры $\tilde{N}_{n-J}$ и $j_0(j, h)$ были введены формулой (2.40) и равенством (2.42) соответственно. Заметим, что ограничения для j и h в (2.62) совпадают с ограничениями в (2.41).

ЛЕММА 2.13. Для j и h из (2.62) имеет место оценка

$$|\Omega(j, h)| \geq \frac{1}{((1 - \varepsilon_0)^{j_0} \log N)^{7(h-j)}} \left(\frac{N_{h-J}}{\tilde{N}_{j-J}} \right)^{2\delta}, \quad (2.65)$$

где $j_0 = j_0(j, h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перемножая оценки снизу (2.20), получаем

$$|\Omega(j, h)| = \prod_{n=j+1}^h |\Xi_n| \geq \prod_{n=j+1}^h \frac{L_n^{2\delta}}{2^{18} A^5 \log^4 L_n}.$$

Из формул (2.43) и (2.45) следует, что

$$\frac{N_{n-J}}{c_1 \widetilde{N}_{n-1-J}} \leq L_n \leq \frac{c_1 N_{n-J}}{\widetilde{N}_{n-1-J}},$$

где $c_1 = 64A^2(1 + \varphi^{-2}) \leq 2^7 A^2$. Используя эти оценки и свойства последовательности $\{N_j\}$ (леммы 2.6, 2.8), получаем (2.65). Подробное доказательство дано в препринте [11]. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Для j и h из (2.62) имеет место оценка

$$|\Omega(j, h)| \geq \left(\frac{N_{h-J}}{\widetilde{N}_{j-J}} \right)^{2\delta} \exp \left(- \left(\frac{\log \log N}{\log(1 - \varepsilon_0)} + j_0 \right)^2 \right),$$

где $j_0 = j_0(j, h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.65) следует, что достаточно доказать неравенство

$$\exp \left(\left(\frac{\log \log N}{\log(1 - \varepsilon_0)} + j_0 \right)^2 \right) \geq \exp(7(h - j)(\log \log N + j_0 \log(1 - \varepsilon_0))),$$

справедливость которого легко проверяется на основе определений величин J, j_0 формулами (2.27) и (2.42). Подробное доказательство дано в препринте [11]. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. При $N \geq \exp(\varepsilon_0^{-5})$ имеет место двусторонняя оценка мощности множества Ω_N :

$$N^{2\delta - \varepsilon_0} \leq N^{2\delta} \exp \left(- \left(\frac{\log \log N}{\varepsilon_0} \right)^2 \right) \leq |\Omega_N| \leq 9N^{2\delta}. \quad (2.66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства оценки сверху в (2.66) применим оценку (2.64) при $j = 0, h = 2J + 1$. Для доказательства оценки снизу воспользуемся теоремой 2.2, положив в ней $j = 0, h = 2J + 1$ (следовательно, $j_0 = 0$). Поскольку $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, то $\log^2(1 - \varepsilon_0) > \varepsilon_0^2$, и мы получаем оценку снизу в (2.66). Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Множество Ω_N является N -предансамблем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство $\|\gamma\| \asymp N$ для каждой матрицы $\gamma \in \Omega_N$ выполнено ввиду неравенства (2.59), а ввиду следствия 2.1 имеем $\#\Omega_N \geq_\varepsilon N^{2\delta - \varepsilon}$. Другими словами, свойства (2.11) предансамбля выполнены. Следствие доказано.

Докажем еще одно свойство ансамбля Ω_N .

ЛЕММА 2.14. Для любого M из интервала (2.35) найдутся j и h из интервалов (2.36) такие, что для любого набора матриц (2.50) выполняются неравенства

$$0.99 \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\|^{1 - \varepsilon_0} \leq M \leq 70A^2 \|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\|, \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{73A^2} \|\xi_{h+1} \xi_{h+2} \cdots \xi_{2J+1}\|^{1 - \varepsilon_0} \leq M \leq 150A^2 \|\xi_{h+1} \xi_{h+2} \cdots \xi_{2J+1}\|. \quad (2.68)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть фиксировано M из интервала (2.35). Тогда, пользуясь леммой 2.7, найдем j и h из (2.36) такие, что выполнены неравенства (2.37) и (2.38). Заметим, что из (2.58) следует двусторонняя оценка числа N_{j-J} через $\|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_j\|$. Для получения неравенства (2.67) следует подставить в (2.37) эту двустороннюю оценку. Для получения неравенства (2.68) следует подставить в (2.38) двустороннюю оценку величины N/N_{h-J} , которая выводится из неравенства (2.61) при $j = h$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Для любого M , удовлетворяющего неравенствам

$$\exp\left(\frac{10^5 A^4}{\varepsilon_0^2}\right) \leq M \leq N \exp\left(-\frac{10^5 A^4}{\varepsilon_0^2}\right), \quad (2.69)$$

найдутся индексы j и h из интервалов (2.36) такие, что для любого набора матриц (2.50) выполняются неравенства (2.67) и (2.68).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 2.6 из неравенства (2.69) следует справедливость неравенства (2.35). Теперь достаточно применить лемму 2.14. Следствие доказано.

2.8. Основные свойства ансамбля Ω_N . Полученные здесь результаты будут непосредственно использоваться при оценке тригонометрических сумм.

Для M , удовлетворяющего неравенствам (2.69), обозначим через $\hat{j}$ и $\hat{h}$ числа j и h из леммы 2.7, соответствующие M . Для краткости мы будем писать, что числа $\hat{j}$, $\hat{h}$ соответствуют M . В следующей теореме $\hat{j}_1$ соответствует $M^{(1)}$, а $\hat{h}_3$ соответствует $M^{(3)}$.

ЛЕММА 2.15. Пусть для $M^{(1)}$ и $M^{(3)}$ из интервала (2.69) выполнено неравенство

$$M^{(1)} M^{(3)} < N^{1-\varepsilon_0}. \quad (2.70)$$

Тогда $\hat{j}_1 < \hat{h}_3$ и неравенство (2.67) выполнено при $M = M^{(1)}$, а неравенство (2.68) – при $M = M^{(3)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить условие $\hat{j}_1 < \hat{h}_3$, тогда утверждение леммы будет следовать из леммы 2.14 и следствия 2.3.

Напомним, что $\hat{h}_3 = 2J - \hat{j}_3 + 1$. Следовательно, достаточно доказать, что

$$\hat{j}_1 + \hat{j}_3 < 2J + 1.$$

Предположим противное. Из (2.39) следует, что

$$N_{\hat{j}_1-1-J} N_{\hat{j}_3-1-J} \leq M^{(1)} M^{(3)}.$$

Поскольку $\hat{j}_1 + \hat{j}_3 \geq 2J + 1$, можно считать, что $\hat{j}_1 \geq J + 1$. Из соотношения $\hat{j}_3 - 1 - J \geq -\hat{j}_1 + J$ и возрастания последовательности $\{N_j\}_{j=-J-1}^{J+1}$ следует, что

$$N_{\hat{j}_1-1-J} N_{-\hat{j}_1+J} \leq M^{(1)} M^{(3)}, \quad \hat{j}_1 \geq J + 1.$$

Положим $m = \hat{j}_1 - J - 1$; тогда

$$N_m N_{-m-1} \leq M^{(1)} M^{(3)}, \quad m \geq 0.$$

Ввиду (2.29) получаем, что при $m \geq 0$

$$N_m N_{-m-1} = N^{1-\frac{1}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^m + \frac{1}{2-\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^{m+2}} = N^{1-\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)^m} \geq N^{1-\varepsilon_0}.$$

Следовательно, $M^{(1)} M^{(3)} \geq N^{1-\varepsilon_0}$, что противоречит (2.70). Лемма доказана.

Положим $\Omega_1(M) = \Omega(0, \hat{j})$, $\Omega_2(M) = \Omega(\hat{h}, 2J+1)$, где $\Omega(j, h)$ определено в (2.63).

ТЕОРЕМА 2.3. *Для любого $M^{(1)}$, удовлетворяющего неравенству (2.69), ансамбль Ω_N может быть представлен в виде*

$$\Omega_N = \Omega^{(1)}\Omega^{(2)},$$

где

$$\Omega^{(1)} = \Omega_1(M^{(1)}) = \Xi_1\Xi_2\cdots\Xi_{\hat{j}}, \quad \Omega^{(3)} = \Xi_{\hat{j}+1}\Xi_{j+2}\cdots\Xi_{2J+1},$$

и для любых $\gamma_1 \in \Omega^{(1)}$, $\gamma_3 \in \Omega^{(3)}$ справедливы неравенства

$$\frac{M^{(1)}}{70A^2} \leq \|\gamma_1\| \leq 1.03(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}, \quad (2.71)$$

$$\frac{N}{150A^2(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}} \leq \|\gamma_3\| \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}}. \quad (2.72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду следствия 2.3 для матрицы $\gamma_1 = \xi_1\xi_2\cdots\xi_{\hat{j}}$ выполняется неравенство (2.67). Используя это неравенство, получаем (2.71). Кроме того, из (2.49) и (2.59) следует, что

$$\frac{N}{140A^2} \leq \frac{\|\xi_1\xi_2\cdots\xi_{2J+1}\|}{2} \leq \|\gamma_1\| \|\gamma_3\| \leq \|\xi_1\xi_2\cdots\xi_{2J+1}\| \leq 1.01N. \quad (2.73)$$

Подставляя оценку (2.71) в (2.73), получаем неравенство (2.72). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть $M^{(2)} \geq (M^{(1)})^{2\varepsilon_0}$, а неравенство (2.69) выполнено при $M = M^{(1)}$ и $M = M^{(1)}M^{(2)}$. Тогда ансамбль Ω_N может быть представлен в виде*

$$\Omega_N = \Omega^{(1)}\Omega^{(2)}\Omega^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \Omega_1(M^{(1)}) = \Xi_1\Xi_2\cdots\Xi_{\hat{j}_1}, & \Omega^{(2)} &= \Xi_{\hat{j}_1+1}\Xi_{\hat{j}_1+2}\cdots\Xi_{\hat{j}_2}, \\ \Omega^{(1)}\Omega^{(2)} &= \Omega_1(M^{(1)}M^{(2)}), & \Omega^{(3)} &= \Xi_{\hat{j}_2+1}\Xi_{\hat{j}_2+2}\cdots\Xi_{2J+1}, \end{aligned}$$

где $\hat{j}_1$ соответствует $M^{(1)}$, а $\hat{j}_2$ соответствует $M^{(1)}M^{(2)}$, и для любых $\gamma_1 \in \Omega^{(1)}$, $\gamma_2 \in \Omega^{(2)}$, $\gamma_3 \in \Omega^{(3)}$ справедливы неравенства

$$\frac{M^{(1)}}{70A^2} \leq \|\gamma_1\| \leq 1.03(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}, \quad (2.74)$$

$$\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{70A^2} \leq \|\gamma_1\gamma_2\| \leq 1.03(M^{(1)}M^{(2)})^{1+2\varepsilon_0}, \quad (2.75)$$

$$\frac{M^{(2)}}{150A^2(M^{(1)})^{2\varepsilon_0}} \leq \|\gamma_2\| \leq 73A^2(M^{(2)})^{1+2\varepsilon_0}(M^{(1)})^{2\varepsilon_0}, \quad (2.76)$$

$$\frac{N}{150A^2(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}} \leq \|\gamma_2\gamma_3\| \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}}. \quad (2.77)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для корректности формулировки теоремы необходимо проверить неравенство $\hat{j}_2 > \hat{j}_1$. Для этого достаточно показать, что при любом $M^{(1)}$ из интервала $N_{\hat{j}_1-1-J} \leq M^{(1)} \leq N_{\hat{j}_1-J}$ будет выполнено неравенство $N_{\hat{j}_1-J} \leq M^{(1)}M^{(2)}$. Из условия теоремы следует, что

$$M^{(2)} \geq (M^{(1)})^{2\varepsilon_0} \geq (M^{(1)})^{\frac{1}{1-\varepsilon_0}-1} \geq \frac{N_{\hat{j}_1-J}}{M^{(1)}},$$

где последнее неравенство выполнено ввиду $M^{(1)} \geq N_{\hat{j}-J}^{1-\varepsilon_0}$ (см. (2.37)). Тем самым корректность формулировки теоремы доказана. Оценки (2.74) и (2.75) следуют из (2.71), а (2.77) следует из (2.72). Наконец, (2.76) следует из неравенств (2.74), (2.75) и (2.49). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.5. Для любых $M^{(1)}$ и $M^{(3)}$ из леммы 2.15 ансамбль Ω_N может быть представлен в виде

$$\Omega_N = \Omega^{(1)}\Omega^{(2)}\Omega^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \Omega_1(M^{(1)}) = \Xi_1\Xi_2 \cdots \Xi_{\hat{j}_1}, & \Omega^{(2)} &= \Xi_{\hat{j}_1+1}\Xi_{\hat{j}_1+2} \cdots \Xi_{\hat{h}_2}, \\ \Omega^{(3)} &= \Omega_2(M^{(2)}) = \Xi_{\hat{h}_2+1}\Xi_{\hat{h}_2+2} \cdots \Xi_{2J+1},\end{aligned}$$

и для любых $\gamma_1 \in \Omega^{(1)}$, $\gamma_2 \in \Omega^{(2)}$, $\gamma_3 \in \Omega^{(3)}$ справедливы (2.74), (2.77) и неравенства

$$\frac{N}{3 \cdot 10^4 A^5 (M^{(1)}M^{(3)})^{1+2\varepsilon_0}} \leq \|\gamma_2\| \leq \frac{11000A^4N}{M^{(1)}M^{(3)}}, \quad (2.78)$$

$$\frac{M^{(3)}}{150A^2} \leq \|\gamma_3\| \leq 80A^{2.1}(M^{(3)})^{1+2\varepsilon_0}. \quad (2.79)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование разбиения обеспечивается неравенством $\hat{j}_1 < \hat{h}_3$ из леммы 2.15. Также из леммы 2.15 следует справедливость неравенств (2.67) и (2.68) для $\gamma_1 \in \Omega^{(1)}$ и $\gamma_3 \in \Omega^{(3)}$. Используя эти неравенства, получаем оценки (2.74) и (2.79). Оценка (2.77) также следует из (2.72). Далее, аналогично неравенству (2.73) получаем

$$\frac{N}{280A^2} \leq \|\gamma_1\| \|\gamma_2\| \|\gamma_3\| \leq 1.01N. \quad (2.80)$$

Подставляя (2.74) и (2.79) в (2.80), получаем (2.78). Теорема доказана.

Положим $j_0(M) = j_0(0, \hat{j}) = j_0(\hat{h}, 2J+1)$, где $j_0(j, h)$ определено в формуле (2.42). Проверим корректность определения $j_0(M)$. Действительно, так как $\hat{h} = 2J - \hat{j} + 1$, требуется доказать, что для $2 \leq \hat{j} \leq 2J$

$$j_0(0, \hat{j}) = j_0(2J - \hat{j} + 1, 2J + 1).$$

Если $\hat{j} \leq J + 1$, то

$$j_0(0, \hat{j}) = |\hat{j} - J - 1| = J + 1 - \hat{j} = |2J + 2 - \hat{j} - J - 1| = j_0(2J - \hat{j} + 1, 2J + 1).$$

Если $\hat{j} > J + 1$, то

$$j_0(0, \hat{j}) = j_0(2J - \hat{j} + 1, 2J + 1) = 0.$$

Следовательно, определение $j_0(M)$ корректно.

ЛЕММА 2.16. Для M из интервала (2.69) выполнено неравенство

$$\frac{\log \log M^2}{\log(1 - \varepsilon_0)} - 1 \leq j_0(M) + \frac{\log \log N}{\log(1 - \varepsilon_0)}. \quad (2.81)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться определением $j_0(M)$, свойствами последовательности $\{N_j\}$, леммой 2.7 и леммой 2.6. Подробное доказательство дано в препринте [11]. Лемма доказана.

Для M из интервала (2.69) определим следующую функцию:

$$V(M) = \exp\left(-\left(\frac{\log \log M^2}{\log(1 - \varepsilon_0)} - 1\right)^2\right).$$

Заметим, что при $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$

$$M^{-\varepsilon_0} \leq V(M), \quad \text{если } M \geq \exp(\varepsilon_0^{-5}).$$

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $M \geq \exp(\varepsilon_0^{-5})$ принадлежит интервалу (2.69). Тогда справедливы следующие оценки мощности множеств $|\Omega_1(M)|$ и $|\Omega_2(M)|$:

$$M^{2\delta - \varepsilon_0} \leq M^{2\delta} V(M) \leq |\Omega_1(M)| \leq 9M^{2\delta + 4\varepsilon_0}, \quad (2.82)$$

$$|\Omega_2(M)| \geq M^{2\delta} V(M) \geq M^{2\delta - \varepsilon_0}. \quad (2.83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение множества $|\Omega_1(M)|$ и неравенства

$$N_{\hat{j}-J} \leq M^{\frac{1}{1-\varepsilon_0}} \leq M^{1+2\varepsilon_0},$$

получаем, что оценка сверху в (2.82) непосредственно следует из (2.64).

1. Оценим мощность множества $|\Omega_1(M)|$ снизу. Из теоремы 2.2 и соотношений $M \leq N_{\hat{j}-J}$ и $j_0(M) = j_0(0, \hat{j})$ следует

$$|\Omega_1(M)| \geq M^{2\delta} \exp\left(-\left(\frac{\log \log N}{\log(1 - \varepsilon_0)} + j_0(M)\right)^2\right). \quad (2.84)$$

Из (2.27) и (2.81) ввиду того, что $j_0(M) \leq J$, получаем

$$\frac{\log \log M^2}{\log(1 - \varepsilon_0)} - 1 \leq j_0(M) + \frac{\log \log N}{\log(1 - \varepsilon_0)} \leq 0.$$

Следовательно,

$$V(M) \leq \exp\left(-\left(\frac{\log \log N}{\log(1 - \varepsilon_0)} + j_0(M)\right)^2\right).$$

Подставляя полученную оценку в (2.84), получаем оценку снизу в (2.82).

2. Оценим мощность множества $|\Omega_2(M)|$ снизу. Из теоремы 2.2, учитывая, что $M \leq \frac{N}{N_{\hat{h}-J}}$ и $j_0(M) = j_0(\hat{h}, 2J + 1)$, получаем

$$|\Omega_2(M)| \geq M^{2\delta} \exp\left(-\left(\frac{\log \log N}{\log(1 - \varepsilon_0)} + j_0(M)\right)^2\right).$$

Аналогичным образом отсюда следует оценка (2.83).

Теорема доказана.

§ 3. Оценки тригонометрических сумм: обобщение метода Бургейна–Конторовича

3.1. Общие оценки тригонометрических сумм по ансамблю. Напомним, что для доказательства основной теоремы 1.2 мы должны получить максимально точную оценку интеграла

$$\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta = \int_0^1 \left| \sum_{\gamma \in \Omega_N} e(\theta \|\gamma\|) \right|^2 d\theta,$$

где N – любое достаточно большое натуральное число, а в качестве $\|\gamma\|$ для

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_k \end{pmatrix}$$

выбрано значение

$$\|\gamma\| = d = \langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle = (0, 1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$S_N(\theta) = \sum_{\gamma \in \Omega_N} e(\theta \|\gamma\|) = \sum_{\gamma \in \Omega_N} e\left((0, 1)\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \theta\right). \quad (3.1)$$

Представим ансамбль Ω_N в виде

$$\Omega_N = \Omega^{(1)}\Omega^{(2)}\Omega^{(3)} \quad (3.2)$$

по одной из теорем 2.3, 2.4 или 2.5. Обозначим

$$H_1 = H_1(M^{(1)}) = 1.03(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}, \quad (3.3)$$

тогда для $\gamma_1 \in \Omega^{(1)}$ выполнено $\|\gamma_1\| \leq H_1$. В этом пункте, используя метод Виноградова, мы сведем оценку суммы

$$\sigma_{N,Z} = \sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)|,$$

где Z – произвольное конечное подмножество отрезка $[0, 1]$, к оценке мощности некоторых множеств. Для этого, используя разложение (3.2), мы представим $S_N(\theta)$ в виде тройной суммы. Далее мы дополняем суммирование по $\Omega^{(1)}$ до суммирования по целочисленным векторам $\|\gamma_1\| \leq H_1$ и применяем неравенство Коши–Буняковского. После чего остается использовать стандартные оценки квадрата модуля линейной тригонометрической суммы.

Для $n \in \{1, 2, 3\}$ положим

$$\tilde{\Omega}^{(n)} = \begin{cases} (0, 1)\Omega^{(1)} = \{(0, 1)g_1 \mid g_1 \in \Omega^{(1)}\}, & \text{если } n = 1, \\ \Omega^{(2)}, & \text{если } n = 2, \\ \Omega^{(3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ g_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid g_3 \in \Omega^{(3)} \right\}, & \text{если } n = 3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Определим функции

$$T(x) = \max\{0, 1 - |x|\}, \quad S(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^2.$$

Общеизвестно [13, (4.83)], что $\widehat{S}(x) = T(x)$, где $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e(-xt) dt$ – преобразование Фурье функции $f(x)$. Рассмотрим $S_2(x) = 3S(\frac{x}{2})$. Очевидно, что функция $S_2(x)$ неотрицательна и

$$S_2(x) > 1 \quad \text{при } x \in [-1, 1].$$

Поскольку $\widehat{S}_2(x) = 6T(2x)$, то $\widehat{S}_2(x) \neq 0$ только при $|x| < \frac{1}{2}$.

ЛЕММА 3.1. *Для любой пары $(\mu, \lambda) = (2, 3)$ или $(\mu, \lambda) = (3, 2)$ справедлива оценка*

$$\sigma_{N,Z} \leq |\Omega^{(1)}|^{1/2} \sum_{g_\lambda \in \widetilde{\Omega}^{(\lambda)}} \left(\sum_{g_1 \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{S}\left(\frac{g_1}{H_1}\right) \left| \sum_{\theta \in Z} \xi(\theta) \sum_{g_\mu \in \widetilde{\Omega}^{(\mu)}} e(g_1 g_2 g_3 \theta) \right|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

где $\mathbb{S}(x, y) = S_2(x)S_2(y)$, а $\xi(\theta)$ – некоторые комплексные числа такие, что $|\xi(\theta)| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Числа $\xi(\theta)$ определим равенством $|S_N(\theta)| = \xi(\theta)S_N(\theta)$. Тогда из формул (3.1), (3.2) и определения (3.4) получаем

$$\sigma_{N,Z} = \sum_{\theta \in Z} \xi(\theta)S_N(\theta) = \sum_{\theta \in Z} \xi(\theta) \sum_{g_1 \in \widetilde{\Omega}^{(1)}} \sum_{g_2 \in \widetilde{\Omega}^{(2)}} \sum_{g_3 \in \widetilde{\Omega}^{(3)}} e(g_1 g_2 g_3 \theta), \quad (3.6)$$

где g_1, g_3 – векторы теперь из $\mathbb{Z}^2$. Из (3.6) следует, что

$$\sigma_{N,Z} \leq \sum_{g_\lambda \in \widetilde{\Omega}^{(\lambda)}} \sum_{\substack{g_1 \in \mathbb{Z}^2 \\ |g_1| \leq H_1}} \mathbf{1}_{\{g_1 \in \widetilde{\Omega}^{(1)}\}} \left| \sum_{\theta \in Z} \xi(\theta) \sum_{g_\mu \in \widetilde{\Omega}^{(\mu)}} e(g_1 g_2 g_3 \theta) \right|. \quad (3.7)$$

Применяя к (3.7) неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\sigma_{N,Z} \leq \sum_{g_\lambda \in \widetilde{\Omega}^{(\lambda)}} \left(\sum_{\substack{g_1 \in \mathbb{Z}^2 \\ |g_1| \leq H_1}} \mathbf{1}_{\{g_1 \in \widetilde{\Omega}^{(1)}\}} \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{g_1 \in \mathbb{Z}^2 \\ |g_1| \leq H_1}} \left| \sum_{\theta \in Z} \xi(\theta) \sum_{g_\mu \in \widetilde{\Omega}^{(\mu)}} e(g_1 g_2 g_3 \theta) \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Ввиду того, что первый множитель в (3.8) равен $|\Omega^{(1)}|^{1/2}$, учитывая, что функция $\mathbb{S}(x, y) > 1$ при $(x, y) \in [-1, 1]^2$ неотрицательна, получаем (3.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *В условиях леммы 3.1 имеет место оценка*

$$\sigma_{N,Z} \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} \sum_{g_\lambda \in \widetilde{\Omega}^{(\lambda)}} \left(\sum_{\substack{g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)} \in \widetilde{\Omega}^{(\mu)} \\ \theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in Z}} \mathbf{1}_{\{\|z_\mu\|_{1,2} \leq \frac{1}{2H_1}\}} \right)^{1/2}, \quad (3.9)$$

где $\|x\|_{1,2} = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$ для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, а

$$z_\mu = \begin{cases} g_2^{(1)} g_3 \theta^{(1)} - g_2^{(2)} g_3 \theta^{(2)}, & \text{если } \mu = 2, \\ g_2 g_3^{(1)} \theta^{(1)} - g_2 g_3^{(2)} \theta^{(2)}, & \text{если } \mu = 3. \end{cases} \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя соотношение $|x|^2 = x\bar{x}$ и изменяя порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} \sum_{g_1 \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{S}\left(\frac{g_1}{H_1}\right) \left| \sum_{\theta \in Z} \xi(\theta) \sum_{g_\mu \in \tilde{\Omega}^{(\mu)}} e(g_1 g_2 g_3 \theta) \right|^2 \\ \leq \sum_{g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)} \in \tilde{\Omega}^{(\mu)}} \sum_{\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in Z} \left| \sum_{g_1 \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{S}\left(\frac{g_1}{H_1}\right) e(g_1 z_\mu) \right|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

С помощью формулы суммирования Пуассона [13, § 4.3]

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(k),$$

полагая $f(n) = \mathbb{S}\left(\frac{n}{H_1}\right) e(n z_\mu)$, где $n z_\mu$ – скалярное произведение векторов, преобразуем внутреннюю сумму из правой части (3.11):

$$\sum_{g_1 \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{S}\left(\frac{g_1}{H_1}\right) e(g_1 z_\mu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \int_{x \in \mathbb{R}^2} \mathbb{S}\left(\frac{x}{H_1}\right) e(x(z_\mu - k)) dx = H_1^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \hat{\mathbb{S}}((k - z_\mu) H_1). \quad (3.12)$$

Отметим, что формула (3.12) может быть непосредственно получена при использовании [13, (4.25)]. Поскольку $\hat{\mathbb{S}}(x, y) \neq 0$, только если $|x| \leq \frac{1}{2}$ и $|y| \leq \frac{1}{2}$, то сумма в правой части формулы (3.12) содержит не более одного слагаемого, следовательно,

$$\left| \sum_{g_1 \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{S}\left(\frac{g_1}{H_1}\right) e(g_1 z_\mu) \right| \leq 36 H_1^2 \mathbf{1}_{\{\|z_\mu\|_{1,2} \leq \frac{1}{2H_1}\}}. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в (3.11), получаем

$$\sum_{g_1 \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{S}\left(\frac{g_1}{H_1}\right) \left| \sum_{\theta \in Z} \xi(\theta) \sum_{g_\mu \in \tilde{\Omega}^{(\mu)}} e(g_1 g_2 g_3 \theta) \right|^2 \leq 36 H_1^2 \sum_{\substack{g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)} \in \tilde{\Omega}^{(\mu)} \\ \theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in Z}} \mathbf{1}_{\{\|z_\mu\|_{1,2} \leq \frac{1}{2H_1}\}}. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.5), получаем (3.9). Лемма доказана.

Для того чтобы преобразовать правую часть (3.9), нам необходимо конкретизировать множество Z . Из теоремы Дирихле следует, что для любого $\theta \in [0, 1]$ найдутся $a, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\theta = \frac{a}{q} + \beta, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}, \quad \beta = \frac{K}{N}, \quad |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}, \quad (3.15)$$

причем $a = 0$ или $a = q$ возможно только при $q = 1$. Обозначим также

$$P_{Q_1, Q}^{(\beta)} = \left\{ \theta = \frac{a}{q} + \beta \mid (a, q) = 1, 0 \leq a \leq q, Q_1 \leq q \leq Q \right\}.$$

В дальнейшем всегда $Z \subseteq P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ для некоторых Q_1, Q, β . Будем записывать числа $\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ следующим образом:

$$\theta^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} + \beta, \quad \theta^{(2)} = \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} + \beta.$$

Заметим, что величину z_μ , определенную в (3.10), можно записать более коротким образом

$$z_\mu = g_2^{(1)} g_3^{(1)} \theta^{(1)} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \theta^{(2)}.$$

В дальнейшем, для сокращения обозначений, мы будем отождествлять всякую переменную x с $x^{(1)}$. Положим

$$\mathfrak{N}_0(g_\lambda) = \left\{ (g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \tilde{\Omega}^{(\mu)} \times \tilde{\Omega}^{(\mu)} \times Z^2 \mid \right. \\ \left. \|g_2 g_3 \theta^{(1)} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \theta^{(2)}\|_{1,2} \leq \frac{1}{2H_1} \right\}, \quad (3.16)$$

$$\mathfrak{N}(g_\lambda) = \{ (g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \tilde{\Omega}^{(\mu)} \times \tilde{\Omega}^{(\mu)} \times Z^2 \mid (3.17) \text{ и } (3.18) \text{ выполнены} \},$$

где

$$\left\| g_2 g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} \leq \frac{74A^2 \bar{K}}{M^{(1)}}, \quad (3.17)$$

$$\left| g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \right|_{1,2} \\ \leq \min \left\{ \frac{73A^2 N}{M^{(1)}}, \frac{73A^2 N}{M^{(1)} \bar{K}} + \frac{N}{\bar{K}} \left\| g_2 g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} \right\}, \quad (3.18)$$

а $\bar{K} = \max\{1, |K|\}$. Заметим, что из леммы 3.2 и определения (3.16) следует, что

$$\sigma_{N,Z} \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} \sum_{g_\lambda \in \tilde{\Omega}^{(\lambda)}} |\mathfrak{N}_0(g_\lambda)|^{1/2}. \quad (3.19)$$

ЛЕММА 3.3. При $Z \subseteq P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ для $M^{(1)}$ из (2.69) и такого, что $M^{(1)} > 146A^2 \bar{K}$, имеет место неравенство

$$\sigma_{N,Z} \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} \sum_{g_\lambda \in \tilde{\Omega}^{(\lambda)}} |\mathfrak{N}(g_\lambda)|^{1/2}. \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (3.19) достаточно доказать, что $\mathfrak{N}_0(g_\lambda) \subseteq \mathfrak{N}(g_\lambda)$. Положим $\Omega = \Omega^{(2)} \Omega^{(3)}$; тогда $\Omega_N = \Omega^{(1)} \Omega$. Используя (2.72) или (2.77) в зависимости от теоремы, соответствующей разбиению, получаем

$$\left| g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \right|_{1,2} \leq \max_{\gamma \in \Omega} \|\gamma\| \leq \frac{73A^2 N}{M^{(1)}}. \quad (3.21)$$

Следовательно,

$$\left| (g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)}) \beta \right|_{1,2} \leq \frac{73A^2 N \bar{K}}{M^{(1)} N} \leq \frac{1}{2},$$

и, значит,

$$\left| (g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)}) \beta \right|_{1,2} = \left\| (g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)}) \beta \right\|_{1,2}, \quad (3.22)$$

причем

$$\left\| (g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)}) \beta \right\|_{1,2} \leq \frac{73A^2 \bar{K}}{M^{(1)}}. \quad (3.23)$$

Из определения (3.16) и оценки (3.23) получаем, что

$$\left\| g_2 g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} \leq \frac{73A^2 \bar{K}}{M^{(1)}} + \frac{1}{M^{(1)}} < \frac{74A^2 \bar{K}}{M^{(1)}},$$

т. е. для $(g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \mathfrak{N}_0(g_\lambda)$ неравенство (3.17) выполнено. Используя формулы (3.22) и (3.16), получаем

$$\left| (g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)}) \frac{K}{N} \right|_{1,2} \leq \frac{1}{H_1} + \left\| g_2 g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2},$$

откуда

$$\left| g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \right|_{1,2} \leq \frac{N}{M^{(1)}|K|} + \frac{N}{|K|} \left\| g_2 g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2}. \quad (3.24)$$

Из оценок (3.24) и (3.21) получаем неравенство (3.18). Лемма доказана.

Обозначим

$$\mathfrak{M}(g_\lambda) = \{ (g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \tilde{\Omega}^{(\mu)} \times \tilde{\Omega}^{(\mu)} \times Z^2 \mid (3.25) \text{ и } (3.26) \text{ выполнены} \},$$

где

$$\left| g_2 g_3 - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \right|_{1,2} \leq \frac{73A^2 N}{M^{(1)} \bar{K}}, \quad (3.25)$$

$$\left\| g_2 g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} = 0. \quad (3.26)$$

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены условия той из теорем 2.3, 2.4 или 2.5, на основе которой построено разложение Ω_N в виде (3.2). Пусть, кроме того, $M^{(1)}$ таково, что для любых $\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in Z$ выполнено

$$\max\{2, [q^{(1)}, q^{(2)}]\} < \frac{M^{(1)}}{74A^2 \bar{K}}. \quad (3.27)$$

Тогда имеет место оценка

$$\sigma_{N,Z} \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} \sum_{g_\lambda \in \tilde{\Omega}^{(\lambda)}} |\mathfrak{M}(g_\lambda)|^{1/2}. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий следует, что $M^{(1)}$ удовлетворяет (2.69). Следовательно, ввиду (3.20) достаточно доказать, что $\mathfrak{N}(g_\lambda) \subseteq \mathfrak{M}(g_\lambda)$. Заметим, что для этого достаточно доказать, что в условиях леммы 3.4 для $(g_\mu^{(1)}, g_\mu^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \mathfrak{N}_0(g_\lambda)$ выполнено (3.26). Из (3.17) и (3.27) получаем

$$\left\| g_2 g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(4-\mu)} g_3^{(\mu-1)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} \leq \frac{74A^2 \bar{K}}{M^{(1)}} < \frac{1}{[q^{(1)}, q^{(2)}]},$$

что влечет (3.26). Лемма доказана.

Тем самым мы свели задачу об оценке $\sigma_{N,Z}$ к оценке мощности одного из множеств $\mathfrak{N}_0(g_\lambda)$, $\mathfrak{N}(g_\lambda)$, $\mathfrak{M}(g_\lambda)$. Выбор множества будет зависеть от μ . Сформулируем еще одну лемму общего характера. Похожее утверждение использовалось С. В. Конягиным в [14, следствие 17].

ЛЕММА 3.5. Пусть W – произвольное конечное подмножество отрезка $[0, 1]$ и $|W| > 1$. Пусть $f: W \rightarrow \mathbb{R}_+$ – произвольная функция такая, что для любого подмножества $Z \subseteq W$ выполнена оценка

$$\sum_{\theta \in Z} f(\theta) \leq C_1 |Z|^{1/2} + C_2, \quad (3.29)$$

где C_1, C_2 – неотрицательные величины, не зависящие от множества Z . Тогда справедлива оценка

$$\sum_{\theta \in W} f^2(\theta) \ll C_1^2 \log \left(|W| \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \right) + C_2 \min \left\{ C_1 + C_2, \max_{\theta \in W} f(\theta) \right\} \quad (3.30)$$

с абсолютной константой в знаке Виноградова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\begin{aligned} M &= \max_{\theta \in W} f(\theta), & R &= \frac{C_1}{|W|^{1/2}}, \\ l_1 &= [\log_2 R], & l_2 &= [\min \{ \log_2 (C_1 + C_2), \log_2 M \}], \\ W_l &= \{ \theta \mid 2^l < f(\theta) \leq 2^{l+1} \}, & l_1 &\leq l \leq l_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{\theta \in W} f^2(\theta) = \sum_{\theta \in W} f^2(\theta) \mathbf{1}_{\{f(\theta) \leq R\}} + \sum_{\theta \in W} f^2(\theta) \mathbf{1}_{\{f(\theta) > R\}} \leq C_1^2 + \sum_{l=l_1}^{l_2} \sum_{\theta \in W_l} f^2(\theta). \quad (3.31)$$

Применяя (3.29), получаем

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} \sum_{\theta \in W_l} f^2(\theta) \ll \sum_{l=l_1}^{l_2} 2^l (C_1 |W_l|^{1/2} + C_2) \ll 2^{l_2} C_2 + C_1 \sum_{l=l_1}^{l_2} 2^l |W_l|^{1/2}. \quad (3.32)$$

Для оценки мощности множества W_l снова применим (3.29) и в результате получим

$$2^l |W_l| < \sum_{\theta \in W_l} f(\theta) \leq C_1 |W_l|^{1/2} + C_2.$$

Решая получившееся квадратное неравенство, находим $2^l |W_l|^{1/2} \ll C_1 + 2^l \frac{C_2}{C_1}$. Подставляя эту оценку в (3.32), находим

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} \sum_{\theta \in W_l} f^2(\theta) \ll 2^{l_2} C_2 + C_1^2 (l_2 - l_1). \quad (3.33)$$

Из (3.31) и (3.33) следует, что

$$\sum_{\theta \in W} f^2(\theta) \ll C_1^2 (l_2 - l_1 + 1) + 2^{l_2} C_2.$$

Используя определение величин l_1, l_2 , получаем (3.30). Лемма доказана.

3.2. Случай $\mu = 3$. Пусть даны Q_1, Q, β . Для каждого q такого, что $Q_1 \leq q \leq Q$, определим каким-либо способом число a_q такое, что $(a_q, q) = 1$, $0 \leq a_q \leq q$. Обозначим

$$Z^* = \left\{ \theta = \frac{a_q}{q} + \beta \mid Q_1 \leq q \leq Q \right\}. \quad (3.34)$$

Для всякого представления Ω_N в виде (3.2) положим

$$H_3 = H_3(M^{(3)}) = 80A^{2.1}(M^{(3)})^{1+2\varepsilon_0}.$$

ЛЕММА 3.6. Пусть $\mu = 3, \lambda = 2$; тогда для любого $Z \subseteq Z^*$ имеет место следующая оценка мощности множества $\mathfrak{M}(g_2)$:

$$|\mathfrak{M}(g_2)| \leq |Z| |\Omega^{(3)}| \left(1 + \frac{2H_3}{Q_1} \right) \left(1 + \frac{146A^2N}{KQ_1M^{(1)}\|g_2\|} \right). \quad (3.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N согласно теореме 2.5. При $\mu = 3$ равенство (3.26) переходит в сравнение

$$\left(g_2 \left(g_3^{(1)} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_3^{(2)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right) \right)_{1,2} \equiv 0 \pmod{1}, \quad (3.36)$$

где нижние индексы 1, 2 показывают, что сравнение (3.36) выполнено по каждой из двух координат вектора. Положим $\mathbf{q} = [q^{(1)}, q^{(2)}]$; тогда (3.36) запишется в виде

$$\left(g_2 \left(g_3^{(1)} \frac{a^{(1)}q^{(2)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})} - g_3^{(2)} \frac{a^{(2)}q^{(1)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})} \right) \right)_{1,2} \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}. \quad (3.37)$$

Ввиду того, что $\det g_2 = 1$, сравнение (3.37) упрощается до следующего:

$$\left(g_3^{(1)} \frac{a^{(1)}q^{(2)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})} - g_3^{(2)} \frac{a^{(2)}q^{(1)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})} \right)_{1,2} \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}. \quad (3.38)$$

Полагая $g_3^{(1)} = (x_1, x_2)^t$, $g_3^{(2)} = (y_1, y_2)^t$, из (3.38) получаем сравнение

$$x_1 \frac{a^{(1)}q^{(2)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})} \equiv y_1 \frac{a^{(2)}q^{(1)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})} \pmod{\mathbf{q}}$$

и аналогичное сравнение для x_2, y_2 . Однако $(a^{(1)}, \frac{q^{(1)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})}) \leq (a^{(1)}, q^{(1)}) = 1$ и, следовательно,

$$x_1 \equiv 0 \pmod{\frac{q^{(1)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})}}, \quad x_2 \equiv 0 \pmod{\frac{q^{(1)}}{(q^{(1)}, q^{(2)})}},$$

аналогично для y_1, y_2 . В то же время $(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = 1$ как компоненты векторов $g_3^{(1)}, g_3^{(2)}$, поэтому

$$q^{(1)} = (q^{(1)}, q^{(2)}) = q^{(2)} = \mathbf{q}.$$

Пусть теперь $\mathbf{q}$ фиксировано любым из $|Z|$ способов, что дает первый множитель в (3.35). Тогда из условий, налагаемых на множество Z , следует, что $a^{(1)} = a^{(2)}$ и сравнение (3.38) упрощается:

$$(g_3^{(1)} - g_3^{(2)})_{1,2} \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}. \quad (3.39)$$

Выберем и зафиксируем вектор $g_3^{(2)}$ одним из $|\Omega^{(3)}|$ способов, это второй множитель в (3.35). Ввиду теоремы 2.5 имеем $|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}|_{1,2} \leq H_3$. Полагая $z = \{z_1, z_2\} = g_3^{(1)} - g_3^{(2)}$ и используя (3.39), получаем, что можем выбрать z_1 не более чем $1 + \frac{2H_3}{\mathbf{q}}$ способами. Это третий множитель в (3.35). Наконец, полагая $\eta = \frac{73A^2N}{\overline{K}M^{(1)}}$ и $g_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $d = \|g_2\|$, запишем неравенство (3.25) в виде $|g_2(g_3^{(1)} - g_3^{(2)})|_{1,2} \leq \eta$, откуда получаем

$$\frac{-\eta - cz_1}{d} \leq z_2 \leq \frac{\eta - cz_1}{d}.$$

Следовательно, учитывая сравнение (3.39), получаем, что z_2 принимает не более чем

$$\frac{2\eta}{\mathbf{q}\|g_2\|} + 1 = \left(1 + \frac{146A^2N}{\mathbf{q}\overline{K}M^{(1)}\|g_2\|}\right)$$

значений; это четвертый множитель в (3.35). Лемма доказана.

Положим

$$Q_0 = \max \left\{ \exp \left(\frac{10^5 A^4}{\varepsilon_0^2} \right), \exp(\varepsilon_0^{-5}) \right\}, \quad \gamma = 1 - \delta. \quad (3.40)$$

ЛЕММА 3.7. Если $\overline{K}^2 Q^3 \leq N^{1-2\varepsilon_0}$, $\overline{K}Q \geq Q_0$, то имеет место оценка

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \overline{K}^{12\varepsilon_0} Q^{20\varepsilon_0} \frac{\overline{K}^{4\gamma} Q^{6\gamma+1}}{\overline{K}Q_1^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N согласно теореме 2.5. Пусть $Z \subseteq Z^*$ – любое подмножество. Положим $\mu = 3$, $\lambda = 2$ и

$$M^{(1)} = 76A^2\overline{K}Q^2, \quad M^{(3)} = 76A^2\overline{K}Q. \quad (3.41)$$

Тогда условие (3.27) выполнено, а из условия леммы следует, что выполнены неравенства (2.69) и (2.70). Тем самым, выполнены все условия леммы 3.4, и, следовательно, имеет место оценка (3.28). Поскольку $H_3 \geq M^{(3)} \geq Q_1$, третий множитель в (3.35) можно заменить на $\frac{3H_3}{Q_1}$. Рассмотрим четвертый множитель в (3.35). Используя оценку снизу из (2.78), $\gamma_2 = g_2$, получаем

$$1 + \frac{146A^2N}{\overline{K}Q_1M^{(1)}\|g_2\|} \leq 1 + \frac{146A^2N}{\overline{K}Q_1M^{(1)}} \frac{3 \cdot 10^4 A^5 (M^{(1)}M^{(3)})^{1+2\varepsilon_0}}{N} \ll (\overline{K}^2 Q^3)^{2\varepsilon_0} \frac{Q}{Q_1},$$

где мы воспользовались (3.41). Подставляя результаты упрощений в формулу (3.35), получаем

$$|\mathfrak{M}(g_2)| \ll |Z| |\Omega^{(3)}| (\overline{K}^2 Q^3)^{2\varepsilon_0} \frac{H_3 Q}{Q_1^2}.$$

Подставляя сюда $H_3(M^{(3)})$ из (3.3), получаем

$$|\mathfrak{M}(g_2)| \ll |Z| |\Omega^{(3)}| (\overline{K}^3 Q^4)^{2\varepsilon_0} \frac{\overline{K}Q^2}{Q_1^2}.$$

Подставляя теперь полученную оценку для $|\mathfrak{M}(g_2)|$ в (3.28), имеем

$$\sigma_{N,Z} \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(2)}| |\Omega^{(3)}|^{1/2} |Z|^{1/2} (\bar{K}^3 Q^4)^{\varepsilon_0} \frac{\bar{K}^{1/2} Q}{Q_1}.$$

Используя оценку (2.82), получаем оценку

$$\sigma_{N,Z} \ll |\Omega_N| \frac{(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}}{(M^{(1)} M^{(3)})^{\delta-\varepsilon_0/2}} |Z|^{1/2} (\bar{K}^3 Q^4)^{\varepsilon_0} \frac{\bar{K}^{1/2} Q}{Q_1},$$

из которой, подставляя $M^{(1)}$, $M^{(3)}$ из (3.41), имеем

$$\sigma_{N,Z} \ll |Z|^{1/2} |\Omega_N| \bar{K}^{6\varepsilon_0} Q^{9.5\varepsilon_0} \frac{\bar{K}^{3/2-2\delta} Q^{3(1-\delta)}}{Q_1}. \quad (3.42)$$

Отсюда, применяя лемму 3.5 при $W = Z^*$, $C_2 = 0$, получаем

$$\sum_{\theta \in Z^*} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \bar{K}^{12\varepsilon_0} Q^{20\varepsilon_0} \frac{\bar{K}^{4\gamma} Q^{6\gamma}}{\bar{K} Q_1^2}. \quad (3.43)$$

Используя тривиальную оценку

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \leq Q \sum_{Q_1 \leq q \leq Q} \max_{1 \leq a \leq q, (a, q)=1} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 = Q \sum_{\theta \in Z^*} |S_N(\theta)|^2, \quad (3.44)$$

где в качестве a_q выбраны числители, на которых достигается максимум, и подставляя в (3.44) оценку (3.43), получаем требуемую оценку. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. *Если $\bar{K}^2 q^2 \leq N^{1-2\varepsilon_0}$, $\bar{K}q \geq Q_0$, то для $\theta = \frac{a}{q} + \frac{K}{N}$ имеет место оценка*

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| (\bar{K}q)^{6\varepsilon_0} \frac{(\bar{K}q)^{2\gamma}}{\bar{K}^{1/2} q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Z = \{\theta\}$. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N по теореме 2.5. Положим $\mu = 3$, $\lambda = 2$ и

$$M^{(1)} = M^{(3)} = 76A^2 \bar{K}q.$$

Тогда условие (3.27) выполнено, а из условия леммы следует, что выполнены неравенства (2.69) и (2.70). Тем самым, выполнены все условия леммы 3.4. Используя лемму 3.6 при $|Z| = 1$ и проводя преобразования, аналогичные тем, что были проведены в лемме 3.7, получаем

$$|S_N(\theta)| = \sigma_{N,Z} \ll |\Omega_N| (\bar{K}q)^{6\varepsilon_0} \frac{(\bar{K}q)^{2\gamma}}{\bar{K}^{1/2} q}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.9. *Если $\bar{K}q \geq Q_0$, то имеет место оценка*

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| \frac{(\bar{K}q)^{2\varepsilon_0} N^{\gamma+\varepsilon_0}}{\bar{K}q}. \quad (3.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N согласно теореме 2.3. Положим $\mu = 3$, $\lambda = 2$, $Z = \{\theta\}$ и

$$M^{(1)} = 76A^2\overline{K}q. \quad (3.46)$$

Тогда выполнены условия леммы 3.4 и, следовательно, имеет место оценка (3.28). Ввиду того, что $\Omega^{(2)} = \{E\}$, условия (3.25) и (3.26) преобразуются в следующие:

$$g_3^{(1)} \equiv g_3^{(2)} \pmod{q}, \quad |g_3^{(1)} - g_3^{(2)}|_{1,2} \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}\overline{K}}.$$

Поэтому получаем, что

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}(g_\lambda)| &\leq \sum_{g_3^{(2)} \in \Omega^{(3)}} \sum_{g_3^{(1)} \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}_{\{g_3^{(1)} \equiv g_3^{(2)} \pmod{q}, |g_3^{(1)} - g_3^{(2)}|_{1,2} \leq \frac{N}{\overline{K}^2 q}\}} \\ &\leq |\Omega^{(3)}| \left(1 + \frac{N}{\overline{K}^2 q^2}\right)^2 \ll \frac{|\Omega^{(3)}| N^2}{\overline{K}^4 q^4}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

поскольку ввиду (3.15) имеем $\overline{K}q \leq N^{1/2}$. Подставляя (3.47) в (3.28), получаем

$$|S_N(\theta)| \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(3)}|^{1/2} \frac{N}{\overline{K}^2 q^2} \ll |\Omega_N| \frac{(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}}{|\Omega_N|^{1/2}} \frac{N}{\overline{K}^2 q^2}.$$

Используя (3.46) и оценку снизу из (2.66), имеем

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| \frac{(\overline{K}q)^{1+2\varepsilon_0} N^{\gamma+\varepsilon_0}}{\overline{K}^2 q^2}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.10. Пусть выполнены неравенства $Q_0 \leq Q_1 \leq Q \leq \frac{N^{1/2}}{20A}$, $\overline{K}Q \leq N^{1/2+\varepsilon_0}$. Тогда для любого $Z \subseteq P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| &\ll |Z|^{1/2} |\Omega_N| N^{\gamma-1/2+3\varepsilon_0} (\overline{K}Q)^{1/2} \\ &\quad + |\Omega_N| N^{\gamma+3\varepsilon_0} \left(\frac{Q^{1/2}}{\overline{K}} + \frac{(\overline{K}Q)^{1/2}}{N^{1/2}} Q^{1/2} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| &\ll |\Omega_N| |Z|^{1/2} \left(\frac{N^{\gamma+3\varepsilon_0}}{\overline{K}Q^{1/2}} \frac{Q^{1/2}}{Q_1^{1/2}} + N^{\gamma-1/2+3\varepsilon_0} (\overline{K}Q)^{1/2} \right. \\ &\quad + \frac{N^{3\gamma/2-1/4+5\varepsilon_0}}{(\overline{K}Q)^{1/4+\gamma/2}} \frac{Q^{1/2}}{Q_1^{1/2}} + N^{3\gamma/2-1/2+5\varepsilon_0} (\overline{K}Q)^{1/2-\gamma/2} \\ &\quad \left. + N^{3\gamma/2-3/4+5\varepsilon_0} (\overline{K}Q)^{3/4-\gamma/2} Q^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начала доказательств обеих оценок совпадают. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N по теореме 2.3. Положим $\mu = 3$, $\lambda = 2$, $Z \subseteq P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ и

$$M^{(1)} = 150A^2 N^{1/2} (\overline{K}Q)^{1/2}, \quad T = \frac{73A^2 N}{M^{(1)}}. \quad (3.50)$$

Тогда $M^{(1)} \geq 150A^2N^{1/2} \geq 150A^2\overline{K}$ и, значит, выполнены условия леммы 3.3. Следовательно, имеет место неравенство (3.20). Из (3.17) и (3.18) следует, что

$$\left\| g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_3^{(2)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} \leq \frac{74A^2\overline{K}}{M^{(1)}}, \quad (3.51)$$

$$|g_3 - g_3^{(2)}|_{1,2} \leq \min \left\{ \frac{73A^2N}{M^{(1)}}, \frac{73A^2N}{M^{(1)}\overline{K}} + \frac{N}{\overline{K}} \left\| g_3 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_3^{(2)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} \right\}. \quad (3.52)$$

Положим $g_3^{(1)} = (x_1, x_2)^t$, $g_3^{(2)} = (y_1, y_2)^t$; тогда из теоремы 2.3 следует, что

$$\max\{y_1, y_2\} = y_2 \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}}. \quad (3.53)$$

Обозначим

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \det(Y) = x_1y_2 - y_1x_2.$$

Тогда ввиду неравенства треугольника имеем

$$\left\| \mathcal{Y} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} \right\| \leq \left\| y_2 \left(x_1 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - y_1 \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right) \right\| + \left\| y_1 \left(y_2 \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} - x_2 \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} \right) \right\|. \quad (3.54)$$

Оценим одинаковым образом каждое слагаемое из правой части (3.54), исходя из соотношений (3.51), (3.53) и (3.50):

$$\left\| \mathcal{Y} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} \right\| \leq 2 \frac{74A^2\overline{K}}{M^{(1)}} \frac{73A^2N}{M^{(1)}} < \frac{1}{2Q} < \frac{1}{q^{(1)}}.$$

Следовательно, $\mathcal{Y} \equiv 0 \pmod{q^{(1)}}$ и $\mathcal{Y} \equiv 0 \pmod{q^{(2)}}$, так что $\mathcal{Y} \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}$, где $\mathbf{q} = [q^{(1)}, q^{(2)}]$, и, значит, $Q_1 \leq \mathbf{q} \leq Q^2$. Теперь воспользуемся оценкой (3.20). Множество $\mathfrak{N}(g_2)$ представим в виде объединения множеств $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, для первого из которых $\mathcal{Y} = 0$, а для второго $\mathcal{Y} \neq 0$.

1. Для доказательства оценки (3.48) мы воспользуемся оценками

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}_1| &\ll |Z| |\Omega^{(3)}|, \\ |\mathfrak{M}_2| &\ll_{\varepsilon} |\Omega^{(3)}| \left(\frac{T^2}{\overline{K}^2} + 1 \right) N^{\varepsilon} Q, \end{aligned} \quad (3.55)$$

которые будут доказаны ниже в леммах 3.12, 3.13 соответственно. Следовательно,

$$|\mathfrak{N}(g_2)|^{1/2} \ll_{\varepsilon} |\Omega^{(3)}|^{1/2} \left(|Z|^{1/2} + \frac{N^{1+\varepsilon} Q^{1/2}}{M^{(1)}\overline{K}} + N^{\varepsilon} Q^{1/2} \right). \quad (3.56)$$

Подставляя (3.56) в (3.20), при $\varepsilon = \varepsilon_0$ получаем

$$\sigma_{N,Z} \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(3)}|^{1/2} \left(|Z|^{1/2} + \frac{N^{1+\varepsilon_0} Q^{1/2}}{M^{(1)}\overline{K}} + N^{\varepsilon_0} Q^{1/2} \right).$$

Используя оценки из (2.82) и (2.66), находим

$$\sigma_{N,Z} \ll |\Omega_N| \frac{H_1}{N^{\delta-\varepsilon_0/2}} \left(|Z|^{1/2} + \frac{N^{1+\varepsilon} Q^{1/2}}{M^{(1)}\overline{K}} + N^{\varepsilon_0} Q^{1/2} \right).$$

Подставляя $M^{(1)}$ из (3.50), получаем

$$\sigma_{N,Z} \ll |Z|^{1/2} |\Omega_N| N^{\gamma-1/2+3\varepsilon_0} (\overline{K}Q)^{1/2} + |\Omega_N| N^{\gamma+3\varepsilon_0} \frac{Q^{1/2}}{\overline{K}} + |\Omega_N| N^{\gamma-1/2+3\varepsilon_0} (\overline{K}Q)^{1/2} Q^{1/2}.$$

Тем самым, оценка (3.48) доказана.

2. Для доказательства оценки (3.49) мы воспользуемся оценками (3.55) и оценкой

$$|\mathfrak{M}_2| \ll_{\varepsilon} |Z| \left(\frac{|\Omega^{(3)}| T^2}{\overline{K}^2 Q_1} + \frac{T^3 Q^{\varepsilon}}{\overline{K} Q_1} + T^2 Q^{\varepsilon} + T Q^{1+\varepsilon} \right),$$

последняя из которых будет доказана в лемме 3.14. Следовательно,

$$|\mathfrak{N}(g_2)|^{1/2} \ll_{\varepsilon} |Z|^{1/2} \left(\frac{T |\Omega^{(3)}|^{1/2}}{\overline{K} Q_1^{1/2}} + |\Omega^{(3)}|^{1/2} + \frac{T^{3/2} Q^{\varepsilon}}{(\overline{K} Q_1)^{1/2}} + T Q^{\varepsilon} + (T Q)^{1/2} Q^{\varepsilon} \right). \quad (3.57)$$

Подставляя (3.57) в (3.20), при $\varepsilon = \varepsilon_0$ получаем

$$\sigma_{N,Z} \ll (M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0} |\Omega^{(1)}|^{1/2} |Z|^{1/2} \left(\frac{T |\Omega^{(3)}|^{1/2}}{\overline{K} Q_1^{1/2}} + |\Omega^{(3)}|^{1/2} + \frac{T^{3/2} Q^{\varepsilon_0}}{(\overline{K} Q_1)^{1/2}} + T Q^{\varepsilon_0} + (T Q)^{1/2} Q^{\varepsilon_0} \right). \quad (3.58)$$

Используя оценки из (2.82) и (2.66), имеем

$$|\Omega^{(1)}|^{1/2} = |\Omega_N| \frac{|\Omega^{(1)}|^{1/2}}{|\Omega_N|} \leq |\Omega_N| \frac{(M^{(1)})^{\delta+2\varepsilon_0}}{N^{2\delta-\varepsilon_0}}, \quad |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(3)}|^{1/2} \leq \frac{|\Omega_N|}{N^{\delta-\varepsilon_0/2}}. \quad (3.59)$$

Подставляя (3.59) в (3.58) и используя $M^{(1)}$ из (3.50), получаем (3.49).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.11. Пусть Y, Y_1 – положительные действительные числа, и пусть

$$1 \leq a_i \leq q_i \leq Q, \quad (a_i, q_i) = 1, \quad i = 1, 2; \quad \frac{a_1}{q_1} \neq \frac{a_2}{q_2}.$$

Тогда для $R > \max\{\frac{Q^2}{Y_1}, 4Y, 2Q\}$ не существует пары взаимно простых чисел y_1, y_2 , удовлетворяющих условиям

$$\left\| y_i \left(\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2} \right) \right\| < \frac{1}{R}, \quad 0 < Y_1 \leq y_i \leq Y, \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\alpha = \left| \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2} \right|$. Допустим противное; тогда существуют целые n_1, n_2 такие, что

$$|y_i \alpha - n_i| < \frac{1}{R}, \quad i = 1, 2. \quad (3.60)$$

Покажем, что $n_1, n_2 \neq 0$. Действительно, если $n_1 = 0$, то $\alpha < \frac{1}{R y_1} \leq \frac{1}{R Y_1}$. С другой стороны, $\alpha \geq \frac{1}{q_1 q_2} \geq \frac{1}{Q^2}$. Получаем $\frac{1}{Q^2} < \frac{1}{R Y_1}$, что противоречит

условиям леммы. Из (3.60) следует, что существуют $-1 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$, такие, что

$$y_i \alpha = n_i + \frac{\theta_i}{R}, \quad i = 1, 2. \quad (3.61)$$

Следовательно, $(y_1 n_2 - y_2 n_1) \alpha = \frac{\theta_1 n_2 - \theta_2 n_1}{R}$, и, значит,

$$|y_1 n_2 - y_2 n_1| < \frac{|n_2| + |n_1|}{\alpha R} < \frac{y_2 \alpha + y_1 \alpha}{\alpha R} + \frac{2}{\alpha R^2} < \frac{2Y}{R} + \frac{2Q^2}{R^2} < 1.$$

Получаем, что $y_1 n_2 = y_2 n_1$, а так как $(y_1, y_2) = 1$, то $n_1 = y_1$, $n_2 = y_2$. Подставляя последние равенства в (3.61), получаем

$$|1 - \alpha| < \frac{1}{RY_1} < \frac{1}{Q^2},$$

что невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.12. В условиях леммы 3.10 выполнено $|\mathfrak{M}_1| \ll |Z| |\Omega^{(3)}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи обозначим $R = (M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}$. Напомним, что $M^{(1)}$ определено в (3.50). Из условия $\mathcal{Y} = 0$ следует, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. Поскольку

$$g_3^{(1)} = (x_1, x_2)^t, \quad g_3^{(2)} = (y_1, y_2)^t,$$

то $(x_1, x_2) = 1$, $(y_1, y_2) = 1$ и, следовательно, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. В частности, $|\beta(g_3^{(1)} - g_3^{(2)})|_{1,2} = 0$. Тогда из неравенства в (3.16) следует, что

$$\left\| y_1 \left(\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right) \right\| \leq \|y_1(\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\| + 0 \leq \frac{1}{H_1} < \frac{1}{R}$$

и, аналогично, $\|y_2 \left(\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right)\| \leq \frac{1}{H_1} < \frac{1}{R}$. Таким образом, получаем

$$|\mathfrak{M}_1| \leq \sum_{g_3^{(2)} \in \tilde{\Omega}^{(3)}} \sum_{\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} \in Z} \sum_{\frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \in Z} \mathbf{1}_{\left\{ \left\| y_{1,2} \left(\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right) \right\| < \frac{1}{R} \right\}}. \quad (3.62)$$

Проверим, выполняются ли условия леммы 3.11. Из теоремы 2.3 следует, что

$$Y_1 \leq y_i \leq Y, \quad \text{где} \quad Y_1 = \frac{N}{150A^2(M^{(1)})^{1+2\varepsilon_0}}, \quad Y = \frac{73A^2N}{M^{(1)}}.$$

В условиях леммы 3.10 имеем $R > \max\{\frac{Q^2}{Y_1}, 4Y, 2Q\}$, и, значит, можно применить лемму 3.11. Получаем, что в (3.62) ненулевыми являются только слагаемые с $\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} = \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}}$, следовательно, $|\mathfrak{M}_1| \ll |Z| |\Omega^{(3)}|$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.13. В условиях леммы 3.10 выполнено

$$|\mathfrak{M}_2| \ll_\varepsilon |\Omega^{(3)}| \left(\frac{T^2}{K^2} + 1 \right) N^\varepsilon Q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|\mathcal{Y}| \leq \max\{x_1 y_2, x_2 y_1\} \leq x_2 y_2$, то, применяя к каждому из множителей оценку (3.53), получаем

$$|\mathcal{Y}| \leq \left(\frac{73A^2N}{M^{(1)}} \right)^2.$$

Поскольку $\mathbf{q} \mid \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} \neq 0$, то

$$\mathbf{q} \leq \min\{Q^2, |\mathcal{Y}|\} \leq \min\left\{Q^2, \left(\frac{73A^2N}{M^{(1)}}\right)^2\right\} \leq \sqrt{Q^2 \left(\frac{73A^2N}{M^{(1)}}\right)^2} = Q \frac{73A^2N}{M^{(1)}}.$$

Из условий леммы и равенств (3.50) теперь следует, что

$$\mathbf{q} \frac{74A^2\overline{K}}{M^{(1)}} \leq Q \frac{73A^2N}{M^{(1)}} \frac{74A^2\overline{K}}{M^{(1)}} < 1. \quad (3.63)$$

Из (3.63) получаем, что правая часть (3.51) меньше $\frac{1}{\mathbf{q}}$, откуда имеем

$$\left\| g_3^{(1)} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_3^{(2)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right\|_{1,2} = 0. \quad (3.64)$$

Из равенства (3.64) следует сравнение (3.38), из которого в доказательстве леммы 3.6 было выведено

$$q^{(1)} = q^{(2)} = \mathbf{q}, \quad (g_3^{(1)}a^{(1)} - g_3^{(2)}a^{(2)})_{1,2} \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}. \quad (3.65)$$

Тогда из (3.52) получаем

$$|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}|_{1,2} \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}\overline{K}}. \quad (3.66)$$

Следовательно, если фиксировать $g_3^{(1)} \in \tilde{\Omega}^{(3)}$, то для $g_3^{(2)}$ будет не более чем $\frac{T^2}{\overline{K}^2} + 1$ возможностей. Тем самым, мы определили $\mathcal{Y}$, но тогда для числа $q^{(1)} = q^{(2)} = \mathbf{q}$ найдется не более чем $\tau(\mathcal{Y})$ вариантов ввиду того, что $\mathbf{q} \mid \mathcal{Y}$. Известно (см. [15, с. 91]), что

$$\tau(\mathcal{Y}) \leq (\varepsilon \log 2)^{-\exp(1/\varepsilon)} \mathcal{Y}^\varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. При фиксированном $q^{(1)}$ найдется не более $q^{(1)} \leq Q$ вариантов для $a^{(1)}$. Заметим, что если $g_3^{(1)}, g_3^{(2)}, a^{(1)}$ фиксированы, то $a^{(2)}$ определяется однозначно из (3.65). Действительно, положим

$$g_3^{(1)} = (x_1, x_2)^t, \quad g_3^{(2)} = (y_1, y_2)^t; \quad (3.67)$$

тогда из (3.65) следует, что

$$x_1 a^{(1)} \equiv y_1 a^{(2)} \pmod{\mathbf{q}}, \quad x_2 a^{(1)} \equiv y_2 a^{(2)} \pmod{\mathbf{q}}. \quad (3.68)$$

Ввиду того, что $(a^{(1)}, \mathbf{q}) = (a^{(2)}, \mathbf{q}) = 1$, получаем

$$\delta_1 = (x_1, \mathbf{q}) = (y_1, \mathbf{q}), \quad \delta_2 = (x_2, \mathbf{q}) = (y_2, \mathbf{q}), \quad (3.69)$$

причем $(\delta_1, \delta_2) = 1$, так как $(x_1, x_2) = 1$. Тогда из (3.68) можно получить, что

$$a^{(2)} \equiv A_1 a^{(1)} \left(\pmod{\frac{\mathbf{q}}{\delta_1}} \right), \quad a^{(2)} \equiv A_2 a^{(1)} \left(\pmod{\frac{\mathbf{q}}{\delta_2}} \right). \quad (3.70)$$

Сравнения из (3.70) равносильны одному сравнению по модулю $\left[\frac{\mathbf{q}}{\delta_1}, \frac{\mathbf{q}}{\delta_2} \right] = \mathbf{q}$, и, следовательно, $a^{(2)}$ определяется однозначно. В итоге получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}_2| &\leq \sum_{g_3^{(1)} \in \tilde{\Omega}^{(3)}} \sum_{g_3^{(2)} \in \tilde{\Omega}^{(3)}} \sum_{q^{(1)} \mid \mathcal{Y}} \sum_{0 < a^{(1)} \leq q^{(1)}} \mathbf{1}_{\{|g_3^{(1)} - g_3^{(2)}|_{1,2} \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}\overline{K}}\}} \\ &\ll_\varepsilon |\Omega^{(3)}| \left(\frac{T^2}{\overline{K}^2} + 1 \right) N^\varepsilon Q. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.14. В условиях леммы 3.10 выполнено

$$|\mathfrak{M}_2| \ll_\varepsilon |Z| \left(\frac{|\Omega^{(3)}| T^2}{\bar{K}^2 Q_1} + \frac{T^3 Q^\varepsilon}{\bar{K} Q_1} + T^2 Q^\varepsilon + T Q^{1+\varepsilon} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 3.13, получаем (3.65) и (3.66). Будем использовать обозначения (3.67) и (3.69). Если $g_3^{(1)}$, $g_3^{(2)}$, $a^{(1)}$ фиксированы, то, как было доказано в лемме 3.13, $a^{(2)}$ определяется однозначно из (3.65). Из сравнения (3.65) следует, что $x_1 y_2 \equiv x_2 y_1 \pmod{\mathfrak{q}}$, поэтому, $|Z|$ способами выбирая $\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}}$, приходим к неравенству

$$|\mathfrak{M}_2| \leq |Z| \sum_{g_3^{(1)} \in \Omega^{(3)}} \sum_{\substack{g_3^{(2)} \in \Omega^{(3)} \\ |g_3^{(1)} - g_3^{(2)}|_{1,2} \leq \frac{T}{\bar{K}}}} \mathbf{1}_{\{x_1 y_2 \equiv x_2 y_1 \pmod{q}\}}.$$

Обозначим

$$x_3 = \frac{x_1}{\delta_1}, \quad x_4 = \frac{x_2}{\delta_2}, \quad y_3 = \frac{y_1}{\delta_1}, \quad y_4 = \frac{y_2}{\delta_2}, \quad p = \frac{\mathfrak{q}}{\delta_1 \delta_2};$$

тогда

$$|\mathfrak{M}_2| \leq |Z| \sum_{g_3^{(1)} \in \Omega^{(3)}} \sum_{\substack{y_3 \leq \frac{T}{\delta_1} \\ |y_3 - x_3| \leq \frac{T}{\bar{K} \delta_1}}} \sum_{\substack{y_4 \leq \frac{T}{\delta_2} \\ |y_4 - x_4| \leq \frac{T}{\bar{K} \delta_2}}} \mathbf{1}_{\{x_3 y_4 \equiv x_4 y_3 \pmod{p}\}}. \quad (3.71)$$

Ввиду того, что $(x_3, p) = (x_4, p) = 1$, сравнение в (3.71) может быть записано в виде $y_4 \equiv c y_3 \pmod{p}$, где $c \equiv x_3^{-1} x_4 \pmod{p}$. Тогда, используя результат о числе решений сравнений такого вида из [15, с. 18], получаем

$$\begin{aligned} \sum_{y_3} \sum_{y_4} \mathbf{1}_{\{x_3 y_4 \equiv x_4 y_3 \pmod{p}\}} &= \sum_{y_3} \sum_{y_4} \mathbf{1}_{\{y_4 \equiv c y_3 \pmod{p}\}} \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{T}{\bar{K} \delta_1} + 1 \right) \left(\frac{T}{\bar{K} \delta_2} + 1 \right) + O \left(s \left(\frac{c}{p} \right) \log^2 p \right), \end{aligned} \quad (3.72)$$

где $s(\alpha) = \sum_{1 \leq i \leq s} a_i$ — сумма неполных частных числа $\alpha = [0; a_1, \dots, a_s]$. Подставляя (3.72) в (3.71), получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}_2| &\leq |Z| \sum_{g_3^{(1)} \in \Omega^{(3)}} \frac{1}{q} \left(\frac{T^2}{\bar{K}^2} + \frac{T(\delta_1 + \delta_2)}{\bar{K}} + \delta_1 \delta_2 \right) \\ &\quad + |Z| \log^2 Q \sum_{x_1 \leq M^{(3)}} \sum_{x_2 \leq M^{(3)}} s \left(\frac{x_3^{-1} x_2}{q/\delta_1} \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Используя результат Кнута и Яо [16]

$$\sum_{a \leq b} s \left(\frac{a}{b} \right) \ll b \log^2 b,$$

получаем

$$\sum_{x_1 \leq T} \sum_{x_2 \leq T} s \left(\frac{x_3^{-1} x_2}{q/\delta_1} \right) \leq \sum_{x_1 \leq T} \left(\frac{T}{q/\delta_1} + 1 \right) \frac{q}{\delta_1} \log^2 q \leq (T^2 + Tq) \log^2 q. \quad (3.74)$$

Далее,

$$\sum_{x_1 \leq T} \delta_1 \ll (T+q)q^{\varepsilon_0}. \quad (3.75)$$

Подставляя (3.74), (3.75) в (3.73), имеем

$$|\mathfrak{M}_2| \ll_{\varepsilon} |Z| \left(\frac{|\Omega^{(3)}|T^2}{\bar{K}^2 Q_1} + \frac{T^3 Q^{\varepsilon}}{\bar{K} Q_1} + T^2 Q^{\varepsilon} + T Q^{1+\varepsilon} \right).$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть выполнены условия леммы 3.10. Тогда

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 (C_1^2 N^{\varepsilon_0/2} + C_2), \quad (3.76)$$

где

$$C_1 = N^{\gamma-1/2+3\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{1/2}, \quad C_2 = \frac{N^{2\gamma+5\varepsilon_0}}{\bar{K}^2 Q^{1/2}} \frac{Q}{Q_1} + \frac{N^{2\gamma-1/2+5\varepsilon_0}}{\bar{K}^{1/2}} \frac{Q}{Q_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 3.10 (см. (3.48)) было доказано, что для любого $Z \subseteq P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$ выполнено

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| |Z|^{1/2} C_1 + |\Omega_N| N^{\gamma+3\varepsilon_0} \frac{Q^{1/2}}{\bar{K}} + |\Omega_N| N^{\gamma-1/2+3\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{1/2} Q^{1/2}.$$

Применяя лемму 3.5 при $W = P_{Q_1, Q}^{(\beta)}$, $f(\theta) = \frac{|S_N(\theta)|}{|\Omega_N|}$, оценивая минимум в формуле (3.30) через $\max_{\theta \in W} f(\theta)$ и используя для оценки этого максимума лемму 3.9, получаем (3.76). Следствие доказано.

Аналогично, из формулы (3.49) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.10. Тогда

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 C_1^2 Q^{\varepsilon_0},$$

где

$$C_1 = \frac{N^{\gamma+3\varepsilon_0}}{\bar{K} Q^{1/2}} \frac{Q^{1/2}}{Q_1^{1/2}} + N^{\gamma-1/2+3\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{1/2} + \frac{N^{3\gamma/2-1/4+5\varepsilon_0}}{(\bar{K}Q)^{1/4+\gamma/2}} \frac{Q^{1/2}}{Q_1^{1/2}} + N^{3\gamma/2-1/2+5\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{1/2-\gamma/2} + N^{3\gamma/2-3/4+5\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{3/4-\gamma/2} Q^{1/2}. \quad (3.77)$$

3.3. Случай $\mu = 2$. Напомним, что Q_0 и γ определены в (3.40). Следующее утверждение является следствием леммы 1.1.

ЛЕММА 3.15. Пусть $(\bar{K}Q)^{18/5+21\varepsilon_0} Q < N$, $\bar{K}Q \geq Q_0$. Тогда

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \frac{\bar{K}^{36\gamma/5} Q^{46\gamma/5+1} \bar{K}^{44\varepsilon_0} Q^{62\varepsilon_0}}{(\bar{K}Q_1)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3.44) следует, что достаточно для Z^* , определенного в (3.34), доказать оценку

$$\sum_{\theta \in Z^*} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \frac{\bar{K}^{36\gamma/5} Q^{46\gamma/5} \bar{K}^{44\varepsilon_0} Q^{62\varepsilon_0}}{(\bar{K}Q_1)^2}. \quad (3.78)$$

Пусть $Z \subseteq Z^*$ – любое подмножество. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N по теореме 2.4. Положим $\mu = 2$, $\lambda = 3$ и

$$M^{(1)} = 75A^2\bar{K}Q^2, \quad M^{(2)} = (75A^2\bar{K}Q)^{13/5+11\varepsilon_0}, \quad (3.79)$$

тогда выполнены условие (3.27) и все условия теоремы 2.4. Следовательно, выполнены все условия леммы 3.4, а значит, имеет место оценка (3.28). При $\mu = 2$ равенство (3.26) преобразуется в сравнение

$$\left(\left(g_2^{(1)} \frac{a^{(1)}}{q^{(1)}} - g_2^{(2)} \frac{a^{(2)}}{q^{(2)}} \right) g_3 \right)_{1,2} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Аналогично доказательству леммы 3.6 получаем

$$q^{(1)} = q^{(2)} = \mathbf{q},$$

и, следовательно, $a^{(1)} = a^{(2)}$ ввиду определения множества Z^* из (3.34). Тогда из соотношений (3.25) и (3.26) имеем

$$|(g_2^{(1)} - g_2^{(2)})g_3|_{1,2} \leq \frac{73A^2N}{M^{(1)}\bar{K}}, \quad ((g_2^{(1)} - g_2^{(2)})g_3)_{1,2} \equiv 0 \pmod{\mathbf{q}}. \quad (3.80)$$

Положим

$$\eta' = g_2^{(2)}g_3, \quad \eta = g_3, \quad \gamma = g_2^{(1)}, \quad X = \|\eta'\|, \quad Y = \|g_2^{(2)}\|, \quad K_1 = \bar{K} \frac{XM^{(1)}}{73A^2N}. \quad (3.81)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|g_2^{(1)}\| \leq \|g_2^{(2)}\|$. Тогда $\|\gamma\| \leq Y$. Из свойств ансамбля также следует, что $\|\gamma\| \asymp Y$. Кроме того, из оценок, доказанных в теореме 2.4, следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\bar{K}}{(M^{(1)})^{4\varepsilon_0}(M^{(2)})^{2\varepsilon_0}} &\ll K_1 \ll \bar{K} \frac{(M^{(2)})^{2\varepsilon_0}}{(M^{(1)})^{2\varepsilon_0}}, \\ \frac{M^{(2)}}{(M^{(1)})^{2\varepsilon_0}} &\ll Y \ll (M^{(2)})^{1+2\varepsilon_0}(M^{(1)})^{2\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Соотношения (3.80) могут быть записаны в следующем виде:

$$|\gamma\eta - \eta'|_{1,2} < \frac{X}{K_1}, \quad (\gamma\eta - \eta')_{1,2} \equiv 0 \pmod{q}.$$

Проверим, выполнены ли условия леммы 1.1. Для этого достаточно убедиться в том, что $Y < X$, $(QK_1)^{13/5} < Y$. Первое неравенство выполнено ввиду определения X, Y . Используя оценки из (3.82), получаем, что второе неравенство выполнено, если

$$(\bar{K}Q)^{13/5} < (M^{(2)})^{1-26\varepsilon_0/5}(M^{(1)})^{16\varepsilon_0/5}. \quad (3.83)$$

Неравенство (3.83) выполнено в силу выбора параметров $M^{(1)}$, $M^{(2)}$. Таким образом, для оценки мощности множества $\mathfrak{M}(g_3)$ может быть применена лемма 1.1 следующим образом. Фиксируем $g_2^{(2)}$ любым из $|\Omega^{(2)}|$ способов, а также фиксируем $\frac{a^{(1)}}{q^{(1)}}$ любым из $|Z|$ способов. По доказанному этим определено $\frac{a^{(2)}}{q^{(2)}}$. Следовательно, при фиксированном g_3 получаем

$$|\mathfrak{M}(g_3)| \ll \frac{Y^2}{(K_1 Q_1)^2} |\Omega^{(2)}| |Z|.$$

Используя оценки (3.82), имеем

$$|\mathfrak{M}(g_3)| \ll \frac{(M^{(2)})^{2+8\varepsilon_0} (M^{(1)})^{12\varepsilon_0}}{(\bar{K} Q_1)^2} |\Omega^{(2)}| |Z|. \quad (3.84)$$

Подставляя (3.84) в (3.28), получаем

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll |Z|^{1/2} H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(3)}| |\Omega^{(2)}|^{1/2} \frac{(M^{(2)})^{1+4\varepsilon_0} (M^{(1)})^{6\varepsilon_0}}{\bar{K} Q_1}.$$

Используя оценку снизу из (2.82) для $|\Omega^{(1)}|$, $|\Omega^{(2)}|$, находим, что

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll |Z|^{1/2} |\Omega_N| \frac{(M^{(1)})^{\gamma+8.5\varepsilon_0} (M^{(2)})^{\gamma+4.5\varepsilon_0}}{\bar{K} Q_1}. \quad (3.85)$$

Подставляя (3.79) в (3.85), получаем

$$\sum_{\theta \in Z} |S_N(\theta)| \ll |Z|^{1/2} |\Omega_N| \frac{\bar{K}^{18\gamma/5} Q^{23\gamma/5} \bar{K}^{22\varepsilon_0} Q^{31\varepsilon_0}}{\bar{K} Q_1}.$$

Применяя лемму 3.5 при $W = Z^*$, $C_2 = 0$, $f(\theta) = |S_N(\theta)|$, получаем оценку (3.78). Лемма доказана.

Следующее утверждение также является следствием леммы 1.1.

ЛЕММА 3.16. Пусть $\bar{K}q > Q_0$. Тогда

$$|S_N(\theta)| \ll \frac{|\Omega_N|}{\bar{K}q} (\bar{K}q)^{18\gamma/5+19\varepsilon_0}. \quad (3.86)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением ансамбля Ω_N согласно теореме 2.4. Положим $\mu = 2$, $\lambda = 3$, $Z = \{\theta\}$ и

$$M^{(1)} = 75A^2 \bar{K}q, \quad M^{(2)} = (75A^2 \bar{K}q)^{13/5+11\varepsilon_0}.$$

Тогда выполнено условие (3.27). Предположим, что справедливо неравенство

$$(\bar{K}q)^{18/5+19\varepsilon_0} < N; \quad (3.87)$$

тогда выполнены все условия теоремы 2.4, а следовательно, и все условия леммы 3.4. Значит, имеет место оценка (3.28). Далее мы будем использовать обозначения (3.81). Проверка выполнимости условий леммы 1.1 проводится аналогично. Тем самым, для оценки мощности множества $\mathfrak{M}(g_3)$ может быть применена лемма 1.1:

$$|\mathfrak{M}(g_3)| \ll \frac{Y^2}{(K_1 q)^2} |\Omega^{(2)}|.$$

Используя оценки (3.82), получаем

$$|\mathfrak{M}(g_3)| \ll \frac{(M^{(2)})^{2+8\varepsilon_0} (M^{(1)})^{4\varepsilon_0}}{(\overline{K}q)^2} |\Omega^{(2)}|. \quad (3.88)$$

Подставляя (3.88) в (3.28), получаем

$$|S_N(\theta)| \ll H_1 |\Omega^{(1)}|^{1/2} |\Omega^{(3)}| |\Omega^{(2)}|^{1/2} \frac{(M^{(2)})^{1+4\varepsilon_0} (M^{(1)})^{2\varepsilon_0}}{\overline{K}q}.$$

Используя оценку снизу из (2.82) для $|\Omega^{(1)}|$, $|\Omega^{(2)}|$, имеем

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| \frac{(M^{(1)} M^{(2)})^{\gamma+4.5\varepsilon_0}}{\overline{K}q} \ll |\Omega_N| (\overline{K}q)^{18\gamma/5-1+19\varepsilon_0},$$

и неравенство (3.86) при условии (3.87) доказано.

Пусть теперь неравенство (3.87) не выполнено, т. е.

$$N \leq (\overline{K}q)^{18/5+19\varepsilon_0}; \quad (3.89)$$

тогда выполнены условия леммы 3.9. Применяя (3.45) и учитывая (3.89), получаем

$$|S_N(\theta)| \ll |\Omega_N| (\overline{K}q)^{18\gamma/5-1+19\varepsilon_0}.$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 3.15. При доказательстве необходимо лишь вместо леммы 1.1 воспользоваться леммой 1.2.

ЛЕММА 3.17. Пусть $\overline{K}^{5+35\varepsilon_0} Q^{8+50\varepsilon_0} < N$, $\overline{K}Q \geq Q_0$. Тогда

$$\sum_{\theta \in P_{Q_1, Q}^{(\beta)}} |S_N(\theta)|^2 \ll |\Omega_N|^2 \frac{\overline{K}^{10\gamma} Q^{16\gamma+1} \overline{K}^{65\varepsilon_0} Q^{100\varepsilon_0}}{(\overline{K}Q_1)^2}.$$

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 3.16. При доказательстве необходимо лишь вместо леммы 1.1 воспользоваться леммой 1.2.

ЛЕММА 3.18. В условиях леммы 1.2 если выполнено $\overline{K}q > Q_0$, то имеет место оценка

$$|S_N(\theta)| \ll \frac{|\Omega_N|}{\overline{K}q} (\overline{K}^5 q^7)^{\gamma+7\varepsilon_0}.$$

§ 4. Доказательство леммы 1.2

Обозначим множество матриц из формулы (1.8) через $\mathfrak{M}$ и представим его в следующем виде:

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{B \in \mathfrak{M}_q} \mathfrak{M}(B), \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_q &= \left\{ B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \pmod{q}, B\eta \equiv \eta' \pmod{q}, \det B \equiv 1 \pmod{q} \right\}, \\ \mathfrak{M}(B) &= \left\{ \gamma \in M \mid \gamma \equiv B \pmod{q}, |\gamma\eta - \eta'| \leq \frac{X}{K}, \frac{Y}{\kappa_1} \leq \|\gamma\| \leq Y \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Сначала докажем равномерную по B оценку мощности $\mathfrak{M}(B)$. Пусть $r(d)$ – количество матриц $\gamma \in \mathfrak{M}(B)$ с фиксированным $d = \|\gamma\|$. Тогда

$$|\mathfrak{M}(B)| = \sum_{\substack{\frac{Y}{\kappa_1} \leq d \leq Y \\ d \equiv \delta \pmod{q}}} r(d). \quad (4.3)$$

Условия $|\gamma\eta - \eta'| \leq \frac{X}{K}$ и $\gamma \in M$ задают некую область Θ изменения элементов b, c матрицы $\gamma \in \mathfrak{M}(B)$. Условие $|\gamma\eta - \eta'| \leq \frac{X}{K}$ равносильно следующему:

$$-\frac{X}{K} < ax + by - u < \frac{X}{K}, \quad -\frac{X}{K} < cx + dy - v < \frac{X}{K}. \quad (4.4)$$

Поскольку $\gamma \in M$, то $\det \gamma = ad - bc = 1$ и, следовательно,

$$a = \frac{bc + 1}{d}, \quad d \mid (bc + 1).$$

Подставляя a в первое неравенство в (4.4), получаем

$$-d\frac{X}{K} < b(cx + dy) + x - du < d\frac{X}{K}.$$

Далее,

$$d\left(u - \frac{X}{K}\right) - x < b(cx + dy) < d\left(u + \frac{X}{K}\right) - x.$$

Из определения множества M получаем, что $c > 0$, $d > 0$; ввиду того, что вектор $\eta = (x, y)^t$ имеет натуральные координаты, получаем $0 < cx + dy$, следовательно,

$$\frac{d\left(u - \frac{X}{K}\right) - x}{cx + dy} < b < \frac{d\left(u + \frac{X}{K}\right) - x}{cx + dy}.$$

Из второго неравенства в (4.4) получаем

$$\frac{\left(v - \frac{X}{K}\right) - dy}{x} < c < \frac{d\left(v + \frac{X}{K}\right) - dy}{x}.$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{\left(v - \frac{X}{K}\right) - dy}{x}, \quad c_2 = \frac{d\left(v + \frac{X}{K}\right) - dy}{x}, \quad (4.5)$$

$$f_1(c) = \frac{d\left(u - \frac{X}{K}\right) - x}{cx + dy}, \quad f_2(c) = \frac{d\left(u + \frac{X}{K}\right) - x}{cx + dy}. \quad (4.6)$$

Следовательно,

$$c_1 < c < c_2, \quad 1 \leq c \leq d; \quad f_1(c) < b < f_2(c), \quad 1 \leq b \leq d,$$

и область Θ изменения элементов b, c имеет вид

$$\Theta = \{(c, b) \mid \tilde{c}_1 < c < \tilde{c}_2, \tilde{f}_1(c) < b < \tilde{f}_2(c)\},$$

причем функции $\tilde{f}_1(c) = \max\{1, f_1(c)\}$, $\tilde{f}_2(c) = \min\{d, f_2(c)\}$ не возрастают на отрезке $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$. Мы представим область Θ в виде $\Theta_2 - \Theta_1$, где

$$\Theta_i = \{(c, b) \mid \tilde{c}_1 < c < \tilde{c}_2, 0 < b < \tilde{f}_i(c)\}.$$

Тогда $r(d) = r_2(d) - r_1(d)$, где $r_i(d)$ – количество матриц $\gamma \in \mathfrak{M}(B)$ с фиксированным d , и $(c, b) \in \Theta_i$. Получим асимптотическую формулу для $r_2(d)$. Для этого разобьем отрезок $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$ на T равных частей

$$[u_{j-1}, u_j], \quad j = 1, \dots, T, \quad \text{где} \quad u_j = \tilde{c}_1 + j \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1}{T}, \quad j = 0, 1, \dots, T,$$

и построим последовательности прямоугольников $\{\Pi_j^-\}_{j=1}^T$, вложенных в Θ_2 , и $\{\Pi_j^+\}_{j=1}^T$, объемлющих Θ_2 ,

$$\Pi_j^- = [u_{j-1}, u_j] \times [1, \tilde{f}_2(u_j)], \quad \Pi_j^+ = [u_{j-1}, u_j] \times [1, \tilde{f}_2(u_{j-1})].$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^T r_{2,j}^-(d) \leq r_2(d) \leq \sum_{j=1}^T r_{2,j}^+(d). \quad (4.7)$$

Для вычисления $r_{2,j}^\pm(d)$ мы воспользуемся [8, лемма 7]:

$$r_{2,j}^\pm(d) = \frac{|\Pi_j^\pm|}{q^2} \frac{\tau\varphi(d)}{\varphi(\tau)d^2} + O\left(\left(\frac{H_1}{d^{1/2}} + \frac{H_2^\pm}{d^{1/2}} + qd^{1/2}\right)(qd)^\varepsilon\right), \quad (4.8)$$

где $\tau = (\delta, q)$, $H_1 = u_j - u_{j-1}$, $H_2^+ = \tilde{f}_2(u_{j-1})$, $H_2^- = \tilde{f}_2(u_j)$. Подставляя формулу (4.8) в (4.7) и учитывая, что $H_1 \leq \frac{d}{T}$, $H_2^\pm \leq d$, получаем

$$\frac{\tau\varphi(d)}{\varphi(\tau)d^2} \sum_{j=1}^T \frac{|\Pi_j^-|}{q^2} + O_\varepsilon(Tqd^{1/2}(qd)^\varepsilon) \leq r_2(d) \leq \frac{\tau\varphi(d)}{\varphi(\tau)d^2} \sum_{j=1}^T \frac{|\Pi_j^+|}{q^2} + O_\varepsilon(Tqd^{1/2}(qd)^\varepsilon). \quad (4.9)$$

Ввиду невозрастания функции $\tilde{f}_2(c)$ на отрезке $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$ получаем

$$\sum_{j=1}^T |\Pi_j^-| \leq \int_{\tilde{c}_1}^{\tilde{c}_2} \tilde{f}_2(u) du = |\Theta_2| \leq \sum_{j=1}^T |\Pi_j^+|, \quad (4.10)$$

$$\sum_{j=1}^T |\Pi_j^+| - \sum_{j=1}^T |\Pi_j^-| = \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1}{T} (\tilde{f}_2(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_2(\tilde{c}_2)). \quad (4.11)$$

Следовательно, из (4.9) и соотношений (4.10), (4.11) получаем

$$r_2(d) = \frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d^2} |\Theta_2| + O\left(\frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d^2} \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1}{T} (\tilde{f}_2(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_2(\tilde{c}_2))\right) + O_\varepsilon(Tqd^{1/2}(qd)^\varepsilon). \quad (4.12)$$

Заметим, что

$$\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 \leq c_2 - c_1 = \frac{X}{K} \frac{2}{x} \ll \frac{Y}{K}, \quad (4.13)$$

где в последнем переходе мы воспользовались (1.6). Оценим $\tilde{f}_i(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_i(\tilde{c}_2)$ следующим образом:

$$\tilde{f}_i(\tilde{c}_1) - \tilde{f}_i(\tilde{c}_2) \leq f_i(c_1) - f_i(c_2), \quad i = 1, 2.$$

Ввиду (4.5) и (4.6) получаем

$$f_2(c_1) = \frac{d(u + \frac{X}{K}) - x}{v - \frac{X}{K}}, \quad f_2(c_2) = \frac{d(u + \frac{X}{K}) - x}{v + \frac{X}{K}}.$$

Следовательно,

$$f_2(c_1) - f_2(c_2) = \frac{d(u + \frac{X}{K}) - x}{v^2 - \frac{X^2}{K^2}} \frac{2X}{K} \leq \frac{2dX}{K} \frac{v}{v^2 - \frac{X^2}{K^2}} \leq \frac{2dX}{K} \frac{1}{v - \frac{X}{K}}.$$

Используя (1.6) и (1.7), получаем

$$f_2(c_1) - f_2(c_2) \ll \frac{d}{K}. \quad (4.14)$$

Теперь, подставляя (4.13) и (4.14) в (4.12), получаем

$$r_2(d) = \frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d^2} |\Theta_2| + O\left(\frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d} \frac{Y}{TK^2}\right) + O_\varepsilon(Tqd^{1/2}(qd)^\varepsilon).$$

Аналогичная асимптотическая формула верна и для $r_1(d)$. Следовательно,

$$r(d) = \frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d^2} |\Theta| + O\left(\frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d} \frac{Y}{TK^2}\right) + O_\varepsilon(Tqd^{1/2}(qd)^\varepsilon). \quad (4.15)$$

Оценим $|\Theta|$ следующим образом:

$$|\Theta| \leq \int_{c_1}^{c_2} (f_2(s) - f_1(s)) ds.$$

Подставляя c_1 , c_2 , $f_1(c)$, $f_2(c)$ из (4.5) и (4.6) и производя замену $z = sx + dy$, получаем

$$|\Theta| \leq \int_{c_1}^{c_2} \frac{2d\frac{X}{K}}{sx + dy} ds = 2d\frac{X}{K} \int_{v-\frac{X}{K}}^{v+\frac{X}{K}} \frac{1}{xz} dz = 2d\frac{X}{K} \frac{1}{x} \log \frac{1 + \frac{X}{vK}}{1 - \frac{X}{vK}}.$$

Ввиду того, что $\log \frac{1+z}{1-z} \ll z$ при $0 < z \leq \frac{1}{2}$, а $0 < \frac{X}{vK} \leq \frac{1}{2}$, получаем

$$|\Theta| \ll d \frac{X^2}{K^2} \frac{1}{vx}.$$

Согласно соотношениям (1.6) и (1.7) имеем

$$|\Theta| \ll d \frac{Y}{K^2}. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.15), получаем

$$r(d) \ll_\varepsilon \frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d} \frac{Y}{K^2} + \frac{\tau\varphi(d)}{q^2\varphi(\tau)d} \frac{Y}{TK^2} + Tqd^{1/2}(qd)^\varepsilon. \quad (4.17)$$

Теперь, подставляя (4.17) в (4.3) и используя [8, лемма 5], имеем

$$|\mathfrak{M}(B)| \ll_\varepsilon \frac{1}{\rho(q)} \frac{Y^2}{K^2} + \frac{1}{\rho(q)} \frac{Y^2}{TK^2} + TY^{3/2+\varepsilon} q^\varepsilon,$$

где $\rho(q) = q^3 \prod_{p|q} (1 - p^{-2})$. Используя [17, (5.26)], получаем $\rho(q) > \frac{q^3}{2}$. Полагая $T = \frac{Y^{1/4-\varepsilon/2}}{K\rho(q)^{1/2}q^{\varepsilon/2}}$, имеем

$$|\mathfrak{M}(B)| \ll_\varepsilon \frac{Y^2}{K^2 q^3} + \frac{Y^{7/4+\varepsilon}}{K q^{3/2}} q^\varepsilon.$$

Следовательно, получаем

$$|\mathfrak{M}(B)| \ll_{\varepsilon} \frac{Y^{2+\varepsilon}}{K^2 q^3}, \quad Y > K^4 q^6. \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.1), находим

$$|\mathfrak{M}| \ll_{\varepsilon} \frac{Y^{2+\varepsilon}}{K^2 q^3} |\mathfrak{M}_q|, \quad Y > K^4 q^6.$$

Таким образом, для завершения доказательства леммы 1.2 нам осталось показать, что $|\mathfrak{M}_q| \leq q$. Из (4.2) следует, что

$$\alpha x + \beta y \equiv u \pmod{q}, \quad \gamma x + \delta y \equiv v \pmod{q}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma \equiv 1 \pmod{q}. \quad (4.19)$$

Из сравнений (4.19) получаем, что

$$y \equiv \alpha v - \gamma u \pmod{q}, \quad x \equiv \delta u - \beta v \pmod{q}. \quad (4.20)$$

Рассмотрим сначала случай $q = p^n$, где p простое. Поскольку $(x, y) = (u, v) = 1$, то хотя бы одно из чисел x, y взаимно просто с q . Пусть $(q, x) = 1$, и, аналогично, пусть $(q, u) = 1$. Тогда из (4.19) следует, что

$$\alpha \equiv x^{-1}(u - \beta y) \pmod{q}, \quad \delta \equiv u^{-1}(x + \beta v) \pmod{q}. \quad (4.21)$$

Подставляя сравнения из (4.21) в (4.20), имеем

$$\gamma \equiv x^{-1}(v - xyu^{-1} - \beta yvu^{-1}) \pmod{q}.$$

Получаем, что α, γ, δ выражаются через β и, следовательно, $|\mathfrak{M}_q| \leq q$, если $q = p^n$. Чтобы избавиться от условия для q , достаточно доказать, что $|\mathfrak{M}_q| = |\mathfrak{M}_m| |\mathfrak{M}_n|$, если $q = mn$, $(m, n) = 1$. Для этого каждой матрице $B \in \mathfrak{M}_q$ поставим в соответствие две новые матрицы $B_m \equiv B \pmod{m}$, $B_n \equiv B \pmod{n}$ такие, что $B_m \in \mathfrak{M}_m$, $B_n \in \mathfrak{M}_n$. Заметим, что количество пар матриц (B_m, B_n) равно $|\mathfrak{M}_m| |\mathfrak{M}_n|$. Однако по китайской теореме об остатках каждый элемент матрицы $B \in \mathfrak{M}_q$ однозначно восстанавливается по двум соответствующим ему элементам матриц B_m, B_n . Таким образом, оценка $|\mathfrak{M}_q| \leq q$ доказана для любого q , что завершает доказательство леммы 1.2.

§ 5. Доказательство теорем 1.2, 1.3

5.1. Оценка интегралов от $|S_N(\theta)|^2$. Далее будем применять круговой метод Харди–Литтлвуда.

ЛЕММА 5.1. *Имеет место неравенство*

$$\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta \leq \frac{1}{N} \sum_{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}}^* \int_{|K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK, \quad (5.1)$$

где через $\sum^*$ обозначена сумма по взаимно простым a и q при $q \geq 1$ и $a = 0, 1$ только при $q = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Дирихле следует, что для любого $\theta \in [0, 1]$ найдутся $a, q \in \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\theta = \frac{a}{q} + \beta, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}, \quad |\beta| \leq \frac{1}{qN^{1/2}},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta &= \int_0^1 \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \beta\right) \right|^2 d\left(\frac{a}{q} + \beta\right) \\ &\leq \sum_{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}}^* \int_{|\beta| \leq \frac{1}{qN^{1/2}}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \beta\right) \right|^2 d\beta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Сделаем в (5.2) замену $K = N\beta$, приходим к неравенству (5.1). Лемма доказана.

Напомним, что

$$Q_0 = \max \left\{ \exp\left(\frac{10^5 A^4}{\varepsilon_0^2}\right), \exp(\varepsilon_0^{-5}) \right\}.$$

ЛЕММА 5.2. *Имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta &\leq 2Q_0^2 \frac{|\Omega_N|^2}{N} + \frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{0 \leq a \leq q \leq Q_0}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2 dK. \end{aligned} \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записи положим $f(K) = \left| S_N\left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N}\right) \right|^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2}}^* \int_{|K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} f(K) dK &= \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} < |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} f(K) dK \\ &\quad + \sum_{0 \leq a \leq q \leq Q_0}^* \int_{\frac{Q_0}{q} < |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} f(K) dK \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} f(K) dK + \sum_{1 \leq a \leq q \leq Q_0}^* \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} f(K) dK. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Оценим четвертый интеграл тривиальным образом:

$$\sum_{q \leq Q_0} \sum_{0 \leq a \leq q}^* \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} f(K) dK \leq 2Q_0^2 |\Omega_N|^2.$$

Подставляя последнюю оценку в (5.4) и используя (5.1), получаем неравенство (5.3). Лемма доказана.

Оценим сначала третий из интегралов в правой части (5.3). Далее будет удобно использовать следующее обозначение:

$$\xi_1 = N^{2\gamma+9\varepsilon_0}. \quad (5.5)$$

ЛЕММА 5.3. При $\gamma < \frac{1}{8}$ и $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > \xi_1}}^* \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через I интеграл в левой части (5.6). Поскольку $\bar{K} \geq 1$, $q > Q_0$, выполнены условия леммы 3.9, применяя которую, мы получаем

$$I \ll |\Omega_N|^2 \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{2-4\varepsilon_0}} \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} \frac{dK}{\bar{K}^{2-4\varepsilon_0}} \ll |\Omega_N|^2 \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{2-4\varepsilon_0}} \frac{Q_0}{q}, \quad (5.7)$$

так как $|K| \leq \frac{Q_0}{q} \leq 1$ и, следовательно, $\bar{K} = 1$. Подставляя (5.7) в (5.6), имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > \xi_1}}^* I \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N} \sum_{\xi_1 < q \leq N^{1/2}} \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{2-4\varepsilon_0}}. \quad (5.8)$$

В силу выбора параметра ξ_1 получаем

$$\sum_{\xi_1 < q \leq N^{1/2}} \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{2-4\varepsilon_0}} \leq \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{\xi_1^{1-4\varepsilon_0}} \leq N^{-\varepsilon_0} \ll 1. \quad (5.9)$$

Подставляя (5.9) в (5.8), получаем (5.6). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. При $\gamma < \frac{1}{8}$ и $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1 \\ q > Q_0}}^* \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через I интеграл в левой части (5.10). Поскольку $q > Q_0$, то $\bar{K} = 1$ и, следовательно, выполнены все условия леммы 3.8, применяя которую, мы получаем

$$I \ll |\Omega_N|^2 q^{4\gamma-2+12\varepsilon_0} \int_{|K| \leq \frac{Q_0}{q}} \frac{dK}{(\bar{K})^{1-4\gamma-12\varepsilon_0}} \ll |\Omega_N|^2 q^{4\gamma-3+12\varepsilon_0}, \quad (5.11)$$

так как $|K| \leq \frac{Q_0}{q} \leq 1$ и, следовательно, $\bar{K} = 1$. Подставляя (5.11) в (5.10), получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1 \\ q > Q_0}}^* I \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N} \sum_{1 \leq q \leq \xi_1} q^{4\gamma-2+12\varepsilon_0}.$$

В силу выбора параметров δ, ε_0 получаем (5.10). Лемма доказана.

Тем самым, мы оценили третий интеграл из правой части (5.3). Теперь оценим второй из них.

Рис. 1. Разбиение на области для теоремы 1.2

ЛЕММА 5.5. При $\gamma < \frac{1}{8}$ и $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{0 \leq a \leq q \leq Q_0}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через I интеграл в левой части (5.12). Применяя лемму 3.16, получаем

$$I \ll |\Omega_N|^2 q^{36\gamma/5-2+38\varepsilon_0} \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} (\overline{K})^{36\gamma/5-2+38\varepsilon_0} dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{q} \quad (5.13)$$

в силу выбора параметра γ . Суммируя (5.13) по $0 \leq a \leq q \leq Q_0$, получаем неравенство (5.12). Лемма доказана.

Осталось оценить первый интеграл из правой части (5.3), т. е.

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK. \quad (5.14)$$

Этому будут посвящены последующие леммы. Мы разобьем область суммирования и интегрирования по q, K на девять подобластей (рис. 1): области 1 соответствует лемма 5.6, области 2 – лемма 5.9, области 3 – лемма 5.8, области 4 – лемма 5.12, области 5 – лемма 5.10, области 6 – лемма 5.11, области 7 – лемма 5.13, области 8 – лемма 5.14, области 9 – лемма 5.15.

ЛЕММА 5.6. При $\gamma \leq \frac{13-\sqrt{145}}{8} - 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\xi_1 \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через I интеграл в левой части (5.15). Применяя лемму 3.9, получаем

$$I \ll |\Omega_N|^2 \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{2-4\varepsilon_0}} \int_{\xi_1 \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \frac{dK}{K^{2-4\varepsilon_0}} \ll |\Omega_N|^2 \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{2-4\varepsilon_0} \xi_1^{1-4\varepsilon_0}}. \quad (5.16)$$

Подставляя (5.16) в левую часть (5.15), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\xi_1 \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \\ \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N} \sum_{Q_0 < q \leq N^{1/2}} \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{1-4\varepsilon_0} \xi_1^{1-4\varepsilon_0}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

В силу выбора параметра ξ_1 получаем

$$\sum_{Q_0 < q \leq N^{1/2}} \frac{N^{2\gamma+2\varepsilon_0}}{q^{1-4\varepsilon_0} \xi_1^{1-4\varepsilon_0}} \ll \frac{N^{2\gamma+4\varepsilon_0}}{\xi_1^{1-4\varepsilon_0}} \ll N^{-\varepsilon_0/2} \ll 1. \quad (5.18)$$

Подставляя (5.18) в (5.17), получаем (5.15). Лемма доказана.

Пусть

$$c_1 = c_1(N), \quad c_2 = c_2(N), \quad Q_0 \leq c_1 < c_2 \leq N^{1/2},$$

и пусть

$$\begin{aligned} f_1 = f_1(N, q), \quad f_2 = f_2(N, q), \quad \frac{Q_0}{q} \leq f_1 < f_2 \leq \frac{N^{1/2}}{q}, \\ m_1 = \min\{f_1(N, N_j), f_1(N, N_{j+1})\}, \quad m_2 = \max\{f_2(N, N_j), f_2(N, N_{j+1})\}. \end{aligned}$$

Напомним, что последовательность $\{N_j\}_{j=-J-1}^{J+1}$ была определена в (2.29).

ЛЕММА 5.7. Если функции $f_1(N, q)$, $f_2(N, q)$ монотонны по q , то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{c_1 \leq q \leq c_2 \\ 1 \leq a \leq q}}^* \int_{f_1 \leq |K| \leq f_2} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \\ \leq \sum_{j: c_1^{1-\varepsilon_0} \leq N_j \leq c_2} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK. \end{aligned} \quad (5.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отрезок $[c_1, c_2]$ накроем отрезками вида $[N_j, N_{j+1}]$. Тогда

$$\sum_{c_1 \leq q \leq c_2} \leq \sum_{j: c_1^{1-\varepsilon_0} \leq N_j \leq c_2} \sum_{N_j \leq q \leq N_{j+1}}.$$

Подставляя последнюю формулу в левую часть (5.19) и меняя местами суммирование по q и интегрирование по K , получаем справедливость (5.19). Лемма доказана.

Во всех последующих леммах для упрощения записи обозначим $Q_1 = N_j$, $Q = N_{j+1}$. Используя соотношения из леммы 2.5, получаем

$$\frac{Q}{Q_1} \leq Q^{\varepsilon_0} \leq N^{\varepsilon_0/2}, \quad c_1^{1-\varepsilon_0} \leq Q_1 \leq c_2, \quad c_1 \leq Q \leq c_2^{1+\varepsilon_0/(1+\varepsilon_0)}.$$

Будем далее использовать эти оценки без ссылок на них. Напомним, что $\bar{K} = \max\{1, |K|\}$. Заметим, что всегда будет выполнено $m_2 \geq 1$, поэтому при $\eta < 1$ имеем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \frac{dK}{\bar{K}^\eta} \ll m_2^{1-\eta}. \quad (5.20)$$

При $\eta > 1$ всегда выполнено

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \frac{dK}{\bar{K}^\eta} < \frac{1}{m_1^{\eta-1}}. \quad (5.21)$$

Однако если $m_1 \leq 1$, то при $\eta > 1$ имеем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \frac{dK}{\bar{K}^\eta} \ll 1. \quad (5.22)$$

ЛЕММА 5.8. При $\gamma \leq \frac{13-\sqrt{145}}{8} - 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > N^{4\gamma+12\varepsilon_0}}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$c_1 = N^{4\gamma+12\varepsilon_0}, \quad c_2 = N^{1/2}, \quad f_1 = \frac{Q_0}{q}, \quad f_2 = \frac{N^{1/2}}{q}, \quad m_1 = \frac{Q_0}{Q}, \quad m_2 = \frac{N^{1/2}}{Q_1}.$$

Применяя следствие 3.1, получаем оценку

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 \left(N^{2\gamma-1+7\varepsilon_0} (\bar{K}Q) + \frac{N^{2\gamma+5.5\varepsilon_0}}{\bar{K}^2 Q^{1/2}} + \frac{N^{2\gamma-1/2+5.5\varepsilon_0}}{\bar{K}^{1/2}} \right). \quad (5.23)$$

Используя оценку (5.20) при интегрировании по K первого и третьего слагаемых в формуле (5.23) и оценку (5.22) при интегрировании второго, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \\ & \ll |\Omega_N|^2 \left(\frac{N^{2\gamma+8\varepsilon_0}}{Q} + \frac{N^{2\gamma+5.5\varepsilon_0}}{Q^{1/2}} + \frac{N^{2\gamma-1/4+7\varepsilon_0}}{Q^{1/2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $Q^{1/2} \geq N^{2\gamma+6\varepsilon_0}$ и $\gamma < \frac{1}{8} - 4\varepsilon_0$, получаем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll |\Omega_N|^2 N^{-\varepsilon_0}.$$

Так как количество слагаемых в сумме по j не превосходит $\log \log N$, лемма доказана.

ЛЕММА 5.9. При $\gamma \leq \frac{13-\sqrt{145}}{8} - 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{4\gamma+12\varepsilon_0} \\ q > N^{2\gamma+9\varepsilon_0}}}^* \int_{\substack{N^{4\gamma+15\varepsilon_0} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$\begin{aligned} c_1 &= N^{2\gamma+9\varepsilon_0}, & c_2 &= N^{4\gamma+12\varepsilon_0}, & f_1 &= \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{q}, & f_2 &= \frac{N^{1/2}}{q}, \\ m_1 &= \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{Q}, & m_2 &= \frac{N^{1/2}}{Q_1}. \end{aligned}$$

Применяя следствие 3.1, получаем (5.23). Используя оценку (5.20) при интегрировании по K первого и третьего слагаемых в (5.23) и оценку (5.21) при интегрировании второго, получаем

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \\ \ll |\Omega_N|^2 \left(\frac{N^{2\gamma+8\varepsilon_0}}{Q} + \frac{Q^{1/2}}{N^{2\gamma+9.5\varepsilon_0}} + \frac{N^{2\gamma-0.25+7\varepsilon_0}}{Q^{1/2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $N^{2\gamma+9\varepsilon_0} \leq Q \leq N^{4\gamma+16\varepsilon_0}$ и $\gamma < \frac{1}{8} - 4\varepsilon_0$, а количество слагаемых в сумме по j не превосходит $\log \log N$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j: c_1^{1-\varepsilon_0} \leq N_j \leq c_2} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \\ \ll |\Omega_N|^2 N^{-0.1\varepsilon_0} \log \log N \ll |\Omega_N|^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.10. При $\gamma \leq \frac{13-\sqrt{145}}{8} - 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{3\gamma+12\varepsilon_0} \\ q > N^{2\gamma+9\varepsilon_0}}}^* \int_{N^{\gamma+3\varepsilon_0} \leq |K| \leq \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$\begin{aligned} c_1 &= N^{2\gamma+9\varepsilon_0}, & c_2 &= N^{3\gamma+12\varepsilon_0}, & f_1 &= N^{\gamma+3\varepsilon_0}, & f_2 &= \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{q}, \\ m_1 &= N^{\gamma+3\varepsilon_0}, & m_2 &= \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{Q_1}. \end{aligned}$$

Применяя следствие 3.1, получаем оценку (5.23). Используя оценку (5.20) при интегрировании по K первого слагаемого в (5.23) и оценку (5.21) при интегрировании второго и третьего, получаем

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \\ \ll |\Omega_N|^2 \left(\frac{N^{10\gamma-0.25+39\varepsilon_0}}{Q} + \frac{N^{\gamma+3\varepsilon_0}}{Q^{1/2}} + \frac{N^{4\gamma-0.5+15\varepsilon_0}}{Q^{1/2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $N^{2\gamma+9\varepsilon_0} \leq Q \leq N^{3\gamma+12\varepsilon_0}$ и $\gamma < \frac{1}{8} - 4\varepsilon_0$, имеем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll |\Omega_N|^2 N^{-0.1\varepsilon_0}.$$

Так как количество слагаемых в сумме по j не превосходит $\log \log N$, лемма доказана.

ЛЕММА 5.11. При $\gamma \leq \frac{13-\sqrt{145}}{8} - 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{4\gamma+12\varepsilon_0} \\ q > N^{2\gamma+9\varepsilon_0}}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \min\{N^{\gamma+3\varepsilon_0}, \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{q}\}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$c_1 = N^{2\gamma+9\varepsilon_0}, \quad c_2 = N^{4\gamma+12\varepsilon_0}, \quad f_1 = \frac{Q_0}{q}, \quad f_2 = \min\left\{N^{\gamma+3\varepsilon_0}, \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{q}\right\},$$

$$m_1 = \frac{Q_0}{Q}, \quad m_2 = \min\left\{N^{\gamma+3\varepsilon_0}, \frac{N^{4\gamma+15\varepsilon_0}}{Q_1}\right\}$$

и оценим внутреннюю сумму в получившемся выражении. Применяя следствие 3.2, получаем

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 C_1^2 Q^{\varepsilon_0},$$

где C_1 определено в (3.77). Поскольку количество слагаемых в сумме по j в (5.19) не превосходит $\log \log N$, для доказательства леммы нам достаточно после интегрирования по K получить величину, меньшую $N^{-0.1\varepsilon_0}$. Сначала оценим вклад от всех, кроме четвертого, слагаемых в (3.77), при этом мы увеличим область интегрирования до $\bar{K} \leq N^{4\gamma+15\varepsilon_0}/Q_1$:

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} (C_1 - N^{3\gamma/2-1/2+5\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{1/2-\gamma/2})^2 Q^{\varepsilon_0} dK \ll N^{2\gamma+7\varepsilon_0} \frac{1}{Q}$$

$$+ N^{10\gamma-1+40\varepsilon_0} \frac{1}{Q} + N^{-4\gamma^2+5\gamma-1/2+20\varepsilon_0} \frac{1}{Q} + N^{-4\gamma^2+13\gamma-3/2+50\varepsilon_0}. \quad (5.24)$$

Используя оценку $Q \geq N^{2\gamma+9\varepsilon_0}$, получаем, что первые три слагаемых в формуле (5.24) меньше $N^{-0.1\varepsilon_0}$ при $\gamma < 1/8 - 6\varepsilon_0$. Четвертое слагаемое в (5.24) меньше $N^{-0.1\varepsilon_0}$ ввиду условий, налагаемых на γ, ε_0 . Осталось доказать, что

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} N^{3\gamma-1+10\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{1-\gamma} Q^{\varepsilon_0} dK \ll N^{-0.1\varepsilon_0}.$$

Имеем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} N^{3\gamma-1+10\varepsilon_0} (\bar{K}Q)^{1-\gamma} Q^{\varepsilon_0} dK$$

$$\ll N^{3\gamma-1+13\varepsilon_0} \min\{N^{(\gamma+3\varepsilon_0)(2-\gamma)} N^{(3\gamma+12\varepsilon_0)(1-\gamma)}, N^{(4\gamma+15\varepsilon_0)(2-\gamma)} N^{-(3\gamma+12\varepsilon_0)}\}$$

$$\ll N^{-4\gamma^2+2\gamma+31\varepsilon_0} \ll N^{-0.1\varepsilon_0},$$

где последняя оценка выполнена ввиду условий, налагаемых на γ, ε_0 . Лемма доказана.

ЛЕММА 5.12. При $\gamma \leq \frac{13-\sqrt{145}}{8} - 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{2\gamma+9\varepsilon_0} \\ q > N^{\gamma+3\varepsilon_0}}}^* \int_{\frac{N^{3\gamma+12\varepsilon_0}}{q} \leq |K| \leq \xi_1} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$\begin{aligned} c_1 &= N^{\gamma+6\varepsilon_0}, & c_2 &= N^{2\gamma+9\varepsilon_0}, & f_1 &= \frac{N^{3\gamma+12\varepsilon_0}}{q}, & f_2 &= \xi_1, \\ m_1 &= \frac{N^{3\gamma+12\varepsilon_0}}{Q}, & m_2 &= \xi_1. \end{aligned}$$

Применяя следствие 3.1, получаем оценку (5.23). Используя (5.20) при интегрировании по K первого и третьего слагаемых и (5.21) при интегрировании второго, получаем

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \\ \ll |\Omega_N|^2 \left(N^{2\gamma-1/4+7\varepsilon_0} Q \xi_1^2 + \frac{Q^{1/2}}{N^{\gamma+6\varepsilon_0}} + N^{2\gamma-1/2+6\varepsilon_0} \xi_1^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $Q \leq N^{2\gamma+10\varepsilon_0}$ и $\gamma < \frac{1}{8} - 5\varepsilon_0$, имеем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll |\Omega_N|^2 N^{-0.1\varepsilon_0}.$$

Так как количество слагаемых в сумме по j не превосходит $\log \log N$, лемма доказана.

ЛЕММА 5.13. При $\gamma \leq \frac{13-\sqrt{145}}{8} - 5\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq N^{2\gamma+9\varepsilon_0} \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{\xi_1}{q} \leq |K| \leq \min\{\xi_1, \frac{N^{3\gamma+12\varepsilon_0}}{q}\}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$\begin{aligned} c_1 &= Q_0, & c_2 &= \xi_1, & f_1 &= \frac{\xi_1}{q}, & f_2 &= \min\left\{ \xi_1, \frac{N^{3\gamma+12\varepsilon_0}}{q} \right\}, \\ m_1 &= \frac{\xi_1}{Q}, & m_2 &= \min\left\{ \xi_1, \frac{N^{3\gamma+12\varepsilon_0}}{Q_1} \right\} \end{aligned}$$

и оценим внутреннюю сумму в получившемся выражении. Применяя следствие 3.2, получаем

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 C_1^2 Q^{\varepsilon_0},$$

где C_1 определено в (3.77). Как обычно, нам достаточно после интегрирования по K получить величину, меньшую $N^{-0.1\varepsilon_0}$. Положим $Q_2 = \frac{N^{3\gamma+12\varepsilon_0}}{\xi_1}$. Тогда для любых α, β таких, что $-1 < \alpha, \beta \leq \alpha + 1$, имеем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \bar{K}^\alpha Q^\beta dK \ll \min \left\{ \xi_1^{\alpha+1} Q_2^\beta, \frac{N^{(3\gamma+12\varepsilon_0)(\alpha+1)}}{Q_2^{\alpha+1}} Q_2^\beta \right\} = \xi_1^{\alpha+1} Q_2^\beta. \quad (5.25)$$

Тогда, используя (3.76), получаем

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} C_1^2 Q^{\varepsilon_0} dK &\ll \frac{N^{2\gamma+7\varepsilon_0}}{\xi_1} + N^{2\gamma-1+8\varepsilon_0} \xi_1^2 Q_2 + N^{3\gamma-1/2+12\varepsilon_0} \frac{\xi_1^{1/2-\gamma}}{Q_2^{1/2+\gamma}} \\ &\quad + N^{3\gamma-1+12\varepsilon_0} \xi_1^{2-\gamma} Q_2^{1-\gamma} + N^{3\gamma-3/2+12\varepsilon_0} \xi_1^{5/2-\gamma} Q_2^{5/2-\gamma}, \end{aligned}$$

где при интегрировании по K первого слагаемого мы применили (5.21), а при интегрировании всех остальных – формулу (5.25). Подставляя ξ_1 и Q_2 , получаем, что ввиду условий, налагаемых на γ, ε_0 , каждое слагаемое меньше $N^{-0.1\varepsilon_0}$. Лемма доказана.

Обозначим

$$\nu = \frac{\sqrt{369} - 7}{20} = 0.61 \dots, \quad Q_C = \xi_1^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

ЛЕММА 5.14. При $\gamma \leq \frac{5}{\sqrt{369}+23} - 8\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1 \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \min\{q^\nu, \frac{\xi_1}{q}\}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (5.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем левую часть (5.26) на две суммы:

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1 \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \min\{q^\nu, \frac{\xi_1}{q}\}} = \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq Q_C \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq q^\nu} + \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1 \\ q > Q_C}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{\xi_1}{q}}. \quad (5.27)$$

Воспользуемся леммой 5.7 при

$$c_1 = Q_0, \quad c_2 = Q_C, \quad f_1 = \frac{Q_0}{q}, \quad f_2 = q^\nu, \quad m_1 = \frac{Q_0}{Q_1}, \quad m_2 = Q^\nu$$

для первой суммы и при

$$c_1 = Q_C, \quad c_2 = \xi_2, \quad f_1 = \frac{Q_0}{q}, \quad f_2 = \frac{\xi_1}{q}, \quad m_1 = \frac{Q_0}{Q_1}, \quad m_2 = \frac{\xi_1}{Q_1}$$

для второй. Для оценки каждой из двух сумм в (5.27) воспользуемся леммой 3.7:

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 \frac{\bar{K}^{4\gamma+12\varepsilon_0} Q^{6\gamma+1+20\varepsilon_0}}{\bar{K} Q_1^2}. \quad (5.28)$$

Условия леммы 3.7 выполнены в обеих областях в силу выбора параметра ξ_1 и условий, налагаемых на γ, ε_0 :

$$\bar{K}^2 Q^3 \leq Q_C^{3+2\nu+5\varepsilon_0} \leq N^{1-1.5\varepsilon_0}, \quad \bar{K}^2 Q^3 \leq \xi_1^2 Q^{1+2\varepsilon_0} \leq \xi_1^{3+5\varepsilon_0} \leq N^{1-1.5\varepsilon_0}.$$

Рассмотрим первую сумму из формулы (5.27). Тогда, используя (5.28) и (5.20) при интегрировании по K получаем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 Q^{6\gamma-1+22\varepsilon_0} Q^{\nu(4\gamma+12\varepsilon_0)}.$$

Для того чтобы сумма по j , возникшая после применения леммы 5.7, была ограничена константой, достаточно, чтобы выполнялось

$$\gamma \leq \frac{1 - (23 + 12\nu)\varepsilon_0}{6 + 4\nu} \Rightarrow 6\gamma - 1 + 22\varepsilon_0 + \nu(4\gamma + 12\varepsilon_0) \leq -0.1\varepsilon_0. \quad (5.29)$$

Подставляя в (5.29) значение ν , получаем, что на самом деле достаточно оценки $\gamma \leq \frac{5}{\sqrt{369+23}} - 5\varepsilon_0$.

Рассмотрим вторую сумму из формулы (5.27). Тогда, используя соотношения (5.28) и (5.20) при интегрировании по K , получаем

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 &\ll |\Omega_N|^2 Q^{6\gamma-1+22\varepsilon_0} \frac{\xi_1^{4\gamma+12\varepsilon_0}}{Q^{4\gamma+12\varepsilon_0}} \\ &\leq |\Omega_N|^2 Q_C^{2\gamma-1+10\varepsilon_0} \xi_1^{4\gamma+12\varepsilon_0} = |\Omega_N|^2 \xi_1^{4\gamma+12\varepsilon_0+(2\gamma-1+10\varepsilon_0)/(\nu+1)}. \end{aligned}$$

Для того чтобы сумма по j , возникшая после применения леммы 5.7, была ограничена константой, достаточно, чтобы выполнялось

$$4\gamma + 12\varepsilon_0 + \frac{2\gamma - 1 + 10\varepsilon_0}{\nu + 1} < -0.1\varepsilon_0,$$

что равносильно

$$\gamma \leq \frac{1 - (23 + 12\nu)\varepsilon_0}{6 + 4\nu}.$$

Последнее неравенство проверяется аналогично (5.29). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.15. При $\gamma \leq \frac{5}{\sqrt{369+23}} - 8\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq Q_C \\ q > Q_0}}^* \int_{q^\nu \leq |K| \leq \frac{\xi_1}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$c_1 = Q_0, \quad c_2 = Q_C, \quad f_1 = q^\nu, \quad f_2 = \frac{\xi_1}{q}, \quad m_1 = Q_1^\nu, \quad m_2 = \frac{\xi_1}{Q_1}.$$

Проверим, выполнены ли условия леммы 3.15:

$$(\overline{K}Q)^{\frac{18}{5}+21\varepsilon_0} Q \leq \left(\frac{\xi_1 Q}{Q_1} \right)^{\frac{18}{5}+21\varepsilon_0} Q \leq \xi_1^{\frac{18}{5}+21\varepsilon_0} Q_C^{1+5\varepsilon_0} \leq \xi_1^{\frac{18\nu+23}{5(\nu+1)}+24.5\varepsilon_0} < N.$$

Подставляя сюда значение ξ_1 (см. (5.5)), получаем, что последнее неравенство следует из неравенства

$$\gamma \leq \frac{5(1+\nu)}{46+36\nu} - 7\varepsilon_0,$$

которое выполнено ввиду определения ν и условий, налагаемых на γ . Применяя лемму 3.15, получаем

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 \bar{K}^{\frac{36}{5}\gamma + 44\varepsilon_0 - 2} Q^{\frac{46}{5}\gamma + 64\varepsilon_0 - 1}. \quad (5.30)$$

Используя (5.30) и (5.21) при интегрировании по K , получаем

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK &\ll |\Omega_N|^2 Q^{\frac{46}{5}\gamma + 64\varepsilon_0 - 1} Q_1^{\nu(\frac{36}{5}\gamma + 44\varepsilon_0 - 1)} \\ &\leq |\Omega_N|^2 Q^{\frac{46}{5}\gamma - 1 + \nu(\frac{36}{5}\gamma - 1) + 96\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Для того чтобы сумма по j , возникшая после применения леммы 5.7, была ограничена константой, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\gamma \leq \frac{5(1 + \nu)}{46 + 36\nu} - 8\varepsilon_0,$$

справедливость которого следует из определения ν и условий, налагаемых на γ . Лемма доказана.

5.2. Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\gamma < \frac{5}{\sqrt{369} + 23}$. Выбираем ε_0 такое, что $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$ и $\gamma \leq \frac{5}{\sqrt{369} + 23} - 8\varepsilon_0$. Тогда из лемм 5.6–5.15 следует, что и первый интеграл из правой части (5.3) меньше $\frac{|\Omega_N|^2}{N}$, т. е.

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq a \leq q \leq N^{1/2} \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \frac{N^{1/2}}{q}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}. \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) и результаты лемм 5.3–5.5 в лемму 5.2, получаем

$$\int_0^1 |S_N(\theta)|^2 d\theta \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}, \quad \gamma < \frac{27 - \sqrt{633}}{16}.$$

Таким образом, нами доказано неравенство (2.10), что, как показано в п. 2.3, достаточно для доказательства теоремы 1.2. Теорема доказана.

5.3. Доказательство теоремы 1.3. Теорема 1.3 доказывается аналогично теореме 1.2. Необходимо лишь заменить в рассуждениях из п. 5.1 лемму 1.1 на лемму 1.2, т. е. использовать вместо лемм 3.15, 3.16 леммы 3.17, 3.18. Так, используя при доказательстве леммы 5.5 лемму 3.18, получаем, что (5.12) выполнено при $\gamma < \frac{1}{10}$ и $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$. Таким образом, осталось оценить величину (5.14). Мы разобьем область суммирования и интегрирования по q, K на восемь подобластей (рис. 2): области 1 соответствует лемма 5.6, области 2 – лемма 5.9, области 3 – лемма 5.8, области 5 – лемма 5.10, области 6 – лемма 5.11, области 7 – лемма 5.18, области 8 – лемма 5.17, области 9 – лемма 5.16.

Обозначим

$$\mu = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1.58 \dots, \quad Q_B = N^{\frac{1-10\varepsilon_0}{8+5\mu}}.$$

ЛЕММА 5.16. При $\gamma \leq \frac{1}{6+2\sqrt{10}} - 8\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq Q_B \\ q > Q_0}}^* \int_{\substack{q^\mu \leq |K| \leq \xi_1 \\ |K|^5 q^8 \leq N^{1-10\varepsilon_0}}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

Рис. 2. Разбиение на области для теоремы 1.3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$c_1 = Q_0, \quad c_2 = Q_B, \quad f_1 = q^\mu, \quad f_2 = \min \left\{ \xi_1, \frac{N^{1/5-2\varepsilon_0}}{q^{8/5}} \right\},$$

$$m_1 = Q_1^\mu, \quad m_2 = \min \left\{ \xi_1, \frac{N^{1/5-2\varepsilon_0}}{Q_1^{8/5}} \right\}.$$

Проверим, выполнены ли условия леммы 3.17:

$$\overline{K}^{5+35\varepsilon_0} Q^{8+50\varepsilon_0} \leq N^{1-10\varepsilon_0} \overline{K}^{35\varepsilon_0} Q^{50\varepsilon_0} \leq N^{1-10\varepsilon_0} (\overline{K}^5 Q^8)^{7\varepsilon_0} < N.$$

Применяя лемму 3.17, получаем

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 \overline{K}^{10\gamma-2+65\varepsilon_0} Q^{16\gamma-1+101\varepsilon_0}.$$

Используя (5.21) при интегрировании по K , получаем

$$\int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} \sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll |\Omega_N|^2 Q^{16\gamma-1+101\varepsilon_0} Q_1^\mu (10\gamma-1+65\varepsilon_0)$$

$$\leq |\Omega_N|^2 Q^{16\gamma-1+\mu(10\gamma-1)+86\varepsilon_0}.$$

Для того чтобы сумма по j , возникшая после применения леммы 5.7, была ограничена константой, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\gamma \leq \frac{1+\mu}{16+10\mu} - 7\varepsilon_0,$$

справедливость которого следует из определения μ и условий, налагаемых на γ . Лемма доказана.

ЛЕММА 5.17. При $\gamma \leq \frac{1}{6+2\sqrt{10}} - 8\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1 \\ q > Q_0}}^* \int_{\frac{Q_0}{q} \leq |K| \leq \min\{q^\mu, \xi_1\}} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству леммы 5.14. Необходимо лишь проверить условия леммы 3.7:

$$\overline{K}^2 Q^3 \leq \xi_1^5 \leq N^{1-1.5\varepsilon_0},$$

в силу выбора параметра ξ_1 и условий, налагаемых на γ , ε_0 . Лемма доказана.

ЛЕММА 5.18. При $\gamma \leq \frac{1}{6+2\sqrt{10}} - 8\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0, \frac{1}{2500})$, имеет место неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \leq \xi_1^{1/\mu} \\ q > Q_0}}^* \int_{\min\left\{\frac{N^{1/5-2\varepsilon_0}}{q^{8/5}}, q^\mu\right\} \leq |K| \leq \xi_1} \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 dK \ll \frac{|\Omega_N|^2}{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5.7 при

$$\begin{aligned} c_1 &= Q_0, & c_2 &= \xi_1^{1/\mu}, & f_1 &= \min\left\{\frac{N^{1/5-2\varepsilon_0}}{q^{8/5}}, q^\mu\right\}, & f_2 &= \xi_1, \\ m_1 &= \min\left\{\frac{N^{1/5-2\varepsilon_0}}{Q^{8/5}}, Q_1^\mu\right\}, & m_2 &= \xi_1. \end{aligned}$$

Оценим внутреннюю сумму в получившемся выражении. Применяя следствие 3.2, получаем

$$\sum_{\substack{N_j \leq q \leq N_{j+1} \\ 1 \leq a \leq q}}^* \left| S_N \left(\frac{a}{q} + \frac{K}{N} \right) \right|^2 \ll |\Omega_N|^2 C_1^2 Q^{\varepsilon_0}, \quad (5.32)$$

где C_1 определено в (3.77). Как обычно, нам достаточно после интегрирования по K получить величину, меньшую $N^{-0.1\varepsilon_0}$. Обозначим $Q_3 = \xi_1^{1/\mu}$. Тогда, используя (5.32), получаем

$$\begin{aligned} \int_{m_1 \leq |K| \leq m_2} C_1^2 Q^{\varepsilon_0} dK &\ll \frac{N^{2\gamma+7\varepsilon_0}}{Q_B^{1+\mu}} + N^{2\gamma-1+8\varepsilon_0} \xi_1^2 Q_3 + N^{3\gamma-1/2+12\varepsilon_0} \frac{\xi_1^{1/2-\gamma}}{Q_3^{1/2+\gamma}} \\ &+ N^{3\gamma-1+12\varepsilon_0} \xi_1^{2-\gamma} Q_3^{1-\gamma} + N^{3\gamma-3/2+12\varepsilon_0} \xi_1^{5/2-\gamma} Q_3^{5/2-\gamma}. \end{aligned}$$

где при интегрировании по K первого слагаемого мы применили (5.21), а при интегрировании всех остальных – формулу (5.20). Подставляя ξ_1 и Q_B , Q_3 в (5.32), получаем, что ввиду условий, налагаемых на γ , ε_0 , каждое слагаемое меньше $N^{-0.1\varepsilon_0}$. Лемма доказана.

Список литературы

1. S. K. Zaremba, “La méthode des “bons treillis” pour le calcul des intégrales multiples”, *Applications of number theory to numerical analysis* (Montreal, Canada, 1971), Academic Press, New York, 1972, 39–119.
2. Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, Физматгиз, М., 1963.

3. J. Bourgain, A. Kontorovich, “On Zaremba’s conjecture”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **349**:9–10 (2011), 493–495.
4. N. G. Moshchevitin, *On some open problems in Diophantine approximation*, [arXiv: abs/1202.4539v4](#).
5. D. Hensley, “The Hausdorff dimensions of some continued fraction Cantor sets”, *J. Number Theory*, **33**:2 (1989), 182–198.
6. O. Jenkinson, “On the density of Hausdorff dimensions of bounded type continued fraction sets: the Texan conjecture”, *Stochastics and Dynamics*, **4** (2004), 63–76.
7. J. Bourgain, A. Kontorovich, P. Sarnak, “Sector estimates for hyperbolic isometries”, *Geom. Funct. Anal.*, **20**:5 (2010), 1175–1200.
8. Е. В. Подсыпанин, “Распределение целых точек на детерминантной поверхности”, *Исследования по теории чисел*. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **93**, Наука, Ленинград. отд., Л., 1980, 30–40; англ. пер.: E. V. Podsypanin, “Distribution of integral points on the determinant surface”, *J. Soviet Math.*, **19**:2 (1982), 1088–1095.
9. D. Hensley, “The distribution of badly approximable numbers and continuants with bounded digits”, *Théorie des nombres* (Quebec, PQ, 1987), de Gruyter, Berlin, 1989, 371–385.
10. D. A. Frolenkov, I. D. Kan, *A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem by elementary methods*, [arXiv: abs/1207.4546](#).
11. D. A. Frolenkov, I. D. Kan, *A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem*, [arXiv: abs/1207.5168](#).
12. Р. Л. Грэхем, Д. Э. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998; пер. с англ.: R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
13. H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
14. С. В. Конягин, “Оценки тригонометрических сумм по подгруппам и сумм Гаусса”, *IV Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”*. Актуальные проблемы, ч. III (Тула, 2001), Изд-во Моск. ун-та, М., 2002, 86–114.
15. Н. М. Коробов, *Тригонометрические суммы и их приложения*, Наука, М., 1989.
16. D. E. Knuth, A. C. Yao, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:12 (1975), 4720–4722.
17. К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967; пер. с нем.: K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.

ИГОРЬ ДАВИДОВИЧ КАН
(IGOR D. KAN)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет
E-mail: igor.kan@list.ru

Поступило в редакцию
10.07.2012

24.05.2013

ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ ФРОЛЕНКОВ
(DMITRII A. FROLENKOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: frolenkov_adv@mail.ru