Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 181–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:36:56

УДК 512.7

С. Г. Танкеев

О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий и компактификаций минимальных моделей Нерона

Доказано, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для любой гладкой комплексной проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$, где $X_1 \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность над гладкой проективной кривой C и $X_2 \rightarrow C$ – такое семейство КЗ-поверхностей с полустабильными вырождениями рационального типа, что $\text{rank NS}(X_{2s}) \neq 18$ для общего геометрического слоя X_{2s} . Показано, что гипотеза $B(X)$ верна для любой гладкой проективной компактификации X минимальной модели Нерона абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой при условии, что общий схемный слой является абсолютно простым абелевым многообразием, обладающим редукциями мультипликативного типа во всех бесконечно удаленных точках.

Библиография: 35 наименований.

Ключевые слова: эллиптическое многообразие, стандартная гипотеза типа Лефшеца, КЗ-поверхность, полустабильное вырождение рационального типа, алгебраический цикл, минимальная модель Нерона, редукция мультипликативного типа.

DOI: 10.4213/im8041

Введение

Хорошо известно, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца [1] об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для всех гладких комплексных проективных кривых, поверхностей, абелевых многообразий [2] и трехмерных многообразий размерности Кодaira $\kappa(X) < 3$ [3] (в частности, она верна для всех эллиптических трехмерных многообразий).

В работе [4] стандартная гипотеза доказана для любой гладкой комплексной проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$, где $X_1 \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность над гладкой проективной кривой C и $X_2 \rightarrow C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что выполнено одно из следующих условий:

- (i) общий геометрический слой X_{2s} является поверхностью Энриквеса;
- (ii) все слои морфизма $X_2 \rightarrow C$ являются гладкими КЗ-поверхностями и группа Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ общего геометрического слоя X_{2s} не имеет геометрических простых факторов типа A_1 (предположение о группе Ходжа автоматически выполняется, если число $22 - \text{rank NS}(X_{2s})$ не делится на 4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00097).

Пусть $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что все слои морфизма π_2 являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, общий геометрический слой X_{2s} является КЗ-поверхностью. Если для любого особого слоя преобразование Пикара–Лефшеца γ (локальное преобразование монодромии), ассоциированное с этим особым слоем и действующее на $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$, удовлетворяет условию $N^2 \neq 0$, где $N = \log(\gamma)$, то мы говорим, что $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – семейство КЗ-поверхностей с полустабильными вырождениями *рационального* типа.

Согласно результатам Вик. С. Куликова в этом случае можно считать, что все вырожденные слои морфизма π_2 являются объединениями гладких *рациональных* поверхностей V_i кратности 1 с нормальными пересечениями, двойные кривые $C_{i,j} = V_i \cap V_j$ на каждой поверхности V_i являются гладкими *рациональными* кривыми, образующими цикл, локализация семейства $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ над любым открытым диском в C имеет тривиальный канонический класс [5, теоремы I, II].

В настоящей статье мы докажем следующие основные теоремы.

ТЕОРЕМА 0.1. *Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ типа Лефшеца об алгебраичности операторов $*$ и Λ теории Ходжа верна для любой гладкой комплексной проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$, где $X_1 \rightarrow C$ – эллиптическая поверхность над гладкой проективной кривой C и $X_2 \rightarrow C$ – такое семейство КЗ-поверхностей с полустабильными вырождениями рационального типа, что $\text{rank NS}(X_{2s}) \neq 18$ для общего геометрического слоя X_{2s} .*

ТЕОРЕМА 0.2. *Стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ верна для любой гладкой проективной компактификации X минимальной модели Нерона абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой при условии, что общий схемный слой является абсолютно простым абелевым многообразием, обладающим редукциями мультипликативного типа во всех бесконечно удаленных точках.*

В рассматриваемых случаях численная и гомологическая эквивалентности алгебраических циклов совпадают на $X \times X$ в силу [6, следствие 4.4], компоненты Кюннета класса когомологий диагонали алгебраические согласно [7, лемма 2.4]; $\mathbb{Q}$ -алгебра

$$\mathcal{A}(X) \hookrightarrow H^*(X \times X, \mathbb{Q})$$

алгебраических соответствий с билинейным законом композиции

$$\mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(X) \xrightarrow{(f,g) \mapsto g \circ f = \text{pr}_{13*}(\text{pr}_{12}^* f \sim \text{pr}_{23}^* g)} \mathcal{A}(X)$$

полупростая в силу [8, теорема 3.2]; если модель X определена над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и X имеет хорошую редукцию в неархимедовой точке $\wp$ поля k , то гипотеза $B(X_\wp)$ верна для специального слоя $X_\wp$ над (конечным) полем вычетов.

§ 1. О когомологиях некоторых эллиптических 4-мерных многообразий над 1-параметрическими семействами КЗ-поверхностей с вырождениями рационального типа

1.1. ЛЕММА [3, лемма 1.1]. Пусть X, Y – гладкие комплексные проективные многообразия размерности не более 4 и $f: X \rightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение. Тогда $B(X) \Rightarrow B(Y)$.

1.2. Мы начинаем доказательство теоремы 0.1. В настоящем параграфе мы рассматриваем общие сведения о когомологиях эллиптического многообразия X ; в § 2 рассматривается случай, когда семейство $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ индуцирует нежесткое семейство КЗ-поверхностей над некоторым открытым по Зарисскому подмножеством $C' \subset C$; в § 3 мы предполагаем, что π_2 индуцирует жесткое семейство КЗ-поверхностей над кривой C' .

Положим

$$\Delta_i = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{i\delta}) \neq \emptyset\}, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad C' = C \setminus \Delta \xrightarrow{j} C.$$

Пусть D^* – проколотый диск на C с центром $\delta \in \Delta_2$. Фундаментальная группа $\pi_1(D^*, s) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ действует на когомологиях общего слоя X_{2s} , $s \in D^*$. Обозначим через $\gamma \in \text{GL}(H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}))$ действие образующей группы $\pi_1(D^*, s)$, называемое *преобразованием Пикара–Лефшеца* или *локальным преобразованием монодромии*.

По условию теоремы преобразование Пикара–Лефшеца γ удовлетворяет условию $N^2 \neq 0$, где $N = \log(\gamma)$. Это свойство сохраняется при переходе к подходящей гладкой проективной модели схемы $X_2 \times_C \tilde{C}$ над $\tilde{C}$, где $\tilde{C} \rightarrow C$ – произвольное разветвленное накрытие кривой C . Действительно, можно считать, что отображение $\tilde{C} \rightarrow C$ индуцирует отображение проколотых дисков $\tilde{D}^* \rightarrow D^*$, задаваемое формулой $t = \tau^n$ в локальных координатах t и τ на C и $\tilde{C}$ соответственно (так что точка δ задается уравнением $t = 0$). Морфизм $\tilde{D}^* \rightarrow D^*$ неразветвлен, имеет степень n и определяет вложение $\pi_1(\tilde{D}^*, \tilde{s}) \hookrightarrow \pi_1(D^*, s)$, поэтому $\tilde{\gamma} = \gamma^n$. Остается заметить, что $\log(\gamma^n) = n \log(\gamma)$.

1.3. Используя изложенное в п. 1.2, обозначения и стандартные аргументы из [4, пп. 1.2, 1.3], лемму из п. 1.1, теорему Мамфорда о полустабильных редукциях [9, с. 53–54], [10, теорема 3.1] и теорему о монодромии [11, теорема (6.1)], мы можем (и будем) предполагать, что выполнены следующие дополнительные условия:

1) $\pi_1: X_1 \rightarrow C$ – такая неизотривиальная (потенциально непостоянная) эллиптическая поверхность с сечением, что любой особый слой является объединением гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями;

2) $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – такой проективный морфизм гладкого трехмерного многообразия на кривую, что гладкое семейство КЗ-поверхностей $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиально (потенциально непостоянно) и все вырожденные слои морфизма π_2

являются объединениями гладких *рациональных* поверхностей V_i кратности 1 с нормальными пересечениями, двойные кривые $C_{i,j}$ на каждой поверхности V_i являются гладкими *рациональными* кривыми, образующими цикл, локализация семейства $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ над любым открытым диском в C имеет тривиальный канонический класс [5, теоремы I, II];

3) существует такая гладкая проективная компактификация X многообразия $X' \stackrel{\text{def}}{=} X'_1 \times_{C'} X'_2$, для которой рациональное структурное отображение $\pi: X \rightarrow C$ является морфизмом, все слои π являются объединениями гладких многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями, причем $\text{rank NS}(X) \geq 3$;

4) все преобразования Пикара–Лефшеца, ассоциированные с $\pi': X' \rightarrow C'$, унипотентны;

5) замыкание G_i в топологии Зарисского образа представления монодромии $\rho_i: \pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^i(X_{is}, \mathbb{Q}))$, $i = 1, 2$, является полупростой связной $\mathbb{Q}$ -группой [12, следствие 4.2.9];

6) для любой точки $s \in C'$ вне некоторого счетного подмножества группа G_2 является нормальной подгруппой в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ поверхности X_{2s} [13, теорема 7.3]; мы фиксируем такую точку s и будем называть ее *общей в смысле Ходжа*.

1.4. Фиксируем целое число $n \geq 2$. Пусть U_δ – малый открытый диск с центром $\delta \in \Delta$, U_δ^* – проколотый диск, γ – локальное преобразование монодромии пространства $H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q})$ (точка $s \in U_\delta^* \subset C'$ произвольная, но фиксированная), $N = \log(\gamma)$.

Семейство $X \rightarrow C$ индуцирует предельную смешанную структуру Ходжа на $H_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q})$. Ее весовая фильтрация

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{2n-2} = H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q}) \quad (1.1)$$

характеризуется следующими условиями [11, лемма (6.4)]:

$$\begin{aligned} N: W_k &\rightarrow W_{k-2}, \\ N^k: W_{k+n-1}/W_{k+n-2} &\xrightarrow{\sim} W_{-k+n-1}/W_{-k+n-2} \quad \forall k \geq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

С другой стороны, согласно результатам Шмида [11, с. 254–255] фильтрации Ходжа когомологий гладких слоев X_t , $t \in U_\delta^*$, определяют предельную фильтрацию F^* на $H_{\mathbb{C}}$, причем тройка $(H_{\mathbb{Q}}, W_*, F^*)$ дает поляризованную смешанную структуру Ходжа, относительно которой N является морфизмом типа $(-1, -1)$ [11, теорема (6.16)].

1.5. Рассмотрим локальную систему $V = R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}$. Известно, что V_s , $s \in U_\delta^*$, и, следовательно, V расщепляются в обобщенные собственные подпространства [14, § 6]:

$$V = \bigoplus_{a=0}^{\nu-1} V_{a/\nu}^{(\delta)},$$

где по определению

$$[V_{a/\nu}^{(\delta)}]_s = \{v \in V_s \mid (\gamma - e^{2\pi ia/\nu})^n v = 0\}.$$

Записывая $\gamma|_{V_{a/\nu}^{(\delta)}} = e^{2\pi ia/\nu} \gamma_a$ с унитарным γ_a и полагая $N_a^{(\delta)} = \log \gamma_a$, мы имеем точную последовательность смешанных структур Ходжа [14, замечание (14.5)]:

$$0 \rightarrow H^1(C, j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \rightarrow H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)} \rightarrow H^2(C, j_* R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}).$$

По теореме о локально инвариантных циклах (см. [14, предложение (15.12)], [15, п. (3.7)]) она принимает вид [4, формула (1.4)]

$$0 \rightarrow H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{C}) \rightarrow H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)} \rightarrow H^2(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{C}). \quad (1.3)$$

1.6. Пусть $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутой подсхемы $i_\Delta: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, имеется каноническая точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [16, следствие (8.2.8)]:

$$H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_\Delta f)_*} H^n(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\varphi_n} H^n(X', \mathbb{Q}),$$

где $(i_\Delta f)_*$ – морфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа и φ_n – морфизм ограничения.

Более того, существуют коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами (аналогичная диаграмме [4, формула (1.9)])

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^2(C, R^{n-2} \pi_* \mathbb{Q}) & \longrightarrow & (i_\Delta f)_* H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\psi_n) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \psi_n \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_n) & \longrightarrow & H^0(C', R^n \pi'_* \mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \frac{H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q})} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.4)$$

и точная последовательность змеевидной диаграммы [17, § 1, предложение 2]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) &\rightarrow (i_{\Delta}f)_*H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Ker}(\psi_n) \\ &\rightarrow \frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q})} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Легко проверить, что (1.5) является последовательностью морфизмов рациональных структур Ходжа [10, начало доказательства теоремы 2.3].

С другой стороны, из (1.3) следует существование канонического вложения смешанных структур Ходжа

$$\frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{C}) \cap \text{Im}(\varphi_n \otimes \mathbb{C})}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{C})} \hookrightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} \frac{V_0^{(\delta)}}{N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)}}. \quad (1.6)$$

В нашем случае локальное преобразование монодромии γ унипотентно и $(\gamma - 1)^n = 0$ по теореме о монодромии [11, теорема (6.1)],

$$\begin{aligned} N &\stackrel{\text{def}}{=} N_0^{(\delta)} \stackrel{\text{def}}{=} \log \gamma = \gamma - 1 - \frac{(\gamma - 1)^2}{2} + \dots, \\ N^n &= 0, \\ V_0^{(\delta)} &= H^{n-1}(X_s, \mathbb{C}), \quad s \in C'. \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.7. ЛЕММА. *Для $n \in \{3, 5\}$ существует каноническая точная последовательность рациональных структур Ходжа*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) &\rightarrow (i_{\Delta}f)_*H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \\ &\rightarrow \text{Ker}[H^0(C, R^n\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi_n} H^0(C', R^n\pi'_*\mathbb{Q})] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\frac{H^1(C', R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q})}$$

– чистая рациональная структура Ходжа типа $(n, 0) + (n-1, 1) + \dots + (0, n)$, то в силу (1.5), (1.6) достаточно проверить, что $V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)}V_0^{(\delta)}$ имеет тип Ходжа $(0, 0) + (1, 1) + (2, 2) + \dots$ для всех точек $\delta \in \Delta$.

Докажем сначала, что в рассматриваемом случае конструкция предельной смешанной структуры Ходжа на $H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q})$ [11, с. 254, 255] совместима с формулой Кюннета.

Действительно, пусть $t: U \rightarrow U_{\delta}^*$ – универсальное накрытие проколото-го диска U_{δ}^* с центром $\delta \in C$. Тогда $R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q}$ индуцирует постоянный пучок на U со слоем $H_{\mathbb{Q}}$. Для любой точки $z \in U$ существует естественное отождествление $H_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(X_{t(z)}, \mathbb{Q})$. Перенос фильтрации Ходжа пространства $H^{n-1}(X_{t(z)}, \mathbb{C})$ на $H_{\mathbb{C}}$ с помощью этого отождествления дает фильтрацию Ходжа

$$H_{\mathbb{C}} = F_z^0 \supset F_z^1 \supset \dots \supset F_z^{n-2} \supset F_z^{n-1} \supset 0,$$

голоморфно зависящую от z . С другой стороны, $F_{z+1}^p = \gamma F_z^p$, отображение

$$z \mapsto \exp(-zN)F_z^p,$$

рассматриваемое как отображение U в подходящее грасманово многообразие, инвариантно относительно трансляции $z \mapsto z + 1$, существует предел

$$F_\infty^p = \lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \infty} \exp(-zN)F_z^p,$$

и результирующая фильтрация

$$H_{\mathbb{C}} = F_\infty^0 \supset F_\infty^1 \supset \dots \supset F_\infty^{n-2} \supset F_\infty^{n-1} \supset 0$$

индуцирует *канонические* фильтрации на ядре и коядре N , а также на факторах весовой фильтрации (1.1). Другими словами, она дает предельную смешанную структуру Ходжа на $H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q})$ [11, с. 255]. Очевидно, что разложение Кюннета

$$H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q}) = [H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^{n-3}(X_{2s}, \mathbb{Q})] \oplus [H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^{n-1}(X_{2s}, \mathbb{Q})]$$

совместимо с действием оператора N . С другой стороны, N действует тривиально на постоянных рациональных структурах Ходжа $H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-1)$, где $\mathbb{Q}(1)$ – постоянная структура Ходжа–Тэйта типа $(-1, -1)$ с решеткой целых $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$, и на $H^0(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$. Поэтому

$$\begin{aligned} F_z^0(H^2(X_s, \mathbb{C})) &= H^2(X_{t(z)}, \mathbb{C}) = [H^{1,1}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes H^{0,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})] \\ &\quad \oplus [H^{0,0}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes [H^{2,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})]] \\ &= [F^0(H^2(X_{1t(z)}, \mathbb{C})) \otimes F^0(H^0(X_{2t(z)}, \mathbb{C}))] \\ &\quad \oplus [F^0(H^0(X_{1t(z)}, \mathbb{C})) \otimes F^0(H^2(X_{2t(z)}, \mathbb{C}))] \\ &= [F_z^0(H^2(X_{1s}, \mathbb{C})) \otimes F_z^0(H^0(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [F_z^0(H^0(X_{1s}, \mathbb{C})) \otimes F_z^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \\ &= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_z^0(H^0(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_z^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\ F_z^1(H^2(X_s, \mathbb{C})) &= [H^{1,1}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes H^{0,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})] \\ &\quad \oplus [H^{0,0}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes [H^{2,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})]] \\ &= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_z^0(H^0(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_z^1(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\ F_z^2(H^2(X_s, \mathbb{C})) &= H^{0,0}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes H^{2,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes F_z^2(H^2(X_{2s}, \mathbb{C})). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} F_z^0(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= H^4(X_{t(z)}, \mathbb{C}) \\ &= [H^{1,1}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes [H^{2,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})]] \\ &\quad \oplus [H^{0,0}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes H^{2,2}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})] \\ &= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_z^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_z^0(H^4(X_{2s}, \mathbb{C}))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z^1(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= [H^{1,1}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes [H^{2,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})]] \\
&\quad \oplus [H^{0,0}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes H^{2,2}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})] \\
&= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_z^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_z^1(H^4(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\
F_z^2(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= [H^{1,1}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes [H^{2,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})]] \\
&\quad \oplus [H^{0,0}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes H^{2,2}(X_{2t(z)}, \mathbb{C})] \\
&= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_z^1(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_z^2(H^4(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\
F_z^3(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= H^{1,1}(X_{1t(z)}, \mathbb{C}) \otimes H^{2,0}(X_{2t(z)}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}(-1) \otimes F_z^2(H^2(X_{2s}, \mathbb{C})), \\
F_z^4(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned}
F_\infty^0(H^2(X_s, \mathbb{C})) &= \lim_{\text{Im } z \rightarrow \infty} \exp(-zN) F_z^0(H^2(X_s, \mathbb{C})) \\
&= \lim_{\text{Im } z \rightarrow \infty} \exp(-zN) F_z^0([\mathbb{C}(-1) \otimes H^0(X_{2s}, \mathbb{C})] \oplus [\mathbb{C} \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{C})]) \\
&= [\mathbb{C}(-1) \otimes \lim_{\text{Im } z \rightarrow \infty} \exp(-zN) F_z^0(H^0(X_{2s}, \mathbb{C}))] \\
&\quad \oplus [\mathbb{C} \otimes \lim_{\text{Im } z \rightarrow \infty} \exp(-zN) F_z^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \\
&= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_\infty^0(H^0(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_\infty^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\
F_\infty^1(H^2(X_s, \mathbb{C})) &= \lim_{\text{Im } z \rightarrow \infty} \exp(-zN) F_z^1(H^2(X_s, \mathbb{C})) \\
&= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_\infty^0(H^0(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_\infty^1(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\
F_\infty^2(H^2(X_s, \mathbb{C})) &= \lim_{\text{Im } z \rightarrow \infty} \exp(-zN) F_z^2(H^2(X_s, \mathbb{C})) = \mathbb{C} \otimes F_\infty^2(H^2(X_{2s}, \mathbb{C})).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
F_\infty^0(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= \lim_{\text{Im } z \rightarrow \infty} \exp(-zN) F_z^0(H^4(X_s, \mathbb{C})) \\
&= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_\infty^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_\infty^0(H^4(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\
F_\infty^1(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_\infty^0(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_\infty^1(H^4(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\
F_\infty^2(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= [\mathbb{C}(-1) \otimes F_\infty^1(H^2(X_{2s}, \mathbb{C}))] \oplus [\mathbb{C} \otimes F_\infty^2(H^4(X_{2s}, \mathbb{C}))], \\
F_\infty^3(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= \mathbb{C}(-1) \otimes F_\infty^2(H^2(X_{2s}, \mathbb{C})), \\
F_\infty^4(H^4(X_s, \mathbb{C})) &= 0.
\end{aligned}$$

Значит, в рассматриваемом случае конструкция предельной смешанной структуры Ходжа совместима с формулой Кюннета и имеется каноническое разложение предельных смешанных структур Ходжа

$$\begin{aligned}
H^{n-1}(X_s, \mathbb{Q})/NH^{n-1}(X_s, \mathbb{Q}) &= [\mathbb{Q}(-1) \otimes [H^{n-3}(X_{2s}, \mathbb{Q})/NH^{n-3}(X_{2s}, \mathbb{Q})]] \\
&\quad \oplus [\mathbb{Q} \otimes [H^{n-1}(X_{2s}, \mathbb{Q})/NH^{n-1}(X_{2s}, \mathbb{Q})]].
\end{aligned}$$

Осталось проверить, что $H^{n-1}(X_{2s}, \mathbb{Q})/NH^{n-1}(X_{2s}, \mathbb{Q})$ и $H^{n-3}(X_{2s}, \mathbb{Q})/NH^{n-3}(X_{2s}, \mathbb{Q})$ – смешанные структуры Ходжа типа $(0, 0) + (1, 1) + (2, 2) + \dots$.

Прежде всего, четная последовательность Клеменса–Шмида [18] имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X_{2s}, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\psi} H_4(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^4(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_0(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $H^{2p}(X_{2s}, \mathbb{Q})$ снабжено предельной смешанной структурой Ходжа и морфизмы ψ, μ, ν, N смешанных структур Ходжа имеют типы $(-2, -2), (3, 3), (0, 0), (-1, -1)$ соответственно [5, п. 2.3].

Поскольку $H_0(X_{2\delta}, \mathbb{Q})$ – чистая структура Ходжа типа $(0, 0)$ и ψ – морфизм типа $(-2, -2)$, из (1.8) следует, что $H^4(X_{2s}, \mathbb{Q})/NH^4(X_{2s}, \mathbb{Q})$ имеет тип Ходжа $(2, 2)$. С другой стороны, ψ индуцирует вложение (типа $(-2, -2)$) смешанных структур Ходжа

$$H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})/NH^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H_2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) = H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q})^\vee.$$

Поэтому достаточно проверить, что $H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q})$ является смешанной структурой Ходжа типа $(0, 0) + (1, 1)$.

По построению слой $X_{2\delta}$ – дивизор с нормальными пересечениями:

$$X_{2\delta} = V_1 + \cdots + V_n,$$

где V_i – гладкие рациональные поверхности, двойные кривые $C_{i,j}$ на каждой поверхности V_i являются гладкими рациональными кривыми, образующими цикл.

Пусть $\Pi(X_{2\delta})$ – полиэдр, вершинам которого соответствуют компоненты V_i слоя $X_{2\delta}$, ребрам соответствуют компоненты двойных кривых $C_{i,j} = V_i \cap V_j$, двумерным граням – тройные точки вырождения $V_i \cap V_j \cap V_k$. Тогда весовая фильтрация 0W на $H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q})$ допускает следующее описание [5, п. 2.5]:

$$\begin{aligned} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) &= {}^0W_2 \supset {}^0W_1 \supset {}^0W_0 \supset 0, \\ \mathrm{Gr}_0^{{}^0W} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) &\simeq H^2(\Pi(X_{2\delta}), \mathbb{Q}), \\ \mathrm{Gr}_1^{{}^0W} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) &= \mathrm{Coker} \left[\bigoplus_i H^1(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^1(C_{i,j}, \mathbb{Q}) \right], \\ \mathrm{Gr}_2^{{}^0W} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) &= \mathrm{Ker} \left[\bigoplus_i H^2(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^2(C_{i,j}, \mathbb{Q}) \right]. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае $H^1(V_i, \mathbb{Q}) = H^1(C_{i,j}, \mathbb{Q}) = 0$ в силу рациональности гладких поверхностей V_i и кривых $C_{i,j}$, поэтому

$$\mathrm{Gr}_1^{{}^0W} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q}) = 0, \quad {}^0W_1 = {}^0W_0.$$

С другой стороны, $\mathrm{Gr}_0^{{}^0W} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q})$ является чистой структурой Ходжа типа $(0, 0)$ [12, п. 2.3.2]. Поскольку поверхности V_i рациональные, то $H^2(V_i, \mathbb{Q})$ и $\mathrm{Gr}_2^{{}^0W} H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q})$ – чистые структуры Ходжа типа $(1, 1)$. Поэтому $H^2(X_{2\delta}, \mathbb{Q})$ – смешанная структура Ходжа типа $(0, 0) + (1, 1)$. Лемма доказана.

**§ 2. О стандартной гипотезе
для эллиптических 4-мерных многообразий
над 1-параметрическими нежесткими семействами
КЗ-поверхностей с вырождениями рационального типа**

2.1. Напомним, что семейство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ *жесткое* в смысле определения С. Ю. Аракелова, если оно не имеет нетривиальных деформаций, фиксирующих базисное пространство C' .

Пусть $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – трансцендентная часть когомологий $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$, т. е. ортогональное дополнение пространства $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{NS}(X_{2s}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ в пространстве $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ относительно билинейного спаривания

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \times H^2(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \smile y} H^4(X_{2s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-2) \xrightarrow{(2\pi i)^2} \mathbb{Q}.$$

Следуя [19, шп. (0.2), (4.1)], для поляризованного многообразия (X_2, L) определим поляризуемую вариацию структур Ходжа $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \{F^p\}, Q)$ над C' веса 2 с $h^{2,0} = 1$, где мы полагаем

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{P}^2 \pi'_{2*} \mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker} \left[R^2 \pi'_{2*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim_{c_1(L|_{X'_2})}} R^4 \pi'_{2*} \mathbb{Z} \right].$$

Пусть $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$. Тогда существует единственная неприводимая вариация $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$, для которой

$$\text{rank}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C})^{2,0} = 1.$$

Кроме того, общий слой $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}s}$ совпадает с $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ [19, предложение (4.1.4)].

Пусть теперь $E_{\mathbb{Q}} = \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ – множество всех глобальных плоских сечений пучка эндоморфизмов вариации $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$.

Для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа, имеем

$$E_{\mathbb{Q}} = \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\pi_1(C', s)} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} = \text{End}_{G_2} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}. \quad (2.1)$$

Поскольку расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиальное, то имеется изоморфизм [19, лемма (4.2.2)]

$$(\text{End}(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C})^{-1,1} \xrightarrow{\sim} (\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C})^{-1,1},$$

где оба пространства состоят из глобальных плоских сечений пучков эндоморфизмов соответствующих вариаций структур Ходжа типа $(-1, 1)$.

Пусть $E_{\mathbb{Q}}^Q = \text{End}^Q(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ – множество всех глобальных плоских сечений пучка эндоморфизмов вариации $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$, совместимых с поляризацией Q .

По теореме Петерса [20] расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ жесткое, если и только если

$$(\text{End}^Q(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C})^{-1,1} = 0.$$

Более того, поскольку расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиальное, мы имеем в силу [19, теорема (5.2.3)]

$$(\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C})^{-1,1} \neq 0 \Leftrightarrow (\text{End}^Q(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C})^{-1,1} \neq 0. \quad (2.2)$$

2.2. ЛЕММА. *Предположим, что $\text{rank NS}(X_{2s}) \neq 18$ для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа. Если расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиальное и нежесткое, то мы имеем*

$$H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) = H^0(C', R^5 \pi'_* \mathbb{Q}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиальное и нежесткое, то мы имеем в силу (2.2) и [19, теорема (5.2.3)]:

1) центр Z алгебры эндоморфизмов $E_{\mathbb{Q}} = \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ является вполне вещественным полем алгебраических чисел и $E_{\mathbb{Q}}$ – кватернионная алгебра над полем Z ;

2) локальная система $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ имеет ранг 1 как $E_{\mathbb{Q}}$ -модуль; в частности, мы имеем $\text{rank}_{\mathbb{Q}} \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} = 4g$, где $g = [Z : \mathbb{Q}]$;

3) имеется разложение

$$E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{K}^{g-1}, \quad (2.3)$$

где $\mathbb{K}$ обозначает алгебру с делением классических кватернионов Гамильтона.

С другой стороны, поскольку $\pi'_1: X'_1 \rightarrow C'$ – неизотривиально гладкое семейство эллиптических кривых, то, как хорошо известно,

$$G_1 = \text{Sp}(H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}), \Phi_{1s}), \quad (2.4)$$

где

$$\Phi_{1s}: H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \times H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \smile y} H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

– каноническое кососимметрическое спаривание. В частности, $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ – абсолютно неприводимый симплектический G_1 -модуль степени 2. С другой стороны, $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$, $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$ и $H^3(X_s, \mathbb{Q})$ – полупростые $\pi_1(C', s)$ -модули по теореме Делиня о полупростоте глобальной монодромии [12, теорема 4.2.6]. Более того, из (2.4) следует, что $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ – абсолютно неприводимый $\pi_1(C', s)$ -модуль. Заметим, что

$$\begin{aligned} H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^3(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = [H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C', s)} \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\pi_1(C', s)}(H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}), H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если $H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) \neq 0$, то в силу (2.5) и леммы Шура пространство $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ является неприводимым $\pi_1(C', s)$ -подмодулем полупростого $\pi_1(C', s)$ -модуля $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$; в частности, для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа, имеется разложение

$$\mathcal{V}_{\mathbb{Q}s} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \xrightarrow{\sim} [H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\oplus n_1} \oplus [W_2]^{\oplus n_2} \oplus \cdots \oplus [W_p]^{\oplus n_p},$$

где $n_1 \geq 1$ и $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$, $W_2, \dots, W_p$ – неприводимые попарно неизоморфные $\pi_1(C', s)$ -модули. С другой стороны, в силу (2.1) имеем

$$E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\pi_1(C', s)} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \xrightarrow{\sim} M_{n_1}(\mathbb{Q}) \oplus M_{n_2}(D_2) \oplus \cdots \oplus M_{n_p}(D_p),$$

где $\mathbb{Q} = \text{End}_{\pi_1(C', s)} H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ и $D_2, \dots, D_p$ – алгебры с делением над $\mathbb{Q}$ в силу леммы Шура. Поскольку $E_{\mathbb{Q}}$ – кватернионная алгебра над полем Z и $n_1 \geq 1$, мы имеем изоморфизм колец

$$Z = \text{Cent}(E_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathbb{Q} \oplus \text{Cent}(D_2) \oplus \dots \oplus \text{Cent}(D_p).$$

Значит, $Z = \mathbb{Q}$ и $E_{\mathbb{Q}} \simeq M_{n_1}(\mathbb{Q})$. Следовательно, из (2.3) получаем $E_{\mathbb{Q}} \simeq M_2(\mathbb{Q})$. Поэтому имеется разложение $\pi_1(C', s)$ -модулей

$$\mathcal{V}_{\mathbb{Q}s} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \simeq [H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\oplus 2}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что $\text{rank NS}(X_{2s}) = 22 - \dim \mathcal{V}_{\mathbb{Q}s} = 18$ для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа. Таким образом, мы приходим к противоречию с условием леммы.

С другой стороны, двойственность Пуанкаре на слоях гладкого морфизма $\pi': X' \rightarrow C'$ дает изоморфизм локальных систем $R^5 \pi'_* \mathbb{Q} \simeq R^1 \pi'_* \mathbb{Q} = R^1 \pi'_{1*} \mathbb{Q}$, поэтому

$$H^0(C', R^5 \pi'_* \mathbb{Q}) \simeq H^0(C', R^1 \pi'_{1*} \mathbb{Q}) \simeq H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})^{G_1} = 0$$

в силу (2.4). Лемма доказана.

2.3. Далее мы предполагаем, что $\text{rank NS}(X_{2s}) \neq 18$ для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа, и расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиальное и нежесткое. Используя алгоритм из работы [4, п. 1.9], легко вывести, используя лемму из п. 2.2, что

$$H^2(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) = H^2(C, R^3 \pi_* \mathbb{Q}) = 0. \quad (2.7)$$

Поэтому в силу лемм из пп. 1.7, 2.2 и формулы (2.7) легко видеть, что для $n \in \{3, 5\}$ существует канонический изоморфизм рациональных структур Ходжа

$$(i_{\Delta} f)_* H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \simeq H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}).$$

В частности, это утверждение, первоначально доказанное для случая такого гладкого семейства КЗ-поверхностей $\pi_2: X_2 \rightarrow C$, что группа Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ не имеет геометрических простых факторов типа A_1 [4, лемма 1.10], верно для более общего случая семейства с полустабильными вырождениями рационального типа с условием $\text{rank NS}(X_{2s}) \neq 18$.

Поэтому, используя стандартные аргументы из [4, пп. 1.7–1.12, 2.1–2.5], мы получим доказательство гипотезы $B(X)$ в рассматриваемом случае.

§ 3. О стандартной гипотезе для эллиптических 4-мерных многообразий над 1-параметрическими жесткими семействами КЗ-поверхностей с вырождениями рационального типа

3.1. В силу результатов из § 2 достаточно разобрать случай, когда семейство $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ индуцирует жесткое (в смысле С. Ю. Аракелова) гладкое

семейство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ КЗ-поверхностей над кривой C' . В частности, можно предполагать в силу (2.2), что

$$(\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C})^{-1,1} = 0. \quad (3.1)$$

Если $s \in C'$ – общая точка в смысле Ходжа, то в терминах представления монодромии [19, формула (2.3.1)]

$$\pi_1(C', s) \rightarrow \text{SO}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, Q_s)$$

формула (3.1) принимает вид

$$(\text{End}_{\pi_1(C', s)}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) \otimes \mathbb{C})^{-1,1} = 0. \quad (3.2)$$

3.2. В силу [19, теорема (2.4.1)] имеем:

1) если $s \in C'$ – общая точка в смысле Ходжа, то центр Z алгебры эндоморфизмов

$$E_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) = \text{End}_{\pi_1(C', s)}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) \quad (3.3)$$

– коммутативное поле и $\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ – центральная простая алгебра над Z ;

2) центр Z – поле алгебраических чисел и либо Z – вполне вещественное поле, либо Z – мнимое квадратичное расширение вполне вещественного числового поля Z_0 .

Положим $[Z : \mathbb{Q}] = g$, и пусть $\sigma_i: Z \hookrightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, g$, – различные вложения поля Z в поле $\mathbb{C}$.

Для любого вложения σ_i определим локальную систему $\mathcal{V}_{\sigma_i}$ векторных пространств над $\mathbb{C}$ формулой

$$\mathcal{V}_{\sigma_i} = \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \otimes_{Z, \sigma_i} \mathbb{C}.$$

Имеется разложение в прямую сумму локальной системы $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^g \mathcal{V}_{\sigma_i}, \quad (3.4)$$

совместимое с биградуировкой $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$, поскольку элементы из Z имеют тип Ходжа $(0,0)$ как эндоморфизмы системы $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ [12, следствие 4.2.8, (ii)]. Аналогично, полагая

$$E_{\sigma_i} = \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes_{Z, \sigma_i} \mathbb{C},$$

получим разложение $\mathbb{C}$ -алгебры

$$E_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^g E_{\sigma_i},$$

совместимое с биградуировкой (напомним, что $\mathbb{C}$ -алгебра $\text{End}(\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C}$ имеет структуру Ходжа веса 0 [12, п. 4.2.3]).

В силу [19, теорема (2.4.1), (i)] $\mathbb{C}$ -алгебра E_{σ_i} простая и, следовательно, ее можно записать в виде

$$E_{\sigma_i} \simeq \text{End}(L_{\sigma_i}), \quad (3.5)$$

где L_{σ_i} – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Существует биградуировка на L_{σ_i} , единственная с точностью до сдвига бистепени и такая, что (3.5) становится биградуированным изоморфизмом [12, п. 4.4.8, формула (4.4.8.1)].

Обозначим через $\mathcal{K}_{\sigma_i}$ локальную систему

$$\mathcal{K}_{\sigma_i} = \text{Hom}_{E_{\sigma_i}}(L_{\sigma_i}, \mathcal{V}_{\sigma_i}) = L_{\sigma_i}^\vee \otimes_{E_{\sigma_i}} \mathcal{V}_{\sigma_i}.$$

Имеется изоморфизм

$$L_{\sigma_i} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K}_{\sigma_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{\sigma_i}, \quad (3.6)$$

совместимый с биградуировкой на обеих сторонах.

3.3. ЛЕММА. *Если расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиальное и жесткое, то $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа $E_{\mathbb{Q}}$ имеет тип Ходжа $(0, 0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что поле Z вполне вещественное. Тогда для любого вложения σ поля Z в $\mathbb{C}$ имеем $\overline{\mathcal{V}_\sigma} = \mathcal{V}_\sigma = \mathcal{V}_\sigma$. Поскольку $\text{rang } \mathcal{V}_{\mathbb{C}}^{2,0}$ равен 1, из существования разложения (3.4) следует, что имеется одно разложение σ (скажем, $\sigma = \sigma_1$), для которого

$$\text{rang } \mathcal{V}_{\sigma_1}^{2,0} = \text{rang } \mathcal{V}_{\sigma_1}^{0,2} = 1. \quad (3.7)$$

Тогда

$$\mathcal{V}_\sigma = \mathcal{V}_\sigma^{1,1} \quad \text{для} \quad \sigma \neq \sigma_1. \quad (3.8)$$

Следовательно, в силу (3.6) и (3.8) векторное $\mathbb{C}$ -пространство L_σ для $\sigma \neq \sigma_1$ должно иметь чистый тип, и поэтому $\mathbb{C}$ -алгебра E_σ имеет чистый тип $(0, 0)$ в силу (3.5).

С другой стороны, поскольку $E_{\mathbb{C}}^{-1,1} = 0$ в силу (3.2), пространство $E_{\sigma_1}^{-1,1}$ должно быть нулевым. Если L_{σ_1} имеет чистый тип, то из (3.5) следует, что $E_{\mathbb{C}}$ имеет чистый тип $(0, 0)$.

Далее мы предполагаем, что L_{σ_1} не имеет чистого типа.

Рассмотрим прямое разложение

$$\mathcal{V}_{\sigma_1} = \mathcal{V}_{\sigma_1}^{2,0} \oplus \mathcal{V}_{\sigma_1}^{1,1} \oplus \mathcal{V}_{\sigma_1}^{0,2}. \quad (3.9)$$

Поскольку $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^\perp$ – структура Ходжа типа $(2, 0) + (1, 1) + (0, 2)$, то из соотношений (3.3), (3.7), (3.9) и работы [12, следствие 4.1.2] следует, что

$$E_{\sigma_1} = E_{\sigma_1}^{(0,0)} \oplus E_{\sigma_1}^{(1,-1)} \oplus E_{\sigma_1}^{(2,-2)} \oplus E_{\sigma_1}^{(-2,2)} \oplus E_{\sigma_1}^{(-1,1)}. \quad (3.10)$$

С точностью до сдвига бистепеней в силу (3.5) имеем

$$L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{2,0} \oplus L_{\sigma_1}^{1,1} \oplus L_{\sigma_1}^{0,2} \oplus L_{\sigma_1}^{1,0} \oplus L_{\sigma_1}^{0,1} \oplus L_{\sigma_1}^{0,0}.$$

Если $L_{\sigma_1}^{0,0} \neq 0$, то из (3.5) и (3.10) следует, что $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{0,0}$; это противоречит предположению о том, что L_{σ_1} не имеет чистого типа. Следовательно,

$$L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{2,0} \oplus L_{\sigma_1}^{1,1} \oplus L_{\sigma_1}^{0,2} \oplus L_{\sigma_1}^{1,0} \oplus L_{\sigma_1}^{0,1}.$$

Если $L_{\sigma_1}^{2,0} \neq 0$, то из (3.5) и (3.10) следует, что $L_{\sigma_1}^{1,0} = L_{\sigma_1}^{0,1} = 0$ и

$$L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{2,0} \oplus L_{\sigma_1}^{1,1} \oplus L_{\sigma_1}^{0,2}.$$

Если $L_{\sigma_1}^{1,1} \neq 0$, то $E_{\sigma_1}^{-1,1} \neq 0$, что противоречит жесткости семейства $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$. Поэтому

$$L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{2,0} \oplus L_{\sigma_1}^{0,2}.$$

Следовательно, из соотношений (3.6), (3.7) получаем, что $\mathcal{K}_{\sigma_1}$ имеет чистый тип $(0, 0)$, $\text{rank } \mathcal{K}_{\sigma_1} = 1$, $\mathcal{V}_{\sigma_1}^{1,1} = 0$ и

$$\dim L_{\sigma_1}^{2,0} = \dim L_{\sigma_1}^{0,2} = 1.$$

Вспомним, что L_{σ_1} – фиксированное векторное пространство, в то время как $\mathcal{K}_{\sigma_1}$ – локальная система ранга 1, определенная некоторым представлением коммутативной группы $\pi_1^{\text{ab}}(C', s) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(C', s)/[\pi_1(C', s), \pi_1(C', s)]$. Следовательно, в силу (3.6) локальная система $\mathcal{V}_{\sigma_1}$ определяется некоторым представлением группы $\pi_1^{\text{ab}}(C', s)$. Поскольку $E_{\mathbb{Q}}$ – простая центральная алгебра над Z , то $E_{\mathbb{Q}} \simeq M_n(D)$ для некоторой центральной алгебры с делением D над Z . Согласно лемме Шура и (3.3) имеем изоморфизм $\pi_1(C', s)$ -модулей

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \simeq W^{\oplus n},$$

где $W \hookrightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – некоторый неприводимый $\pi_1(C', s)$ -подмодуль, $D = \text{End}_{\pi_1(C', s)} W$. Группа $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ транзитивно переставляет неприводимые $\pi_1(C', s)$ -модули W_i в разложении $W \otimes \mathbb{C} = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$. Поскольку локальная система $\mathcal{V}_{\sigma_1}$ отвечает прямой сумме некоторых $\pi_1(C', s)$ -модулей W_i , $i = 1, \dots, m$, система $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ определяется представлением группы $\pi_1^{\text{ab}}(C', s)$. Значит, полупростая алгебраическая группа G_2 коммутативная, и поэтому $G_2 = 1$, что противоречит предположению о неизотривальности семейства $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$.

Если $L_{\sigma_1}^{2,0} = 0$, то из (3.5) и (3.10) следует, что $L_{\sigma_1}^{0,2} = 0$ (иначе мы имели бы $L_{\sigma_1}^{1,0} = L_{\sigma_1}^{0,1} = 0$, $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{1,1} \oplus L_{\sigma_1}^{0,2}$, $L_{\sigma_1}^{1,1} = 0$ в силу равенства $E_{\sigma_1}^{-1,1} = 0$, так что выполнено $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{0,2}$; это противоречит предположению о том, что L_{σ_1} не имеет чистого типа). Следовательно, $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{1,1} \oplus L_{\sigma_1}^{1,0} \oplus L_{\sigma_1}^{0,1}$. Если $L_{\sigma_1}^{1,1} \neq 0$, то из (3.5) и (3.10) следует, что $L_{\sigma_1}^{1,0} = L_{\sigma_1}^{0,1} = 0$ и $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{1,1}$; это противоречит предположению о том, что L_{σ_1} не имеет чистого типа. Поэтому $L_{\sigma_1} = L_{\sigma_1}^{1,0} \oplus L_{\sigma_1}^{0,1}$. Если $L_{\sigma_1}^{1,0} \neq 0$ и $L_{\sigma_1}^{0,1} \neq 0$, то $E_{\sigma_1}^{-1,1} \neq 0$, что противоречит жесткости семейства $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$. Поэтому L_{σ_1} имеет чистый тип, что противоречит нашему предположению. Случай вполне вещественного поля Z полностью исследован.

Следовательно, можно считать, что поле Z – чисто мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля Z_0 . Тогда мы имеем $\bar{\sigma} \neq \sigma$ для любого вложения σ поля Z в $\mathbb{C}$. Мы можем записать разложение $\mathcal{V}_{\sigma}$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\sigma_1} &= \mathcal{V}_{\sigma_1}^{2,0} \oplus \mathcal{V}_{\sigma_1}^{1,1}, & \text{rank } \mathcal{V}_{\sigma_1}^{2,0} &= 1; \\ \mathcal{V}_{\bar{\sigma}_1} &= \mathcal{V}_{\bar{\sigma}_1}^{0,2} \oplus \mathcal{V}_{\bar{\sigma}_1}^{1,1}, & \mathcal{V}_{\bar{\sigma}_1}^{0,2} &\simeq \overline{\mathcal{V}_{\sigma_1}^{2,0}}; \\ \mathcal{V}_{\sigma} &= \mathcal{V}_{\sigma}^{1,1} & \text{для } \sigma &\neq \sigma_1, \bar{\sigma}_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Следовательно, в силу (3.6) и (3.11) векторное $\mathbb{C}$ -пространство L_{σ} для $\sigma \neq \sigma_1, \bar{\sigma}_1$ должно иметь чистый тип, и поэтому $\mathbb{C}$ -алгебра E_{σ} имеет чистый тип $(0, 0)$ в силу (3.5).

Поскольку $E_{\sigma_1}^{-1,1} = 0$, то из (3.11) следует, что $\mathcal{V}_{\sigma_1}^{1,1} = 0$ и $\mathcal{V}_{\sigma_1} = \mathcal{V}_{\sigma_1}^{2,0}$. Поэтому в силу (3.5), (3.6) $\mathbb{C}$ -алгебра E_{σ_1} имеет чистый тип $(0,0)$. В результате $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа $E_{\mathbb{Q}}$ имеет тип Ходжа $(0,0)$. Лемма доказана.

3.4. ЛЕММА. *Если расслоенное пространство $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ неизотривиальное и жесткое, то мы имеем*

$$H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) = H^0(C', R^5 \pi'_* \mathbb{Q}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $H^0(C', R^3 \pi'_* \mathbb{Q}) \neq 0$, то в силу (2.5) и леммы Шура пространство $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$ является неприводимым $\pi_1(C', s)$ -подмодулем полупростого $\pi_1(C', s)$ -модуля $H^2(X_{2s}, \mathbb{Q})$; в частности, для точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа, мы имеем разложение

$$\mathcal{V}_{\mathbb{Q}s} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \simeq [H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})]^{\oplus n_1} \oplus [W_2]^{\oplus n_2} \oplus \dots \oplus [W_p]^{\oplus n_p}, \quad (3.12)$$

где $n_1 \geq 1$ и $H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})$, $W_2, \dots, W_p$ – неприводимые попарно неизоморфные $\pi_1(C', s)$ -модули. Согласно лемме из п. 3.3 $\mathbb{Q}$ -структура Ходжа $E_{\mathbb{Q}}$ имеет тип Ходжа $(0,0)$; с другой стороны, образ фундаментальной группы $\pi_1(C', s)$ при представлении монодромии содержится в группе Ходжа $\text{Hg}(X_{2s}) = \text{Hg}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp})$, потому что $s \in C'$ – общая точка в смысле Ходжа. Поэтому в силу [21, следствие B55] имеем

$$\begin{aligned} \text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} &= [\text{End} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}]^{\text{Hg}(X_{2s})} = [\text{End} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}]^{(0,0)} \\ &\supset E_{\mathbb{Q}} \simeq \text{End}_{\pi_1(C', s)} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \supset \text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}. \end{aligned}$$

Значит,

$$E_{\mathbb{Q}} \simeq \text{End}_{\pi_1(C', s)} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} = \text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp},$$

и $E_{\mathbb{Q}}$ – коммутативное поле в силу теоремы Ю. Г. Зархина о простоте $\text{Hg}(X_{2s})$ -модуля $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ [22, теорема 1.6]. Поэтому из (3.12) и леммы Шура следует, что имеется изоморфизм $\pi_1(C', s)$ -модулей

$$\mathcal{V}_{\mathbb{Q}s} = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \simeq H^1(X_{1s}, \mathbb{Q}). \quad (3.13)$$

Поскольку $\text{Hg}(X_{2s}) \subset \text{SO}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, Q_s)$ и группа $\text{SO}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}, Q_s)$ коммутативная в силу (3.13) и равенства $\dim \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} = 2$, мы видим, что группа Ходжа $\text{Hg}(X_{2s})$ является алгебраической коммутативной связной группой, содержащей полупростую группу G_2 в качестве нормальной подгруппы, потому что $s \in C'$ – общая точка в смысле Ходжа. Следовательно, $G_2 = 1$, что противоречит неизотривиальности семейства $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$.

Равенство $H^0(C', R^5 \pi'_* \mathbb{Q}) = 0$ является следствием двойственности Пуанкаре на слоях гладкого морфизма $\pi': X' \rightarrow C'$, потому что

$$H^0(C', R^5 \pi'_* \mathbb{Q}) \simeq H^0(C', R^1 \pi'_{1*} \mathbb{Q}) \simeq H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = H^1(X_{1s}, \mathbb{Q})^{G_1} = 0.$$

Лемма доказана.

3.5. Используя алгоритм из [4, п. 1.9], согласно лемме из п. 3.4 получим

$$H^2(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, R^3\pi_*\mathbb{Q}) = 0. \quad (3.14)$$

Поэтому в силу лемм из пп. 1.7, 3.4 и формулы (3.14) легко видеть, что для $n \in \{3, 5\}$ существует канонический изоморфизм рациональных структур Ходжа

$$(i_{\Delta}f)_*H^{n-2}(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^n\pi_*\mathbb{Q}).$$

Поэтому, используя стандартные аргументы [4, пп. 1.7–1.12, 2.1–2.5], мы получим доказательство гипотезы $B(X)$ для случая жесткого семейства $\pi'_2: X'_2 \rightarrow C'$ КЗ-поверхностей. Теорема 0.1 доказана.

3.6. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что $\pi_2: X_2 \rightarrow C$ – такое семейство КЗ-поверхностей с полустабильными вырождениями рационального типа, что $\text{rank NS}(X_{2s}) \neq 18$ для общего геометрического слоя X_{2s} . Если X – гладкое проективное 4-мерное многообразие и общий схемный слой некоторого морфизма $f: X \rightarrow X_2$ является эллиптической кривой с якобиевой структурой уровня $N \geq 6$, то гипотеза $B(X)$ верна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично [4, следствие 3.4].

§ 4. О гипотезе $B(X)$ для компактификации абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой с редукциями мультипликативного типа во всех бесконечно удаленных точках

4.1. ЛЕММА. *Пусть $\tau: Y \rightarrow C$ – морфизм гладкой проективной поверхности Y на гладкую кривую C , обладающий сечением, все вырожденные слои являются объединениями гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями. Тогда существует такое разрешение особенностей $\sigma: [Y \times_C Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow Y \times_C Y \times_C Y$, что все вырожденные слои композиции*

$$[Y \times_C Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \xrightarrow{\sigma} Y \times_C Y \times_C Y \rightarrow C$$

являются объединениями гладких неприводимых рациональных 3-мерных компонент V_i кратности 1 с нормальными пересечениями и $H^1(V_i, \mathbb{Q}) = H^3(V_i, \mathbb{Q}) = 0$. Более того, для $i \neq j$ многообразие $V_i \cap V_j$ является несвязным объединением гладких рациональных поверхностей или пустым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\Delta = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(Y_{\delta}) \neq \emptyset\}.$$

Если t – локальная голоморфная координата в окрестности точки $\delta \in C$ (так что δ определяется уравнением $t = 0$), то можно считать, что $\tau: Y \rightarrow C$ локально задается формулой $t = z_4$ или $t = z_4 z_5$, где z_4, z_5 – локальные голоморфные координаты на Y .

Заметим, что особые слои структурного морфизма $Y \times_C Y \rightarrow C$ являются объединениями рациональных линейчатых поверхностей, изоморфных $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, особые точки на $Y \times_C Y$ являются невырожденными квадратичными точками,

каждая особая точка лежит на некоторой рациональной линейчатой поверхности. Известно, что последовательные раздутия этих поверхностей на $Y \times_C Y$ (без использования объемлющего многообразия $Y \times Y$) дают разрешение особенностей $[Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow Y \times_C Y$ многообразия $Y \times_C Y$, все вырожденные слои композиции

$$g: [Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow Y \times_C Y \rightarrow C$$

являются объединениями гладких рациональных поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями и локально задаются одним из уравнений вида $z_1 = 0$, $z_1 z_2 = 0$, $z_1 z_2 z_3 = 0$, где z_1, z_2, z_3 – некоторые локальные координаты на $[Y \times_C Y]^{\text{smooth}}$, причем можно считать, что морфизм g локально задается одной из формул $t = z_1$, $t = z_1 z_2$, $t = z_1 z_2 z_3$ [3, § 2]. Очевидно, что подмногообразие $V \stackrel{\text{def}}{=} [Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \times_C Y \hookrightarrow [Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \times Y \stackrel{\text{def}}{=} X$ задается в терминах подходящих локальных координат одним из следующих уравнений:

$$z_1 z_2 z_3 = z_4 z_5, \quad (4.1)$$

$$z_1 z_2 z_3 = z_4, \quad (4.2)$$

$$z_1 z_2 = z_4 z_5, \quad (4.3)$$

$$z_1 z_2 = z_4, \quad (4.4)$$

$$z_1 = z_4 z_5, \quad (4.5)$$

$$z_1 = z_4. \quad (4.6)$$

Пусть $D \hookrightarrow \mathbb{C}^5$ – полидиск с координатами $z_1, \dots, z_5$, $W = V \cap D$ – открытое подмножество в V^{an} . Очевидно, что $\text{Sing}(W) \neq \emptyset$ только в случаях (4.1) и (4.3) [23, гл. 0, § 2].

Заметим, что имеется лишь конечное множество тройных точек $a_1, \dots, a_p$ на вырожденном слое $[Y \times_C Y]^{\text{smooth}}_\delta$ структурного морфизма $[Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow C$. Обозначим через $F_{a_i}^{(1)}, F_{a_i}^{(2)}, F_{a_i}^{(3)}$ различные неприводимые гладкие рациональные поверхности на $[Y \times_C Y]^{\text{smooth}}$, проходящие через тройную точку a_i . С другой стороны, имеется лишь конечное множество двойных точек $b_1, \dots, b_q$ на вырожденном слое Y_δ морфизма $\tau: Y \rightarrow C$. Пусть $L_{b_j}^{(1)}, L_{b_j}^{(2)}$ – различные неприводимые гладкие рациональные кривые на Y , проходящие через двойную точку b_j .

Особая точка $a_i \times b_j$ многообразия $[Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \times_C Y$ лежит на каждом из шести неособых трехмерных рациональных многообразий $F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)} \xrightarrow{\sim} F_{a_i}^{(m)} \times \mathbb{P}^1$, $m = 1, 2, 3$, $n = 1, 2$; поскольку $H^1(F_{a_i}^{(m)}, \mathbb{Q}) = H^3(F_{a_i}^{(m)}, \mathbb{Q}) = 0$, то в силу формулы Кюннета имеем

$$H^1(F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)}, \mathbb{Q}) = H^3(F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)}, \mathbb{Q}) = 0. \quad (4.7)$$

Рассмотрим моноидальное преобразование $f: X' \rightarrow X$ вдоль гладкого трехмерного рационального подмногообразия $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)} \hookrightarrow V_\delta$. Прообраз V состоит из двух компонент: исключительного дивизора на X' и строгого (собственного) прообраза V_{strict} многообразия V [24, гл. II, § 7, следствие 7.15], [25, гл. 0, § 2]. Канонический морфизм $\varphi: V_{\text{strict}} \rightarrow V$ является моноидальным преобразованием многообразия V вдоль $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}$ [25, гл. 0, § 2]. По

той же причине в случае $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)} \neq F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)}$ канонический морфизм $\varphi_{F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)}} : (F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)})_{\text{strict}} \rightarrow F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)}$ является моноидальным преобразованием многообразия $F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)}$ вдоль $[F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}] \cap [F_{a_i}^{(m)} \times L_{b_j}^{(n)}]$.

Далее мы считаем, что W задается уравнением $z_1 z_2 z_3 - z_4 z_5 = 0$, $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)} = \{z_1 = z_4 = 0\}$, $F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)} = \{z_2 = z_5 = 0\}$.

Хорошо известно, что моноидальное преобразование $f: D' \rightarrow D$ полидиска D с координатами $z_1, \dots, z_5$ вдоль трехмерного многообразия $\{z_1 = z_4 = 0\}$ является канонической проекцией подмножества

$$D' = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \times (w_0 : w_1) \mid z_1 w_1 = z_4 w_0\} \hookrightarrow D \times \mathbb{P}^1$$

на D [26, упражнение 7.19]. Пусть $D_+(w_i) = \{(w_0 : w_1) \mid w_i \neq 0\}$, $u_1 = w_1/w_0$ – локальная координата на $D_+(w_0)$, $u_2 = w_0/w_1$ – локальная координата на $D_+(w_1)$.

Поскольку D' задается в открытом подмножестве $U_0 = D \times D_+(w_0)$ как $D' \cap U_0 = \{z_4 = z_1 u_1\}$ и W задается в D уравнением $z_1 z_2 z_3 - z_4 z_5 = 0$, то дивизор $f^{-1}(W)$ задается в $D' \cap U_0$ уравнением $z_1 z_2 z_3 - z_1 u_1 z_5 = 0$ и состоит из двух компонент: исключительного дивизора на $D' \cap U_0$ (локально определенного уравнением $z_1 = 0$) и строгим (собственным) прообразом W_{strict} многообразия W , которое задается в локальных координатах z_1, z_2, z_3, u_1, z_5 на $D' \cap U_0$ уравнением

$$z_2 z_3 - u_1 z_5 = 0$$

типа (4.3) и имеет особенности.

Очевидно, что многообразие $[F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}]_{\text{strict}}$ задается в локальных координатах z_1, z_2, z_3, u_1, z_5 на $D' \cap U_0$ системой уравнений

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 z_3 - u_1 z_5 &= 0 \end{aligned}$$

и имеет особенности, причем $[F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}]_{\text{strict}} = \{z_2 = z_5 = 0\}$. Значит, многообразии

$$[F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}]_{\text{strict}} \cap [F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}]_{\text{strict}} = \{z_1 = z_2 = z_5 = 0\}$$

не имеет особенностей и изоморфно гладкой линейчатой поверхности (которая является прообразом кривой $\{z_1 = z_2 = z_4 = z_5 = 0\} = [F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}] \cap [F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}] \cap D$ на полидиске D).

С другой стороны, моноидальное преобразование $D'' \rightarrow D'$ многообразия D' с локальными координатами z_1, z_2, z_3, u_1, z_5 вдоль трехмерного многообразия $\{z_2 = z_5 = 0\}$ является канонической проекцией подмножества

$$D'' = \{(z_1, z_2, z_3, u_1, z_5) \times (w_0 : w_1) \mid z_2 w_1 = z_5 w_0\} \hookrightarrow D' \times \mathbb{P}^1$$

на D' . Полагая $z_5 = u'_1 z_2$, где $u'_1 = w_1/w_0$ на $D_+(w_0)$ и $U'_0 \stackrel{\text{def}}{=} D' \times D_+(w_0)$, мы видим, что строгий прообраз W'_{strict} дивизора $W_{\text{strict}} = \{z_2 z_3 = u_1 z_5\}$ задается

в локальных координатах z_1, z_2, z_3, u_1, u'_1 на $D'' \cap U'_0$ уравнением

$$z_3 - u_1 u'_1 = 0$$

и не имеет особых точек; поскольку $t = z_1 z_2 z_3$, то слой канонического морфизма $W'_{\text{strict}} \cap D'' \cap U'_0 \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ содержится в комплексно-аналитическом пространстве, заданном уравнением $z_1 z_2 u_1 u'_1 = 0$ в локальных координатах z_1, z_2, u_1, u'_1 на W'_{strict} ; в частности, этот слой является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями. Полагая $z_2 = u'_2 z_5$, где $u'_2 = w_0/w_1$ на $D_+(w_1)$ и $U'_1 \stackrel{\text{def}}{=} D' \times D_+(w_1)$, мы видим, что строгий прообраз W'_{strict} дивизора $W_{\text{strict}} = \{z_2 z_3 = u_1 z_5\}$ задается в локальных координатах z_1, z_3, u_1, u'_2, z_5 на $D'' \cap U'_1$ уравнением

$$u'_2 z_3 - u_1 = 0$$

и не имеет особенностей; поскольку $t = z_1 z_2 z_3$, то слой канонического морфизма $W'_{\text{strict}} \cap D'' \cap U'_1 \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ содержится в комплексно-аналитическом пространстве, заданном уравнением $z_1 u'_2 z_5 z_3 = 0$ в локальных координатах z_1, u'_2, z_3, z_5 на W'_{strict} ; в частности, этот слой является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями.

Аналогично, многообразие D' задается в открытом подмножестве $U_1 = D \times D_+(w_1)$ как $D' \cap U_1 = \{z_1 = z_4 u_2\}$, дивизор $f^{-1}(W)$ задается в $D' \cap U_1$ уравнением $z_4 u_2 z_2 z_3 - z_4 z_5 = 0$ и состоит из двух компонент: исключительного дивизора на $D' \cap U_1$ (локально определенного уравнением $z_4 = 0$) и строгим прообразом W_{strict} многообразия W , которое задается в локальных координатах u_2, z_2, z_3, z_4, z_5 на $D' \cap U_1$ уравнением

$$u_2 z_2 z_3 - z_5 = 0$$

и не имеет особых точек; поскольку $t = z_1 z_2 z_3$, то слой канонического морфизма $W_{\text{strict}} \cap D' \cap U_1 \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ содержится в комплексно-аналитическом пространстве, заданном уравнением $z_4 u_2 z_2 z_3 = 0$ в локальных координатах u_2, z_2, z_3, z_4 на W_{strict} ; в частности, этот слой является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями.

Очевидно, что многообразие $[F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}]_{\text{strict}}$ задается в локальных координатах u_2, z_2, z_3, z_4, z_5 на $D' \cap U_1$ системой уравнений

$$\begin{aligned} z_4 &= 0, \\ u_2 z_2 z_3 - z_5 &= 0 \end{aligned}$$

и не имеет особенностей, причем $[F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}]_{\text{strict}} = \{z_2 = z_5 = 0\}$. Значит, многообразие

$$[F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}]_{\text{strict}} \cap [F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}]_{\text{strict}} = \{z_2 = z_4 = z_5 = 0\}$$

не имеет особенностей и изоморфно гладкой линейчатой поверхности (которая является прообразом кривой $\{z_1 = z_2 = z_4 = z_5 = 0\} = [F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}] \cap [F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}] \cap D$ на полидиске D).

Принимая во внимание результаты этих вычислений, мы видим, что композиция раздутия многообразия V вдоль трехмерного многообразия $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}$ и раздутия $V'_{\text{strict}} \rightarrow V_{\text{strict}}$ многообразия V_{strict} вдоль строгого прообраза трехмерного многообразия $F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}$ дает разрешение особенностей многообразия V в окрестности точки $a_i \times b_j$, причем в этой окрестности слой канонического морфизма $V'_{\text{strict}} \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями.

Предположим, что трехмерные многообразия $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}$ и $F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}$ содержат точку $a_k \times b_l$, где $(i, j) \neq (k, l)$. В этом случае точка a_k лежит на двойной кривой $F_{a_i}^{(1)} \cap F_{a_i}^{(2)}$, $b_l \in L_{b_j}^{(1)} \cap L_{b_j}^{(2)}$, причем $L_{b_j}^{(1)} \cap L_{b_j}^{(2)}$ – конечное множество двойных точек на вырожденном слое Y_δ морфизма $\tau: Y \rightarrow C$.

Мы утверждаем, что композиция раздутия многообразия V вдоль трехмерного многообразия $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}$ и раздутия $V'_{\text{strict}} \rightarrow V_{\text{strict}}$ многообразия V_{strict} вдоль строгого прообраза трехмерного многообразия $F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}$ дает разрешение особенностей многообразия V в окрестности точки $a_k \times b_l$, причем в этой окрестности слой канонического морфизма $V'_{\text{strict}} \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями; кроме того, эта композиция дает разрешение особенностей многообразия V в окрестности дивизоров $F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}$ и $F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}$, причем в этой окрестности слой канонического морфизма $V_{\text{strict}} \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями.

Действительно, $F_{a_i}^{(1)}, F_{a_i}^{(2)}$ – две различные неприводимые компоненты особого слоя структурного морфизма $g: [Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow C$. Пусть $\sigma: [Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow Y \times_C Y$ – стандартное разрешение особенностей [3, § 2] многообразия $Y \times_C Y$. Тогда $F_{a_i}^{(1)} = S_{\text{strict}}$, $F_{a_i}^{(2)} = T_{\text{strict}}$ для некоторых поверхностей S и T на $Y \times_C Y$. Кроме того, $S = C_1 \times C_2$, $T = C_3 \times C_4$, где C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, – гладкие рациональные кривые на Y . Поэтому $S \cap T = [C_1 \cap C_3] \times [C_2 \cap C_4]$ – конечное множество точек или несвязное объединение гладких рациональных кривых.

Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – локальные координаты на многообразии $Y \times Y$ в окрестности особой точки $(0, 0, 0, 0)$ дивизора $Y \times_C Y = \{z_1 z_2 = z_3 z_4\}$.

Предположим сначала, что $S \cap T$ – конечное множество точек. Тогда можно считать, что локально $S = \{z_1 = z_3 = 0\}$, $T = \{z_2 = z_4 = 0\}$, так что $S \cap T = \{z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0\}$. Раздутие многообразия $Y \times_C Y = \{z_1 z_2 = z_3 z_4\}$ вдоль $S = \{z_1 = z_3 = 0\}$ дает разрешение особенностей многообразия $Y \times_C Y$ в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$, причем канонические отображения $\sigma: S_{\text{strict}} \rightarrow S$ и $\sigma: T_{\text{strict}} \rightarrow T$ являются раздутиями точки $(0, 0, 0, 0) \in S \cap T$ [3, § 2]. В частности, $S_{\text{strict}} \cap T_{\text{strict}}$ локально совпадает с исключительной кривой, поэтому многообразие $F_{a_i}^{(1)} \cap F_{a_i}^{(2)}$ – несвязное объединение гладких рациональных кривых.

Далее рассмотрим случай, когда $S \cap T$ – несвязное объединение гладких рациональных кривых. Можно считать, что $S = \{z_1 = z_3 = 0\}$, $T = \{z_1 = z_4 = 0\}$, $S \cap T = \{z_1 = z_3 = z_4 = 0\}$. Согласно общей теории моноидальных

преобразований каноническое отображение

$$\{z_1 = z_4 = 0\}_{\text{strict}} \xrightarrow{\sigma} \{z_1 = z_4 = 0\}$$

является моноидальным преобразованием поверхности $\{z_1 = z_4 = 0\}$ вдоль гладкой кривой

$$\{z_1 = z_3 = z_4 = 0\} = \{z_1 = z_3 = 0\} \cap \{z_1 = z_4 = 0\}$$

(см. [25, гл. 0, конец § 2]), и поэтому $T_{\text{strict}} = \{z_1 = z_4 = 0\}_{\text{strict}} = \{z_1 = z_4 = 0\} = T$. С другой стороны, как показано в [3, § 2], строгий прообраз S_{strict} поверхности S (в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$) получается из поверхности S раздутием точки $(0, 0, 0, 0)$. Поэтому

$$F_{a_i}^{(1)} \cap F_{a_i}^{(2)} = S_{\text{strict}} \cap T_{\text{strict}} = S_{\text{strict}} \cap T = S \cap T$$

– несвязное объединение гладких рациональных кривых.

Мы видим, что в любом случае $[F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}] \cap [F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}]$ – несвязное объединение гладких рациональных кривых. Следовательно, канонический морфизм $(F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)})_{\text{strict}} \rightarrow F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}$ является моноидальным преобразованием гладкого трехмерного рационального многообразия $E \stackrel{\text{def}}{=} F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}$ вдоль гладкого многообразия

$$B \stackrel{\text{def}}{=} [F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)}] \cap [F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)}] = [F_{a_i}^{(1)} \cap F_{a_i}^{(2)}] \times [L_{b_j}^{(1)} \cap L_{b_j}^{(2)}],$$

причем многообразие B является несвязным объединением гладких рациональных кривых.

Пусть

$$\begin{array}{ccc} B' & \xhookrightarrow{j} & E' \\ \downarrow g & & \downarrow \varphi_E \\ B & \xhookrightarrow{i} & E \end{array}$$

– каноническая диаграмма моноидального преобразования $\varphi_E: E' \rightarrow E$ гладкого рационального трехмерного многообразия E вдоль замкнутого гладкого рационального центра B коразмерности $r \geq 2$, N – конормальный пучок на B [27, п. 13.3]. Тогда имеется каноническое разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [28, предложение 13.1]

$$H^3(E', \mathbb{Q}) = \varphi_E^* H^3(E, \mathbb{Q}) \oplus \left[\bigoplus_{p=0}^{r-2} j_* [g^* H^{3-2p-2}(B, \mathbb{Q}) \smile c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N)}(1))^{\smile p}] \right]. \quad (4.8)$$

Поскольку $H^1(B, \mathbb{Q}) = 0$, то (4.8) принимает вид

$$H^3(E', \mathbb{Q}) = \varphi_E^* H^3(E, \mathbb{Q}),$$

поэтому из (4.7) следует, что

$$H^1((F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)})_{\text{strict}}, \mathbb{Q}) = H^3((F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)})_{\text{strict}}, \mathbb{Q}) = 0. \quad (4.9)$$

С другой стороны, многообразие B – несвязное объединение гладких рациональных кривых и, следовательно, многообразие

$$(F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)})_{\text{strict}} \cap (F_{a_i}^{(2)} \times L_{b_j}^{(2)})_{\text{strict}} = B' = \mathbb{P}(N)$$

– несвязное объединение гладких рациональных поверхностей.

Пусть $F \times L$ – произвольная неприводимая компонента особого слоя морфизма $V \rightarrow C$, где F – неприводимая компонента особого слоя структурного морфизма $[Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow C$ и L – неприводимая компонента особого слоя морфизма $\tau: Y \rightarrow C$. Можно считать, что $F_{a_i}^{(1)} \cap F \neq \emptyset$, $F_{a_i}^{(1)} \neq F$, $F_{a_i}^{(1)} = S_{\text{strict}}$ и $F = T_{\text{strict}}$, где $S = C_1 \times C_2$, $T = C_3 \times C_4$ и C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, – гладкие рациональные кривые на Y . Поэтому $S \cap T = [C_1 \cap C_3] \times [C_2 \cap C_4]$ – конечное множество точек или несвязное объединение гладких рациональных кривых. Стандартные рассуждения показывают, что в этом случае многообразие $F_{a_i}^{(1)} \cap F$ – несвязное объединение гладких рациональных кривых, поэтому многообразие $(F \times L)_{\text{strict}}$ гладкое и

$$H^1((F \times L)_{\text{strict}}, \mathbb{Q}) = H^3((F \times L)_{\text{strict}}, \mathbb{Q}) = 0. \quad (4.10)$$

Более того, многообразие $(F_{a_i}^{(1)} \times L_{b_j}^{(1)})_{\text{strict}} \cap (F \times L)_{\text{strict}}$ – несвязное объединение гладких рациональных поверхностей. Следовательно, за конечное число шагов можно избавиться от особенностей на V типа (4.1), сохраняя при этом свойства (4.9), (4.10) и представление пересечения строгих прообразов пары компонент вырожденных слоев в виде несвязного объединения гладких рациональных поверхностей.

С другой стороны, моноидальное преобразование $D' \rightarrow D$ полидиска D с координатами $z_1, \dots, z_5$ вдоль трехмерного многообразия $\{z_2 = z_5 = 0\}$ является канонической проекцией подмножества

$$D' = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \times (w_0: w_1) \mid z_2 w_1 = z_5 w_0\} \hookrightarrow D \times \mathbb{P}^1$$

на D , строгий прообраз W_{strict} дивизора $W = \{z_1 z_2 = z_4 z_5\}$ задается в локальных координатах z_1, z_2, z_3, z_4, u_1 на $D' \cap U_0$ уравнением

$$z_1 - u_1 z_4 = 0$$

и не имеет особых точек. Поскольку $t = z_1 z_2$, слой канонического морфизма $W_{\text{strict}} \cap D' \cap U_0 \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ содержится в комплексно-аналитическом пространстве, заданном уравнением $u_1 z_4 z_2 = 0$ в локальных координатах z_2, z_3, z_4, u_1 на W_{strict} ; в частности, этот слой является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями. Аналогично, дивизор W_{strict} задается в локальных координатах z_1, u_2, z_3, z_4, z_5 на $D' \cap U_1$ уравнением

$$z_1 u_2 - z_4 = 0$$

и не имеет особых точек, а слой канонического морфизма $W_{\text{strict}} \cap D' \cap U_1 \rightarrow C$ над точкой $t = 0$ содержится в комплексно-аналитическом пространстве, заданном уравнением $z_1 u_2 z_5 = 0$ в локальных координатах z_1, u_2, z_3, z_5 на W_{strict} , и поэтому является объединением гладких трехмерных многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями. Последовательно раздувая строгие прообразы остальных компонент особых слоев структурного морфизма $V \rightarrow C$, мы

избавимся от особенностей на V вида (4.3), сохраняя при этом свойство (4.10) и представление пересечения строгих прообразов пары компонент вырожденных слоев в виде несвязного объединения гладких рациональных поверхностей. Лемма доказана.

4.2. Далее мы считаем, что $\tau: Y \rightarrow C$ – семейство кривых рода 3, удовлетворяющее условиям леммы из п. 4.1 и обладающее хотя бы одним вырожденным слоем.

Пусть $\pi: X \stackrel{\text{def}}{=} [Y \times_C Y \times_C Y]^{\text{smooth}} \rightarrow C$ – структурный морфизм, $C' \stackrel{\text{def}}{=} C \setminus \Delta \xrightarrow{j} C$, $X' = X \setminus \pi^{-1}(\Delta)$, $\pi' = \pi|_{X'}: X' \rightarrow C'$, $\tau': Y' \stackrel{\text{def}}{=} Y \times_C C' \rightarrow C'$.

Заметим, что в силу леммы из п. 4.1

$$H^1(V_i, \mathbb{Q}) = H^3(V_i, \mathbb{Q}) = 0$$

для любой неприводимой компоненты V_i дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поэтому в обозначениях п. 1.6 имеем

$$H^1(Z, \mathbb{Q}) = H^3(Z, \mathbb{Q}) = 0. \quad (4.11)$$

Следовательно, точная последовательность (1.5) дает равенство

$$H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) = 0 \quad \forall n \in \{3, 5\}. \quad (4.12)$$

4.3. ЛЕММА. *Имеем*

$$H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^3\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^5\pi'_*\mathbb{Q}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о локально инвариантных циклах каноническое отображение $R^p\pi_*\mathbb{Q} \rightarrow j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}$ сюръективно (с ядром, сосредоточенным на Δ) (см. [14, предложение (15.12)], [15, комментарий к п. (3.7)]). Следовательно, имеется канонический изоморфизм

$$H^2(C, R^p\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}).$$

С другой стороны, естественные $\smile$ -произведения (вместе с поляризацией локальной системы $R^p\pi'_*\mathbb{Q}$) определяют невырожденное спаривание [14, предложение (10.5)]

$$H^0(C, j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}) \times H^2(C, j_*R^p\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^2(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}.$$

Поэтому в силу (4.12) для $n \in \{3, 5\}$ имеем

$$0 = H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, j_*R^{n-2}\pi'_*\mathbb{Q})^\vee = H^0(C', R^{n-2}\pi'_*\mathbb{Q})^\vee.$$

В частности, по теореме двойственности Пуанкаре на слоях гладкого морфизма π' имеем

$$H^0(C', R^5\pi'_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q})^\vee = 0.$$

Лемма доказана.

4.4. Точная последовательность (1.5), диаграмма (1.4), формула (4.11) и лемма из п. 4.3 дают канонический изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа типа $(n, 0) + (n - 1, 1) + \dots + (0, n)$

$$H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \frac{H^1(C', R^{n-1} \pi'_* \mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_n)}{H^1(C, R^{n-1} \pi_* \mathbb{Q})} \quad \forall n \in \{3, 5\}. \quad (4.13)$$

С другой стороны, вложение смешанных структур Ходжа (1.6) принимает вид

$$H^0(C, R^n \pi_* \mathbb{C}) \hookrightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta} V_0^{(\delta)} / N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)}. \quad (4.14)$$

В обозначениях (1.7) имеем $V_0^{(\delta)} = H^{n-1}(X_s, \mathbb{C})$, $s \in C'$.

Рассмотрим четную последовательность Клеменса–Шмида [29, гл. 5, §3]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X_s, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\psi} H_6(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^2(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^2(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_4(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^4(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^4(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^4(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_2(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} H^6(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\nu} H^6(X_s, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{N} H^6(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\psi} H_0(X_\delta, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mu} 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $H^{2p}(X_s, \mathbb{Q})$ снабжено предельной смешанной структурой Ходжа и морфизмы ψ , μ , ν , N смешанных структур Ходжа имеют типы $(-3, -3)$, $(4, 4)$, $(0, 0)$, $(-1, -1)$ соответственно.

4.5. ЛЕММА. Имеем $H^0(C, R^5 \pi_* \mathbb{Q}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм ψ в точной последовательности (4.15) индуцирует вложение (типа $(-3, -3)$) смешанных структур Ходжа

$$H^4(X_s, \mathbb{Q}) / NH^4(X_s, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H_2(X_\delta, \mathbb{Q}) = H^2(X_\delta, \mathbb{Q})^\vee.$$

Из (4.14) следует, что для доказательства равенства $H^0(C, R^5 \pi_* \mathbb{Q}) = 0$ достаточно проверить, что $H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ является смешанной структурой Ходжа типа $(0, 0) + (1, 1)$.

По построению X_δ – дивизор с нормальными пересечениями:

$$X_\delta = V_1 + \dots + V_m,$$

где V_i – гладкие рациональные трехмерные многообразия, подмногообразие $V_i \cap V_j$, $i \neq j$, на каждом многообразии V_i является несвязным объединением гладких рациональных поверхностей или пустым множеством в силу леммы из п. 4.1. В частности,

$$H^1(V_i, \mathbb{Q}) = 0, \quad (4.16)$$

$$H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (4.17)$$

Пусть $\Pi(X_\delta)$ – полиэдр, вершинам которого соответствуют компоненты V_i слоя X_δ ; вершины $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ образуют $(k-1)$ -симплекс, если $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k} \neq \emptyset$. Положим

$$X_\delta^{(k)} = \coprod_{i_1 < \dots < i_k} V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k},$$

и пусть морфизм $\delta_j: X_\delta^{(k)} \rightarrow X_\delta^{(k-1)}$ определен на $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k}$ как вложение $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_k} \hookrightarrow V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_{j-1}} \cap V_{i_{j+1}} \cap \dots \cap V_{i_k}$.

Рассмотрим спектральную последовательность

$$E_1^{q,r} = H^r(X_\delta^{(q+1)}, \mathbb{Q}).$$

Известно [29, гл. 4, § 2, пп. 2.4–2.7], что дифференциал $d_1^{q,r}: E_1^{q,r} \rightarrow E_1^{q+1,r}$ индуцирован комбинаторным дифференциалом $D_2 = \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{r+j} \delta_j^*$ и является морфизмом веса 0 чистых структур Ходжа. Более того,

$$E_2^{q,r} = E_\infty^{q,r} = \mathrm{Gr}_r^W H^{q+r}(X_\delta, \mathbb{Q}).$$

Весовая фильтрация W на $H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ допускает следующее описание [29, гл. 4, § 2, п. 2.8, следствия 2, 6]:

$$\begin{aligned} H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) &= W_2 \supset W_1 \supset W_0 \supset 0, \\ \mathrm{Gr}_0^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) &\simeq H^2(\Pi(X_\delta), \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Кроме того, в силу (4.16), (4.17) имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_1^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{1,1} \\ &= \frac{\mathrm{Ker}[d_1^{1,1}: \bigoplus_{i < j} H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j < k} H^1(V_i \cap V_j \cap V_k, \mathbb{Q})]}{\mathrm{Im}[d_1^{0,1}: \bigoplus_i H^1(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^1(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})]} = 0, \\ \mathrm{Gr}_2^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q}) &= E_2^{0,2} = \mathrm{Ker}\left[d_1^{0,2}: \bigoplus_i H^2(V_i, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^2(V_i \cap V_j, \mathbb{Q})\right]. \end{aligned}$$

В частности, $W_1 = W_0$. С другой стороны, $\mathrm{Gr}_0^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ является чистой структурой Ходжа типа $(0, 0)$ [12, п. 2.3.2]. Поскольку трехмерные многообразия V_i рациональные, пространства $H^2(V_i, \mathbb{Q})$ и $\mathrm{Gr}_2^W H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ – чистые структуры Ходжа типа $(1, 1)$. Поэтому $H^2(X_\delta, \mathbb{Q})$ – смешанная структура Ходжа типа $(0, 0) + (1, 1)$. Лемма доказана.

4.6. ЛЕММА. *Имеем $H^3(X, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$, $H^5(X, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $n \in \{3, 5\}$. Спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q})$ вырождается и дает точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [14, теорема (15.11), предложение (15.12), следствие (15.15), теорема (15.16)]

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) &\rightarrow \mathrm{Ker}[H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n\pi_*\mathbb{Q})] \\ &\xrightarrow{\alpha_n} H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку $H^2(C, R^{n-2}\pi_*\mathbb{Q}) = 0$ в силу (4.12), имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Ker}[H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^n\pi_*\mathbb{Q})] \simeq H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q}). \quad (4.18)$$

Двойственность Пуанкаре на слоях гладкого морфизма $\pi': X' \rightarrow C'$ определяет изоморфизм локальных систем $R^4\pi'_*\mathbb{Q} \simeq R^2\pi'_*\mathbb{Q}$. По теореме о локально

инвариантных циклах существует сюръективный морфизм пучков $R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q} \rightarrow j_*R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}$ с ядром, сконцентрированным на Δ (см. [14, предложение (15.12)], [15, комментарий к п. (3.7)]). В частности,

$$\begin{aligned} H^1(C, R^{n-1}\pi_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^1(C, j_*R^{n-1}\pi'_*\mathbb{Q}), \\ H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Лемма из п. 4.5 и формула (4.18) дают равенство $H^5(X, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q})$. Поэтому из (4.18), (4.19) следует, что $H^3(X, \mathbb{Q}) = H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$. Лемма доказана.

4.7. ЛЕММА. *Для $s \in C'$ имеется такой алгебраический класс $\omega_s \in H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})$, что алгебраическое соответствие ω_s^{-2} дает алгебраический изоморфизм $H^4(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s, \mathbb{Q})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что спаривание

$$\Phi: H^1(Y_s, \mathbb{Q}) \times H^1(Y_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \mapsto x \smile y} H^2(Y_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

кососимметрическое и невырожденное. Напомним, что матрица Φ относительно базиса Витта $e_1, e_2, e_3, e_{-2}, e_{-3}, e_{-1}$ пространства $H^1(Y_s, \mathbb{Q})$ равна $\begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [30, гл. VIII, § 13, п⁰ 3]. Фиксируем точку $p \in Y_s$. Тогда

$$e_i \smile e_j = \begin{cases} \text{cl}_{Y_s}(p) & \text{для } i = -j = 1, 2, 3, \\ -\text{cl}_{Y_s}(p) & \text{для } i = -j = -1, -2, -3, \\ 0 & \text{для } i \neq -j. \end{cases} \quad (4.20)$$

Можно отождествить алгебру Ли $\text{sp}(\Phi)$ с алгеброй Ли матриц вида $a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -S^t A S \end{pmatrix}$, где A, B, C — (3×3) -матрицы и B, C — матрицы, симметричные относительно второй диагонали [30, гл. VIII, § 13, п⁰ 3]. Легко показать с помощью прямых вычислений, что 1-мерное пространство $[H^1(Y_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s, \mathbb{Q})]^{\text{Sp}(\Phi)}$ порождается классом Пуанкаре

$$\wp(H^1(Y_s, \mathbb{Q})) = -e_1 \otimes e_{-1} - e_2 \otimes e_{-2} - e_3 \otimes e_{-3} + e_{-3} \otimes e_3 + e_{-2} \otimes e_2 + e_{-1} \otimes e_1. \quad (4.21)$$

Поскольку $\wp(H^1(Y_s, \mathbb{Q}))$ — цикл Ходжа [10, п. 1.4], он алгебраический по теореме Лефшеца о дивизорах.

Рассмотрим алгебраический класс

$$\begin{aligned} \omega_s &= \wp(H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q})) + \wp(H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q})) + \wp(H^1(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q})) \\ &= \sum_{k=1}^3 -e_1^{(k)} \otimes e_{-1}^{(k)} - e_2^{(k)} \otimes e_{-2}^{(k)} - e_3^{(k)} \otimes e_{-3}^{(k)} + e_{-3}^{(k)} \otimes e_3^{(k)} \\ &\quad + e_{-2}^{(k)} \otimes e_2^{(k)} + e_{-1}^{(k)} \otimes e_1^{(k)}, \end{aligned}$$

где $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, e_3^{(k)}, e_{-3}^{(k)}, e_{-2}^{(k)}, e_{-1}^{(k)}$ — базис Витта k -й копии $H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q})$ пространства $H^1(Y_s, \mathbb{Q})$ в разложении Кюннета

$$H^1(X_s, \mathbb{Q}) = H^1(Y_s \times Y_s \times Y_s, \mathbb{Q}) = H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \oplus H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \oplus H^1(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}).$$

Хорошо известно, что алгебраическое соответствие $\wp(H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q}))$ на $Y_s^{(k)} \times Y_s^{(k)}$ определяет изоморфизм

$$H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{[\wp(H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q}))]_*} H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q}),$$

где

$$[\wp(H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q}))]_*(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_{2s*}^{(k)}([\alpha \otimes \text{cl}_{Y_s^{(k)}}(Y_s^{(k)})] \smile \wp(H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q})))$$

для $\alpha \in H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q})$, и $\text{pr}_{2s}^{(k)}: Y_s^{(k)} \times Y_s^{(k)} \rightarrow Y_s^{(k)}$ – каноническая проекция [10, лемма 1.5]. С другой стороны, из (4.20), (4.21) следует, что

$$\begin{aligned} [\wp(H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q}))]_*(e_j^{(k)}) &= \text{pr}_{2s*}^{(k)}([e_j^{(k)} \otimes \text{cl}_{Y_s^{(k)}}(Y_s^{(k)})] \smile [-e_1^{(k)} \otimes e_{-1}^{(k)} - e_2^{(k)} \otimes e_{-2}^{(k)} \\ &\quad - e_3^{(k)} \otimes e_{-3}^{(k)} + e_{-3}^{(k)} \otimes e_3^{(k)} + e_{-2}^{(k)} \otimes e_2^{(k)} + e_{-1}^{(k)} \otimes e_1^{(k)}]) \\ &= \text{pr}_{2s*}^{(k)}([\text{cl}_{Y_s^{(k)}}(p) \otimes e_j^{(k)}]) = e_j^{(k)}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$[\wp(H^1(Y_s^{(k)}, \mathbb{Q}))]^{-2} = 6 \text{cl}_{Y_s^{(k)}}(p) \otimes \text{cl}_{Y_s^{(k)}}(p). \quad (4.23)$$

Алгебраическое соответствие

$$\begin{aligned} \omega_s^{-2} &= 6 \text{cl}_{Y_s^{(1)}}(p) \otimes \text{cl}_{Y_s^{(1)}}(p) + 6 \text{cl}_{Y_s^{(2)}}(p) \otimes \text{cl}_{Y_s^{(2)}}(p) + 6 \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p) \otimes \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p) \\ &\quad + 2(e_1^{(1)} \smile e_1^{(2)}) \otimes (e_{-1}^{(1)} \smile e_{-1}^{(2)}) + \dots - 2(e_1^{(1)} \smile e_{-3}^{(2)}) \otimes (e_{-1}^{(1)} \smile e_3^{(2)}) + \dots \\ &\quad \dots + 2(e_{-1}^{(2)} \smile e_{-1}^{(3)}) \otimes (e_1^{(2)} \smile e_1^{(3)}) \in H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}). \quad (4.25)$$

Действительно, в силу (4.20) $\mathbb{Q}$ -пространство

$$H^2(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot (e_i^{(1)} \smile e_{-i}^{(1)}) \otimes (e_j^{(2)} \smile e_{-j}^{(2)})$$

аннулируется (относительно $\smile$ -умножения) всеми слагаемыми в разложении (4.24) элемента ω_s^{-2} , кроме $6 \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p) \otimes \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)$; с другой стороны, обозначая через $\text{pr}_{2s}: X_s \times X_s \rightarrow X_s$ каноническую проекцию, мы видим, что $\text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p) \otimes \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)$ определяет изоморфизм (4.25), потому что

$$\begin{aligned} &\text{pr}_{2s*}([H^2(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes \text{cl}_{X_s}(X_s)] \smile \omega_s^{-2}) \\ &= \text{pr}_{2s*}(\mathbb{Q} \cdot [\text{cl}_{Y_s^{(1)}}(p) \smile \text{cl}_{Y_s^{(2)}}(p) \smile \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)] \otimes \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)) \\ &= \text{pr}_{2s*}(\mathbb{Q} \cdot \text{cl}_{X_s}(p \times p \times p) \otimes \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p)) = \mathbb{Q} \cdot \text{cl}_{Y_s^{(3)}}(p) = H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Наконец, пусть

$$\begin{aligned} [\omega_s^{-2}]_3^\wedge &= [\wp(H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}))]^{-2} + 2\wp(H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q})) \\ &\quad + [\wp(H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}))]^{-2} \end{aligned}$$

– сумма всех слагаемых в ω_s^{-2} , не содержащих множителей типа $e_j^{(3)}$. Поскольку $e_j^{(3)}$ аннулирует пространство $H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q})$ и соответствия $[\wp(H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}))]^{-2}$, $[\wp(H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}))]^{-2}$ аннулируют $H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q})$ в силу формулы (4.23), соответствие ω_s^{-2} действует на пространстве $H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q})$ как $2\wp(H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}))$ и определяет алгебраический изоморфизм

$$H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}),$$

потому что в силу формулы (4.22) имеем

$$\begin{aligned} & \mathrm{pr}_{2s*}([H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}) \otimes \mathrm{cl}_{X_s}(X_s)] \smile \omega_s^{-2}) \\ &= \mathrm{pr}_{2s*}([H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}) \otimes \mathrm{cl}_{X_s}(X_s)] \\ &\quad \smile 2\wp(H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}))) \\ &= \mathrm{pr}_{2s*}([H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^2(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}) \\ &\quad \otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(1)}}(Y_s^{(1)}) \otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(2)}}(Y_s^{(2)}) \otimes \mathrm{cl}_{Y_s^{(3)}}(Y_s^{(3)})] \\ &\quad \smile 2\wp(H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q})) \smile \wp(H^0(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}))) \\ &= H^1(Y_s^{(1)}, \mathbb{Q}) \otimes H^1(Y_s^{(2)}, \mathbb{Q}) \otimes H^0(Y_s^{(3)}, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Остается применить формулу Кюннета. Лемма доказана.

4.8. Пусть $\eta \in C$ – общая схемная точка кривой C . Можно считать, используя в случае необходимости подходящее разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$ и разрешение особенностей схемы $X \times_C \tilde{C}$ над $\tilde{C}$ с полустабильными слоями, что алгебраический класс $\omega_{\tilde{\eta}}^{-2}$ на общем геометрическом слое $X_{\tilde{\eta}} \times_{\kappa(\tilde{\eta})} X_{\tilde{\eta}}$ определен над полем $\kappa(\eta)$ рациональных функций кривой C и представлен алгебраическим циклом $D'_{2\eta}$ коразмерности 2 на $X_{\eta} \times_{\kappa(\eta)} X_{\eta}$ (с коэффициентами в поле $\mathbb{Q}$). Замыкания его компонент в топологии Зарисского схемы $X' \times_{C'} X'$ дают алгебраический цикл D'_2 на $X' \times_{C'} X'$. В силу теории редукции алгебраических циклов [31] и леммы из п. 4.7 алгебраический класс $\mathcal{D}'_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{cl}_{X' \times_{C'} X'}(D'_2)$ определяет изоморфизм локальных систем

$$R^4 \pi'_* \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^2 \pi'_* \mathbb{Q}. \quad (4.26)$$

Пусть

$$\begin{array}{ccc} X \times_C X & \xrightarrow{p_1} & X \\ \downarrow p_2 & \searrow \tau & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

– каноническая диаграмма расслоенного произведения, $\iota: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение, $\sigma: W \rightarrow X \times_C X$ – разрешение особенностей многообразия $X \times_C X$. Можно считать, что σ индуцирует изоморфизм над C' . В частности, W можно рассматривать как гладкую проективную компактификацию

многообразия $X' \times_{C'} X'$. Более того, можно считать, что $(\tau\sigma)^{-1}(\Delta)$ – объединение гладких дивизоров (некоторых положительных кратностей) с нормальными пересечениями.

Обозначим через $\overline{D'_2}$ алгебраический цикл коразмерности 2 на W , полученный из D'_2 замыканием компонент цикла D'_2 в топологии Зарисского многообразия W . Пусть $\Lambda_{2,2} \in H^0(C, R^4(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ – образ алгебраического класса $D_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}_W(\overline{D'_2})$ относительно канонического сюръективного краевого морфизма $H^4(W, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^4(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ рациональных структур Ходжа [14, следствие (15.14)]. Очевидно, что

$$\Lambda_{2,2}|_{C'} = D'_2. \quad (4.27)$$

Используя (4.27), совместимость $\smile$ -произведений со спектральной последовательностью Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q(\tau\sigma)_*\mathbb{Q})$ (см. [32, гл. 4, § 6, п. 6.5] и [10, алгоритм доказательства теоремы 2.3]), можно продолжить (4.26) до композиции

$$R^4\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_1\sigma)^*} R^4(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim D_2} R^8(\tau\sigma)_*\mathbb{Q} \xrightarrow{(p_2\sigma)_*} R^2\pi_*\mathbb{Q},$$

которая, в свою очередь, дает точную последовательность

$$H^1(C, R^4\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \smile D_2]} H^1(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (4.28)$$

В силу (4.28) и леммы из п. 4.6 имеется изоморфизм

$$H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\sim]{x \mapsto (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \smile D_2]} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Формула проекции дает

$$\begin{aligned} (p_2\sigma)_*[(p_1\sigma)^*x \smile D_2] &= [\text{pr}_2 \iota\sigma]_*([\text{pr}_1 \iota\sigma]^*x \smile D_2) \\ &= \text{pr}_{2*}(\iota\sigma)_*((\iota\sigma)^* \text{pr}_1^*x \smile D_2) = \text{pr}_{2*}(\text{pr}_1^*x \smile (\iota\sigma)_*D_2). \end{aligned}$$

Поэтому алгебраический класс $(\iota\sigma)_*D_2 \in H^6(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^5(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Q}).$$

Хорошо известно, что класс Пуанкаре $\wp(H^1(X, \mathbb{Q}))$ является циклом Ходжа (другими словами, он принадлежит $H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X \times X, \mathbb{C})$) [10, п. 1.4]. Поэтому он алгебраический по теореме Лефшеца о дивизорах. Согласно [10, лемма 1.5] этот цикл определяет алгебраический изоморфизм $H^7(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Q})$. Наконец, алгебраический класс $\text{cl}_X(X) \otimes \text{cl}_X(X)$ определяет алгебраический изоморфизм $H^8(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathbb{Q})$. Поскольку характеристический полином любого эндоморфизма пространства $H^i(X, \mathbb{Q})$ имеет рациональные коэффициенты, в силу [7, теорема 2.9] остается построить алгебраический изоморфизм $H^6(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q})$.

4.9. ЛЕММА. *Пространство $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ имеет каноническую рациональную структуру Ходжа типа $(1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях из п. 4.2 имеем

$$\pi' = \tau' \times_{C'} \tau' \times_{C'} \tau': Y' \times_{C'} Y' \times_{C'} Y' \rightarrow C'.$$

Формула Кюннета для когомологий слоев морфизма π' дает разложение

$$H^0(C', R^2 \pi'_* \mathbb{Q}) \simeq H^0(C', R^2 \tau'_* \mathbb{Q})^{\oplus 3} \oplus H^0(C', R^1 \tau'_* \mathbb{Q} \otimes R^1 \tau'_* \mathbb{Q})^{\oplus 3},$$

и мы утверждаем, что все слагаемые являются $\mathbb{Q}$ -структурами Ходжа типа $(1, 1)$.

Действительно, $R^2 \tau'_* \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}(-1)$, где $\mathbb{Q}(1)$ – постоянная рациональная структура Ходжа–Тэйта типа $(-1, -1)$. Обозначим через $\mu': J' \rightarrow C'$ якобиеву схему, ассоциированную с гладким семейством $\tau': Y' \rightarrow C'$ кривых рода 3. Сечение φ' морфизма τ' определяет вложение C' -схем

$$Y' \xrightarrow{y'_s \mapsto \mathcal{O}_{Y'}(y'_s - \varphi'(s))} J',$$

которое, в свою очередь, определяет изоморфизм локальных систем и вариаций $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$R^1 \mu'_* \mathbb{Q} \simeq R^1 \tau'_* \mathbb{Q}. \quad (4.29)$$

Поляризация абелевой схемы $\mu': J' \rightarrow C'$ определяет изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^0(C', R^1 \mu'_* \mathbb{Q} \otimes R^1 \mu'_* \mathbb{Q}) \simeq [\text{End}(R^1 \mu'_* \mathbb{Q})] \otimes \mathbb{Q}(-1). \quad (4.30)$$

Из хорошо известных фактов о взаимоотношениях вырожденных слоев семейства кривых $\tau: Y \rightarrow C$ и специальных слоев минимальной модели Нерона $\mathcal{J} \rightarrow C$ абелевой схемы $\mu': J' \rightarrow C'$ легко видеть, что для любой точки $\delta \in \Delta$ связная компонента единицы слоя $\mathcal{J}_\delta$ является трехмерным тором [33, § 2], [34]. Поэтому абелева схема $\mu': J' \rightarrow C'$ относительной размерности 3 имеет тривиальный след и существует канонический изоморфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [12, следствие 4.4.13]

$$\text{End}_{C'}(J') \otimes \mathbb{Q} \simeq \text{End}(R^1 \mu'_* \mathbb{Q}),$$

где $\text{End}_{C'}(J') \otimes \mathbb{Q}$ имеет тип Ходжа $(0, 0)$ [12, п. 4.4.6]. Поэтому из соотношений (4.29), (4.30) следует, что $H^0(C', R^1 \tau'_* \mathbb{Q} \otimes R^1 \tau'_* \mathbb{Q})$ имеет тип Ходжа $(1, 1)$.

Поскольку $H^0(C', R^2 \pi'_* \mathbb{Q})$ является рациональной структурой Ходжа типа $(1, 1)$, то в силу (1.5), (1.6) для $n = 2$ достаточно проверить, что смешанная структура Ходжа $V_0^{(\delta)}/N_0^{(\delta)} V_0^{(\delta)}$ имеет тип $(1, 0) + (0, 1) + (1, 1)$. Это сделано в [4, п. 1.7]. Лемма доказана.

4.10. Можно считать, что $\text{rank NS}(X) \geq 3$. Используя лемму из п. 4.9 и [4, алгоритмы из пп. 2.1–2.3], легко построить алгебраический изоморфизм $H^6(X, \mathbb{Q}) \simeq H^2(X, \mathbb{Q})$. В частности, стандартная гипотеза $B(X)$ верна для $X = [Y \times_C Y \times_C Y]^{\text{smooth}}$.

Сечение $\varphi: C \rightarrow Y$ морфизма $\tau: Y \rightarrow C$ определяет рациональное доминантное отображение

$$X \xrightarrow{X'_s \ni y'_{1s} \times y'_{2s} \times y'_{3s} \mapsto \mathcal{O}_{Y'}(y'_{1s} + y'_{2s} + y'_{3s} - 3\varphi(s)) \in \text{Pic}^0(Y'_s)} \text{Pic}^0(Y/C),$$

поэтому стандартная гипотеза Гротендика верна для любой гладкой проективной компактификации полуабелевой схемы $\mathrm{Pic}^0(Y/C)$ над C в силу леммы из п. 1.1.

Хорошо известно, что любое неразложимое трехмерное абелево многообразие с главной поляризацией над алгебраически замкнутым полем является якобианом гладкой проективной кривой рода 3 [35, п. 4.1, следствие 2]. В частности, любое простое трехмерное абелево многообразие над алгебраически замкнутым полем изогенно якобиану гладкой кривой. Поэтому в силу леммы из п. 1.1 гипотеза $B(X)$ верна для любой гладкой проективной компактификации минимальной модели Нерона абелевой схемы относительной размерности 3 над аффинной кривой с абсолютно простым общим схемным слоем и редукциями мультипликативного типа в бесконечно удаленных точках. Теорема 0.2 доказана.

4.11. СЛЕДСТВИЕ. *Стандартная гипотеза $B(X)$ верна для любой гладкой проективной модели X расслоенного куба $Y \times_C Y \times_C Y$ эллиптической поверхности $\tau: Y \rightarrow C$ над гладкой проективной кривой C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы из п. 1.1 и теоремы о полустабильных редукциях можно считать, что морфизм τ имеет сечение, хотя бы один геометрический слой вырожден, все вырожденные слои являются объединениями гладких рациональных кривых кратности 1 с нормальными пересечениями. Остается использовать алгоритмы из пп. 4.1–4.8, 4.10 и равенство $\mu' = \tau'$ при доказательстве аналога леммы из п. 4.9 в рассматриваемом случае.

Список литературы

1. A. Grothendieck, “Standard conjectures on algebraic cycles”, *Algebraic geometry*, Internat. Colloq. (Bombay, 1968), Oxford Univ. Press, London, 1969, 193–199.
2. D. I. Lieberman, “Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds”, *Amer. J. Math.*, **90**:2 (1968), 366–374.
3. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:5 (2011), 177–194; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds. II”, *Izv. Math.*, **75**:5 (2011), 1047–1062.
4. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе для комплексных 4-мерных эллиптических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:5 (2012), 119–142; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture for complex 4-dimensional elliptic varieties”, *Izv. Math.*, **76**:5 (2012), 967–990.
5. Вик. С. Куликов, “Вырождения K3-поверхностей и поверхностей Энриквеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042; англ. пер.: Vic. S. Kulikov, “Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:5 (1977), 957–989.
6. S. L. Kleiman, “The standard conjectures”, *Motives*, Part I (Seattle, WA, USA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 3–20.
7. S. L. Kleiman, “Algebraic cycles and the Weil conjectures”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 359–386.
8. С. Г. Танкеев, “Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224; англ. пер.: S. G. Tankeev,

- “Monoidal transformations and conjectures on algebraic cycles”, *Izv. Math.*, **71**:3 (2007), 629–655.
9. G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
 10. С. Г. Танкеев, “О стандартной гипотезе типа Лефшеца для комплексных проективных трехмерных многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 175–196; англ. пер.: S. G. Tankeev, “On the standard conjecture of Lefschetz type for complex projective threefolds”, *Izv. Math.*, **74**:1 (2010), 175–196.
 11. W. Schmid, “Variation of Hodge structure: The singularities of the period mapping”, *Invent. Math.*, **22**:3–4 (1973), 211–319.
 12. П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, *Математика. Сб. пер.*, **17**:5 (1973), 3–56; пер. с франц.: P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
 13. Ю. Г. Зархин, “Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; англ. пер.: Yu. G. Zarkhin, “Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.
 14. S. Zucker, “Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric”, *Ann. of Math. (2)*, **109**:3 (1979), 415–476.
 15. С. Н. Clemens, “Degeneration of Kähler manifolds”, *Duke Math. J.*, **44**:2 (1977), 215–290.
 16. P. Deligne, “Théorie de Hodge. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44**:1 (1974), 5–77.
 17. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Алгебра*, гл. 10: Гомологическая алгебра, Наука, М., 1987; пер. с франц.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, Algèbre. Ch. 10: Algèbre homologique, Masson, Paris, 1980.
 18. Ph. Griffiths, W. Schmid, “Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results”, *Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli* (Bombay, 1973), Oxford Univ. Press, Bombay, 1975, 31–127.
 19. М.-Н. Saito, S. Zucker, “Classification of non-rigid families of K3 surfaces and a finiteness theorem of Arakelov type”, *Math. Ann.*, **289**:1 (1991), 1–31.
 20. С. А. М. Peters, “Rigidity for variations of Hodge structure and Arakelov-type finiteness theorems”, *Compositio Math.*, **75**:1 (1990), 113–126.
 21. В. В. Gordon, “A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties”, Appendix B, *A survey of the Hodge conjecture*, CRM Monogr. Ser., **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 297–356.
 22. Yu. G. Zarhin, “Hodge groups of K3 surfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 193–220.
 23. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
 24. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
 25. Н. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II”, *Ann. of Math. (2)*, **79**:2 (1964), 109–326.
 26. Дж. Харрис, *Алгебраическая геометрия*, Изд-во МЦНМО, М., 2006; пер. с англ.: J. Harris, *Algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **133**, Springer-Verlag, New York, 1992.
 27. Ю. И. Манин, “Лекции о K -функторе в алгебраической геометрии”, *УМН*, **24**:5 (1969), 3–86; англ. пер.: Yu. I. Manin, “Lectures on K -functor in algebraic geometry”, *Russian Math. Surveys*, **24**:5 (1969), 1–89.

28. J. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, CRM Monogr. Ser., **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
29. Вик. С. Куликов, П. Ф. Курчанов, “Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа”, *Алгебраическая геометрия – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **36**, ВИНТИ, М., 1989, 5–231; англ. пер.: Vic. S. Kulikov, P. F. Kurchanov, “Complex algebraic varieties: Periods of integrals and Hodge structures”, *Algebraic geometry III*, Encyclopaedia Math. Sci., **36**, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–217.
30. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Гл. 1–3: *Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1976; Гл. 4–6: *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972; Гл. 7–8: *Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1978; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I: *Algèbres de Lie*, Chap. II: *Algèbres de Lie libres*, Chap. III: *Groupes de Lie*, Hermann & Cie, Paris, 1971–1972; Chap. IV: *Groupes de Coxeter et systèmes de Tits*, Chap. V: *Groupes engendrés par des réflexions*, Chap. VI: *Systèmes de racines*, Hermann, Paris, 1968; Chap. VII: *Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers*, Chap. VIII: *Algèbres de Lie semi-simples déployées*, Hermann, Paris, 1975.
31. G. Shimura, “Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field”, *Amer. J. Math.*, **77**:1 (1955), 134–176.
32. Г. Э. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1967.
33. П. Делинь, Д. Мамфорд, “Неприводимость многообразия кривых заданного рода”, *Математика. Сб. пер.*, **16**:3 (1972), 13–53; пер. с англ.: P. Deligne, D. Mumford, “The irreducibility of the space of curves of given genus”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **36**:1 (1969), 75–109.
34. Д. Мамфорд, “Аналитическая конструкция кривых с вырожденной редукцией над полными локальными кольцами”, *УМН*, **27**:6 (1972), 181–221; пер. с англ.: D. Mumford, “An analytic construction of degenerating curves over complete local rings”, *Compositio Math.*, **24**:2 (1972), 129–174.
35. В. В. Шокуров, “Алгебраические кривые и их якобианы”, *Алгебраическая геометрия – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **36**, ВИНТИ, М., 1989, 233–273; англ. пер.: V. V. Shokurov, “Algebraic curves and their Jacobians”, *Algebraic Geometry III*, Encyclopaedia Math. Sci., **36**, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 219–261.

СЕРГЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ ТАНКЕЕВ
(SERGEY G. TANKEEV)

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: tankeev@vlsu.ru

Поступило в редакцию
07.08.2012