Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Зархин, Одномерные полиномиальные отображения, периодические точки и мультипликаторы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 4, 59–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:19:54

УДК 517.535.2+517.927.7

Ю. Г. Зархин

Одномерные полиномиальные отображения, периодические точки и мультипликаторы

Изучаются касательные отображения, связанные с мультипликаторами периодических точек типичного одномерного полиномиального отображения.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: комплексные многочлены от одной переменной, касательные отображения, периодические точки, мультипликаторы.

DOI: 10.4213/im8036

Посвящается И. Р. Шафаревичу в связи с его девяностолетием

§ 1. Определения, обозначения, формулировки

Через $\mathbb{C}$ обозначается поле комплексных чисел. Для любого натурального числа m рассмотрим аффинное пространство $\mathbf{A}^m = \mathbb{C}^m$ всех приведенных комплексных многочленов степени m

$$u(x) = x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$$

с коэффициентами $a = (a_0, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^m = \mathbf{A}^m$. Удобно отождествлять касательное пространство $\mathbb{C}^m$ к $u(x) \in \mathbf{A}^m$ с пространством всех многочленов $p(x)$ степени не более $m-1$. А именно, многочлену $p(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i$ сопоставляется касательный вектор $(c_0, \dots, c_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, который отвечает классу кривых, касающихся в точке $u(x)$ кривой $\varepsilon \rightarrow u(x) + \varepsilon p(x) \in \mathbf{A}^m$ [1, ч. II, гл. III, § 8, с. 81–82].

Пусть $P_m \subset \mathbf{A}^m$ – всюду плотное открытое в топологии Зарисского аффинное подмножество, состоящее из всех многочленов без кратных корней. Пусть $f(x) = x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \in P_m$; выберем корень α многочлена $f(x)$. Локально (относительно коэффициентов a) можно рассматривать α (с помощью теоремы о неявной функции) как голоморфную (однозначную) функцию от $a = (a_0, \dots, a_{m-1})$. Имеем [2, § 2]

$$\frac{d\alpha}{da_i} = -[f'(\alpha)]^{-1} \alpha^i. \quad (1.1)$$

(Поскольку α – простой корень многочлена $f(x)$, то $f'(\alpha) \neq 0$.) Кроме того (см. [2, § 2]),

$$\frac{df'(\alpha)}{da_i} = i\alpha^{i-1} - [f'(\alpha)]^{-1} \alpha^i f''(\alpha) \quad (1.2)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Simons Foundation (грант #246625 to Yuri Zarkhin).

(конечно, если $i = 0$, то первый член исчезает). Используя формулы (1.1), (1.2), вычислим дифференциал $dN: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ (в точке $f(x)$) локально определенной голоморфной функции

$$N: P_m \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) \mapsto f'(\alpha).$$

Мы получаем, что линейная функция dN переводит касательный вектор $p(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i$ в число

$$dN(p(x)) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \frac{df'}{da_i}(\alpha) = p'(\alpha) - [f'(\alpha)]^{-1} p(\alpha) f''(\alpha).$$

ПРИМЕР 1.1. Предположим, что $m \geq 3$ и $f(x) = x^m - x$. Тогда α либо равно нулю, либо является корнем из единицы $(m-1)$ -й степени. Если $\alpha = 0$, то $f''(0) = 0$ и

$$dN(p(x)) = p'(0) = c_1.$$

Градиент функции N в точке $f(x) = x^m - x$ (относительно корня 0) есть

$$Q_1(0) = (0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{C}^m.$$

Если $\alpha^{m-1} = 1$, то

$$f'(\alpha) = m\alpha^{m-1} - 1 = m - 1, \quad f''(\alpha) = m(m-1)\alpha^{m-2} = \frac{m(m-1)}{\alpha},$$

$$dN(p(x)) = p'(\alpha) - \frac{mp(\alpha)}{\alpha}.$$

Градиент функции N в точке $f(x) = x^m - x$ (относительно корня α) есть

$$Q_1(\alpha) = \left(-\frac{m}{\alpha}, (1-m), (2-m)\alpha, \dots, -\alpha^{m-2} \right) \in \mathbb{C}^n.$$

Пусть $n \geq 2$ – целое число и $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ – приведенный многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Для любого натурального числа r мы обозначаем через $g^{or}(x)$ композицию $g(\dots g(x))$ (r раз). Ясно, что $g^{or}(x)$ – приведенный многочлен степени n^r с комплексными коэффициентами. Рассмотрим полиномиальное отображение

$$G: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z).$$

Ясно, что его неподвижные точки – это в точности корни многочлена $g(x) - x$, в то время как корни многочлена $g^{or}(x) - x$ – это в точности периодические точки отображения G с периодом, делящим r .

ПРИМЕР 1.2. Если $g(x) = x^n$, то $g^{or}(x) = x^{n^r}$, $g^{or}(x) - x = x^{n^r} - x$.

Обозначим через $Z_{n,r} \subset \mathbf{A}^n$ всюду плотное в топологии Зарисского открытое аффинное подмножество, состоящее из всех таких приведенных многочленов $g(x)$ степени n , что $g^{or}(x) - x$ лежит в P_{n^r} (т. е. не имеет кратных корней). Например, $x^n \in Z_{n,r}$ для всех r . Ясно, что для любого натурального числа m

$$Z_{m,1} = \{f(x) + x \mid f(x) \in P_m\}.$$

Также ясно, что голоморфное отображение

$$U_m: Z_{m,1} \rightarrow P_m, \quad h(x) \mapsto h(x) - x,$$

является голоморфным изоморфизмом, касательное отображение

$$dU_n: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

к которому является тождественным отображением во всех точках многообразия $Z_{m,1}$.

Рассмотрим локально определенную голоморфную функцию

$$M^r: Z_{n,r} \rightarrow Z_{n^r,1} \rightarrow P_{n^r} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) \mapsto g^{\circ r}(x) \xrightarrow{U_{n^r}} g^{\circ r}(x) - x \xrightarrow{N} [g^{\circ r}(x) - x]'(\alpha),$$

где α – корень многочлена $g^{\circ r}(x) - x$. Мы собираемся обсудить ее дифференциал

$$dM^r|_{g(x)}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C},$$

обращая особое внимание на вычисление соответствующего градиента

$$\text{grad}(M^r)|_{g(x)} \in \mathbb{C}^n$$

в точке $g(x) = x^n \in Z_{n,r}$. В дальнейшем мы обозначаем этот градиент через $Q_r(\alpha)$. Это обозначение согласуется с нашим предыдущим обозначением $Q_1(\alpha)$ в примере 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Рассмотрим локально определенную мультипликаторную функцию

$$\text{Mult}^r: Z_{n,r} \rightarrow Z_{n^r,1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) \mapsto [g^{\circ r}]'(\alpha).$$

Ясно, что $M^r(g) = \text{Mult}^r(g) - 1$. Отсюда вытекает, что дифференциалы dM^r и $d\text{Mult}^r$ всюду совпадают. Другими словами,

$$\text{grad}(M^r)|_{g(x)} = \text{grad}(\text{Mult}^r)|_{g(x)} \quad \forall g(x) \in Z_{n,r}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Для того чтобы сформулировать наши основные результаты, сначала заметим, что если $g(x) \in Z_{n,r}$ и $\nu(n, r)$ – число всех орбит длины r для отображения $z \mapsto g(z)$, то

$$\nu(n, r) \geq \frac{n}{r}$$

(см. замечание 4.3). Затем рассмотрим натуральное число ℓ и последовательность $\{r_1, \dots, r_\ell\}$, состоящую из ℓ натуральных чисел. Пусть $Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ – пересечение всех множеств Z_{n, r_i} ; это непустое открытое по Зарисскому аффинное подмножество в $\mathbf{A}^n$, содержащее $g(x) = x^n$. Пусть $g(x) \in Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$. Для каждого i выберем комплексное число β_i , являющееся периодической точкой отображения $G: z \mapsto g(z)$ с *точным периодом* r_i . Локально (относительно g) каждая β_i – голоморфная функция (от коэффициентов многочлена $g(x)$).

Предположим, что все $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ лежат в *различных орбитах* отображения $z \mapsto g(z)$. Рассмотрим следующие ℓ локально определенных голоморфных функций

$$\text{Mult}_{\beta_i, r_i}: Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) \mapsto [g^{\circ r_i}]'(\beta_i).$$

Пусть $Z^0(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ – множество всех многочленов $g(x) \in Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ таких, что ℓ -элементное множество

$$\{\text{grad}(\text{Mult}_{\beta_i, r_i})|_{g(x)} \in \mathbb{C}^n \mid 1 \leq i \leq \ell\}$$

градиентов функций $\text{Mult}_{\beta_i, r_i}$ в $g(x)$ линейно независимо в $\mathbb{C}^n$ для любого выбора периодических точек $\{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$. Ясно, что $Z^0(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ открыто в $Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$, а следовательно, в $\mathbf{A}^n$, в комплексной топологии. Тем не менее, это множество может быть пустым, например, если $\ell \geq n$.

Следующие утверждения являются основными результатами настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1.5. *Множество $Z^0(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ – открытое в топологии Зарисского подмножество в $Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ и, следовательно, в $\mathbf{A}^n$.*

ТЕОРЕМА 1.6. *Пусть $n \geq 3$. Предположим, что $\sum_{i=1}^\ell r_i \leq n$. Если $r_j = 1$ для некоторого j , то мы дополнительно предполагаем, что $\sum_{i=1}^\ell r_i < n$. Тогда множество $Z^0(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ содержит $g(x) = x^n$ и, следовательно, непусто.*

Заметим, что в обозначениях и предположениях теоремы 1.6 если r – натуральное число, а $l(r)$ – число индексов i с $r_i = r$, то

$$l(r) \leq \frac{n}{r} \leq \nu(n, r).$$

Комбинируя теоремы 1.5, 1.6, мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.7. *Пусть $n \geq 3$. Предположим, что $\sum_{i=1}^\ell r_i \leq n$. Если $r_j = 1$ для некоторого j , то мы дополнительно предполагаем, что $\sum_{i=1}^\ell r_i < n$. Тогда $Z^0(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$ – открытое по Зарисскому всюду плотное подмножество в $Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$, которое содержит $g(x) = x^n$.*

ПРИМЕР 1.8. Пусть $\ell = n - 1$ и все $r_i = 1$ (т.е. все соответствующие β_i – неподвижные точки). Из результатов [2], [3] вытекает, что

$$Z^0(n, n - 1; 1, \dots, 1) = Z(n, n - 1; 1, \dots, 1) = Z_{n,1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. В обозначениях и предположениях следствия 1.7 рассмотрим локально определенное голоморфное отображение

$$Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell) \rightarrow \mathbb{C}^\ell,$$

заданное набором функций $\{\text{Mult}_{\beta_i, r_i}\}_{i=1}^\ell$. Согласно следствию 1.7 это отображение имеет (максимальный) ранг ℓ на непустом открытом по Зарисскому подмножестве

$$Z^0(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell) \subset Z(n, \ell; r_1, \dots, r_\ell)$$

при любом выборе периодических точек $\{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$ из разных орбит. Было бы интересно описать образ этого отображения (случай неподвижных точек, т.е. когда все r_i равны 1, разобранный Вик. С. Куликовым, см. в [2, § 4]).

Отметим, что замечание 1.9 дает частичный ответ на вопрос Ю. С. Ильяшенко, которого интересовал случай двух орбит в связи с работами [4], [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Для случая двух орбит из приводимых далее примеров 2.3, 2.4 и замечания 2.5 вытекает, что $g(x) = x^n$ не лежит в множестве $Z(n, 2; r_1, r_2)$, если $r_1 = r_2 = n - 1$ или $r_1 = 1, r_2 = n - 1$. Было бы интересно понять, является ли в этих случаях множество $Z(n, 2; r_1, r_2)$ пустым.

Статья организована следующим образом. В §2 мы явно вычисляем дифференциалы $d\text{Mult}_{\beta, r}$ в точке $g(x) = x^n$, где β – корень степени $n^r - 1$ из единицы. Это позволяет нам явно выписать соответствующие градиенты $Q_r(\beta) \in \mathbb{C}^n$. После этого теорема 1.6 становится эквивалентной утверждению о линейной независимости соответствующего множества векторов $\{Q_{r_i}(\beta_i)\}$ (и $Q_1(0)$, если один из r_i равен 1) в пространстве $\mathbb{C}^n$. Мы доказываем это утверждение в §3. Используя стандартные свойства конечных отображений (см. [6, гл. 1], [7, гл. 8]), мы доказываем теорему 1.5 в §4.

§2. Вычисления касательных отображений

ЛЕММА 2.1. *Рассмотрим голоморфное отображение $\Phi_{n,r}: \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^{n^r}$, которое переводит каждый приведенный многочлен $g(x)$ степени n в приведенный многочлен $g^{\circ r}(x)$ степени n^r . Тогда его касательное отображение $d\Phi_{n,r}$ в $g(x) = x^n$ допускает следующее описание. Оно переводит касательный вектор x^k (в точке x^n) в касательный вектор*

$$p_{r,k}(x) := \sum_{i=1}^r n^{r-i} x^{n^r - n^i + n^{i-1}k}$$

(в точке x^{n^r}). В частности,

$$p_{r,0}(x) := \sum_{i=1}^r n^{r-i} x^{n^r - n^i} = n^{r-1} x^{n^r - n} + n^{r-2} x^{n^r - n^2} + \dots,$$

$$p_{r,1}(x) := \sum_{i=1}^r n^{r-i} x^{n^r - n^i + n^{i-1}} = n^{r-1} x^{n^r - n + 1} + n^{r-2} x^{n^r - n^2 + n} + \dots,$$

$$\deg(p_{r,0}) = n^r - n, \quad \deg(p_{r,1}) = n^r - n + 1, \quad \deg(p_{r,k}) = n^r - n + k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $p_{1,k}(x) = x^k$ и для всех натуральных чисел r

$$p_{r+1,k}(x) = nx^{(n-1)n^r} p_{r,k}(x) + x^{kn^r}.$$

Проведем индукцию по r . Мы должны доказать, что если $g^{[\varepsilon]}(x) = x^n + \varepsilon x^k$, то $[g^{[\varepsilon]}]^{\circ r}(x) = x^{n^r} + \varepsilon p_{r,k}(x) + O(\varepsilon^2)$. Случай $r = 1$ очевиден. Предположим, что это утверждение справедливо для r , и проверим его для $r + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} [g^{[\varepsilon]}]^{\circ(r+1)}(x) &= \{[g^{[\varepsilon]}]^{\circ r}(x)\}^n + \varepsilon \{[g^{[\varepsilon]}]^{\circ r}(x)\}^k \\ &= (x^{n^r} + \varepsilon p_{r,k}(x) + O(\varepsilon^2))^n + \varepsilon (x^{n^r} + \varepsilon p_{r,k}(x) + O(\varepsilon^2))^k \\ &= x^{n^{r+1}} + \varepsilon n x^{(n-1)n^r} p_{r,k}(x) + \varepsilon x^{kn^r} + O(\varepsilon^2) \\ &= x^{n^{r+1}} + \varepsilon \{n x^{(n-1)n^r} p_{r,k}(x) + x^{kn^r}\} + O(\varepsilon^2) = x^{n^{r+1}} + \varepsilon p_{r+1,k}(x) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Поскольку все $p_{r,k}$ (для фиксированных n и r) имеют различные степени, множество многочленов $\{p_{r,0}, \dots, p_{r,n-1}\}$ линейно независимо. Это означает, что ранг касательного отображения к $\Phi_{n,r}$ в точке $g(x) = x^n$ равен n , т. е. это касательное отображение инъективно, и его образ совпадает с $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{C} \cdot p_{r,k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть $n^r \geq 3$. Вычислим дифференциал

$$d \text{Mult}^r = dM^r = d(M\Phi_{n,r}) = dM \circ d\Phi_{n,r}$$

в точке $g(x) = x^m \in Z_{n,r}$. Ясно, что

$$\Phi_{n,r}(x^n) = x^{n^r} \in P_m$$

для $m = n^r$. Пусть α — ненулевой корень многочлена $x^m - x$, т. е. $\alpha^{n^r-1} = 1$. Используя лемму 2.1 и пример 1.1, мы получаем следующее утверждение. Образ

$$q_{r,k}(\alpha) := d \text{Mult}_{|g(x)=x^n}^r(x^k)$$

касательного вектора x^k в $g(x) = x^n \in Z_{n,r}$ есть

$$\begin{aligned} p'_{r,k}(\alpha) - \frac{n^r p_{r,k}(\alpha)}{\alpha} &= \alpha^{-1} \sum_{i=1}^r (n^r - n^i + n^{i-1}k) n^{r-i} \alpha^{n^r - n^i + n^{i-1}k} - \alpha^{-1} \sum_{i=1}^r n^r n^{r-i} \alpha^{n^r - n^i + n^{i-1}k} \\ &= \alpha^{n^r-1} \sum_{i=1}^r [n^{2r-i} - (n^{2r-i} - n^r + kn^{r-1})] \alpha^{-n^i + n^{i-1}k} \\ &= (n^r - kn^{r-1}) \sum_{i=1}^r \alpha^{-n^i + n^{i-1}k} = (n-k)n^{r-1} \sum_{i=1}^r \alpha^{-n^i + n^{i-1}k} \\ &= (n-k)n^{r-1} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{\alpha^{n^{i-1}}} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Другими словами,

$$q_{r,k}(\alpha) = d \text{Mult}_{|g(x)=x^n}^r(x^k) = (n-k)n^{r-1} \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{\alpha^{n^{i-1}}} \right)^{n-k}.$$

Отметим, что

$$q_{r,k}(\alpha) = q_{r,k}(\alpha^n), \quad q_{r,0}(\alpha) = nq_{r,n-1}(\alpha).$$

Отсюда вытекает, что градиент функции Mult^r в $g(x) = x^n$ (относительно корня α) есть

$$\begin{aligned} Q_r(\alpha) &= (q_{r,0}(\alpha), q_{r,1}(\alpha), \dots, q_{r,n-1}(\alpha)) \\ &= (nq_{r,n-1}(\alpha), q_{r,1}(\alpha), \dots, q_{r,n-1}(\alpha)) \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$Q_r(\alpha) = Q_r(\alpha^n) = \dots = Q_r(\alpha^{n^{r-1}}).$$

Пусть $\mathcal{O}(\alpha) = \{\alpha, \alpha^n, \dots, \alpha^{n^{r-1}}\}$ – орбита корня α относительно отображения $z \mapsto z^n$, и пусть $d(\alpha)$ – число элементов множества $\mathcal{O}(\alpha)$. Ясно, что $d(\alpha)$ – натуральное число, делящее r , и

$$\beta^{d(\alpha)} = \beta \quad \forall \beta \in \mathcal{O}(\alpha).$$

Также ясно, что

$$q_{r,k}(\alpha) = \frac{r}{d(\alpha)}(n-k)n^{r-1} \sum_{\beta \in \mathcal{O}(\alpha)} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-k}.$$

Отсюда вытекает, что

$$Q_r(\alpha) = \frac{rn^r}{d(\alpha)n^{d(\alpha)}} Q_{d(\alpha)}(\alpha).$$

ПРИМЕР 2.3. Пусть $n = 3$ и $r = 2$. Тогда $n^r - 1 = 8$. Пусть α – корень восьмой степени из единицы, отличный от ± 1 . Тогда α – периодическая точка точного периода 2 для отображения $z \mapsto z^3$. Имеем

$$Q_2(\alpha) = 3^1 \left(3 \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \right], 2 \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^6} \right], \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \right] \right).$$

Итак, если α – примитивный корень четвертой степени из единицы, т. е.

$$\alpha^2 = -1, \quad \alpha = \pm \mathbf{i},$$

то имеем

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} = 0, \quad \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^6} = -2, \quad Q_2(\alpha) = 3(0, -2, 0) = (0, -6, 0).$$

(Заметим, что $\mathbf{i}$ и $-\mathbf{i}$ лежат на одной и той же орбите.)

Если α – примитивный корень восьмой степени из единицы, то

$$\alpha^4 = -1, \quad 1 + \frac{1}{\alpha^4} = 0$$

и, следовательно,

$$Q_2(\alpha) = 3 \left(3 \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \right], 0, \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \right] \right) = \frac{3}{\alpha^3} (3[\alpha^2 + 1], 0, \alpha^2 + 1) = \frac{3(\alpha^2 + 1)}{\alpha^3} (3, 0, 1).$$

Теперь если мы положим $\beta = \alpha^{-1}$, то α и β – примитивные корни восьмой степени из единицы из разных орбит, но $Q_2(\alpha)$ и $Q_2(\beta)$ порождают одну и ту же прямую $\mathbb{C} \cdot (3, 0, 1)$ в $\mathbb{C}^3$. Отсюда вытекает, что множество $Z(3, 2; 2, 2)$ не содержит $g(x) = x^3$.

ПРИМЕР 2.4. Пусть $n = r + 1$ и $r \geq 2$. Тогда для всех натуральных чисел i

$$n^i = (1+r)^i = 1 + ir^1 + \dots + \binom{i}{j} r^j + \dots + r^i.$$

Отсюда вытекает, что n^i сравнимо с $1 + ir$ по модулю r^2 . В частности, $n^r - 1$ делится на $r^2 = (n - 1)^2$. Мы также получаем, что $(n^i - n)/(n - 1) = n^{i-1}$ сравнимо с $i - 1$ по модулю r и, следовательно, $n^i - n \equiv (i - 1)r \pmod{r^2}$.

Пусть α – примитивный корень степени r^2 из единицы. Тогда $\alpha^{n^r-1} = 1$ и, следовательно,

$$\alpha^{n^r} = \alpha,$$

т. е. α – периодическая точка отображения $z \mapsto z^n$. Ясно, что ее период делит r . С другой стороны, для всех натуральных чисел $i < r$ степень n^i не сравнима с 1 по модулю r^2 и, следовательно, $\alpha^{n^i} \neq \alpha$. Отсюда вытекает, что α имеет точный период r .

Число $\gamma := \alpha^{1-n} = \alpha^{-r}$ является примитивным корнем степени r из единицы. Для любого целого числа k , удовлетворяющего неравенствам $0 \leq k \leq n-1$, число $\delta = \gamma^{n-k}$ является корнем степени r из единицы. Ясно, что $\delta \neq 1$, если и только если $n-k \neq n-1$, т. е. $k \neq 1$. В частности, если $k \neq 1$, то $\sum_{i=1}^r \delta^i = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} q_{r,k}(\alpha) &= (n-k)n^{r-1} \sum_{i=1}^r (\alpha^{-n^i})^{n-k} = (n-k)n^{r-1} \alpha^{n(k-n)} \sum_{i=1}^r (\alpha^{n-n^i})^{n-k} \\ &= (n-k)n^{r-1} \alpha^{n(k-n)} \sum_{i=1}^r \delta^{i-1} = (n-k)n^{r-1} \delta^{-1} \alpha^{n(k-n)} \sum_{i=1}^r \delta^i = 0, \end{aligned}$$

если $k \neq 1$. С другой стороны, если $k = 1$, то $\delta = 1$ и $q_{r,1}(\alpha) = r(n-1)n^{r-1}\gamma$. Отсюда вытекает, что

$$Q_r(\alpha) = (0, r(n-1)n^{r-1}\gamma, 0, \dots, 0) = r(n-1)n^{r-1}\gamma Q_1(0) \in \mathbb{C}^n.$$

Значит, множество $Z^0(r+1, 2; r, 1)$ не содержит $g(x) = x^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Пусть $r > 2$ и $n = r+1$. Пример 2.4 показывает, что если α и β – примитивные корни степени r^2 из единицы, то $Q_r(\alpha)$ и $Q_r(\beta)$ порождают одну и ту же прямую $\mathbb{C} \cdot (0, 1, \dots, 0)$ в $\mathbb{C}^n$. Поскольку $r > 2$, число $\varphi(r^2)$ всех примитивных корней из единицы степени r^2 строго больше r . (Здесь φ – функция Эйлера.) В частности, мы можем выбрать такие α и β из различных орбит (длины r) отображения $z \mapsto z^n$. Отсюда вытекает, что соответствующее множество $Z^0(r+1, 2; r, r)$ не содержит $g(x) = x^n$.

§ 3. Линейная независимость

Как уже было отмечено, теорема 1.6 немедленно вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть ℓ – натуральное число. Пусть $\{r_1, \dots, r_\ell\}$ – последовательность из ℓ натуральных чисел. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ – последовательность из различных комплексных чисел таких, что

$$\alpha_i^{n^{r_i}-1} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, \ell.$$

Предположим, что числа $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ лежат в различных орбитах отображения $z \mapsto z^n$. Тогда:

(i) множество из ℓ векторов $\{Q_{r_1}(\alpha_1), \dots, Q_{r_\ell}(\alpha_\ell)\}$ в $\mathbb{C}^n$ линейно независимо, если $n \geq \sum_{i=1}^{\ell} d(\alpha_i)$; в частности, если $\sum_{i=1}^{\ell} r_i \leq n$, то ℓ -элементное множество векторов $\{Q_{r_1}(\alpha_1), \dots, Q_{r_\ell}(\alpha_\ell)\}$ линейно независимо в $\mathbb{C}^n$;

(ii) если $n \geq 2 + \sum_{i=1}^{\ell} d(\alpha_i)$ то $(\ell + 1)$ -элементное множество векторов $\{Q_1(0); Q_{r_1}(\alpha_1), \dots, Q_{r_{\ell}}(\alpha_{\ell})\}$ линейно независимо в $\mathbb{C}^n$; в частности, если $\sum_{i=1}^{\ell} r_i < n - 1$, то $(\ell + 1)$ -элементное множество векторов $\{Q_1(0); Q_{r_1}(\alpha_1), \dots, Q_{r_{\ell}}(\alpha_{\ell})\}$ линейно независимо в $\mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующее элементарное утверждение, которое будет доказано в конце этого параграфа.

ЛЕММА 3.2. Пусть d – натуральное число, а S – множество, состоящее из d различных ненулевых комплексных чисел. Пусть $c: S \rightarrow \mathbb{C}$ – функция такая, что для всех натуральных чисел $u = 1, \dots, d$

$$\sum_{\beta \in S} \frac{c(\beta)}{\beta^u} = 0.$$

Тогда $c(\beta) = 0$ для всех $\beta \in S$.

Продолжим доказательство теоремы. Заменив каждое r_i на $d(\alpha_i)$, мы можем и будем считать, что $r_i = d(\alpha_i)$, т. е. орбита $\mathcal{O}(\alpha_i)$ числа α_i состоит из r_i различных элементов (для всех i). Предположим также, что $n \geq \sum_{i=1}^{\ell} r_i$.

Пусть $\{c_1, \dots, c_{\ell}\}$ – последовательность ℓ комплексных чисел таких, что

$$\sum_{i=1}^{\ell} c_i Q_{r_i}(\alpha_i) = 0.$$

Пусть $S \subset \mathbb{C}$ – несвязное объединение всех $\mathcal{O}(\alpha_i)$, которое состоит из $\sum_{i=1}^{\ell} r_i$ элементов. Определим комплекснозначную функцию c на S , которая переводит $\alpha \in \mathcal{O}(\alpha_i)$ в комплексное число

$$c(\alpha) := n^{r_i-1} c_i.$$

Тогда мы получаем, что для всех $k = 0, 1, \dots, n - 1$

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell} c_i q_{r_i, k}(\alpha_i) = (n - k) \sum_{\alpha \in S} c(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-k}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\alpha \in S} c(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^u = 0$$

для всех натуральных чисел $u = 1, \dots, n$.

Из леммы 3.2, примененной к $d = \sum_{i=1}^{\ell} r_i$, вытекает, что все $c(\alpha)$ равны нулю. Поскольку все n^{r_i-1} не равны нулю, мы заключаем, что $c_i = 0$. Это доказывает утверждение (i).

Теперь предположим, что $n \geq 2 + \sum_{i=1}^{\ell} r_i$. Докажем утверждение (ii). Пусть $\{c_0, c_1, \dots, c_{\ell}\}$ – последовательность $\ell + 1$ комплексных чисел таких, что

$$c_0 Q_1(0) + \sum_{i=1}^{\ell} c_i Q_{r_i}(\alpha_i) = 0.$$

Имеем

$$-c_0 Q_1(0) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i Q_{r_i}(\alpha_i).$$

Напомним, что все координаты вектора $Q_1(0)$, за исключением второй, обращаются в нуль. Отсюда вытекает, что

$$0 = \sum_{i=1}^{\ell} c_i q_{r_i, k}(\alpha_i) = (n - k) \sum_{\alpha \in S} c(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{n-k}$$

для всех $k = 0, \dots, n - 1$, кроме $k = 1$. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\alpha \in S} c(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^u = 0$$

для всех натуральных чисел $u = 1, \dots, n - 2$. Поскольку $n - 2 \geq d$, те же аргументы, использующие лемму 3.2 так же, как и выше, доказывают, что $c_i = 0$ для всех положительных целых i и, следовательно, $-c_0 Q_1(0) = 0$, т. е. $c_0 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Эта лемма – вариант хорошо известных классических результатов (см., например, [8]). Рассмотрим рациональную функцию

$$X(t) = \sum_{\beta \in S} \frac{c(\beta)}{\beta - t} = \sum_{\beta \in S} \frac{c(\beta)/\beta}{1 - t/\beta}.$$

Ясно, что

$$X(t) = \frac{Q(t)}{\prod_{\beta \in S} (\beta - t)},$$

где $Q(t)$ – многочлен, степень которого не превосходит $d - 1$. (Напомним, что $d = \#(S)$.) Для каждого натурального u число $\sum_{\beta \in S} c(\beta)/\beta^u$ совпадает с $(u - 1)$ -м коэффициентом (степенного) ряда Тейлора рациональной функции $X(t)$ в начале координат (см. [9, гл. 1, § 2]). Отсюда вытекает, что $X(t)$ имеет нуль порядка не менее d в начале координат. Следовательно, $Q(t)$ делится на t^d , что влечет за собой равенство $Q(t) = 0$, т. е. $X(t) = 0$. Поскольку $-c(\beta)$ – вычет функции $X(t)$ в $t = \beta$ для всех $\beta \in S$, мы заключаем, что $c(\beta) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Можно дать еще более простое доказательство леммы 3.2, использующее невырожденность матрицы Вандермонда размера $d \times d$ для различных чисел $\{1/\beta \mid \beta \in S\}$.

§ 4. Открытость в топологии Зарисского

Цель этого параграфа – доказательство теоремы 1.5. Нам понадобится следующее хорошо известное утверждение.

ЛЕММА 4.1. Пусть $n \geq 2$ – целое число, а $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ – приведенный многочлен степени n . Предположим, что многочлен $g(x) - x$ имеет кратный корень, который мы обозначим через α . Тогда для всех натуральных чисел r комплексное число α является кратным корнем многочлена $g^{\text{or}}(x) - x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 1$. Отсюда легко вытекает, что

$$g^{\text{or}}(\alpha) = \alpha, \quad [g^{\text{or}}]'(\alpha) = 1.$$

Это означает, что

$$[g^{\circ r}(x) - x](\alpha) = 0, \quad [g^{\circ r}(x) - x]'(\alpha) = 0.$$

Другими словами, α – кратный корень многочлена $g^{\circ r}(x) - x$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть m – натуральное число, делящее r . Предположим, что многочлен $g^{\circ m}(x) - x$ имеет кратный корень, который мы обозначим через α . Тогда α является кратным корнем многочлена $g^{\circ r}(x) - x$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Пусть $g(x) \in Z_{n,r}$. Если натуральное число m является делителем r , то из следствия 4.2 вытекает, что $g(x) \in Z_{n,m}$. Числом всех периодических точек точного периода m для отображения $z \mapsto g(z)$ является

$$\nu_n(m) = \sum_{m'|m} \mu\left(\frac{m}{m'}\right) n^{m'}, \quad (4.1)$$

где μ – функция Мёбиуса [10, с. 74, 75]. В частности, число всех орбит длины m для этого отображения есть

$$d(n, m) = \frac{\nu_n(m)}{m},$$

и, стало быть, $\nu_n(m)$ делится на m . Из формулы (4.1) вытекает, что $\nu_n(m)$ также делится на n (см. [10]). Отсюда следует, что $\nu_n(m)$ делится на $nm/(n, m)$, где (n, m) – наибольший общий делитель чисел n и m . С другой стороны, число $\nu_n(m)$ всегда положительно. Действительно, $\nu_n(1) = n$, и если $1 < m \leq 5$, то $\nu_n(m) = n^m - n^{m/p} > 0$, где p – единственный простой делитель числа m . Предположим теперь, что $m > 5$, т.е. $m \geq 6$. Заметим, что точки точного периода m – это в точности те корни многочлена $g^{\circ m}(x) - x$, которые не являются корнями ни одного из многочленов $g^{\circ(m/p)}(x) - x$, где p пробегает множество всех простых делителей числа m . Поскольку число различных простых делителей числа m не превосходит $\log_2(m)$, имеем

$$\nu_n(m) \geq n^m - n^{m/2} \log_2(m).$$

Легко проверить, что (при наших предположениях для n и m) выполнены неравенства $n^{m/2} \geq 2^{m/2} > \log_2(m)$ и, следовательно, число $\nu_n(m)$ положительное.

Поскольку $\nu_n(m)$ делится на $\frac{nm}{(n,m)}$, имеем

$$\nu_n(m) \geq \frac{nm}{(n, m)}, \quad d(n, m) \geq \frac{n}{(n, m)} \geq \frac{n}{m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Для каждого положительного делителя m числа r зафиксируем $d(n, m)$ -элементное множество S_m и рассмотрим соответствующее $d(n, m)$ -мерное координатное пространство $\mathbb{C}^{S_m}$ всех $\mathbb{C}$ -значных функций на S_m .

Рассмотрим замкнутое в топологии Зарисского подмножество

$$\widehat{Z}_{n,r} \subset Z_{n,r} \times \prod_{m|r} \mathbb{C}^{S_m},$$

которое высекается следующими уравнениями, налагаемыми на набор

$$\{g; \phi_m: S_m \rightarrow \mathbb{C}, m \mid r\} \in Z_{n,r} \times \prod_{m|r} \mathbb{C}^{S_m}.$$

Для каждого $s \in S_m$ комплексное число $\phi_m(s)$ является периодической точкой относительно отображения $z \mapsto g(z)$ с периодом, делящим m , т. е. $g^{om}(\phi_m(s)) = \phi_m(s)$. Кроме того, мы требуем выполнения равенства многочленов

$$g^{or}(x) - x = \prod_{m|r} \left(\prod_{s \in S_m} (x - \phi_m(s)) \prod_{i=1}^{m-1} (x - g^{oi}(\phi_m(s))) \right).$$

Другими словами, соответствующие коэффициенты обоих многочленов должны совпадать. Заметим, что

$$g^{or}(\phi_m(s)) - \phi_m(s) = 0$$

на $\hat{Z}_{n,r}$. В частности, все координатные функции $\phi_m(s)$ на многообразии $\hat{Z}_{n,r}$ являются целыми элементами над полиномиальным кольцом $\mathbb{C}[\mathbf{A}^n] = \mathbb{C}[a_0, \dots, a_{n-1}]$, порожденным всеми коэффициентами многочлена $g(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$.

Напомним, что многочлен $g^{or}(x) - x$ не имеет кратных корней. Отсюда вытекает, что каждое отображение $\phi_m: S_m \rightarrow \mathbb{C}$ инъективно, его образ состоит из точек точного периода m , а различные элементы множества S_m переходят под действием ϕ_m в различные орбиты длины m ; вдобавок, каждая орбита длины m содержит ровно один элемент из множества $\phi_m(S_m)$. С другой стороны, при любом выборе элементов ζ в каждой орбите длины m (для всех делителей m числа r) найдется (ровно одна) точка многообразия $\hat{Z}_{n,r}$, которая лежит “над” $g(x)$ и такая, что соответствующее множество $\phi_m(S_m)$ состоит из этих ζ .

По построению естественная проекция аффинных многообразий $\hat{Z}_{n,r} \rightarrow Z_{n,r}$ сюръективна. Вдобавок, это отображение конечно, поскольку кольцо регулярных функций $\mathbb{C}[\hat{Z}_{n,r}]$ на $\hat{Z}_{n,r}$ порождено над $\mathbb{C}[Z_{n,r}] \supset \mathbb{C}[\mathbf{A}^n] = \mathbb{C}[a_0, \dots, a_{n-1}]$ всеми координатными функциями $\phi_m(s)$, которые являются целыми над кольцом $\mathbb{C}[\mathbf{A}^n]$.

Теперь можно “поднять” $\text{Mult}^r = \text{Mult}_{r,\beta}$ до глобально определенных функций на $\hat{Z}_{n,r}$. А именно, для каждого $s \in S_r$ функция

$$\overline{\text{Mult}}_{r,s}: \hat{Z}_{n,r} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \{g; \phi_m: S_m \rightarrow \mathbb{C}, m \mid r\} \mapsto \text{Mult}_{r,\phi_r(s)}(g),$$

является всюду определенной регулярной функцией. Если $\phi_m(s)$ и β лежат в одной и той же орбите длины m , то эта функция совпадает с композицией отображения проекции $\hat{Z}_{n,r} \rightarrow Z_{n,r}$ и $\text{Mult}_{r,\beta}$. Также ясно, что вектор-функция

$$\overline{\text{grad}}(\text{Mult}_{r,s}): \hat{Z}_{n,r} \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \{g; \phi_m: S_m \rightarrow \mathbb{C}, m \mid r\} \mapsto \text{grad}(\text{Mult}_{r,\phi_r(s)})|_{g(x)}$$

– регулярное отображение, которое совпадает с композицией отображения проекции $\hat{Z}_{n,r} \rightarrow Z_{n,r}$ и $\text{grad}(\text{Mult}_{r,\beta}): Z_{n,r} \rightarrow \mathbb{C}^n$ для $\beta = \phi_r(s)$.

Пусть ℓ – натуральное число, не превосходящее $d(n, r)$. Если D – ℓ -элементное подмножество в S_r , то рассмотрим множество X_D всех точек $v \in \hat{Z}_{n,r}$ таких, что набор из ℓ векторов $\{\overline{\text{grad}}(\text{Mult}_{r,s})(v) \mid s \in D\}$ линейно зависим в $\mathbb{C}^n$. Ясно, что X_D – замкнутое в топологии Зарисского подмножество в $\hat{Z}_{n,r}$. Отсюда вытекает, что объединение X всех X_D (где D пробегает все ℓ -элементные подмножества в S_r) также замкнуто в $\hat{Z}_{n,r}$. Конечность нашего отображения проекции влечет за собой замкнутость в топологии Зарисского образа $\overline{X}$ подмножества X

в $Z_{n,r}$ [6, гл. 1, § 5.3]. С другой стороны, легко проверяется, что $\overline{X}$ совпадает с дополнением подмножества $Z^0(n, \ell; r, r, \dots, r)$ в $Z(n, \ell; r, r, \dots, r) = Z_{n,r}$. Это дает нам открытость подмножества $Z^0(n, \ell; r, r, \dots, r)$ в $Z_{n,r}$ относительно топологии Зарисского. Тем самым, мы доказали теорему в случае, когда $r_1 = r_2 = \dots = r_\ell$.

Теперь мы рассмотрим общий случай теоремы. Пусть d – число различных элементов в последовательности $\{r_1, \dots, r_\ell\}$ и R – соответствующее d -элементное множество натуральных чисел. Для каждого $r \in R$ обозначим через $l(r)$ число индексов i таких, что $r_i = r$. Если найдется r такое, что $l(r) > d(n, r)$, то множество $Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$ пусто. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что $l(r) \leq d(n, r)$ для всех $r \in R$.

Обозначим через $\hat{Z}'_{n,r}$ прообраз открытого подмножества $Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$ в $\hat{Z}_{n,r}$. Естественное регулярное отображение

$$\hat{Z}'_{n,r} \rightarrow Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$$

конечно, поскольку свойство конечности сохраняется при замене базы [7, гл. 8, предложение 8.22]. Рассмотрим расслоенное произведение $\hat{Z}_{n,R}$ всех $\hat{Z}'_{n,r}$ (где r пробегает множество R) над $Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$. Если мы обозначим через π естественное регулярное отображение

$$\pi: \hat{Z}_{n,R} \rightarrow Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell),$$

то π конечно, поскольку композиция конечных отображений является конечным отображением [7, гл. 8, предложения 8.4, 8.22]. Обозначим через π_r естественное регулярное отображение

$$\pi_r: \hat{Z}_{n,R} \rightarrow \hat{Z}'_{n,r}.$$

Теперь для любого $r \in R$ выберем $l(r)$ -элементное подмножество D_r в S_r и рассмотрим подмножество $X_{\{D_r\}}$ всех точек $v \in \hat{Z}_{n,R}$ таких, что набор $(\sum_{r \in R} l(r))$ векторов

$$\{\overline{\text{grad}}(\text{Mult}_{r,s_r})(v_r) \mid s_r \in D_r, r \in R\}$$

линейно зависим в $\mathbb{C}^n$. Здесь $v_r = \pi_r(v) \in \hat{Z}'_{n,r}$. Ясно, что $X_{\{D_r\}}$ – замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\hat{Z}_{n,R}$. Рассмотрим теперь объединение Y всех таких $X_{\{D_r\}}$ для всех возможных наборов подмножеств $\{D_r \mid r \in R\}$. Также ясно, что Y – замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\hat{Z}_{n,R}$. Поскольку π конечно, его образ $\pi(Y)$ также является замкнутым алгебраическим подмногообразием в $Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$. С другой стороны, легко проверяется, что $Z^0(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$ совпадает с дополнением к $\pi(Y)$ в $Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$. Отсюда вытекает, что $Z^0(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$ открыто по Зарисскому в $Z(n, \ell; r_1, r_2, \dots, r_\ell)$. Это завершает доказательство теоремы 1.5.

Автор признателен Ю. С. Ильяшенко, В. Л. Попову и Вик. С. Куликову за стимулирующие обсуждения и особо благодарен Т. М. Бандман за замечания, которые помогли улучшить изложение.

Часть настоящей работы была сделана во время визитов в Математический департамент Вейцмановского научного института в мае–июне 2012 г. и в Межфакультетский центр Бернулли Федеральной политехнической школы в Лозанне в июле–августе 2012 г. Автор признателен этим институтам за их гостеприимство.

Список литературы

1. J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Lecture Notes in Math., **1500**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
2. Ю. Г. Зархин, “Многочлены от одной переменной и ранги некоторых касательных отображений”, *Матем. заметки*, **91**:4 (2012), 539–550; англ. пер.: Yu. G. Zarhin, “Polynomials in one variable and ranks of certain tangent maps”, *Math. Notes*, **91**:4 (2012), 508–516.
3. E. Rees, *On a paper by Y. G. Zarhin*, arXiv: abs/1105.4156.
4. G. T. Buzzard, S. L. Hruska, Yu. Ilyashenko, “Kupka–Smale theorem for polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$ and persistence of heteroclinic intersections”, *Invent. Math.*, **161**:1 (2005), 45–89.
5. И. Горбовицкий, *Нетипичность гомоклинических касаний для полиномиальных автоморфизмов $\mathbb{C}^2$, сохраняющих объем*, Дипломная работа, МГУ, 2006.
6. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, 3-е изд., МЦНМО, М., 2007; англ. пер. 2-го изд.: I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, v. I, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1994.
7. J. S. Milne, *Algebraic geometry*, <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ag.html>.
8. Y. Yomdin, “Singularities in algebraic data acquisition”, *Real and complex singularities* (Sao Carlos, Brazil, 2008), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **380**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, 378–396.
9. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
10. J. Milnor, “Geometry and dynamics of quadratic rational maps”, *Experiment. Math.*, **2**:1 (1993), 37–83.

Ю. Г. ЗАРХИН (Yu. G. ZARHIN)
 Pennsylvania State University, USA;
 Институт математических проблем биологии РАН,
 г. Пушкино
E-mail: zarhin@math.psu.edu

Поступило в редакцию
 13.07.2012
 05.10.2012