Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аристов, Моделирование нестационарных процессов в полупроводниках с помощью нелинейного соболевского уравнения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 07:55:50

УДК 517.955.8

А. И. Аристов

Моделирование нестационарных процессов в полупроводниках с помощью нелинейного соболевского уравнения

Изучается начально-краевая задача для нелинейного соболевского уравнения, содержащего нелокальное по времени слагаемое и неоднородность. Уравнение моделирует нестационарные процессы в полупроводниках. Найдены достаточные условия как для глобальной по времени однозначной разрешимости задачи, так и для локальной (но не глобальной). В случае, когда задача разрешима только локально, найдены оценки сверху и снизу времени существования решения.

Библиография: 5 наименований.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, разрушение решений, метод энергетических оценок.

DOI: 10.4213/im8035

§ 1. Предварительные рассмотрения

Работа посвящена изучению следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u + \mu(x)|u|^r u - au + (\lambda, \nabla)u^2 + (\theta, \nabla)u \\ + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s) ds = f(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u \in \mathbb{R}$ – функция от времени $t > 0$ и вектора пространственных переменных $x \in \Omega$, Ω – ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^N$, $N \in \{2; 3\}$, с границей $\partial\Omega \in C^{(2,v)}$, $v \in (0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $q \in [1, 4]$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in \mathbb{R}^N$, $f(\cdot) \in L_2(\Omega)$, $u_0(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$. Здесь $H_0^1(\Omega)$ – пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|w\| = \sqrt{\int_{\Omega} w^2 dx + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2 dx}.$$

В пространстве $H_0^1(\Omega)$ задано скалярное произведение

$$(v, w) = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} dx$$

и определена норма $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.

Кроме того, будем предполагать, что в зависимости от размерности N параметры r и $\mu(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям. При $N = 2$ или $N = 3$

соответственно $(r, \mu(\cdot)) \in (1, \infty) \times L_4(\Omega)$ или $(r, \mu(\cdot)) \in (1, 2] \times L_{6/(2-r)}(\Omega)$. Условия, которые будут налагаться на функцию $h(\cdot)$, приведем позже. Поясним, что s в выражении $u(s)$ из (1) – переменная интегрирования, соответствующая независимой переменной, обозначающей время.

Задачи вида (1) могут использоваться для описания нестационарных процессов в полупроводниках.

В [1, гл. 1, § 3, гл. 2, § 2] было выведено и исследовано нелинейное нелокальное уравнение волн Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса (ББМБ)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - |u|^{q_1}u) + \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s) ds + |u|^{q_2}u = 0. \quad (2)$$

В настоящей работе получают развитие идеи из [1], но взяты члены уравнения более общего вида, а также учтены некоторые дополнительные эффекты. Рассматривается кристаллический полупроводник, занимающий область Ω и находящийся во внешнем постоянном и однородном электрическом поле (потенциал поля – переменная u). Учтено, что в полупроводнике имеется временная дисперсия, а также имеют место распределенные источники свободных зарядов.

Отметим, что в задаче (1):

- 1) выражение $u + |u|^q u$ описывает распределение связанных зарядов;
- 2) выражение $\mu(x)|u|^r u - au$ описывает распределение свободных зарядов;
- 3) выражение $(\lambda, \nabla)u^2 + (\theta, \nabla)u$ соответствует току свободных зарядов во внешнем электрическом поле;
- 4) выражение $\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds$ отражает то, что зависимость плотности тока свободных зарядов от напряженности поля нелокальна;
- 5) свободный член $f(x)$ отражает стационарное распределение зарядов.

Целью исследования является, во-первых, доказательство того, что задача однозначно разрешима в некотором классе глобально или локально по времени, во-вторых, нахождение достаточных условий для глобальной разрешимости (т.е. $T = \infty$), в-третьих, нахождение оценок сверху и снизу времени существования решения для случая локальной (не глобальной) разрешимости (т.е. $T < \infty$).

Локальная разрешимость, как будет показано, связана с обращением в бесконечность функционала энергии, что означает пробой полупроводника.

Введем классы $X_T = C^1[0, T; H_0^1(\Omega))$, $0 < T \leq \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенным решением задачи (1) будем называть такое $u \in X_T$, что*

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u + \mu(x)|u|^r u - au + (\lambda, \nabla)u^2 + (\theta, \nabla)u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s) ds - f \right) w dx = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \quad (3)$$

для любых $w \in H_0^1(\Omega)$ и $t \in [0, T]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $\mu(x) \in L_{6/(2-r)}(\Omega)$ обеспечивает принадлежность слагаемого $\mu|u|^r u$ множеству $L_2(\Omega)$ и, следовательно, корректность определения 1. Действительно, возьмем такие положительные α и β , что $1/\alpha + 1/\beta = 1$,

и оценим это слагаемое с помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения:

$$\|\mu|u|^r u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left(\int_{\Omega} |\mu|^{2\alpha} dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{\Omega} |u|^{2(r+1)\beta} dx \right)^{1/\beta} \leq \|\mu\|_{L_{2\alpha}(\Omega)}^2 C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(r+1)}.$$

Применимость теоремы вложения обеспечивается условием

$$2(r+1)\beta \leq 6 \iff 2\alpha \geq \frac{6}{2-r}.$$

Поскольку $L_{\alpha_1}(\Omega) \subseteq L_{\alpha_2}(\Omega)$ при $\alpha_1 > \alpha_2$, наиболее слабым допустимым условием относительно $\mu(\cdot)$ будет $\mu(\cdot) \in L_{6/(2-r)}(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обобщенное решение задачи (1) *разрушается за конечное время*, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ при некотором конечном $T > 0$, но не имеет решения из класса X_{∞} . В частности, решение *разрушается путем опрокидывания*, если $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$.

В настоящей статье получают развитие идеи, использовавшиеся в [1, гл. 2, § 2] и [2, гл. 5, § 11, 14], для изучения соответственно уравнения (2) и уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса (ОББМБ)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + u^3 = 0,$$

обобщенного уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + u(u + \alpha)(u - \beta) = 0.$$

В [1] и [2] были рассмотрены начально-краевые задачи для названных уравнений, исследована их глобальная и локальная по времени разрешимость, для случая локальной разрешимости найдены в виде явных формул двусторонние оценки времени существования решения.

Введем необходимые обозначения:

$$L_p = L_p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad H_0^1 = H_0^1(\Omega), \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2},$$

$$\Phi = \frac{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}.$$

Положим

$$W = \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q |u'|^2 dx;$$

здесь и далее штрих обозначает производную по времени. Под нижним индексом 0 будем подразумевать, что выражение рассматривается при $t = 0$, C_p – оптимальная константа вложения H_0^1 в L_p (если существует), т. е.

$$C_p = \inf \{C: \|w\|_{L_p} \leq C \|w\|_{H_0^1} \ \forall w \in H_0^1\}.$$

Кроме того, будем применять обозначение $\|\cdot\|_{l_{\infty}}$ к числовым векторам: если $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$, то

$$\|p\|_{l_{\infty}} = \max_{1 \leq k \leq N} |p_k|.$$

Полагая $w = u$ и $w = u'$ в (3), после интегрирования по частям получим соответственно I-е и II-е энергетические тождества:

$$\begin{aligned} \Phi' + a\|u\|^2 + b\|\nabla u\|^2 + \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \\ = \int_{\Omega} \mu|u|^{r+2} dx - \int_{\Omega} fu dx, \\ W + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds \\ = \int_{\Omega} \mu|u|^r uu' dx - \int_{\Omega} u^2(\lambda, \nabla) u' dx - \int_{\Omega} u(\theta, \nabla) u' dx - \int_{\Omega} fu' dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Тождества (4) будут использоваться при выводе оценок для T .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Величину Φ'_0 можно однозначно выразить через u_0 с помощью I-го энергетического равенства. Очевидно, что и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать значения Φ_0 и Φ'_0 заданными.

ЛЕММА 1. Если $\nu(x) \in L_4$, $4w(x) \in H_0^1$, то

$$\left| \int_{\Omega} \nu|w|^{r+2} dx \right| \leq C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\nu\|_{L_4} \|\nabla w\|^{r+2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на неравенстве Гёльдера и теореме вложения.

ЛЕММА 2. Имеет место неравенство $(\Phi')^2 \leq (q+2)\Phi W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на неравенствах Коши–Буняковского–Шварца.

ЛЕММА 3. Пусть $0 \leq \beta \leq 1$. Тогда $B = \beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}$ – наименьшее значение константы B , при котором неравенство $v^\beta \leq B(v+1)$ выполняется для всех неотрицательных v (при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ имеются в виду предельные значения $B|_{\beta=0} = B|_{\beta=1} = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из свойств функции $\varphi(v) = B(v+1) - v^\beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (*), если $h(\cdot) \in C[0, \infty)$, причем существуют числа

$$\gamma = \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty, \quad \eta = \sup_{t \geq 0} |h(t)| < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda, \theta \in \mathbb{R}^N$, $q \in [1, 4]$, $f(\cdot) \in L_2$ и функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (*). Пусть $(r, \mu(\cdot)) \in (1, \infty) \times L_4$ или $(r, \mu(\cdot)) \in (1, 2] \times L_{6/(2-r)}$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$. Для всех начальных данных $u_0(\cdot) \in H_0^1$ существует $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (1). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$, т. е. имеет место опрокидывание решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на принципе сжимающих отображений и в основном аналогично доказательству соответствующего утверждения в [1, гл. 2, § 2].

§ 2. Оценки снизу времени существования решения

Заметим, что так как $6/(2-r) > 4$ при $r \in (1, 2]$, то из условия $\mu(\cdot) \in L_{6/(2-r)}(\Omega)$ следует, что $\mu(\cdot) \in L_4(\Omega)$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mu(\cdot) \in L_4(\Omega)$ и при $N = 2$, и при $N = 3$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda, \theta \in \mathbb{R}^N$, $q \in [1, 4]$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, $f(\cdot) \in L_2$, $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (*), и пусть $r \in (1, \infty)$ или $r \in (1, 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$. Обозначим $k = |\min(a, b, 0)|$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) если $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω , то решение существует глобально по времени;
- 2) если $q \geq 2r$, то решение существует глобально по времени;
- 3) если $\Phi_0 = \|f\| = 0$, то решение существует глобально по времени;
- 4) по крайней мере имеет место оценка $T \geq T_1$, где T_1 – единственный положительный корень уравнения

$$\left[\Phi_0 + \left(\frac{r(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{\|f\|^2}{2} \right) T_1 + \frac{r\sqrt{\gamma\eta}T_1^2}{r+2} \right]^{r/2} \times \left[2^{r/2+1}C_4C_{2r+2}^{r+1}\|\mu\|_{L_4} + \frac{2(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{2\sqrt{\gamma\eta}T_1}{r+2} \right] T_1 = \frac{2}{r}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение 4) теоремы 2 не противоречит утверждениям 1)–3), где установлены достаточные условия глобальной по времени разрешимости: в 4) гарантировано существование решения по крайней мере в некоторой окрестности нуля, при этом не исключается случай $T = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Воспользуемся I-м энергетическим равенством из (4):

$$\Phi' = -b\|\nabla u\|^2 - a\|u\|^2 + \int_{\Omega} \mu|u|^{r+2} dx - \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds - \int_{\Omega} fu dx. \quad (5)$$

Рассмотрим подробнее некоторые слагаемые, входящие в правую часть этого равенства.

1. Заметим, что

$$-b\|\nabla u\|^2 - a\|u\|^2 \leq |\min(a, b, 0)|(\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2) \leq k \cdot 2\Phi.$$

2. Нелокальное выражение при $\gamma \neq 0$ оценим следующим образом:

$$\left| \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \right| \leq \int_0^t |h(t-s)| \left(\frac{\varepsilon}{2\gamma} \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon} \|\nabla u(s)\|^2 \right) ds,$$

где ε – некоторый (пока произвольный) положительный параметр. Применяя введенные в определении 3 обозначения γ и η , а также тривиальное неравенство $\|\nabla u\|^2/2 \leq \Phi$, получим

$$\left| \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \right| \leq \varepsilon\Phi + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds.$$

При $\gamma = 0$ возьмем $\varepsilon = 0$, формально считая, что $0/0 = 0$.

3. Кроме того, имеем

$$\left| \int_{\Omega} f u \, dx \right| \leq \frac{\|f\|^2}{2} + \frac{\|u\|^2}{2} \leq \frac{\|f\|^2}{2} + \Phi.$$

Следовательно, из неравенства (5) получаем

$$\Phi' \leq (2k + \varepsilon + 1)\Phi + \frac{\|f\|^2}{2} + \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} \, dx + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) \, ds. \quad (6)$$

Покажем, что в предположениях утверждений 1), 2) теоремы можно вывести оценку следующего вида:

$$\Phi' \leq A \int_0^t \Phi(s) \, ds + B\Phi + C, \quad (7)$$

где A , B и C – неотрицательные постоянные.

Пусть выполняются предположения утверждения 1): $\mu \leq 0$ почти всюду на Ω . Тогда из (6) следует, что

$$\Phi' \leq (2k + \varepsilon + 1)\Phi + \frac{\|f\|^2}{2} + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) \, ds. \quad (8)$$

Пусть выполняются предположения утверждения 2): $q \geq 2r$. Тогда с помощью неравенства Гёльдера можно показать, что

$$\left| \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} \, dx \right| \leq \|\mu\|_{L_4} \|u\|_{L_4} \|u\|_{L_{2r+2}}^{r+1}.$$

Поскольку из условий утверждения 2) следует, что $q + 2 \geq 2r + 2$ и $q + 2 > 4$, существует такая постоянная c , что

$$\|u\|_{L_4} \|u\|_{L_{2r+2}}^{r+1} \leq c \|u\|_{L_{q+2}}^{r+2} \leq c \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{(r+2)/(q+2)} \Phi^{(r+2)/(q+2)}.$$

Полагая

$$m = c \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{(r+2)/(q+2)} \|\mu\|_{L_4},$$

получим

$$\left| \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} \, dx \right| \leq m \Phi^{(r+2)/(q+2)}.$$

Кроме того, используя неравенство Юнга, имеем

$$m \Phi^{(r+2)/(q+2)} \leq \frac{q-r}{q+2} m^{(q+2)/(q-r)} + \frac{r+2}{q+2} \Phi^1.$$

Полагая

$$M = \frac{q-r}{q+2} m^{(q+2)/(q-r)},$$

получим следствие из (6):

$$\Phi' \leq \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{r+2}{q+2} \right) \Phi + \left(\frac{\|f\|^2}{2} + M \right) + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) \, ds. \quad (9)$$

Записывая (8) и (9) единообразно, приходим к (7). Полагая $\Phi = \psi e^{Bt}$, после несложных преобразований получим

$$\psi' \leq A \int_0^t \psi(s) e^{B(s-t)} ds + C e^{-Bt},$$

а следовательно,

$$\psi' \leq A \int_0^t \psi(s) ds + C.$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t и учитывая равенство

$$\int_0^t \int_0^s \psi(\xi) d\xi ds = \int_0^t (t-s) \psi(s) ds,$$

получим

$$\psi \leq \psi_0 + A \int_0^t (t-s) \psi(s) ds + Ct. \quad (10)$$

Пусть $t \in [0, t^*]$, где t^* – произвольное положительное число. Тогда $t - s \leq t \leq t^*$ и из неравенства (10) следует, что

$$\psi \leq At^* \int_0^t \psi(s) ds + \psi_0 + Ct^*. \quad (11)$$

Если $A = 0$, то ψ принимает конечные значения при всех t и t^* . Если $A \neq 0$, применим к (11) лемму Гронсуолла–Беллмана. Таким образом, имеем

$$\psi \leq At^* \int_0^t (\psi_0 + Ct^*) e^{At^*(t-s)} ds + \psi_0 + Ct^* = (\psi_0 + Ct^*) e^{At^*t}.$$

Поэтому и при $A \neq 0$, и при $A = 0$ выполняется оценка

$$\Phi = \psi e^{Bt} \leq (\Phi_0 + Ct^*) e^{(At^* + B)t}.$$

В силу произвольности t^* приходим к выводу, что Φ принимает конечные значения при всех положительных t . Таким образом, утверждения 1), 2) теоремы доказаны.

Утверждение 3) очевидно: в этом случае задача (1) имеет тривиальное решение, причем оно единственно в силу теоремы 1.

Докажем утверждение 4). Оценивая $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx$ с помощью леммы 1, получим следствие из (6):

$$\Phi' \leq (2k + \varepsilon + 1) \Phi + 2g \Phi^{r/2+1} + \frac{\|f\|^2}{2} + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds,$$

где $g = 2^{r/2} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4}$. Интегрируя последнее неравенство от 0 до t , получаем

$$\begin{aligned} \Phi \leq \Phi_0 + (2k + \varepsilon + 1) \int_0^t \Phi(s) ds + 2g \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds + \frac{\|f\|^2 t}{2} \\ + \frac{\gamma\eta}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^s \Phi(\xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $0 \leq t \leq T_1^*$, где T_1^* – пока произвольное положительное число. Тогда, учитывая, что

$$\int_0^t \int_0^s \Phi(\xi) d\xi ds = \int_0^t (t-s)\Phi(s) ds \leq \int_0^t t\Phi(s) ds \leq T_1^* \int_0^t \Phi(s) ds,$$

получим следствие из (12):

$$\Phi \leq \Phi_0 + \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right) \int_0^t \Phi(s) ds + 2g \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds + \frac{\|f\|^2 T_1^*}{2}. \quad (13)$$

Используя неравенство Юнга, имеем

$$\Phi \leq \frac{2\Phi^{r/2+1}}{r+2} + \frac{r}{r+2}.$$

Таким образом, из (13) следует, что

$$\begin{aligned} \Phi \leq \Phi_0 + \left(2g + \frac{2}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right)\right) \int_0^t \Phi^{r/2+1}(s) ds \\ + \left(\frac{r}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right) + \frac{\|f\|^2}{2}\right) T_1^*. \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} A &= \Phi_0 + \left(\frac{r}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right) + \frac{\|f\|^2}{2}\right) T_1^*, \\ B &= 2g + \frac{2}{r+2} \left(2k + \varepsilon + 1 + \frac{\gamma\eta T_1^*}{\varepsilon}\right), \\ w(\Phi) &= \Phi^{r/2+1}, \quad G(\Phi) = \int_A^\Phi \frac{dy}{w(y)}, \end{aligned}$$

получим неравенство

$$\Phi \leq A + \int_0^t Bw(\Phi(s)) ds.$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в [1, с. 75], применим к последнему неравенству лемму Гронуолла–Беллмана–Бихари. Учитывая, что

$$G(\Phi) = \frac{2}{r} (A^{-r/2} - \Phi^{-r/2}),$$

получим

$$\Phi \leq \left(A^{-r/2} - \frac{rBt}{2}\right)^{-2/r}. \quad (14)$$

Пусть T_1^* – достаточно малое число, т. е. $rBT_1^*/2 < A^{-r/2}$. Тогда при $t \leq T_1^*$, как видно из (14), величина Φ оценивается сверху функцией, принимающей конечные значения, а следовательно, разрушения не происходит. Таким образом, оценкой снизу времени существования T_1^* может служить любое положительное решение неравенства $rBT_1^*/2 < A^{-r/2}$. С учетом первоначальных

обозначений приведем последнее неравенство к следующему виду:

$$\left[\Phi_0 + \left(\frac{r(2k+1)}{r+2} + \frac{\|f\|^2}{2} \right) T_1^* + \frac{r\varepsilon T_1^*}{r+2} + \frac{r\gamma\eta(T_1^*)^2}{(r+2)\varepsilon} \right]^{r/2} \times \left[2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} + \frac{2(2k+1)}{r+2} + \frac{2\varepsilon}{r+2} + \frac{2\gamma\eta T_1^*}{(r+2)\varepsilon} \right] T_1^* < \frac{2}{r}.$$

Возьмем для простоты $\varepsilon = \sqrt{\gamma\eta}$ (если это выражение равно нулю, будем формально считать, что $0/0 = 0$). Тогда

$$F(T_1^*) \equiv \left[\Phi_0 + \left(\frac{r(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{\|f\|^2}{2} \right) T_1^* + \frac{r\sqrt{\gamma\eta}(T_1^*)^2}{r+2} \right]^{r/2} \times \left[2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} + \frac{2(2k+1+\sqrt{\gamma\eta})}{r+2} + \frac{2\sqrt{\gamma\eta} T_1^*}{r+2} \right] T_1^* < \frac{2}{r}.$$

Заметим, что функция $F(\cdot)$ непрерывна и возрастает от 0 до ∞ на $[0, \infty)$. Поэтому $T \geq T_1^*$, где T_1^* – любое число из промежутка $[0, F^{-1}(2/r))$. Значит, $T \geq T_1 \equiv \sup[0, F^{-1}(2/r)) = F^{-1}(2/r)$. Таким образом, оценкой снизу для T может служить единственный положительный корень уравнения $F(T_1) = 2/r$ относительно T_1 . Теорема доказана.

§ 3. Оценки сверху времени существования решения

Перейдем к оцениванию сверху времени существования решения. Ограничимся рассмотрением двух частных случаев задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (**), если $h(\cdot) \in C^1[0, \infty)$, причем существуют числа

$$\gamma = \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty, \quad \eta = \sup_{t \geq 0} |h(t)| < \infty, \quad \delta = \int_0^\infty |h'(t)| dt < \infty.$$

Выведем энергетическое неравенство, которое понадобится при рассмотрении обоих случаев.

ЛЕММА 4. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda, \theta \in \mathbb{R}^N$, $q \in [1, 4]$, $f(\cdot) \in L_2$, $\mu(\cdot) \in L_4$. Пусть $r \in (1, \infty)$ или $r \in (1, 2]$ соответственно при $N = 2$ или $N = 3$, и пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет условиям (**). Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r+3}{2} - \frac{r+1}{2} \varepsilon_1 - \frac{r+2}{2} (\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}) - \frac{r}{2} (|a| + |b|) \right) W \\ & \leq \Phi'' + \frac{r+1}{2} \|f\|^2 + 2NC_4^4(r+2) \|\lambda\|_{l_\infty} \Phi^2 \\ & \quad + (r(|a| + |b|) + N(r+2) \|\theta\|_{l_\infty} + \varepsilon_2 + 2|h_0|) \Phi \\ & \quad + \frac{\gamma(r+1)}{\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds + \frac{\delta}{\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \Phi(s) ds, \quad (15) \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{1,2}$ – произвольные положительные параметры. При этом если $h(t) \equiv 0$, то положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, формально считая, что $0/0 = 0$.

Пусть

$$I = a\|u\|^2 + b\|\nabla u\|^2, \quad I_1 = \int_{\Omega} \mu|u|^r uu' dx, \\ I_2 = \int_{\Omega} u^2(\lambda, \nabla)u' dx, \quad I_3 = \int_{\Omega} u(\theta, \nabla)u' dx, \quad I_4 = \int_{\Omega} fu' dx.$$

Дифференцируя I-е энергетическое равенство из (4), получим

$$\Phi'' = -I' + (r+2)I_1 - I_4 - \int_0^t h'(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \\ - \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds - h(0)(\nabla u(t), \nabla u(t)). \quad (16)$$

Теперь II-е энергетическое равенство из (4) перепишем в следующем виде:

$$W = -\frac{I'}{2} + I_1 - I_2 - I_3 - I_4 - \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds. \quad (17)$$

Выразим I_1 из (17) и подставим в (16). Получим следующее равенство:

$$(r+2)W = \Phi'' - \frac{r}{2}I' - (r+2)I_2 - (r+2)I_3 - (r+1)I_4 \\ - (r+1) \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds \\ + \int_0^t h'(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds + h(0)(\nabla u(t), \nabla u(t)). \quad (18)$$

Оценим некоторые входящие в (18) слагаемые отдельно.

1. Заметим, что

$$\left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| = \left| \int_{\Omega} 2uu' dx \right| \leq \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} (u')^2 dx \leq 2\Phi + W.$$

Аналогично можно показать, что $\left| \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right| \leq 2\Phi + W$. Следовательно,

$$|I'| \leq |a| \left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| + |b| \left| \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right| \leq 2(|a| + |b|)\Phi + (|a| + |b|)W.$$

2. Оценим I_2 :

$$|I_2| = \left| \int_{\Omega} u^2(\lambda, \nabla)u' dx \right| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k| \sum_{k=1}^N \left| \int_{\Omega} u^2 \frac{\partial}{\partial x_k} u' dx \right| \\ \leq \|\lambda\|_{l_{\infty}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Omega} u^4 dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} u' \right)^2 dx \right).$$

Поскольку $\int_{\Omega} u^4 dx = \|u\|_{L_4}^4 \leq C_4^4 \|\nabla u\|^4 \leq 4C_4^4 \Phi^2$ и $\sum_{k=1}^N \int_{\Omega} (\partial u' / \partial x_k)^2 dx = \|\nabla u'\|^2 \leq W$, то

$$|I_2| \leq 2N\|\lambda\|_{l_{\infty}} C_4^4 \Phi^2 + \frac{\|\lambda\|_{l_{\infty}}}{2} W.$$

3. Проводя аналогичные рассуждения для I_3 , получим

$$|I_3| \leq N \|\theta\|_{l_\infty} \Phi + \frac{\|\theta\|_{l_\infty}}{2} W.$$

4. Заметим, что $|I_4| \leq \|f\|^2/2 + \|u'\|^2/2 \leq \|f\|^2/2 + W/2$.

5. Оценим слагаемое $\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds$, считая, что $\gamma \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s), \nabla u'(t)) ds \right| &\leq \int_0^t |h(t-s)| |(\nabla u(s), \nabla u'(t))| ds \\ &\leq \int_0^t |h(t-s)| \left(\frac{\varepsilon_1}{2\gamma} \|\nabla u'(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon_1} \|\nabla u(s)\|^2 \right) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2\gamma} \|\nabla u'(t)\|^2 \int_0^t |h(t-s)| ds + \frac{\gamma}{2\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \|\nabla u(s)\|^2 ds \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2\gamma} W\gamma + \frac{\gamma}{2\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \cdot 2\Phi(s) ds = \frac{\varepsilon_1}{2} W + \frac{\gamma}{\varepsilon_1} \int_0^t |h(t-s)| \Phi(s) ds, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 > 0$.

6. Оценим слагаемое $\int_0^t h'(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds$, считая, что $\gamma \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t h'(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t)) ds \right| &\leq \int_0^t |h'(t-s)| |(\nabla u(s), \nabla u(t))| ds \\ &\leq \int_0^t |h'(t-s)| \left(\frac{\varepsilon_2}{2\delta} \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon_2} \|\nabla u(s)\|^2 \right) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{2\delta} \|\nabla u(t)\|^2 \int_0^t |h'(t-s)| ds + \frac{\delta}{2\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \|\nabla u(s)\|^2 ds \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{\delta} \Phi\delta + \frac{\delta}{\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \Phi(s) ds = \varepsilon_2 \Phi + \frac{\delta}{\varepsilon_2} \int_0^t |h'(t-s)| \Phi(s) ds, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_2 > 0$.

Применим найденные оценки в (18) и соберем в левой части члены с W . Таким образом, при $\gamma \neq 0$ приходим к неравенству (15).

Заметим, что если $\gamma = 0$, то нелокальные члены равны нулю. Значит, и в этом случае неравенство (15) будет выполняться, если взять $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, формально считая, что $0/0 = 0$. Лемма доказана.

Обозначим

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r+1-(r+2)\|\theta\|_{l_\infty}-r(|a|+|b|)}{2}, \\ k_2 &= r(|a|+|b|)+N(r+2)\|\theta\|_{l_\infty}+\delta+2|h_0|, \\ k_3 &= \frac{r+1}{2}\|f\|^2, \quad \alpha = \frac{k_1}{q+2}-1, \quad H(t) = \frac{\gamma(r+1)^2}{2}|h(t)|+|h'(t)|. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N = 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}^2$, $\lambda = (0, 0)$, $q \in [1, 4]$, $r \in (1, \infty)$, $\mu(\cdot) \in L_4$, $f(\cdot) \in L_2$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, причем $\Phi_0 > 0$. Пусть $h(\cdot)$ удовлетворяет

условиям (**), причем существует такая функция $\omega(\cdot) \in C^1[0, \infty)$, принимающая неположительные значения, что $|H(t)| \leq \omega'(t)$ при всех неотрицательных t . Пусть, кроме того,

$$\alpha > 0, \quad (19)$$

$$\alpha\Phi'_0 - \Phi_0 > \sqrt{(\alpha(k_2 + |\omega_0|) - 1)\Phi_0^2 + \frac{2\alpha^2 k_3}{2\alpha + 1}\Phi_0}. \quad (20)$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\alpha\Phi'_0}{\Phi_0} - 1)^2 - \alpha(k_2 + |\omega_0|) + 1 - 2(2\alpha + 1)^{-1}\alpha^2 k_3 \Phi_0^{-1}}}. \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из I-го энергетического равенства в (4) видно, что специальным выбором $\mu(\cdot)$ можно сделать величину Φ'_0 сколь угодно большой, тогда как правая часть (20) не зависит от $\mu(\cdot)$. Поэтому условие (20) непротиворечиво. Условие (19) будет непротиворечивым, если $|a| + |b| + \|\theta\|_{l_\infty} < 1$, а число r достаточно велико.

Воспользуемся леммой 4, полагая $\varepsilon_1 = 2/(r + 1)$, $\varepsilon_2 = \delta$. Таким образом, неравенство (15) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{r+1}{2} - \frac{r+2}{2} \|\theta\|_{l_\infty} - \frac{r}{2}(|a| + |b|) \right) W &\leq \Phi'' + \frac{r+1}{2} \|f\|^2 + \int_0^t H(t-s)\Phi(s) ds \\ &+ (r(|a| + |b|) + N(r+2)\|\theta\|_{l_\infty} + \delta + 2|h(0)|)\Phi. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражения, являющиеся соответственно множителями при W и Φ , были обозначены через k_1 и k_2 , а свободный член – через k_3 . Из условия (19) следует, что $k_1 > 0$. Сопоставляя неравенство (22) с леммой 2, получим

$$\Phi\Phi'' - \frac{k_1}{q+2}(\Phi')^2 + k_2\Phi^2 + k_3\Phi + \Phi \int_0^t H(t-s)\Phi(s) ds \geq 0. \quad (23)$$

Оценим интегральное выражение в неравенстве (23):

$$J \equiv \left| \int_0^t H(t-s)\Phi(s) ds \right| \leq \int_0^t \omega'(t-s)\Phi(s) ds.$$

Сделав замену переменной $\tau = t - s$, проинтегрируем правую часть последнего неравенства по частям. Таким образом, получим

$$J \leq \omega(t)\Phi_0 - \omega_0\Phi(t) + \int_0^t \omega(\tau)\Phi'(t-\tau) d\tau. \quad (24)$$

Поскольку функция $\Phi'(\cdot)$ положительна в начальный момент и непрерывна, то существует такой момент времени $t_1 \in (0, T]$, что $\Phi'(t) > 0$ при $t \in [0, t_1]$. Поэтому из (24) следует, что

$$J \leq |\omega_0|\Phi(t)$$

при $t \in [0, t_1]$. Значит, из (23) следует, что

$$\Phi\Phi'' - \frac{k_1}{q+2}(\Phi')^2 + k_2\Phi^2 + k_3\Phi + |\omega_0|\Phi^2 \geq 0.$$

Положим $\Phi = z^{-1/\alpha}$. После упрощений получим

$$z'' \leq \alpha(k_2 + |\omega_0|)z + \alpha k_3 z^{1+1/\alpha}. \quad (25)$$

Положим $l_1 = \alpha(k_2 + |\omega_0|)$, $l_2 = \alpha k_3$. Кроме того, введем новую переменную $y = ze^t$. При таких обозначениях (25) примет следующий вид:

$$y'' \leq 2y' + (l_1 - 1)y + l_2 e^{-t/\alpha} y^{1+1/\alpha}. \quad (26)$$

Несложно убедиться в том, что $y'_0 = z'_0 + z_0 = \Phi_0^{-\alpha} - \alpha\Phi_0^{-\alpha-1}\Phi'_0$. Значит, $y'_0 < 0$ в силу (20), и, кроме того, в силу непрерывности $y(\cdot)$ существует такое число $t_2 \in (0, t_1]$, что $y'(t) < 0$ при $t \leq t_2$. Поэтому при $t \leq t_2$ из (26) следует, что

$$y'' \leq (l_1 - 1)y + l_2 y^{1+1/\alpha}.$$

Умножая последнее неравенство на $y'(t)$ и интегрируя от 0 до t , получим

$$\left. \frac{(y')^2}{2} \right|_0^t \geq \left. \frac{(l_1 - 1)y^2}{2} \right|_0^t + l_2 \left. \frac{y^{2+1/\alpha}}{2 + 1/\alpha} \right|_0^t.$$

Следовательно,

$$(y')^2 \geq A, \quad (27)$$

где

$$A = (y'_0)^2 - (l_1 - 1)y_0^2 - 2l_2 \frac{y_0^{2+1/\alpha}}{2 + 1/\alpha}.$$

Выразим A через Φ_0 :

$$A = (\Phi_0 - \alpha\Phi'_0)^2 \Phi_0^{-2\alpha-2} - (l_1 - 1)\Phi_0^{-2\alpha} - \frac{2l_2\Phi_0^{-2\alpha-1}}{2 + 1/\alpha}.$$

Таким образом, из (20) следует, что $A > 0$. Учитывая знак y' , перепишем неравенство (27) в виде

$$y' \leq -\sqrt{A}. \quad (28)$$

Возвращаясь к функции Φ , приведем неравенство (28) к виду

$$\alpha\Phi' - \Phi \geq \sqrt{A}\Phi^{\alpha+1}/e^t.$$

Поскольку $\Phi_0 > 0$ и $\Phi'(t) \geq 0$ при $t \leq t_2$, то $\sqrt{A}\Phi^{\alpha+1}/e^t$ нигде не равно нулю. Следовательно, $\alpha\Phi' - \Phi > 0$ при $t \leq t_2$ и, в частности, при $t = t_2$. Поэтому $\Phi'(t_2) > 0$. Если $t_2 < T$, возьмем t_2 в качестве нового начального момента и проведем аналогичные рассуждения. Получим, что существует такой момент времени $t_3 > t_2$, что $\alpha\Phi'(t) \geq \Phi(t)$ при $t \leq t_3$, откуда $\Phi'(t) \geq 0$. Аналогичным образом проводя продолжения временных промежутков, получим, что

неравенство (28) выполняется на достаточно большом промежутке времени. Интегрируя теперь (28) от 0 до t , получим

$$y \leq y_0 - \sqrt{At}.$$

Теперь вернемся к функции Φ :

$$\Phi^{-\alpha} e^t \leq \Phi_0^{-\alpha} - \sqrt{At} \iff \Phi \geq e^{t/\alpha} (\Phi_0^{-\alpha} - \sqrt{At})^{-1/\alpha}$$

(равносильность имеет место при достаточно малых t). Таким образом, функция $\Phi(t)$ оценивается снизу функцией, которая имеет конечные значения в окрестности нуля и обращается в бесконечность на границе этой окрестности, т. е. при

$$t = T_2 = \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{\sqrt{A}}.$$

Поэтому $T \leq T_2$. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим формулу (21). Теорема доказана.

Положим

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{r + 3 - (r + 2)(\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}) - r(|a| + |b|)}{2}, \\ m_2 &= r(|a| + |b|) + N(r + 2)\|\theta\|_{l_\infty}, \quad m_3 = 2NC_4^4(r + 2)\|\lambda\|_{l_\infty}, \\ m_4 &= \frac{r + 1}{2}\|f\|^2. \end{aligned}$$

Проведем следующее переобозначение:

$$\alpha = \frac{m_1}{q + 2} - 1.$$

Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha}, \\ p_1 &= \alpha\alpha_1 m_4 + \frac{1}{2}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2(m_2 + \alpha_1 m_3 + \alpha_1 m_4)^2 + 2\alpha\alpha_1 m_3}{2p_1}}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $N = 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda, \theta \in \mathbb{R}^2$, $q \in [1, 4]$, $r \in (1, \infty)$, $\mu(\cdot) \in L_4$, $f(\cdot) \in L_2$, $u_0(\cdot) \in H_0^1$, $h(t) \equiv 0$. Пусть, кроме того, $\Phi_0 > 0$,

$$\alpha \geq 1, \tag{29}$$

$$\alpha\Phi_0' \geq (\Phi_0^{1-\alpha} + p_2^2\Phi_0^{1+\alpha})\sqrt{\frac{2p_1}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{p_2}}. \tag{30}$$

Тогда имеет место оценка $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \frac{\alpha\Phi_0^{\alpha-1}\Phi_0'}{p_1(1 + p_2^2\Phi_0^{2\alpha})} - \sqrt{\frac{\alpha^2\Phi_0^{2\alpha-2}(\Phi_0')^2}{p_1^2(1 + p_2^2\Phi_0^{2\alpha})^2} - \frac{2}{p_1 p_2} \operatorname{arctg} \frac{\Phi_0^{-\alpha}}{p_2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из I-го энергетического равенства в (4) видно, что специальным выбором $\mu(\cdot)$ можно сделать величину $\alpha\Phi'_0$ сколь угодно большой, тогда как правая часть (30) не зависит от $\mu(\cdot)$. Поэтому условие (30) непротиворечиво. Условие (29) будет непротиворечивым, если $|a| + |b| + \|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty} < 1$, а число r достаточно велико.

Воспользуемся оценкой (15):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r+3}{2} - \frac{r+2}{2} (\|\lambda\|_{l_\infty} + \|\theta\|_{l_\infty}) - \frac{r}{2} (|a| + |b|) \right) W \\ & \leq \Phi'' + \frac{r+1}{2} \|f\|^2 + 2NC_4^4(r+2)\|\lambda\|_{l_\infty}\Phi^2 + (r(|a| + |b|) + N(r+2)\|\theta\|_{l_\infty})\Phi. \end{aligned} \quad (31)$$

Для коэффициентов при W , Φ , Φ^2 и свободного члена были введены соответственно обозначения m_1 , m_2 , m_3 , m_4 . Сопоставляя (31) с леммой 2, получим

$$\Phi\Phi'' - \frac{m_1}{q+2}(\Phi')^2 + m_2\Phi^2 + m_3\Phi^3 + m_4\Phi \geq 0.$$

Полагая $\alpha = m_1/(q+2) - 1$, $\Phi = z^{-1/\alpha}$, после упрощений приходим к неравенству

$$z'' \leq \alpha m_2 z + \alpha m_3 z^{1-1/\alpha} + \alpha m_4 z^{1+1/\alpha}. \quad (32)$$

Заметим, что $0 < 1/\alpha \leq 1$ и $0 \leq 1 - 1/\alpha < 1$ в силу (29). Применяя лемму 3 к членам с множителями m_3 и m_4 в правой части (32), а затем неравенство $Cz \leq C^2/2 + z^2/2$, получим

$$\begin{aligned} \alpha m_2 z + \alpha m_3 z^{1-1/\alpha} + \alpha m_4 z^{1+1/\alpha} & \leq \alpha m_2 z + \alpha m_3 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} (z+1) \\ & + \alpha m_4 z \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{1-1/\alpha} (z+1) \leq p_1(z^2 + p_2^2). \end{aligned}$$

Значит, из (32) следует, что $z'' \leq p_1(z^2 + p_2^2)$, откуда имеем

$$\frac{z''}{z^2 + p_2^2} \leq p_1. \quad (33)$$

Интегрируя неравенство (33) от 0 до t и учитывая то, что

$$\int_0^t \frac{z'' d\tau}{z^2 + p_2^2} = \frac{z'}{z^2 + p_2^2} \Big|_0^t + \int_0^t \frac{2z(z')^2 d\tau}{(z^2 + p_2^2)^2} \geq \frac{z'}{z^2 + p_2^2} \Big|_0^t,$$

имеем

$$\frac{z'}{z^2 + p_2^2} \leq \frac{z'_0}{z_0^2 + p_2^2} + p_1 t.$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t , получим

$$\frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{z}{p_2} - \frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} \leq \frac{z'_0 t}{z_0^2 + p_2^2} + \frac{p_1 t^2}{2}.$$

При достаточно малых t следующие два перехода будут равносильными:

$$z \leq p_2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} + \frac{p_2 z'_0 t}{z_0^2 + p_2^2} + \frac{p_1 p_2 t^2}{2} \right),$$

$$\Phi \geq p_2^{-1/\alpha} \left(\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} + \frac{p_2 z'_0 t}{z_0^2 + p_2^2} + \frac{p_1 p_2 t^2}{2} \right) \right)^{-1/\alpha}.$$

Таким образом, Φ можно оценить снизу величиной, принимающей конечные значения в окрестности нуля, причем границей этой окрестности будет наименьшее положительное t , при котором выражение под знаком тангенса равно нулю. Значит, построение оценки сверху для T сводится к нахождению меньшего положительного корня уравнения

$$\frac{p_1 p_2 t^2}{2} + \frac{p_2 z'_0 t}{z_0^2 + p_2^2} + \operatorname{arctg} \frac{z_0}{p_2} = 0$$

(его существование обеспечивается условием (30)). Выражая z_0 и z'_0 через Φ_0 и α , придем к требуемой формуле для T_2 . Теорема доказана.

Список литературы

1. М. О. Корпусов, *Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях*, УРСС, М., 2010.
2. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
3. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, *Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных*, Научный мир, М., 2008.
4. А. И. Аристов, “Исследование качественных свойств решений одного нелинейного соболевского уравнения”, *Сб. статей молодых ученых ф-та ВМК МГУ 2010 г.*, 7, Макс-Пресс, М., 2010, 11–22.
5. А. И. Аристов, “Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного соболевского уравнения с переменным коэффициентом”, *Дифференц. уравнения*, 48:6 (2012), 781–789; англ. пер.: A. I. Aristov, “Estimates for the lifespan of solutions of an initial-boundary value problem for a nonlinear Sobolev equation with variable coefficient”, *Math. Notes*, 48:6 (2012), 787–795.

Анатолий Игоревич Аристов

(ANATOLY I. ARISTOV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

факультет вычислительной математики

и кибернетики

E-mail: ai_aristov@mail.ru

Поступило в редакцию

11.07.2012

23.09.2013