Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Штепин, Д. Л. Конашенков, Характеры и размерности представлений со старшим весом промежуточной группы Ли $D_{n-1/2}$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 205–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:22:55

УДК 519.46

В. В. Штепин, Д. Л. Конашенков

Характеры и размерности представлений со старшим весом промежуточной группы Ли $D_{n-1/2}$

Исследуются представления со старшим весом неполупростой комплексной группы Ли $D_{n-1/2}$, используемой для разделения кратных точек спектра в редукции $D_n \downarrow D_{n-1}$. В частности, найдены формулы для характеров и размерностей этих представлений, которые оказались аналогичными известным формулам Г. Вейля для классических групп Ли.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: полуклассические промежуточные группы Ли, конечномерные представления со старшим весом, правила ветвления, весовой базис, характер и размерность представления группы Ли.

§ 1. Введение

В настоящей работе продолжено изучение конечномерных представлений со старшим весом неполупростых промежуточных групп Ли (см. [1]–[3]). Они возникают естественным образом из следующей известной задачи спектрального анализа представлений классических групп Ли. Пусть T_m – конечномерное неприводимое представление комплексной простой группы Ли G_n одной из серий A_n , B_n , C_n или D_n , m – старший вес представления T_m . Требуется описать спектр сужения T_m на максимальную одноименную подгруппу G_{n-1} меньшего ранга¹ (т. е. A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} или D_{n-1} соответственно). Правило, описывающее разложение $T_m|_{G_{n-1}}$ в прямую сумму неприводимых, называется *правилом ветвления*. Для простых комплексных групп Ли правила ветвления были получены Г. Вейлем для унимодулярной серии (см. [4]), И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным для двух ортогональных серий (см. [5]) и Д. П. Желобенко для симплектической серии (см. [6]). Отметим, что во всех четырех случаях спектр $T_m|_{G_{n-1}}$ может содержать кратные точки.

Традиционный метод разделения кратных точек спектра (метод Гельфанда–Цетлина; см., например, [7, гл. 10]) предусматривает построение цепочки полупростых (или редуктивных) подгрупп

$$G_{n-1} = G^0 \subset G^1 \subset G^2 \subset \dots \subset G^s = G_n$$

такой, что спектр сужения каждого неприводимого G^i -подмодуля T_m на G^{i-1} , $i = 1, 2, \dots, s$, является простым. Однако этот метод является неприменимым

¹Вложение G_{n-1} в G_n предполагается регулярным.

к редукциям $A_n \downarrow A_{n-1}$ и $C_n \downarrow C_{n-1}$ (так как не существует подходящих в смысле правила ветвления промежуточных полупростых подгрупп между указанными парами групп Ли), в то время как в редукциях $B_n \downarrow B_{n-1}$ и $D_n \downarrow D_{n-1}$ этот метод приводит к построению базиса в пространстве представления T_m , не являющегося весовым. Более глубокая причина недостаточности использования цепочки вложений

$$\mathrm{SO}(2, C) \subset \mathrm{SO}(3, C) \subset \cdots \subset \mathrm{SO}(2n, C)$$

указана во введении к работе [3].

В работах [1]–[3] было предложено обобщение метода Гельфанда–Цетлина, использующее неполупростые промежуточные подгруппы $G_{n-1/2}$ такие, что

$$G_{n-1} \subset G_{n-1/2} \subset G_n.$$

Было показано, что “освобождения от кратностей” можно добиться не за счет разложения T_m в прямую сумму подпредставлений $G_{n-1/2}$, а путем построения в T_m фильтрации $(G_{n-1/2})$ -подпредставлений, разделяющей изоморфные компоненты $T_m|_{G_{n-1}}$. Под фильтрацией f , разделяющей изоморфные компоненты $T_m|_{G_{n-1}}$, мы подразумеваем фильтрацию $(G_{n-1/2})$ -подпредставлений в T_m такую, что:

а) f – фильтрация без кратностей (ее различные факторы попарно не изоморфны);

б) сужения факторов f на G_{n-1} имеют однократный спектр.

Построение искомой фильтрации f можно вести как на уровне групп Ли, так и на уровне алгебр Ли, но в работах [1]–[3] применялся инфинитезимальный подход. Не углубляясь в детали, напомним основные этапы этого построения, так как это объясняет происхождение категории $\mathcal{L}$ представлений $G_{n-1/2}$ со старшим весом.

Пусть V_m – конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}_n$ -модуль со старшим весом m , $\mathfrak{g}_n$ – алгебра Ли группы Ли G_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Вектор $v \in V_m$, собственный относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ и старший относительно $\mathfrak{g}_{n-1}$, называется *полустаршим*.

Отметим, что наличие кратностей в сужении $T_m|_{G_{n-1}}$ связано с наличием полустарших векторов одного и того же веса относительно $\mathfrak{h}_n$. Хотя алгебра Ли $\mathfrak{g}_{n-1/2}$ не полупроста, можно указать векторы в V_m , в определенном смысле старшие относительно $\mathfrak{g}_{n-1/2}$ (так называемые квазистаршие векторы). При подходящем выборе цепочки вложений $\mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_{n-1/2} \subset \mathfrak{g}_n$ (вложения $\mathfrak{d}_{n-1} \subset \mathfrak{d}_{n-1/2} \subset \mathfrak{d}_n$ описаны в §3) определение квазистаршего вектора может быть дано единым образом для всех четырех серий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 (ср. [8], [9]). Полустарший вектор $v \in V_m$, удовлетворяющий соотношениям $X_{in}v = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, называется *квазистаршим*.

Обозначим через V_m^+ (соответственно, V_m^{++}) линейную оболочку множества полустарших (соответственно, квазистарших) векторов. Подпространство V_m^+ будем называть *пространством полустарших векторов* (соответственно, V_m^{++} – *пространством квазистарших векторов*). В отличие от полустарших векторов квазистаршие векторы разделены на весовой диаграмме V_m , т.е. в V_m^{++} существует весовой базис Q , состоящий из квазистарших векторов с попарно различными весами относительно $\mathfrak{h}_n$ (см. [1, предложения 2.4, 2.5] и предложение 2.3 в [2] и [3]). Пусть на множестве Q задана нумерация ξ (линейный порядок) такая, что

$$q_1 \underset{\xi}{<} q_2 \underset{\xi}{<} \cdots \underset{\xi}{<} q_N,$$

причем q_1 – квазистарший вектор старшего веса, q_N – квазистарший вектор младшего веса среди всех квазистарших векторов. Пусть f_ξ – фильтрация $\mathfrak{g}_{n-1/2}$ -подмодулей V_m , в которой модуль D_i порождается квазистаршими векторами $q_1, q_2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Фильтрации f_ξ поставим в соответствие присоединенный градуированный модуль

$$D_\xi = \bigoplus_{i=1}^N D_i / D_{i-1}.$$

В работах [1]–[3] для всех четырех картановских серий была доказана следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует нумерация ξ множества Q такая, что соответствующая фильтрация f_ξ $\mathfrak{g}_{n-1/2}$ -подмодулей V_m разделяет изоморфные компоненты $V_m|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$.*

Нумерация ξ , удовлетворяющая условиям теоремы 1.1, строится, вообще говоря, неоднозначно. Утверждение этой теоремы можно дополнить следующим предложением, которое показывает, что присоединенный градуированный модуль D_ξ фактически не зависит от выбора ξ , т.е. имеет инвариантный смысл.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть ξ и η – нумерации множества Q такие, что соответствующие фильтрации f_ξ и f_η разделяют изоморфные компоненты $V_m|_{\mathfrak{g}_{n-1}}$. Тогда $D_\xi \cong D_\eta$ (изоморфизм $\mathfrak{g}_{n-1/2}$ -модулей).*

Доказательство предложения 1.1 для симплектической серии приведено в работе [9], для остальных серий доказательство аналогично. Следовательно, инвариантный смысл имеет также соответствующий T_m присоединенный градуированный $G_{n-1/2}$ -модуль $\bigoplus_{l \rightarrow m} T_l$, где представления T_l действуют в факторпространствах фильтрации² f . Если учесть, что представление T_l группы Ли $G_{n-1/2}$ является циклическим, порожденным единственным старшим вектором веса l , то понятно, что T_l является представлением со старшим весом.

²По построению фильтрации f каждый ее фактор порождается образом некоторого квазистаршего вектора, l – старший вес этого вектора. Запись $l \rightarrow m$ означает, что вес l подчинен m . Точный смысл условий подчинения см. в § 2.

Из определения фильтрации f следует, что представления T_{l_1}, T_{l_2} , отвечающие различным весам l_1, l_2 , подчиненным m , попарно не изоморфны.

Обозначим через $\mathcal{L}$ категорию представлений $T_l, l \rightarrow m$, групп Ли $G_{n-1/2}$, получаемых из всевозможных неприводимых представлений T_m группы Ли G_n как факторпредставления фильтраций, разделяющих изоморфные компоненты $T_m|_{G_{n-1}}$. Мы называем $\mathcal{L}$ *категорией представлений со старшим весом*. Представления этой категории, как правило, приводимы, но неразложимы. Для неполупростых групп Ли $G_{n-1/2}$ эти представления имеют такое же значение, какое для полупростых групп Ли имеют конечномерные неприводимые представления. В связи с категорией $\mathcal{L}$ важное значение имеет решение следующих проблем:

- 1) описать множество старших весов представлений категории $\mathcal{L}$;
- 2) описать спектры сужений на G_{n-1} представлений категории $\mathcal{L}$;
- 3) найти формулы для характеров и размерностей представлений категории $\mathcal{L}$ группы Ли $G_{n-1/2}$.

Для унимодулярной и симплектической серий все перечисленные проблемы были решены в работе [1]. В настоящей работе мы рассматриваем серию D и соответствующую категорию представлений групп $D_{n-1/2}$ со старшим весом. Серия B будет рассмотрена позже.

В § 2 рассматриваются правила ветвления для редукции $G_n \downarrow G_{n-1}$, определяются промежуточные группы Ли $G_{n-1/2}$, описываются их разложения Леви–Мальцева. Основной здесь является теорема 2.1, гарантирующая возможность разделения изоморфных компонент представления $T_m|_{G_{n-1}}$ посредством промежуточной подгруппы $G_{n-1/2}$. Мы показываем также, как цепочка редукций

$$D_1 \subset D_{2-1/2} \subset D_2 \subset \cdots \subset D_{n-1} \subset D_{n-1/2} \subset D_n$$

позволяет построить канонический *весовой* базис в пространстве V_m представления T_m .

Группа Ли $D_{n-1/2}$ и ее алгебра Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ изучаются в § 3, здесь описаны их свойства, важные с точки зрения теории представлений.

Следующий § 4 посвящен доказательству формул для характеров представлений $\mathcal{L}(\lambda)$ группы Ли $D_{n-1/2}$.

Наконец, в § 5 мы выводим формулу для размерностей вышеупомянутых конечномерных представлений категории $\mathcal{L}$. Отметим, что полученные нами формулы для характеров и размерностей представлений со старшим весом аналогичны известным формулам Г. Вейля для характеров и размерностей неприводимых представлений классических групп Ли [10].

§ 2. Промежуточные группы Ли

Мы будем рассматривать четыре серии комплексных простых групп Ли A_n, B_n, C_n и D_n и неполупростые группы Ли, занимающие промежуточное положение между классическими. Эти последние группы мы будем называть

полуклассическими. Пусть T_m – конечномерное неприводимое представление комплексной простой группы Ли G_n одной из четырех упомянутых серий, m – старший вес представления T_m . Напомним, что множество P_n старших весов группы G_n находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности ее конечномерных неприводимых представлений и в зависимости от серии имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_n^A &= P_n^C = \{(m_1, \dots, m_n); m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 0, m_i \in \mathbb{Z}\}, \\ P_n^B &= \left\{ (m_1, \dots, m_n); m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 0, m_i \in \mathbb{Z} \text{ или } m_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\}, \\ P_n^D &= \left\{ (m_1, \dots, m_n); m_1 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq |m_n|, m_i \in \mathbb{Z} \text{ или } m_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Мы обозначим через G_{n-1} соответствующие максимальные одноименные подгруппы меньшего ранга, т. е. A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} и D_{n-1} соответственно. Как было отмечено во введении, правила ветвления для серий Картана известны уже давно. Замечательно то, что для всех четырех серий их можно записать в общем виде

$$T_m|_{G_{n-1}} = \bigoplus_{l \rightarrow m} \left(\bigoplus_{t \rightarrow l} T_t \right), \quad m \in P_n, \quad (2.1)$$

где суммирование ведется по всем весам l , значения которых будут определены ниже, и $t \in P_{n-1}$. Стрелками обозначены определенные условия подчинения для старших весов. Эти условия различны для каждой из серий и могут быть описаны системами неравенств

$$l \rightarrow m \iff \begin{cases} A: m_1 - l_1 = m_2 - l_2 = \dots = m_n - l_n \geq 0, \\ C: m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq m_n \geq l_n, \\ B: m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq m_n \geq |l_n|, \\ D: m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq l_2 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq l_{n-1} \geq |m_n|; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$t \rightarrow l \iff \begin{cases} A, C: l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq t_2 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq l_n, \\ B: l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq t_2 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq |l_n|, \\ D: l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq t_2 \geq \dots \geq l_{n-1} \geq |t_{n-1}|. \end{cases} \quad (2.3)$$

Правило ветвления, записанное в общем виде (2.1), позволяет выдвинуть гипотезу о том, что пространство $\bigoplus_{t \rightarrow l} T_t$ может быть наделено структурой не только G_{n-1} -модуля, но также структурой модуля над некоторой подгруппой Ли, промежуточной между G_{n-1} и G_n . В терминологии И. М. Гельфанда и А. В. Зелевинского (см. [11]) это означает, что модуль $\bigoplus_{t \rightarrow l} T_t$ обладает “скрытой симметрией”. Мы обозначаем эту группу $G_{n-1/2}$. Определение группы $G_{n-1/2}$ может быть дано более точно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем стабилизатор ненулевого вектора (в случаях A или C) и стабилизатор ненулевого изотропного вектора (в случаях B или D) в пространстве стандартного представления группы Ли G_n *полуклассической*

промежуточной группой Ли и обозначим $G_{n-1/2}$. Стандартным называют представление со старшим весом $(1, 0, \dots, 0) \in P_n$.

При таком определении условие $G_{n-1} \subset G_{n-1/2} \subset G_n$, очевидно, выполнено. Следующее предложение описывает внутреннее строение групп Ли $G_{n-1/2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Группы Ли $G_{n-1/2}$ не редуктивны. Разложения Леви–Мальцева групп Ли $G_{n-1/2}$ серий A , B и C описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{n-1/2} &\simeq A_{n-1} \ltimes \mathbb{C}^n, & B_{n-1/2} &\simeq B_{n-1} \ltimes \mathbb{C}^{2n-1}, \\ C_{n-1/2} &\simeq C_{n-1} \ltimes \mathbb{H}_{2n-1}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{H}_{2n-1}$ – группа Гейзенберга размерности $2n-1$, $\ltimes$ – полупрямое произведение групп Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1], [2].

Группа Ли $D_{n-1/2}$ подробно рассматривается в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть T_m – конечномерное неприводимое представление группы Ли G_n со старшим весом $t \in P_n$. Тогда сужение T_m на G_{n-1} допускает разделение изоморфных компонент посредством промежуточной подгруппы $G_{n-1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1] для унимодулярной и симплектической серий, в [2] для серии B , в [3] для серии D .

Под разделением изоморфных компонент мы подразумеваем построение фильтрации f ($G_{n-1/2}$)-подпредставлений в T_m такой, что:

а) f – фильтрация, свободная от кратностей (т.е. ее различные факторы попарно не изоморфны);

б) сужения факторов фильтрации f на G_{n-1} имеют простой спектр.

Отметим, что если условия а) и б) выполняются, то изоморфные неприводимые компоненты представления $T_m|_{G_{n-1}}$ можно различать, относя их к неизоморфным факторам фильтрации f .

Заметим, кроме того, что если промежуточные подгруппы в этом определении просты, то наше разделение изоморфных компонент сводится к традиционному методу Гельфанда–Цетлина. В этом случае можно заменить факторы фильтрации прямыми слагаемыми, а фильтрацию f – прямой суммой. Однако, как это следует из предложения 2.1, все группы $G_{n-1/2}$ не редуктивны и, следовательно, не полупросты.

Напомним, что условия подчинения (2.2), (2.3) для ортогональных серий, доказанные Гельфандом и Цетлиным для цепочки редукций

$$D_1 \subset B_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_{n-1} \subset B_{n-1} \subset D_n, \quad (2.4)$$

становятся некорректными для цепочки редукций

$$D_1 \subset D_{2-1/2} \subset D_2 \subset \dots \subset D_{n-1} \subset D_{n-1/2} \subset D_n \quad (2.5)$$

(см. [3, пример 2.1]).

Можно ли “исправить” правило ветвления так, чтобы оно соответствовало последней цепочке редукций? Ответ был получен в работе [3] и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} l \rightarrow m &\iff m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq l_{n-1} \geq -m_n, \\ t \rightarrow l &\iff l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq t_2 \geq \dots \geq l_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(m_n, l_{n-1}) \\ &\geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq l_{n-1} + m_n - \mu(m_{n-1}, t_{n-2}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где введены обозначения $\nu(a, b) = \max(a, b)$, $\mu(a, b) = \min(a, b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что тройка весов $t \in P_{n-1}^D$, $l \in P_{n-1}^D$, $m \in P_n^D$ образует кортеж $\{t, l, m\}$, если $t \rightarrow l \rightarrow m$, где условия подчинения весов такие же, как в (2.6).

В [3, следствие 3.1] был построен весовой базис $\{w(t, l, m), \{t, l, m\} - \text{кортеж}\}$ пространства V_m^+ , состоящий из полустарших векторов $w(t, l, m)$. Пусть $W(t, l, m)$ – циклический $\mathfrak{d}_{n-1}$ -подмодуль V_m , порожденный вектором $w(t, l, m)$, $t \rightarrow l \rightarrow m$. Согласно [3, предложение 2.2, (б)] подмодули $W(t, l, m)$ неприводимы и V_m разлагается в их прямую сумму:

$$V_m|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus_{t \rightarrow l \rightarrow m} W(t, l, m).$$

Рассуждая индуктивно, мы можем считать, что в подпространствах $W(t, l, m)$ уже построены весовые базисы. Таким образом, мы получаем канонический весовой базис $\mathfrak{d}_n$ -модуля V_m . Термин “канонический” означает, что этот базис связан с цепочкой однократных редукций (2.5). Цепочка Гельфанда–Цетлина (2.4) также содержит однократные редукции, но, как хорошо известно, приводит к построению базиса пространства V_m , не являющегося весовым.

§ 3. Группа Ли $D_{n-1/2}$ и ее алгебра Ли

Комплексной простой группой Ли типа D_n называют собственную ортогональную группу $\mathrm{SO}(2n)$, состоящую из всех ортогональных преобразований комплексного $2n$ -мерного пространства $\mathbb{C}^{2n}$, не изменяющих ориентацию.

Зафиксируем в $\mathbb{C}^{2n}$ базис $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-2}, e_{-1}$ и скалярное произведение, определяемое формулой

$$(x, y) = x_1 y_{-1} + \dots + x_n y_{-n} + x_{-n} y_n + \dots + x_{-1} y_1.$$

Тогда группа $\mathrm{SO}(2n)$ состоит из всех элементов g , удовлетворяющих матричному уравнению

$$\sigma^{-1} g \sigma = (g^T)^{-1},$$

где σ – матрица, все элементы побочной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны нулю. Промежуточную подгруппу $D_{n-1/2}$ можно определить как стабилизатор ненулевого изотропного вектора в пространстве

стандартного представления группы Ли $SO(2n)$. Как замкнутая подгруппа группы Ли промежуточная подгруппа $D_{n-1/2}$ является комплексной группой Ли.

Зафиксируем выбор вложений $SO(2n-2) \subset D_{n-1/2} \subset SO(2n)$ следующим образом. Подгруппа $D_{n-1/2}$ группы Ли $SO(2n)$ является стабилизатором n -го базисного вектора e_n пространства $\mathbb{C}^{2n}$, а $SO(2n-2)$ наряду с e_n оставляет неподвижным также базисный вектор e_{-n} . Аналогично определяются вложения алгебр Ли $\mathfrak{so}(2n-2) \subset \mathfrak{d}_{n-1/2} \subset \mathfrak{so}(2n)$. Более точно, алгебру Ли $\mathfrak{so}(2n)$ (типа $\mathfrak{d}_n$) группы Ли $SO(2n)$ мы будем отождествлять с алгеброй матриц $\|a_{ij}\| \in \mathfrak{gl}(2n)$, удовлетворяющих соотношению

$$a_{ij} = -a_{-j, -i}, \quad i, j \in \{-n, \dots, -1, 1, 2, \dots, n\}.$$

Она порождена $n(2n-1)$ образующими

$$X_{ij} = E_{ij} - E_{-j, -i}, \quad (3.1)$$

где E_{ij} – образующие $\mathfrak{gl}(2n)$ (матричные единицы).

Коммутационные соотношения в $\mathfrak{so}(2n)$ являются следствием (2.4) и коммутационных соотношений в $\mathfrak{gl}(2n)$ и имеют вид

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{k,j} X_{il} - \delta_{i,l} X_{kj} + \delta_{-l,j} X_{k,-i} - \delta_{k,-i} X_{-j,l},$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера.

Подалгебра $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ выделяется из алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$ наложением условий $a_{in} = 0$, $a_{-n,i} = 0$, $i = \pm 1, \dots, \pm n$, а $\mathfrak{so}(2n-2)$ выделяется из $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ с помощью соотношений $a_{nj} = 0$, $a_{j,-n} = 0$, $j = \pm 1, \dots, \pm n$.

Подалгебра Картана $\mathfrak{h}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$ порождена образующими X_{ii} , $1 \leq i \leq n$. Пусть R_n – система корней алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$, $P(R_n)$ – ее группа весов. Стандартный базис B в $P(R_n)$ образуют элементы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}_n^*$, определенные равенствами $\varepsilon_i(X_{jj}) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогда

$$R_n = \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}$$

и простыми корнями системы R_n являются

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \quad \alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Система корней $R_{n-1/2}$ алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ состоит из векторов:

$$R_{n-1/2} = \{\alpha \in R_n \mid (\alpha, \varepsilon_n) \geq 0\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ – произвольное скалярное произведение в $\mathfrak{h}_n^*$, инвариантное относительно группы Вейля. Соответственно, система корней R_{n-1} алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n-2)$ состоит из следующих корней:

$$R_{n-1} = \{\alpha \in R_n \mid (\alpha, \varepsilon_n) = 0\}.$$

Следующее предложение описывает свойства группы Ли $D_{n-1/2}$, важные с точки зрения теории представлений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. (i) *Группа Ли $D_{n-1/2}$ является экспоненциальной.*

(ii) *Группа Ли $D_{n-1/2}$ не редуктивна, ее разложение Леви–Мальцева описывается формулой*

$$D_{n-1/2} \simeq \mathrm{SO}(2n-2) \ltimes \mathbb{C}^{2n-2},$$

где $\mathbb{C}^{2n-2}$ – аддитивная группа Ли, $\ltimes$ – полупрямое произведение групп Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение (i). Всякая матрица g из $D_{n-1/2}$ может быть приведена к жордановой нормальной форме с жордановыми клетками, отвечающими собственным значениям матрицы g . Пусть K – жорданова клетка, отвечающая $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Тогда, вынося скалярный множитель, получим

$$K = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)(E + N),$$

где N – нильпотентная матрица, все ненулевые элементы которой расположены над главной диагональю и равны λ^{-1} . Пользуясь представлением для $\ln(E+N)$ в виде степенного ряда (который в данном случае конечен, поэтому сходится), мы найдем матрицу Z такую, что $\ln(E+N) = Z$, откуда $E+N = \exp Z$. Скалярный множитель также представим в виде экспоненты:

$$\mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = \exp D,$$

где D – также скалярная матрица. Тогда будем иметь

$$K = \exp D \cdot \exp Z = \exp(D+Z)$$

ввиду того, что D и Z коммутируют. Если теперь $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа в $D_{n-1/2}$ и $g(t) = \exp(tX)$, то $X \in \mathfrak{d}_{n-1/2}$ по определению алгебры Ли. Следовательно, $\exp(\mathfrak{d}_{n-1/2}) = D_{n-1/2}$, что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения (ii) приведено в [3, предложение 1.1].

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ имеет нетривиальный радикал r , изоморфный коммутативной алгебре Ли размерности $2n-2$, при этом*

$$\mathfrak{d}_{n-1/2} \simeq \mathfrak{so}(2n-2) \dot{+} r,$$

где $\dot{+}$ – полупрямая сумма алгебр Ли.

§ 4. Характеры представлений $\mathcal{L}(\lambda)$ со старшими весами $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_n)$

Пусть V_m – конечномерный неприводимый $\mathfrak{d}_n$ -модуль. Как уже известно, сужение V_m на подалгебру $\mathfrak{d}_{n-1}$ вполне приводимо и может содержать кратные точки спектра. Желание разделить изоморфные компоненты $V_m|_{\mathfrak{d}_{n-1}}$ привело

нас к построению фильтрации f конечномерных $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ -подмодулей V_m . Каждый фактор f является циклическим модулем, порожденным образом единственного квазистаршего вектора³ q_λ , где $\lambda \rightarrow m$ (см. § 1, 2). Если m пробегает множество старших весов P_n^D , то множество $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -факторов фильтраций, разделяющих изоморфные компоненты $\mathfrak{d}_{n-1}$ -модулей V_m , образует категорию $\mathcal{L}$ представлений со старшим весом алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$. Модули категории $\mathcal{L}$, вообще говоря, не являются неприводимыми, но всегда неразложимы. Вернемся к проблемам, анонсированным во введении.

Согласно [3, следствие 4.2] объекты категории $\mathcal{L}$, рассматриваемые с точностью до изоморфизма $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ -модулей, находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $\tilde{P}_{n+1}$ – множеством целочисленных векторов с компонентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, m_{n-1}, m_n$, удовлетворяющими системе неравенств

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & m_n & \longrightarrow & -\lambda_{n-1} \\ & & & & \nearrow & & \searrow \\ \lambda_1 & \longrightarrow & \lambda_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \lambda_{n-2} & \longrightarrow & m_{n-1} \\ & & & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & & \lambda_{n-1} & \longrightarrow & -m_n & & \nearrow \\ & & & & & & & & -m_{n-1} \end{array}$$

где стрелка означает знак $\geq$. Следовательно,

$$\mathcal{L} = \{ \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, m_{n-1}, m_n); (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, m_{n-1}, m_n) \in \tilde{P}_{n-1} \}.$$

Наличие параметров m_{n-1} и m_n среди компонент веса модуля $\mathcal{L}(\lambda)$ обусловлено тем фактом, что фильтрация, разделяющая изоморфные компоненты $\mathfrak{d}_{n-1}$ -модуля V_m , содержит только факторы, последние две компоненты веса которых наследуются из модуля T_m , т. е. они имеют вид m_{n-1} и m_n (см. [3, теорема 4.3]). Когда мы говорим о представлениях $\mathcal{L}(\lambda)$ категории $\mathcal{L}$, обозначения этих параметров уже не имеют принципиального значения, поэтому можно обозначить их λ_n и λ_{n+1} . В дальнейшем будем считать $m_{n-1} = \lambda_n$ и $m_n = \lambda_{n+1}$.

Проинтегрируем представление $\mathcal{L}(\lambda)$ алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ из категории $\mathcal{L}$ до представления ее группы Ли. Ввиду экспоненциальности ее группы Ли (см. предложение 3.1, (i)) получаемое в результате интегрирования представление $D_{n-1/2}$ будет комплексно-аналитическим конечномерным представлением, для которого мы сохраним обозначение $\mathcal{L}(\lambda)$.

Поскольку мы рассматриваем регулярное вложение D_{n-1} в $D_{n-1/2}$, задача описания спектра $\mathcal{L}(\lambda)|_{D_{n-1}}$ эквивалентна описанию весов полустарших векторов, принадлежащих модулю $\mathcal{L}(\lambda)$. В ходе доказательства теоремы 2.1 для серии D (см. [3, с. 176]) было показано, что фактор фильтрации f , порожденный образом квазистаршего веса q_λ , где $\lambda \rightarrow m$, порождается как $\mathfrak{d}_{n-1}$ -модуль образами полустарших векторов $\omega(\mu, \lambda, m)$, где $\mu \rightarrow \lambda \rightarrow m$, т. е. выполняется

³В работе [3] применялось обозначение $q_{\lambda, m}$.

система неравенств

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-2} \geq \mu_{n-2} \geq \max(\lambda_{n-1}, m_n) \\ \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_{n-1} + m_n - \min(\mu_{n-2}, m_{n-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_{n-1}, m_n) \Big|_{D_{n-1}} = \bigoplus_{\mu \rightarrow \lambda \rightarrow m} T_\mu^{D_{n-1}}, \quad (4.1)$$

где прямая сумма берется по всем весам $\mu \in P_{n-1}^D$, подчиненным весам $\lambda \in P_{n-1}^D$ и $m \in P_n^D$. Формула (4.1) есть не что иное, как правило ветвления для редукции $D_{n-1/2} \downarrow D_{n-1}$.

В данном параграфе мы рассмотрим представления $\mathcal{L}(\lambda)$ групп Ли $D_{n-1/2}$ со старшими весами, последние две компоненты веса которых совпадают. Формулу для характеров $\mathcal{L}(\lambda)$ в случае произвольного веса нам получить не удалось. Это связано с тем, что правило ветвления (4.1) содержит такие параметры, как $\max(\lambda_{n-1}, \mu_n)$ и $\min(\mu_{n-2}, m_{n-1})$, что приводит к рассмотрению большого количества случаев.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Характер $\text{ch } \mathcal{L}(\lambda)$ представления $\mathcal{L}(\lambda)$ группы Ли $D_{n-1/2}$ однозначно определяется своим ограничением на D_{n-1} . Пусть $g \in D_{n-1/2}$, $g = g_s g_u$ – мультипликативное разложение Жордана, g_s и g_u – соответственно полупростая и унитарная матрицы. Тогда*

$$[\text{ch } \mathcal{L}(\lambda)](g) = [\text{ch } \mathcal{L}(\lambda)](g_s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $D_{n-1/2}$ – замкнутая подгруппа группы D_n , компоненты g_s, g_u принадлежат $D_{n-1/2}$. Так как компоненты Жордана коммутируют, можно (преобразованием подобия) привести одновременно $L(\lambda)(g_s)$ к диагональному, а $L(\lambda)(g_u)$ к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали. В силу условия гомоморфизма имеем $L(\lambda)(g) = L(\lambda)(g_s) \cdot L(\lambda)(g_u)$, откуда вытекает, что собственные значения операторов $L(\lambda)(g)$ и $L(\lambda)(g_s)$ совпадают. Следовательно,

$$[\text{ch } \mathcal{L}(\lambda)](g) = \text{tr } \mathcal{L}(\lambda)(g) = \text{tr } \mathcal{L}(\lambda)(g_s) = [\text{ch } \mathcal{L}(\lambda)](g_s).$$

Отметим, что $g_s \in D_{n-1}$ по предложению 3.1.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $g \in D_{n-1/2}$, $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 1, 1, z_{n-1}^{-1}, \dots, z_2^{-1}, z_1^{-1}\}$ – полный набор собственных значений g . Тогда характер представления $\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ группы Ли $D_{n-1/2}$ со старшим весом $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_n) \in \tilde{P}_{n+1}$ может быть вычислен по формуле*

$$[\text{ch } \mathcal{L}_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_n)}^{D_{n-1/2}}](g) = \frac{S_1(\lambda) + S_2(\lambda)}{S_1(0)},$$

где

$$S_1 = \begin{vmatrix} z_1^{\tau_1} - z_1^{-\tau_1} & \dots & z_1^{\tau_{n-2}} - z_1^{-\tau_{n-2}} & (z_1^{\tau_{n-1}} + z_1^{-\tau_{n-1}})(z_1^{1/2} - z_1^{-1/2}) & z_1^{\tau_n} - z_1^{-\tau_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1}^{\tau_1} - z_{n-1}^{-\tau_1} & \dots & z_{n-1}^{\tau_{n-2}} - z_{n-1}^{-\tau_{n-2}} & (z_{n-1}^{\tau_{n-1}} + z_{n-1}^{-\tau_{n-1}})(z_{n-1}^{1/2} - z_{n-1}^{-1/2}) & z_{n-1}^{\tau_n} - z_{n-1}^{-\tau_n} \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} z_1^{\tau_1} + z_1^{-\tau_1} & \dots & z_1^{\tau_{n-2}} + z_1^{-\tau_{n-2}} & (z_1^{\tau_{n-1}} - z_1^{-\tau_{n-1}})(z_1^{1/2} - z_1^{-1/2}) & z_1^{\tau_n} + z_1^{-\tau_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1}^{\tau_1} + z_{n-1}^{-\tau_1} & \dots & z_{n-1}^{\tau_{n-2}} + z_{n-1}^{-\tau_{n-2}} & (z_{n-1}^{\tau_{n-1}} - z_{n-1}^{-\tau_{n-1}})(z_{n-1}^{1/2} - z_{n-1}^{-1/2}) & z_{n-1}^{\tau_n} + z_{n-1}^{-\tau_n} \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и τ_i выражаются через λ_i следующим образом:

$$\tau_i = \lambda_i + n - i - \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\tau_{n-1} = \lambda_{n-1}, \quad \tau_n = \lambda_n + \frac{1}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 4.1 мы можем отождествлять элемент $g \in D_{n-1/2}$ с его компонентой Жордана $g_s \in D_{n-1}$. Исходя из правила ветвления для редукции $D_{n-1/2} \downarrow D_{n-1}$, имеем

$$[\text{ch } \mathcal{L}_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1})}^{D_{n-1/2}}](g) = \sum_{\mu \rightarrow \lambda} [\text{ch } T_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})}^{D_{n-1}}](g). \quad (4.2)$$

Напомним, что условие подчинения $\mu \rightarrow \lambda$ можно записать в виде следующей диаграммы, в которой стрелка соответствует знаку неравенства $\geq$:

здесь⁴ $\nu = \max(m_n, \lambda_{n-1})$, $c = \lambda_{n-1} + m_n - \min(m_{n-1}, \mu_{n-2})$. Пусть теперь $\lambda_n = \lambda_{n+1}$, т. е. в терминах диаграммы $m_{n-1} = m_n$. Имеем $\nu = \max(m_n, \lambda_{n-1}) = m_n$, так как $m_{n-1} \geq \lambda_{n-1}$. Тогда $m_n \leq \mu_{n-2} \leq \lambda_{n-2}$. Далее,

$$c = \lambda_{n-1} + m_n - \min(m_{n-1}, \mu_{n-2}) = \lambda_{n-1} + m_n - \min(m_n, \mu_{n-2})$$

$$= \lambda_{n-1} + m_n - m_n = \lambda_{n-1}.$$

Таким образом, $c = \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_{n-1}$, и, значит, $\mu_{n-1} = \lambda_{n-1}$. Тогда формула (4.2) принимает следующий вид:

$$[\text{ch } \mathcal{L}_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_n)}^{D_{n-1/2}}](g) = \sum_{\mu_1 = \lambda_2}^{\lambda_1} \sum_{\mu_2 = \lambda_3}^{\lambda_2} \dots \sum_{\mu_{n-2} = \lambda_n}^{\lambda_{n-2}} \sum_{\mu_{n-1} = \lambda_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} [\text{ch } T_{\mu}^{D_{n-1}}](g).$$

⁴Для наглядности мы включили в диаграмму старший вес $m \in P_n$ такой, что $\mu \rightarrow \lambda \rightarrow m$. Последние две компоненты веса m являются также компонентами веса λ : $m_{n-1} = \lambda_n$ и $m_n = \lambda_{n+1}$.

Согласно формуле Вейля для характеров неприводимых представлений группы Ли $SO(2n-2)$ (см. [10, формулы (32)–(34)]; в обозначениях Вейля $z_i = e^{2\pi i \varphi_i}$ и l_i имеют то же значение, что и q_i ниже) имеем

$$[\text{ch } T_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})}^{D_{n-1}}](g) = \frac{\xi_0(q_1, \dots, q_{n-1}) + \xi_1(q_1, \dots, q_{n-1})}{\xi_0(n-2, n-3, \dots, 1, 0)},$$

где

$$\begin{aligned}\xi_0(q_1, \dots, q_{n-1}) &= \det(z_i^{q_j} + z_i^{-q_j})_{i,j=1}^{n-1}, \\ \xi_1(q_1, \dots, q_{n-1}) &= \det(z_i^{q_j} - z_i^{-q_j})_{i,j=1}^{n-1}, \\ q_i &= \mu_i + n - 1 - i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Для удобства обозначим $\xi_0(n-2, n-3, \dots, 1, 0) = \Delta$. Тогда

$$\begin{aligned}[\text{ch } T_{\mu}^{D_{n-1}}](g) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu_1=\lambda_2}^{\lambda_1} \sum_{\mu_2=\lambda_3}^{\lambda_2} \cdots \sum_{\mu_{n-2}=\lambda_n=m_n}^{\lambda_{n-2}} \sum_{\mu_{n-1}=\lambda_{n-1}=\lambda_n}^{\lambda_{n-1}} (\xi_0 + \xi_1) \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{\mu_1=\lambda_2}^{\lambda_1} \cdots \sum_{\mu_{n-2}=\lambda_{n-1}}^{\lambda_{n-2}} \sum_{\mu_{n-1}=\lambda_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \xi_0(q_1, \dots, q_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu_1=\lambda_2}^{\lambda_1} \cdots \sum_{\mu_{n-2}=\lambda_{n-1}}^{\lambda_{n-2}} \sum_{\mu_{n-1}=\lambda_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \xi_1(q_1, \dots, q_{n-1}) \right] = \frac{1}{\Delta} (\widetilde{S}_0 + \widetilde{S}_1),\end{aligned}$$

где $\widetilde{S}_0$ и $\widetilde{S}_1$ — $(n-1)$ -кратные суммы, которые мы вычислим отдельно. Сумма $\widetilde{S}_0$ дает определитель

$$\begin{vmatrix} C(z_1^{\lambda_1+n-2}) + \cdots + C(z_1^{\lambda_2+n-2}) & \cdots & C(z_1^{\lambda_{n-2}+1}) + \cdots + C(z_1^{\lambda_n+1}) & C(z_1^{\lambda_{n-1}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(z_{n-1}^{\lambda_1+n-2}) + \cdots + C(z_{n-1}^{\lambda_2+n-2}) & \cdots & C(z_{n-1}^{\lambda_{n-2}+1}) + \cdots + C(z_{n-1}^{\lambda_n+1}) & C(z_{n-1}^{\lambda_{n-1}}) \end{vmatrix},$$

где мы применяем обозначения $C(z^\lambda) = z^\lambda + z^{-\lambda}$, $S(z^\lambda) = z^\lambda - z^{-\lambda}$. В угловых координатах $z = e^{2\pi i \varphi}$ компактной вещественной формы группы $SO(2n-2)$ эти функции сводятся к косинусам и синусам: $C(z^\lambda) = 2 \cos(2\pi \lambda \varphi)$, $S(z^\lambda) = 2i \sin(2\pi \lambda \varphi)$ (ср. [10, с. 144]).

Дополним этот определитель порядка $n-1$ до определителя порядка n , не изменяя его значения, следующим образом: добавим n -ю строку, состоящую из нулей, а в качестве n -го столбца вставим столбец

$$\begin{aligned}& (C(z_1^{\lambda_n}) + \cdots + C(z_1^{\lambda_{n-1}+1}) + C(z_1^{\lambda_{n-1}-1}) + \cdots + C(z_1) + 2, \dots \\ & \dots, C(z_{n-1}^{\lambda_n}) + \cdots + C(z_{n-1}^{\lambda_{n-1}+1}) + C(z_{n-1}^{\lambda_{n-1}-1}) + \cdots + C(z_{n-1}) + 2, 1)^t.\end{aligned}$$

Далее, в полученном определителе порядка n сделаем следующие преобразования столбцов: к первому столбцу прибавим все последующие, ко второму — все последующие и т. д. Другими словами, к i -му столбцу прибавим $(i+1)$ -й,

$(i+2)$ -й, ..., n -й для $i = 1, 2, \dots, n-2$. Кроме того, к n -му столбцу прибавим $(n-1)$ -й, а $(n-1)$ -й столбец оставим без изменения. Получим определитель

$$\begin{vmatrix} C(z_1^{\lambda_1+n-2}) + \dots + 2 & \dots & C(z_1^{\lambda_{n-2}+1}) + \dots + 2 & C(z_1^{\lambda_{n-1}}) & C(z_1^{\lambda_n}) + \dots + 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(z_{n-1}^{\lambda_1+n-2}) + \dots + 2 & \dots & C(z_{n-1}^{\lambda_{n-2}+1}) + \dots + 2 & C(z_{n-1}^{\lambda_{n-1}}) & C(z_{n-1}^{\lambda_n}) + \dots + 2 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где сумма вида $C(z^\lambda) + \dots + 2$ включает в себя все слагаемые вида $C(z^k)$ при $0 \leq k \leq \lambda$.

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{z_1^{\lambda_1+n-1} - z_1^{-(\lambda_1+n-2)}}{z_1-1} + 1 & \dots & \frac{z_1^{\lambda_{n-2}+2} - z_1^{-(\lambda_{n-2}+1)}}{z_1-1} + 1 & C(z_1^{\lambda_{n-1}}) & \frac{z_1^{\lambda_n+1} - z_1^{-\lambda_n}}{z_1-1} + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_{n-1}^{\lambda_1+n-1} - z_{n-1}^{-(\lambda_1+n-2)}}{z_{n-1}-1} + 1 & \dots & \frac{z_{n-1}^{\lambda_{n-2}+2} - z_{n-1}^{-(\lambda_{n-2}+1)}}{z_{n-1}-1} + 1 & C(z_{n-1}^{\lambda_{n-1}}) & \frac{z_{n-1}^{\lambda_n+1} - z_{n-1}^{-\lambda_n}}{z_{n-1}-1} + 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$ вынесем из i -й строки множитель $(z_i-1)^{-1}$, а затем прибавим к i -й строке последнюю, умноженную на $1 - z_i$. Обозначим $\tau_i = \lambda_i + n - i - 1/2$, где $i = 1, 2, \dots, n-2$, $\tau_{n-1} = \lambda_{n-1}$, $\tau_n = \lambda_n + 1/2$. Получим определитель

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} (z_i - 1)} \times \begin{vmatrix} z_1^{\tau_1+\frac{1}{2}} - z_1^{-\tau_1+\frac{1}{2}} & \dots & z_1^{\tau_{n-2}+\frac{1}{2}} - z_1^{-\tau_{n-2}+\frac{1}{2}} & C(z_1^{\tau_{n-1}})(z_1-1) & z_1^{\tau_n+\frac{1}{2}} - z_1^{-\tau_n+\frac{1}{2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1}^{\tau_1+\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\tau_1+\frac{1}{2}} & \dots & z_{n-1}^{\tau_{n-2}+\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\tau_{n-2}+\frac{1}{2}} & C(z_{n-1}^{\tau_{n-1}})(z_{n-1}-1) & z_{n-1}^{\tau_n+\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\tau_n+\frac{1}{2}} \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Из каждой i -й строки, $i = 1, 2, \dots, n-1$, вынесем множитель $z_i^{1/2}$. Получим определитель

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} (z_i^{\frac{1}{2}} - z_i^{-\frac{1}{2}})} \begin{vmatrix} S(z_1^{\tau_1}) & \dots & S(z_1^{\tau_{n-2}}) & C(z_1^{\tau_{n-1}})(z_1^{\frac{1}{2}} - z_1^{-\frac{1}{2}}) & S(z_1^{\tau_n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S(z_{n-1}^{\tau_1}) & \dots & S(z_{n-1}^{\tau_{n-2}}) & C(z_{n-1}^{\tau_{n-1}})(z_{n-1}^{\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\frac{1}{2}}) & S(z_{n-1}^{\tau_n}) \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Сделаем аналогичные преобразования для суммы $\widetilde{S}_1$, получим определитель

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} (z_i^{\frac{1}{2}} - z_i^{-\frac{1}{2}})} \begin{vmatrix} C(z_1^{\tau_1}) & \dots & C(z_1^{\tau_{n-2}}) & S(z_1^{\tau_{n-1}})(z_1^{\frac{1}{2}} - z_1^{-\frac{1}{2}}) & C(z_1^{\tau_n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(z_{n-1}^{\tau_1}) & \dots & C(z_{n-1}^{\tau_{n-2}}) & S(z_{n-1}^{\tau_{n-1}})(z_{n-1}^{\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\frac{1}{2}}) & C(z_{n-1}^{\tau_n}) \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Мы получили

$$[\text{ch } \mathcal{L}_\lambda^{D_{n-1/2}}](g) = \frac{S_1(\lambda) + S_2(\lambda)}{\prod_{i=1}^{n-1} (z_i^{\frac{1}{2}} - z_i^{-\frac{1}{2}}) \Delta}.$$

Преобразуем знаменатель $\prod_{i=1}^{n-1} (z_i^{\frac{1}{2}} - z_i^{-\frac{1}{2}}) \Delta$:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{n-1} (z_i^{\frac{1}{2}} - z_i^{-\frac{1}{2}}) \Delta \\ &= 2 \prod_{i=1}^{n-1} (z_i^{\frac{1}{2}} - z_i^{-\frac{1}{2}}) \begin{vmatrix} z_1^{n-2} - z_1^{-(n-2)} & \dots & z_1 - z_1^{-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1}^{n-2} - z_{n-1}^{-(n-2)} & \dots & z_{n-1} - z_{n-1}^{-1} & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} S(z_1^{n-\frac{3}{2}}) - S(z_1^{n-\frac{5}{2}}) & S(z_1^{n-\frac{5}{2}}) - S(z_1^{n-\frac{7}{2}}) & \dots & S(z_1^{\frac{3}{2}}) - S(z_1^{\frac{1}{2}}) & S(z_1^{\frac{1}{2}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S(z_{n-1}^{n-\frac{3}{2}}) - S(z_{n-1}^{n-\frac{5}{2}}) & S(z_{n-1}^{n-\frac{5}{2}}) - S(z_{n-1}^{n-\frac{7}{2}}) & \dots & S(z_{n-1}^{\frac{3}{2}}) - S(z_{n-1}^{\frac{1}{2}}) & S(z_{n-1}^{\frac{1}{2}}) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Дополним определитель порядка $n-1$ до определителя порядка n следующим образом: снизу припишем строку нулей, а в последний столбец вставим $(z_1^{\frac{1}{2}} - z_1^{-\frac{1}{2}}, \dots, z_{n-1}^{\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\frac{1}{2}}, 1)^t$. Далее сделаем следующие преобразования столбцов: к i -му столбцу для $i = 1, 2, \dots, n-3$ прибавим $(i+1)$ -й, $(i+2)$ -й, $\dots$, $(n-2)$ -й, n -й (кроме $(n-1)$ -го). Кроме того, к n -му столбцу прибавим $(n-1)$ -й, а $(n-2)$ -й столбец оставим без изменения. Множитель 2 внесем в $(n-1)$ -й столбец. Получим определитель $S_1(0)$, равный

$$\begin{vmatrix} z_1^{n-\frac{3}{2}} - z_1^{-(n-\frac{3}{2})} & z_1^{n-\frac{5}{2}} - z_1^{-(n-\frac{5}{2})} & \dots & 2(z_1^{\frac{1}{2}} - z_1^{-\frac{1}{2}}) & z_1^{\frac{1}{2}} - z_1^{-\frac{1}{2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1}^{n-\frac{3}{2}} - z_{n-1}^{-(n-\frac{3}{2})} & z_{n-1}^{n-\frac{5}{2}} - z_{n-1}^{-(n-\frac{5}{2})} & \dots & 2(z_{n-1}^{\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\frac{1}{2}}) & z_{n-1}^{\frac{1}{2}} - z_{n-1}^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

§ 5. Размерности представлений $\mathcal{L}(\lambda)$ со старшими весами $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_n)$

Размерность представления $\mathcal{L}(\lambda)$ можно вычислить по крайней мере двумя способами. Первый – предельным переходом в формуле для характера $\mathcal{L}(\lambda)$ при $g \rightarrow e$, второй – при использовании разложения

$$\mathcal{L}(\lambda)|_{D_{n-1}} = \bigoplus_{\mu \rightarrow \lambda} T_\mu \quad (5.1)$$

и формулы Г. Вейля для размерностей неприводимых $\mathrm{SO}(2n-2)$ -модулей T_μ , $\mu \in P_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\lambda \in \tilde{P}_{n+1}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \lambda_n)$. Размерность представления $\mathcal{L}(\lambda)$ группы Ли $D_{n-1/2}$ вычисляется по формуле

$$\dim \mathcal{L}(\lambda) = \frac{d(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)}{d(0, 0, \dots, 0, 0)},$$

зде

$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} \tau_1^{2n-3} & \tau_2^{2n-3} & \dots & \tau_{n-2}^{2n-3} & (\tau_{n-1} + \frac{1}{2})^{2n-3} - (\tau_{n-1} - \frac{1}{2})^{2n-3} & \tau_n^{2n-3} \\ \tau_1^{2n-5} & \tau_2^{2n-5} & \dots & \tau_{n-2}^{2n-5} & (\tau_{n-1} + \frac{1}{2})^{2n-5} - (\tau_{n-1} - \frac{1}{2})^{2n-5} & \tau_n^{2n-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{n-2} & (\tau_{n-1} + \frac{1}{2}) - (\tau_{n-1} - \frac{1}{2}) & \tau_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

а τ_i определены в теореме 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Размерность неприводимого представления T_μ со старшим весом $\mu \in P_{n-1}$ группы $\mathrm{SO}(2n-2)$ выражается формулой Г. Вейля (см. [10, формула (35')])

$$\dim T_\mu^{D_{n-1}} = \frac{\xi(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})}{\xi(n-2, n-3, \dots, 1, 0)},$$

где

$$\xi(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{vmatrix} t_1^{2(n-2)} & t_2^{2(n-2)} & \dots & t_{n-1}^{2(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{n-1}^2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

и $t_k = \mu_k + n - k - 1$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Применяя правило ветвления для редукции $D_{n-1/2} \downarrow D_{n-1}$ в случае, когда две последние компоненты веса λ совпадают, и разложение (5.1), имеем

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(\lambda) &= \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu_1=\lambda_2}^{\lambda_1} \sum_{\mu_2=\lambda_3}^{\lambda_2} \dots \sum_{\mu_{n-2}=\lambda_n}^{\lambda_{n-2}} \sum_{\mu_{n-1}=\lambda_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} t_1^{2(n-2)} & t_2^{2(n-2)} & \dots & t_{n-1}^{2(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_{n-1}^2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum_{t=\tau_2+\frac{1}{2}}^{\tau_1-\frac{1}{2}} t^{2(n-2)} & \sum_{t=\tau_3+\frac{1}{2}}^{\tau_2-\frac{1}{2}} t^{2(n-2)} & \dots & \sum_{t=\tau_n+\frac{1}{2}}^{\tau_{n-2}-\frac{1}{2}} t^{2(n-2)} & \tau_{n-1}^{2(n-2)} \\ \sum_{t=\tau_2+\frac{1}{2}}^{\tau_1-\frac{1}{2}} t^{2(n-3)} & \sum_{t=\tau_3+\frac{1}{2}}^{\tau_2-\frac{1}{2}} t^{2(n-3)} & \dots & \sum_{t=\tau_n+\frac{1}{2}}^{\tau_{n-2}-\frac{1}{2}} t^{2(n-3)} & \tau_{n-1}^{2(n-3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{t=\tau_2+\frac{1}{2}}^{\tau_1-\frac{1}{2}} t^2 & \sum_{t=\tau_3+\frac{1}{2}}^{\tau_2-\frac{1}{2}} t^2 & \dots & \sum_{t=\tau_n+\frac{1}{2}}^{\tau_{n-2}-\frac{1}{2}} t^2 & \tau_{n-1}^2 \\ \tau_1 - \tau_2 & \tau_2 - \tau_3 & \dots & \tau_{n-2} - \tau_n & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Дополним определитель порядка $n-1$ до определителя порядка n следующим образом: снизу припишем нулевую строку, а справа в качестве n -го столбца на последнее место вставим столбец

$$\begin{aligned} &\left(\left(\tau_n - \frac{1}{2} \right)^{2(n-2)} + \dots + (\tau_{n-1} + 1)^{2(n-2)} + (\tau_{n-1} - 1)^{2(n-2)} + \dots + 1, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \left(\tau_n - \frac{1}{2} \right)^2 + \dots + (\tau_{n-1} + 1)^2 + (\tau_{n-1} - 1)^2 + \dots + 1, \tau_n - \frac{1}{2}, 1 \right)^t. \end{aligned}$$

Значение определителя не изменится. В полученном определителе порядка n прибавим к каждому столбцу, кроме последних двух, все последующие,

т. е. к i -му столбцу для $i = 1, 2, \dots, n-2$ прибавим $(i+1)$ -й, $(i+2)$ -й, $\dots$, n -й. Кроме того, к n -му столбцу прибавим $(n-1)$ -й, а $(n-1)$ -й столбец оставим без изменения. Получим определитель

$$\begin{vmatrix} S_{2(n-2)}(\lambda_1 + n - 2) & S_{2(n-2)}(\lambda_2 + n - 3) & \dots & \lambda_{n-1}^{2(n-2)} & S_{2(n-2)}(\lambda_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_2(\lambda_1 + n - 2) & S_2(\lambda_2 + n - 3) & \dots & \lambda_{n-1}^2 & S_2(\lambda_n) \\ \lambda_1 + n - 1 & \lambda_2 + n - 2 & \dots & 1 & \lambda_n + 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где введено обозначение $S_k(m) = 1^k + 2^k + \dots + m^k$.

Вычтем из $(n-1)$ -й строки последнюю и сделаем замену $z_i = \lambda_i + n - i - 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$; $z_n = \lambda_n$. Получим определитель

$$\begin{vmatrix} S_{2(n-2)}(z_1) & S_{2(n-2)}(z_2) & \dots & z_{n-1}^{2(n-2)} & S_{2(n-2)}(z_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_2(z_1) & S_2(z_2) & \dots & z_{n-1}^2 & S_2(z_n) \\ z_1 & z_2 & \dots & 1 & z_n \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.2)$$

Для вычисления последнего определителя докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для определителей, элементы которых – четные степенные суммы $S_{2(k-2)}(\lambda_i)$, имеет место следующее тождество:*

$$\begin{vmatrix} S_{2(n-2)}(\lambda_1) & S_{2(n-2)}(\lambda_2) & \dots & S_{2(n-2)}(\lambda_n) \\ S_{2(n-3)}(\lambda_1) & S_{2(n-3)}(\lambda_2) & \dots & S_{2(n-3)}(\lambda_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_2(\lambda_1) & S_2(\lambda_2) & \dots & S_2(\lambda_n) \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(2n-3)!!} \begin{vmatrix} (\lambda_1 + \frac{1}{2})^{2n-3} & (\lambda_2 + \frac{1}{2})^{2n-3} & \dots & (\lambda_n + \frac{1}{2})^{2n-3} \\ (\lambda_1 + \frac{1}{2})^{2n-5} & (\lambda_2 + \frac{1}{2})^{2n-5} & \dots & (\lambda_n + \frac{1}{2})^{2n-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 + \frac{1}{2} & \lambda_2 + \frac{1}{2} & \dots & \lambda_n + \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемое тождество сразу вытекает из сравнения

$$S_{2(n-2)}(\lambda) \equiv \frac{(\lambda + 1/2)^{2n-3}}{(2n-3)} \left(\text{mod } L \left(\left(\lambda + \frac{1}{2} \right), \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^3, \dots, \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^{2n-5} \right) \right).$$

Покажем, что $S_{2(n-2)}(\lambda)$ является многочленом нечетной степени от $z = \lambda + \frac{1}{2}$ со старшим членом $\frac{1}{(2n-3)} z^{2n-3}$. Воспользуемся известным соотношением, связывающим степенные суммы с числами Бернулли [12, теорема 2]:

$$(k+1)S_k(\lambda) = (\lambda + 1 + B)^{k+1} - B^{k+1} = \left(z + \frac{1}{2} + B \right)^{k+1} - B^{k+1}, \quad k \in 2\mathbb{Z}.$$

Отсюда, учитывая, что $B_1 = -\frac{1}{2}$, а остальные числа Бернулли с нечетными индексами равны нулю, получим

$$(k+1)S_k(\lambda) = \left(z + \frac{1}{2}\right)^{k+1} - \frac{k+1}{2} \left(z + \frac{1}{2}\right)^k + C_{k+1}^2 B_2 \left(z + \frac{1}{2}\right)^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k B_k \left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (5.3)$$

Далее, из рекуррентного соотношения для чисел Бернулли $(1+B)^m = B^m$, $m \geq 2$ [12, гл. V, § 8, теорема 1], вытекает $(x+B)^m = (x-1-B)^m$, $m \geq 1$, откуда

$$\begin{aligned} (k+1)S_k(\lambda) &= (\lambda - B)^{k+1} + B^{k+1} = \left(z - \frac{1}{2} - B\right)^{k+1} + B^{k+1} \\ &= \left(z - \frac{1}{2}\right)^{k+1} + \frac{k+1}{2} \left(z - \frac{1}{2}\right)^k + C_{k+1}^2 B_2 \left(z - \frac{1}{2}\right)^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k B_k \left(z - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Осталось заметить, что так как k – четное число, то после суммирования равенств (5.3) и (5.4) все четные степени z аннулируются. Предложение доказано.

Возвращаясь к доказательству теоремы 5.1, представим элементы предпоследнего столбца определителя (5.2) как разности степенных сумм

$$z_{n-1}^{2i} = S_{2i}(z_{n-1}) - S_{2i}(z_{n-1} - 1)$$

и, применяя предложение 5.1, получим следующее представление числителя в формуле для размерностей:

$$\frac{1}{(2n-3)!!} \begin{vmatrix} \tau_1^{2n-3} & \tau_2^{2n-3} & \dots & \left(\tau_{n-1} + \frac{1}{2}\right)^{2n-3} - \left(\tau_{n-1} - \frac{1}{2}\right)^{2n-3} & \tau_n^{2n-3} \\ \tau_1^{2n-5} & \tau_2^{2n-5} & \dots & \left(\tau_{n-1} + \frac{1}{2}\right)^{2n-5} - \left(\tau_{n-1} - \frac{1}{2}\right)^{2n-5} & \tau_n^{2n-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \left(\tau_{n-1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\tau_{n-1} - \frac{1}{2}\right) & \tau_n \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для завершения доказательства осталось воспользоваться легко проверяемым тождеством определителей

$$\begin{aligned} 2^{n-2} \begin{vmatrix} (n-2)^{2(n-2)} & (n-3)^{2(n-2)} & \dots & 1^{2(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-2)^4 & (n-3)^4 & \dots & 1^4 \\ (n-2)^2 & (n-3)^2 & \dots & 1^2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \left(n - \frac{3}{2}\right)^{2(n-2)} & \dots & \left(\frac{3}{2}\right)^{2(n-2)} & \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 & \dots & \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из правила ветвления для редукции $D_{n-1/2} \downarrow D_{n-1}$ очевидно, что два представления группы $D_{n-1/2}$ со старшими весами λ и λ' , $\lambda, \lambda' \in \tilde{P}_{n+1}$, изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda'$ (действительно, при $\lambda \neq \lambda'$ модули $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda')$ не изоморфны уже как D_{n-1} -модули). Таким образом, представления категории $\mathcal{L}$ с точностью до изоморфизма описываются своими старшими весами, а значит, и характерами.

То, что сумма $\sum_{\mu \rightarrow \lambda} [\text{ch } T_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})}^{D_{n-1}}](g)$ в правой части равенства (4.2) сворачивается с точностью до постоянного множителя в сумму двух определителей $S_1(\lambda)$ и $S_2(\lambda)$, является еще одним нетривиальным проявлением “скрытой симметрии” в смысле И. М. Гельфанда и А. В. Зелевинского [11].

Наконец, мы получили еще одно подтверждение того, что группа Ли $D_{n-1/2}$ должна быть отнесена именно к четной ортогональной серии (а не к серии B , как можно было бы предположить из сравнения цепочек редукций, рассмотренных в конце § 2). Действительно, доказанная нами в теореме 4.1 формула для характеров представлений категории $\mathcal{L}$ группы Ли $D_{n-1/2}$ имеет вейлевский вид, если ее сравнивать с формулой для характеров неприводимых представлений простой группы Ли D_n . Напомним, что из всех классических простых групп Ли только в серии D в числителе формулы для характеров имеется сумма двух определителей, зависящих от компонент старшего веса.

Список литературы

1. В. В. Штепин, “Промежуточные алгебры Ли и их конечномерные представления”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57:6** (1993), 176–198; англ. пер.: V. V. Shtepin, “Intermediate Lie algebras and their finite-dimensional representations”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **43:3** (1994), 559–579.
2. В. В. Штепин, “Промежуточная ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ и ее конечномерные представления”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62:3** (1998), 201–223; англ. пер.: V. V. Shtepin, “The intermediate orthogonal Lie algebra $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ and its finite-dimensional representations”, *Izv. Math.*, **62:3** (1998), 627–648.
3. В. В. Штепин, “Промежуточная алгебра Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$, весовая схема и конечномерные представления со старшим весом”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68:2** (2004), 159–190; англ. пер.: V. V. Shtepin, “The intermediate Lie algebra $\mathfrak{d}_{n-1/2}$, the weight scheme and finite-dimensional representations with highest weight”, *Izv. Math.*, **68:2** (2004), 375–404.
4. Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel, Leipzig, 1931.
5. И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин, “Конечномерные представления группы ортогональных матриц”, *Докл. АН СССР*, **71:6** (1950), 1017–1020.
6. Д. П. Желобенко, “Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений”, *УМН*, **17:1** (1962), 27–120; англ. пер.: D. P. Zhelobenko, “The classical groups. Spectral analysis of their finite-dimensional representations”, *Russian Math. Surveys*, **17:1** (1962), 1–94.
7. А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, т. 1, Мир, М., 1980; пер. с англ.: A. O. Barut, R. Raczyk, *Theory of group representations and applications*, Polish Scientific Publ., Warsaw, 1977.
8. А. М. Бинчер, “Bases in $\text{Sp}(2n)$ representation space” (Cocoyoc, 1980), *Lecture Notes in Phys.*, **135** (1980), 459–463.

9. В. В. Штепин, “Разделение кратных точек спектра в редукции $\mathrm{sp}(2n) \downarrow \mathrm{sp}(2n-2)$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:4 (1986), 93–95; англ. пер.: V. V. Shtepin, “Separation of multiple points of spectrum in the reduction $\mathrm{sp}(2n) \downarrow \mathrm{sp}(2n-2)$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:4 (1986), 336–338.
10. Г. Вейль, “Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований”, *Избранные труды: Математика. Теоретическая физика*, Наука, М., 1984, 100–197.
11. И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, “Модели представлений классических групп и их скрытые симметрии”, *Функц. анализ и его прил.*, **18**:3 (1984), 14–31; англ. пер.: I. M. Gel’fand, A. V. Zelevinskii, “Models of representations of classical groups and their hidden symmetries”, *Funct. Anal. Appl.*, **18**:3 (1984), 183–198.
12. З. И. Бореви́ч, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, 3-е изд., Наука, М., 1985; англ. пер. 1-го изд.: A. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Academic Press, New York–London, 1966.

Вадим Владимирович ШТЕПИН
(VADIM V. SHTEPIN)
Донецкий национальный университет
E-mail: vadim.shtepin@gmail.com

Поступило в редакцию
11.07.2012

Даниил Леонидович КОНАШЕНКОВ
(DANIIL L. KONASHENKOV)
Донецкий национальный университет
E-mail: konashenkov@rambler.ru