Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ониани, О сходимости кратных рядов Хаара, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 1, 99–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8048>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 06:05:14

УДК 517.52

Г. Г. Ониани

О сходимости кратных рядов Хаара

Доказано, что для индивидуальных суммируемых функций поведения прямоугольных и сферических частичных сумм кратного ряда Фурье–Хаара могут отличаться почти в каждой точке, хотя ранее было известно, что эти суммы ведут себя одинаково с точки зрения сходимости почти всюду в шкале интегральных классов: в обоих случаях наилучшим классом является $L(\ln^+ L)^{n-1}$. Более того, найдены оптимальные условия, при дополнительном выполнении которых из сходимости по прямоугольникам кратного ряда Фурье–Хаара (общего ряда Хаара, лакунарного численного ряда) вытекает его сходимость по сферам, и установлена оптимальность этих условий.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: кратный ряд Хаара, сходимость по прямоугольникам, сходимость по сферам, лакунарный ряд.

DOI: 10.4213/im8048

§ 1. Введение

Введем некоторые определения и обозначения. Для заданного n -кратного численного ряда $\sigma = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}}$ через $S_{\mathbf{m}}(\sigma)$, $S_r(\sigma)$, $G_{\mathbf{m}}(\sigma)$ и $G_r(\sigma)$, где $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ и $r \geq \sqrt{n}$, обозначим прямоугольную частичную сумму, сферическую частичную сумму, прямоугольный общий член и сферический общий член ряда σ соответственно, т. е.

$$S_{\mathbf{m}}(\sigma) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} a_{\mathbf{k}}, \quad S_r(\sigma) = \sum_{k_1^2 + \cdots + k_n^2 \leq r^2} a_{\mathbf{k}},$$

$$G_{\mathbf{m}}(\sigma) = a_{\mathbf{m}}, \quad G_r(\sigma) = \sum_{k_1^2 + \cdots + k_n^2 = r^2} a_{\mathbf{k}},$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ и сумма по пустому множеству индексов считается равной нулю. Подобные обозначения будут использованы для функциональных рядов $\sigma = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} f_{\mathbf{k}}$. Если $\sigma = \sigma(f)$ является рядом Фурье–Хаара функции $f \in L(\mathbb{I}^n)$, то в введенных выше обозначениях будем записывать f вместо σ . Здесь и далее $\mathbb{I}^n$ обозначает единичный куб $[0, 1]^n$.

Пусть $1 \leq l \leq n-1$; l -мерным сечением последовательности $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}$ назовем любую последовательность, получаемую из $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}$ фиксированием некоторых $n-l$ среди n координат индекса $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$. Под n -мерным сечением $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}$ будем подразумевать саму последовательность $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}$.

Под *сходимостью* (*сильной сходимостью*) последовательности $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ мы понимаем сходимость a_k к пределу при $\min\{k_1, \dots, k_n\} \rightarrow \infty$ ($\max\{k_1, \dots, k_n\} \rightarrow \infty$).

Нетрудно проверить, что для последовательности $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к a ;
- 2) $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ сходится к a и каждое $(n-1)$ -мерное сечение $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к a ;
- 3) каждое сечение $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ сходится к a .

Пусть $1 \leq l \leq n$; l -мерным сечением ряда $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k$ будем называть любой ряд, составленный из l -мерного сечения последовательности $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$.

Говорят, что ряд $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k$ *регулярно сходится по прямоугольникам*, если для каждого $1 \leq l \leq n$ его любое l -мерное сечение сходится по прямоугольникам (здесь под сходимостью по прямоугольникам одномерного ряда подразумевается обычная сходимость). Заметим, что такой тип сходимости рассматривался Ф. Морицем [1], [2].

Ясно, что если ряд $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k$ регулярно сходится по прямоугольникам, то его общий член $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к нулю.

Пусть $S \subset \mathbb{N}^n$ и $\lambda > 1$. Множество S называется λ -лакунарным, если при любых $k, k' \in S$, $k \neq k'$, имеем $\max(k_i, k'_i) / \min(k_i, k'_i) > \lambda$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, $k_i \neq k'_i$. Нетрудно видеть, что множество $S \subset \mathbb{N}^n$ λ -лакунарно тогда и только тогда, когда найдутся λ -лакунарные одномерные множества $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{N}$ такие, что $S \subset S_1 \times \dots \times S_n$. Множество $S \subset \mathbb{N}^n$ называется *лакунарным*, если оно λ -лакунарно при некотором $\lambda > 1$.

Численная последовательность $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ или ряд $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k$ называется *лакунарным* (λ -лакунарным), если лакунарно (λ -лакунарно) множество $S = \{k \in \mathbb{N}^n : a_k \neq 0\}$.

Пусть $\Phi = (\varphi_k)$ и $\Psi = (\psi_s)$ – системы функций на множествах X и Y соответственно. Их произведение $\Phi \times \Psi$ определяется как система функций $\varphi_k \times \psi_s$, где $\varphi_k \times \psi_s(x, y) = \varphi_k(x) \psi_s(y)$, $(x, y) \in X \times Y$. Через Φ^n обозначим n -ю степень системы Φ , т. е. произведение n копий системы Φ .

Пусть $\Phi = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^n}$ – ортонормированная система ограниченных функций на $\mathbb{I}^n$. Для функции $f \in L(\mathbb{I}^n)$ через $c_k(f, \Phi)$ и $\sigma(f, \Phi)$ соответственно обозначим коэффициенты Фурье и ряд Фурье от f относительно системы Φ .

Будем говорить, что Φ является системой прямоугольной сходимости (регулярной прямоугольной сходимости) в классе $\Omega \subset L(\mathbb{I}^n)$, если для каждой функции $f \in \Omega$ ряд $\sigma(f, \Phi)$ сходится по прямоугольникам (регулярно сходится по прямоугольникам) к $f(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{I}^n$.

Пусть $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непостоянная выпуклая функция. Класс Орлича $M(L)(\mathbb{I}^n)$ определяется как класс всех измеримых функций f на $\mathbb{I}^n$ таких, что $\int_{\mathbb{I}^n} M(|f(x)|) dx < \infty$.

Далее в неравенствах через $c(p_1, \dots, p_k)$, $c_1(p_1, \dots, p_k), \dots$ обозначаются постоянные, зависящие только от параметров $p_1, \dots, p_k$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ через $\|x\|$ обозначим норму, $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

Точку из $\mathbb{R}^n$ условимся называть двоично-иррациональной, если все ее координаты являются двоично-иррациональными числами.

Известно, что $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$ при каждом $n \geq 2$ является наиболее широким интегральным классом, в котором обеспечена сходимость почти всюду рядов Фурье–Хаара как для прямоугольных частичных сумм (см. [3], [4]), так и для сферических частичных сумм (см. [5]–[8]). Заметим, что кубические частичные суммы ряда Фурье–Хаара каждой суммируемой функции f (т. е. $S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x})$ при $m_1 = m_2 = \dots = m_n$) сходятся почти всюду к $f(\mathbf{x})$ (см., например, [4]).

Таким образом, прямоугольные и сферические частичные суммы кратных рядов Фурье–Хаара ведут себя одинаково с точки зрения сходимости почти всюду в шкале интегральных классов. Далее будет доказано (см. теорему 4), что для индивидуальных суммируемых функций поведение этих двух видов сумм кратных рядов Фурье–Хаара могут отличаться почти в каждой точке; более того, будут найдены условия, при дополнительном выполнении которых из сходимости по прямоугольникам кратного ряда Фурье–Хаара (общего ряда Хаара, лакунарного численного ряда) вытекает сходимость по сферам, и установлена оптимальность этих условий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}}$ – численный лакунарный ряд. Если σ сходится по прямоугольникам и $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к нулю (в частности, если σ регулярно сходится по прямоугольникам), то σ сферически сходится к $\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(\sigma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1 условие сильной сходимости общего члена нельзя не учитывать. Это вытекает из следующего простого примера: $a_{k_1,1} = 1$ и $a_{k_1,2} = -1$ при k_1 вида 2^m ($m \in \mathbb{N}$) и $a_{k_1,k_2} = 0$ в остальных случаях.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda > 1$ и σ – численный λ -лакунарный ряд. Тогда

$$|S_r(\sigma)| \leq c(n, \lambda) \max_{\sqrt{r^2 - n} < \|\mathbf{m}\| \leq r} |S_{\mathbf{m}}(\sigma)|, \quad r \geq \sqrt{n},$$

и, следовательно, $\sup_{r \geq \sqrt{n}} |S_r(\sigma)| \leq c(n, \lambda) \sup_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} |S_{\mathbf{m}}(\sigma)|$.

Значения системы Хаара в двоично-иррациональной точке составляют $(3/2)$ -лакунарную последовательность. Принимая во внимание этот легко проверяемый факт, из теорем 1, 2 получаем следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть σ является n -кратным рядом Хаара. Если σ сходится по прямоугольникам в двоично-иррациональной точке $\mathbf{x}$ и прямоугольный общий член $(G_{\mathbf{m}}(\sigma)(\mathbf{x}))_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n}$ сильно сходится к нулю (в частности, если σ регулярно сходится по прямоугольникам в двоично-иррациональной точке $\mathbf{x}$), то σ сферически сходится в $\mathbf{x}$ к $\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(\sigma)(\mathbf{x})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть σ является n -кратным рядом Хаара. Тогда для каждой двоично-иррациональной точки $\mathbf{x}$

$$|S_r(\sigma)(\mathbf{x})| \leq c(n) \max_{\sqrt{r^2 - n} < \|\mathbf{m}\| \leq r} |S_{\mathbf{m}}(\sigma)(\mathbf{x})|, \quad r \geq \sqrt{n},$$

и, следовательно, $\sup_{r \geq \sqrt{n}} |S_r(\sigma)(\mathbf{x})| \leq c(n) \sup_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n} |S_{\mathbf{m}}(\sigma)(\mathbf{x})|$.

Следующие два результата дают нам условия, обеспечивающие сходимость по прямоугольникам подрядов общих рядов Фурье и, в частности, рядов Фурье–Хаара.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций на $\mathbb{I}$. Если $1 \leq l \leq n$ и Φ^l – система прямоугольной сходимости в классе Орлича $M(L)(\mathbb{I}^l)$, то для каждой функции $f \in M(L)(\mathbb{I}^n)$ любой l -мерный подряд ряда $\sigma(f, \Phi^n)$ регулярно сходится по прямоугольникам почти всюду. В частности, Φ^l – система регулярной прямоугольной сходимости в $M(L)(\mathbb{I}^l)$.

Учитывая, что кратная система Хаара является системой прямоугольной сходимости в $L(\ln^+ L)^{l-1}(\mathbb{I}^l)$, из теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $1 \leq l \leq n-1$ и $f \in L(\ln^+ L)^l(\mathbb{I}^n)$, то каждый $(l+1)$ -мерный подряд ряда Фурье–Хаара от f регулярно сходится по прямоугольникам почти всюду. В частности, система Хаара является системой регулярной прямоугольной сходимости в $L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$.

Из следствий 1, 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $f \in L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$, $E \subset \mathbb{I}^n$ и $\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in E$, то $\lim_{r \rightarrow \infty} S_r(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ для почти каждого $\mathbf{x} \in E$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие $f \in L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$ следствия 4 слабее, чем требование $f \in L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$. Это вытекает из того, что для каждой функции $f \in L(\mathbb{I}^n)$ существует равноизмеримая с f функция $g \in L(\mathbb{I}^n)$, для которой $\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ для почти любого $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ (см. далее лемму Е и лемму 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствие 4 в двумерном случае было установлено Г. Кемхадзе [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На основании следствия 4 почти всюду сходимость по сферам кратных рядов Фурье–Хаара в классе $L(\ln^+ L)^{n-1}$ (установленная Г. Кемхадзе [5]) прямо выводится из соответствующего результата для сходимости по прямоугольникам.

Следующая теорема, в частности, показывает, что для ряда Фурье–Хаара связь между сходимостями по прямоугольникам и по сферам, установленная в следствии 4, может нарушиться, причем для любого множества E с положительной мерой в интегральных классах, более широких, чем $L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $n \geq 3$ и любой функции $f \in L \setminus L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$ существует равноизмеримая с f функция g на $\mathbb{I}^n$ такая, что $\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ и $\limsup_{r \rightarrow \infty} |G_r(g)(\mathbf{x})| = \infty$ для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Следствия 1, 4 и теорема 4 были анонсированы в [9], а следствие 3 – в [10].

§ 2. Доказательство теорем 1, 2

Введем следующие обозначения:

$\mathbb{B}_r^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}\| \leq r\}$, $\mathbb{S}_r^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}\| = r\}$, $\mathbb{I}_r^n = [0, r]^n$; $\overline{p, q}$ (где $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$) – множество $\{p, \dots, q\}$; $\mathbb{M}_n$ – семейство всех непустых собственных подмножеств множества $\overline{1, n}$; $\#M$ – количество элементов множества M ; $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$ – семейство всех n -мерных интервалов; $\pi(n, M)$ (где $M \in \mathbb{M}_n$) – биекция, $\pi(n, M): \overline{1, n} \rightarrow \overline{1, n}$, со свойствами:

- 1) $\pi(n, M)$ возрастает на $\overline{1, \#M}$ и отображает его на M ;
- 2) $\pi(n, M)$ возрастает на $\overline{\#M + 1, n}$ и отображает его на $\overline{1, n} \setminus M$.

Кроме того, $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}, M)$ (где $M \in \mathbb{M}_n$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\#M}$, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n-\#M}$) – точка $\mathbf{x}$ из $\mathbb{R}^n$ такая, что $x_{\pi(n, M)(i)} = t_i$, если $i \in \overline{1, \#M}$, и $x_{\pi(n, M)(i)} = \tau_{i-\#M}$, если $i \in \overline{\#M + 1, n}$.

Положим, что $A \times^M B$ (где $M \in \mathbb{M}_n$, $A \subset \mathbb{R}^{\#M}$, $B \subset \mathbb{R}^{n-\#M}$) – произведение множеств A и B , соответствующее множеству индексов M , т. е. множество $\{(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}, M): \mathbf{t} \in A, \boldsymbol{\tau} \in B\}$; $\boldsymbol{\Delta}(n, M)$ (где $M \in \mathbb{M}_n$) – семейство всех “ M -мерных” кубических интервалов Δ вида $[0, p]^{\#M} \times^M \{(q_1, \dots, q_{n-\#M})\}$, где $p, q_1, \dots, q_{n-\#M} \in \mathbb{N}$.

Далее, $I_\Delta, J_\Delta, R_\Delta$ (где $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}(n, M)$) – интервалы $[0, p]^{\#M}$, $\prod_{i=1}^{n-\#M} [0, q_i]$ и $I_\Delta \times^M J_\Delta$ соответственно. Здесь p и q_i – числа из определения $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}(n, M)$. Обозначим через $l(I)$ длину ребер кубического интервала I ; через $l_*(I)$ – наименьшую среди длин ребер n -мерного интервала I и через $l^*(I)$ – наибольшую среди длин ребер n -мерного интервала I .

ЛЕММА 1. Пусть $S \subset \mathbb{N}^n$ – λ -лакунарное множество. Тогда для каждого $r \geq \sqrt{n}$ множество $S \cap \mathbb{B}_r^n$ можно представить следующим образом:

$$S \cap \mathbb{B}_r^n = (S \cap \mathbb{I}_{r/\sqrt{n}}^n) \cup \bigcup_{i=1}^{\nu} (S \cap \Delta_i),$$

где $\nu \leq c(n, \lambda)$, каждое Δ_i принадлежит $\boldsymbol{\Delta}(n, M)$ при некотором $M \in \mathbb{M}_n$, Δ_i попарно не пересекаются, $\Delta_i \subset \mathbb{B}_r^n$, вершина Δ_i с наибольшими координатами лежит на $\mathbb{S}_r^n$ и $l(I_{\Delta_i}) < r/\sqrt{n}$, $l_*(J_{\Delta_i}) \geq l(I_{\Delta_i})$, $l^*(J_{\Delta_i}) \geq r/\sqrt{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . Справедливость леммы легко проверяется при $n = 2$. Рассмотрим индуктивный переход от $n - 1$ к n .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma(k, t) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_k = t\}, \quad k \in \overline{1, n}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ Q(k) &= \left\{ q \in \left(\frac{r}{\sqrt{n}}, r \right] \cap \mathbb{N}: S \cap \Gamma(k, q) \neq \emptyset \right\}, \quad k \in \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Из λ -лакунарности множества S легко вытекает оценка

$$\#Q(k) \leq \log_{\lambda} \sqrt{n}, \quad k \in \overline{1, n}.$$

Ясно, что

$$S \cap \mathbb{B}_r^n = (S \cap \mathbb{I}_{r/\sqrt{n}}^n) \cup \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{q \in Q(k)} S \cap \mathbb{B}_r^n \cap \Gamma(k, q).$$

Рассмотрим проекции множеств $S \cap \Gamma(k, q)$ и $\mathbb{B}_r^n \cap \Gamma(k, q)$, $k \in \overline{1, n}$, $q \in Q(k)$, на пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, которые берутся по переменным $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$. Проекцию множества $S \cap \Gamma(k, q)$ обозначим через $S(k, q)$. Очевидно, $S(k, q)$ является λ -лакунарным подмножеством $\mathbb{N}^{n-1}$. Заметим, что проекция $\mathbb{B}_r^n \cap \Gamma(k, q)$ является шаром $\mathbb{B}_{\sqrt{r^2 - q^2}}^{n-1}$. Теперь применим допущение индукции для множества $S(k, q)$ и шара $\mathbb{B}_{\sqrt{r^2 - q^2}}^{n-1}$. Тогда получим представление множества $S(k, q) \cap \mathbb{B}_{\sqrt{r^2 - q^2}}^{n-1}$ с помощью семейства маломерных кубов $\Omega(k, q) \subset \bigcup_{M \in \mathbb{M}_{n-1}} \Delta_{n-1, M}$, т. е.

$$S(k, q) \cap \mathbb{B}_{\sqrt{r^2 - q^2}}^{n-1} = \left(S(k, q) \cap \mathbb{I}_{\sqrt{r^2 - q^2}/\sqrt{n-1}}^{n-1} \right) \cup \bigcup_{\Delta \in \Omega(k, q)} (S(k, q) \cap \Delta),$$

где семейство $\Omega(k, q)$ имеет свойства, данные в формулировке леммы.

Для любых $k \in \overline{1, n}$ и $q \in Q(k)$ рассмотрим семейство $\tilde{\Omega}(k, q)$ множеств $\{q\} \times \{k\} \Delta$, где $\Delta \in \Omega(k, q)$ либо $\Delta = \mathbb{I}_{\sqrt{r^2 - q^2}/\sqrt{n-1}}^{n-1}$. Имеем

$$S \cap \mathbb{B}_r^n = (S \cap \mathbb{I}_{r/\sqrt{n}}^n) \cup \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{q \in Q(k)} \bigcup_{\Delta \in \tilde{\Omega}(k, q)} (S \cap \Delta).$$

Легко видеть, что семейство $\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{q \in Q(k)} \tilde{\Omega}(k, q)$ имеет все свойства искомого представления множества $S \cap \mathbb{B}_r^n$, кроме непересекаемости маломерных кубов, входящих в него. Выделение попарно непересекающихся кубов происходит на основании следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $k \in \overline{2, n}$, $q \in Q(k)$ и $\Delta \in \tilde{\Omega}(k, q)$. Тогда возможны два случая:

- а) Δ входит в полосу $[0, r/\sqrt{n}]^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+1}$;
- б) Δ находится вне (в частности, выше) полосы $[0, r/\sqrt{n}]^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая определение семейства $\tilde{\Omega}(k, q)$, заключаем, что Δ представляет собой произведение $E_1 \times \dots \times E_n$, где E_i является либо интервалом вида $[0, p]$, где, в свою очередь, $p < \sqrt{r^2 - q^2}/\sqrt{n-1} < r/\sqrt{n}$, либо E_i является одноэлементным множеством $\{q\}$, где $q \in \mathbb{N}$. Отсюда непосредственно вытекает нужное нам заключение.

Теперь проведем разрежение семейств $\tilde{\Omega}(k, q)$ следующим образом: $\tilde{\Omega}(1, q)$, $q \in Q(1)$, оставим без изменения, а при $2 \leq k \leq n$ из семейства $\tilde{\Omega}(k, q)$, $q \in Q(k)$, оставим те кубы Δ , которые входят в $[0, r/\sqrt{n}]^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k+1}$. Полученное семейство обозначим через $\tilde{\tilde{\Omega}}(k, q)$. Нетрудно проверить, что их объединение $\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{q \in Q(k)} \tilde{\tilde{\Omega}}(k, q)$ дает нам представление множества $S \cap \mathbb{B}_r^n$ со всеми нужными свойствами. Лемма доказана.

Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ обозначим $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

ЛЕММА 2. Пусть $\sigma = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\mathbf{k}}$ – численный ряд, $M \in \mathbb{M}_n$, $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^{\#M}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^{n-\#M}$ и $\Delta = \prod_{i=1}^{\#M} [0, p_i] \times {}^M\{\mathbf{q}\}$. Тогда

$$\sum_{\mathbf{k} \in \Delta} a_{\mathbf{k}} = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^{n-\#M}} (-1)^{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1} S_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}-\boldsymbol{\varepsilon}, M)}(\sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I = \prod_{i=1}^{\#M} [0, p_i]$. Для $\mathbf{k} \in \Delta$ через $\mathbf{i}(\mathbf{k}, M)$ обозначим точку из I , для которой $\mathbf{k} = (\mathbf{i}(\mathbf{k}, M), \mathbf{q}, M)$. Применим формулу вычисления общего члена для ряда

$$\sigma_{\mathbf{i}, M} = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{N}^{n-\#M}} a_{(\mathbf{i}, \mathbf{l}, M)}$$

при $\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{k}, M)$, где $\mathbf{k} \in \Delta$. Получим

$$a_{\mathbf{k}} = a_{(\mathbf{i}(\mathbf{k}, M), \mathbf{q}, M)} = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^{n-\#M}} (-1)^{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1} S_{\mathbf{q}-\boldsymbol{\varepsilon}}(\sigma_{\mathbf{i}(\mathbf{k}, M), M}).$$

Отсюда, в свою очередь, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in \Delta} a_{\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{(\mathbf{i}, \mathbf{q}, M)} = \sum_{\mathbf{i} \in I} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^{n-\#M}} (-1)^{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1} S_{\mathbf{q}-\boldsymbol{\varepsilon}}(\sigma_{\mathbf{i}, M}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^{n-\#M}} (-1)^{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1} \sum_{\mathbf{i} \in I} S_{\mathbf{q}-\boldsymbol{\varepsilon}}(\sigma_{\mathbf{i}, M}) = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^{n-\#M}} (-1)^{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1} S_{(\mathbf{p}, \mathbf{q}-\boldsymbol{\varepsilon}, M)}(\sigma). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Через α обозначим предел прямоугольных сумм ряда σ , т.е. $\alpha = \lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(\sigma)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|S_{\mathbf{m}}(\sigma) - \alpha| < \varepsilon, \quad \min(m_1, \dots, m_n) \geq N_1; \quad (1)$$

$N_2 \in \mathbb{N}$ подберем так, чтобы

$$|a_{\mathbf{k}}| < \frac{\varepsilon}{N_1^{n-1}}, \quad \max(k_1, \dots, k_n) \geq N_2. \quad (2)$$

Теперь подберем R так, чтобы

$$\frac{R}{\sqrt{n}} \geq \max(N_1, N_2) + 1. \quad (3)$$

Заметим, что в силу лакунарности ряда σ множество $S = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n : a_{\mathbf{k}} \neq 0\}$ λ -лакунарно при некотором $\lambda > 1$.

Рассмотрим число $r \geq R$. Применим лемму 1 для параметров S , λ и r . Следовательно, найдем маломерные кубы $\Delta_1, \dots, \Delta_\nu$ со свойствами из леммы 1.

В силу (1) и (3) получаем

$$\left| \sum_{\mathbf{k} \in S \cap \mathbb{I}_{r/\sqrt{n}}^n} a_{\mathbf{k}} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Оценим сумму $\sum_{\mathbf{k} \in S \cap \Delta_i} a_{\mathbf{k}}$, которую обозначим через δ_i . Возможны два варианта: 1) $l(I_{\Delta_i}) \geq N_1$; 2) $l(I_{\Delta_i}) < N_1$.

В случае 1), учитывая (1), (3), свойства множеств Δ_i и лемму 2, имеем $|\delta_i| < 2^n \varepsilon$, а в случае 2) в силу (2), (3) и свойств множеств Δ_i имеем $|\delta_i| < \varepsilon$.

На основании установленных оценок с учетом свойств множеств Δ_i заключаем, что

$$\left| \sum_{\mathbf{k} \in S \cap \mathbb{B}_r^n} a_{\mathbf{k}} - \alpha \right| < (1 + 2^n c(n, \lambda)) \varepsilon, \quad r \geq R.$$

Этим теорема доказана.

Теорема 2 является прямым следствием лемм 1, 2.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Прямоугольную частичную сумму ряда Фурье $\sigma(f, \Phi)$ обозначим через $S_{\mathbf{m}}(f, \Phi)$. Всюду далее χ_A будет обозначать характеристическую функцию множества A .

ЛЕММА 3. Пусть $\Phi = (\varphi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}}$ – полная ортонормированная система ограниченных функций на $\mathbb{I}$. Если Φ^n – система прямоугольной сходимости в классе Орлича $M(L)(\mathbb{I}^n)$, то Φ^l – система прямоугольной сходимости в $M(L)(\mathbb{I}^l)$ для любого l , $1 \leq l \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\chi_{\mathbb{I}}, \Phi)(x) = 1 \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{I}. \quad (4)$$

Поскольку Φ – полная ортонормированная система, то найдется последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{k_i}(\chi_{\mathbb{I}}, \Phi)(x) = 1 \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{I}. \quad (5)$$

Очевидно,

$$S_{\mathbf{m}}(\chi_{\mathbb{I}^n}, \Phi)(\mathbf{x}) = S_{m_1}(\chi_{\mathbb{I}}, \Phi)(x_1) \cdots S_{m_n}(\chi_{\mathbb{I}}, \Phi)(x_n). \quad (6)$$

Согласно $\chi_{\mathbb{I}^n} \in M(L)(\mathbb{I}^n)$ имеем

$$\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(\chi_{\mathbb{I}^n}, \Phi^n)(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{для п.в. } \mathbf{x} \in \mathbb{I}^n. \quad (7)$$

Теперь, полагая $\mathbf{m} = (k_i, \dots, k_i, k)$ в (7) и устремляя к бесконечности i и k , в силу соотношений (5) и (6) получаем (4).

Пусть $1 \leq l \leq n$ и $f \in M(L)(\mathbb{I}^l)$. Положим $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_l)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$. Очевидно, $g \in M(L)(\mathbb{I}^n)$, в силу чего имеем

$$\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(g, \Phi^n)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \text{для п.в. } \mathbf{x} \in \mathbb{I}^n. \quad (8)$$

Поскольку $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_l) \chi_i(x_{l+1}) \cdots \chi_i(x_n)$, то

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{m}}(g, \Phi^n)(x_1, \dots, x_n) &= S_{(m_1, \dots, m_l)}(f, \Phi^l)(x_1, \dots, x_l) \\ &\quad \times S_{m_{l+1}}(\chi_i, \Phi)(x_{l+1}) \cdots S_{m_n}(\chi_i, \Phi)(x_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Из (4), (8) и (9) заключаем, что $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{k}}(f, \Phi^l)(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$ для п.в. $\mathbf{y} \in \mathbb{I}^l$.

ЛЕММА 4. Пусть $\Psi = (\psi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p}$ и $\Lambda = (\lambda_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^q}$ – системы ограниченных функций на $\mathbb{I}^p$ и $\mathbb{I}^q$ соответственно; $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непостоянная выпуклая функция и $f \in M(L)(\mathbb{I}^{p+q})$. Тогда для фиксированных $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^q$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{I}^q$ функциональный ряд по переменной $\mathbf{y}$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p} c_{\mathbf{k}, \mathbf{s}}(f, \Psi \times \Lambda) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})$$

является рядом Фурье относительно Ψ от некоторой функции из класса $M(L)(\mathbb{I}^p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что функция

$$g(\alpha) = \int_{[0,1]^q} |f(\alpha, \beta)| d\beta, \quad \alpha \in \mathbb{I}^p,$$

принадлежит $M(L)(\mathbb{I}^p)$. Действительно, в силу интегрального неравенства Йенсена (см., например, [11, гл. I, § 10]) и теоремы Фубини имеем

$$\int_{[0,1]^p} M(g(\alpha)) d\alpha \leq \int_{[0,1]^p} \left[\int_{[0,1]^q} M(|f(\alpha, \beta)|) d\beta \right] d\alpha < \infty.$$

Преобразуем выражение $c_{\mathbf{k}, \mathbf{s}}(f, \Psi \times \Lambda) \lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})$:

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}, \mathbf{s}}(f, \Psi \times \Lambda) \lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) &= \lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) \int_{[0,1]^{p+q}} f(\alpha, \beta) \psi_{\mathbf{k}}(\alpha) \lambda_{\mathbf{s}}(\beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{[0,1]^p} \left[\lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}) \int_{[0,1]^q} f(\alpha, \beta) \lambda_{\mathbf{s}}(\beta) d\beta \right] \psi_{\mathbf{k}}(\alpha) d\alpha = c_{\mathbf{k}}(h_{\mathbf{s}, \mathbf{z}}, \Psi), \end{aligned}$$

где $h_{\mathbf{s}, \mathbf{z}}$ – функция от $\alpha \in \mathbb{I}^p$, определяемая выражением, записанным в квадратных скобках. Учитывая оценку $|h_{\mathbf{s}, \mathbf{z}}(\alpha)| \leq |\lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})| \|\lambda_{\mathbf{s}}\|_{L^\infty} g(\alpha)$, заключаем, что $h_{\mathbf{s}, \mathbf{z}} \in M(L)(\mathbb{I}^p)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Мы должны доказать сходимость почти всюду любого p -мерного ($1 \leq p \leq l$) сечения ряда $\sigma(f, \Phi^n)$. Случай $p = n$ тривиален, поэтому будем рассматривать случай $p < n$. Для простоты допустим, что сечение взято по переменным $x_1, \dots, x_p$, т.е. имеет вид

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p} c_{\mathbf{k}, \mathbf{s}}(f, \Psi \times \Lambda) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \lambda_{\mathbf{s}}(\mathbf{z}), \quad (10)$$

где $\Psi = (\psi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^p} = \Phi^p$, $\Lambda = (\lambda_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^{n-p}} = \Phi^{n-p}$, $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_p)$ и $\mathbf{z} = (x_{p+1}, \dots, x_n)$.

В силу леммы 4 для фиксированных $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^{n-p}$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{I}^{n-p}$ ряд (10) по переменной $\mathbf{y}$ является рядом Фурье некоторой функции $h_{\mathbf{s}, \mathbf{z}}$ из $M(L)(\mathbb{I}^p)$ и, следовательно, по лемме 3 сходится к $h_{\mathbf{s}, \mathbf{z}}(\mathbf{y})$ для почти всех $\mathbf{y} \in \mathbb{I}^p$. Очевидно, из этого вытекает нужное нам заключение. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Введем следующие обозначения: $\mathbb{Z}_0$ – множество всех неотрицательных целых чисел; $\mathbb{R}_d^n$ – множество всех двоично-иррациональных точек пространства $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{I}_d^n$ – множество всех двоично-иррациональных точек единичного куба $\mathbb{I}^n$; $H(\mathbf{x})$ (где $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$) – спектр системы Хаара в точке $\mathbf{x}$, т. е. множество $\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n: h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \neq 0\}$; $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ – точка $(1, \dots, 1)$; $2^{\mathbf{k}}$ (где $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$) – точка $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_n})$; Δ_k^i (где $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$) – двоичный интервал $[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}]$; $\tilde{\Delta}_k^i$ (где $k \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$) – открытый двоичный интервал $(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$; $\Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}$ (где $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n$) – n -мерный двоичный интервал $\Delta_{k_1}^{i_1} \times \dots \times \Delta_{k_n}^{i_n}$; $\mathbf{I}_d = \mathbf{I}_{n,d}$ – семейство всех n -мерных двоичных интервалов; $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{I}_d(\mathbf{x})$) – семейство всех $I \in \mathbf{I}$ ($I \in \mathbf{I}_d$), содержащих точку $\mathbf{x}$; $\mathbf{k}(I)$ – ранг двоичного интервала I , т. е. такой $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, при котором $I \in \{\Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}}: \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^n\}$; $\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ (где $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$) – двоичный интервал ранга $\mathbf{k}$, содержащий $\mathbf{x}$; $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ (где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow x_i \leq y_i$ для каждого $i \in \overline{1, n}$; $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ (где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow x_i < y_i$ для каждого $i \in \overline{1, n}$; $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ (где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$) – интервал $[x_1, y_1] \times \dots \times [x_n, y_n]$; $\mathbf{k}(\mathbf{m})$ (где $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$) – точка $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_0^n$, для которой $2^{\mathbf{k}-1} < \mathbf{m} \leq 2^{\mathbf{k}}$; $M_R(f)$ (где $f \in L(\mathbb{R}^n)$) – интегральное среднее f на множестве R , т. е. число $\frac{1}{|R|} \int_R f(x) dx$.

Напомним определение системы Хаара $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$: $h_1(x) = 1$ ($x \in \mathbb{I}$), и если $m = 2^k + i$ (где $k \in \mathbb{Z}_0$, $i \in \overline{1, 2^k}$), то $h_m(x) = 2^{k/2}$ при $x \in \tilde{\Delta}_{k+1}^{2i-1}$, $h_m(x) = -2^{k/2}$ при $x \in \tilde{\Delta}_{k+1}^{2i}$ и $h_m(x) = 0$ при $x \notin \Delta_k^i$. Во внутренних точках разрыва h_m определена как среднее правого и левого пределов, а в концах $\mathbb{I}$ – как пределы изнутри интервала.

Фундаментальным свойством системы Хаара является то, что прямоугольные частичные суммы рядов Фурье–Хаара выражаются через интегральные средние по двоичным интервалам. Точнее, справедливы следующие два предложения (см., например, [12, гл. 1, § 6] или [13, гл. 3, § 1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$ и $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_0^n$. Тогда

$$S_{2^{\mathbf{k}}}(f)(\mathbf{x}) = M_{\Delta_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}(f).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$ и $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$. Тогда:

а) если $H(\mathbf{x}) \cap [2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1} + \mathbf{1}, \mathbf{m}] \neq \emptyset$, то

$$S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = S_{2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})}}(f)(\mathbf{x}) = M_{\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m})}(\mathbf{x})}(f);$$

б) если $H(\mathbf{x}) \cap [2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1} + \mathbf{1}, \mathbf{m}] = \emptyset$, то

$$S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = S_{2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1}}(f)(\mathbf{x}) = M_{\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m})-1}(\mathbf{x})}(f).$$

Следующие леммы A–F были доказаны в [8].

ЛЕММА A. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$, $\mathbf{m} \in H(\mathbf{x})$ и $\mathbf{k}(\mathbf{m}) \geq 1$. Тогда

$$G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} (-1)^{\|\gamma\|_1} S_{2^{\mathbf{k}(\mathbf{m})} - \gamma}(f)(\mathbf{x}),$$

где $\Gamma_n = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \gamma_i \in \{0, 1\}, i \in \overline{1, n}\}$.

Для $I \in \mathbf{I}_d$ и $\gamma \in \Gamma_n$ через $I(\gamma)$ обозначим двоичный интервал ранга $\mathbf{k}(I) - \gamma$, который содержит I .

Для $f \in L(\mathbb{R}^n)$ и $I \in \mathbf{I}_d$ положим

$$G_I(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} (-1)^{\|\gamma\|_1} M_{I(\gamma)}(f).$$

Ряд $G_I(f)$ можно рассматривать как общий член процесса дифференцирования интеграла от f по семейству двоичных интервалов $\mathbf{I}_d$.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$, $I \in \mathbf{I}_d(\mathbf{x})$ и $\mathbf{k}(I) \geq 1$. Тогда согласно предложению 2 найдется единственное $\mathbf{m} \in H(\mathbf{x})$ такое, что $2^{\mathbf{k}(I)-1} < \mathbf{m} \leq 2^{\mathbf{k}(I)}$. Обозначим это $\mathbf{m}$ через $\mathbf{m}(I, \mathbf{x})$.

ЛЕММА B. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^n)$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$. Тогда:

a) если $\mathbf{m} \in H(\mathbf{x})$ и $\mathbf{k}(\mathbf{m}) \geq 1$, то $G_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = G_{\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m})}(\mathbf{x})}(f)$;

b) если $I \in \mathbf{I}_d(\mathbf{x})$ и $\mathbf{k}(I) \geq 1$, то $G_I(f) = G_{\mathbf{m}(I, \mathbf{x})}(f)(\mathbf{x})$.

ЛЕММА C. Имеем $\#(H(\mathbf{x}) \cap \mathbb{S}_r^n) \leq c_1(n)$ для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$ и $r > 0$.

Параметр неизотропности $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ определим как число

$$\pi(\mathbf{m}) = \min \left\{ \frac{m_{p(i+1)}}{m_{p(i)}} : i \in \overline{1, n-1} \right\},$$

где p – перестановка $\overline{1, n}$ такая, что $m_{p(1)} \leq \dots \leq m_{p(n)}$.

Обозначим также

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha) &= \Pi_n(\alpha) = \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : \pi(\mathbf{m}) \geq \alpha\}, \quad \alpha \geq 1, \\ \Pi(\alpha, k) &= \{\mathbf{m} \in \Pi(\alpha) : \mathbf{m} \geq k \cdot \mathbf{1}\}, \quad \alpha \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \widetilde{\mathbb{I}}_d^n &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n : x_i \neq x_j, i \neq j\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА D. Для любого $\mathbf{x} \in \widetilde{\mathbb{I}}_d^n$ существуют $k_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}$ и $\alpha_{\mathbf{x}} \geq 1$ такие, что если $H(\mathbf{x}) \cap \mathbb{S}_r^n \cap \Pi(\alpha_{\mathbf{x}}, k_{\mathbf{x}}) \neq \emptyset$ для некоторого $r > 0$, то

$$\#(H(\mathbf{x}) \cap \mathbb{S}_r^n \cap \Pi(\alpha_{\mathbf{x}})) = 1.$$

Параметр $\pi(I)$ для интервала $I = I_1 \times \dots \times I_n \in \mathbf{I}$ определяем следующим образом: $\pi(I) = \min\{|I_{p(i+1)}|/|I_{p(i)}| : i \in \overline{1, n-1}\}$, где p – перестановка множества $\overline{1, n}$ такая, что $|I_{p(1)}| \leq \dots \leq |I_{p(n)}|$.

Для $\alpha \geq 1$ положим $\mathbf{I}(\alpha) = \{I \in \mathbf{I}: \pi(I) < \alpha\}$, $\mathbf{I}[\alpha] = \mathbf{I} \setminus \mathbf{I}(\alpha)$, $\mathbf{I}_d(\alpha) = \mathbf{I}_d \cap \mathbf{I}(\alpha)$, $\mathbf{I}_d[\alpha] = \mathbf{I}_d \setminus \mathbf{I}_d(\alpha)$.

Семейство B множеств с положительной конечной мерой такое, что $\bigcup_{R \in B} R = \mathbb{R}^n$, назовем *базисом*. Для точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ через $B(\mathbf{x})$ обозначим семейство множеств из B , которые содержат $\mathbf{x}$. Максимальный оператор M_B , соответствующий B , определяется следующим образом:

$$M_B(f)(\mathbf{x}) = \sup_{R \in B(\mathbf{x})} |M_R(f)|, \quad f \in L(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Максимальный оператор, контролирующий общий член $G_I(f)$, соответствующий базису $B \subset \mathbf{I}_d$, обозначим через G_B , т. е.

$$G_B(f)(\mathbf{x}) = \sup_{I \in B(\mathbf{x})} |G_I(f)|, \quad f \in L(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_d^n.$$

Ясно, что $G_{\mathbf{I}_d(\alpha)}(f)(\mathbf{x}) \leq 2^n M_{\mathbf{I}_d(2\alpha)}(f)(\mathbf{x})$.

ЛЕММА Е. Пусть $f \in L(\mathbb{I}^n)$. Тогда для любых множеств $A, E \subset \mathbb{I}^n$, $|A| \leq |E|$, существует функция $g \in L(\mathbb{I}^n)$ такая, что g равноизмерима с $f\chi_A$, $\text{supp } g \subset E$ и $M_{\mathbf{I}}(|g|)(\mathbf{x}) < \infty$ для п. в. $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$.

Для чисел $0 < \eta < \delta$ введем следующие срезанные максимальные операторы:

$$G_{\mathbf{I}_d}^{[\eta, \delta)}(f)(\mathbf{x}) = \sup\{G_I(f): I \in \mathbf{I}_d(\mathbf{x}), l^*(I) < \delta, l_*(I) \geq \eta\},$$

$$M_{\mathbf{I}_d}^{[\eta]}(f)(\mathbf{x}) = \sup\{M_I(f): I \in \mathbf{I}_d(\mathbf{x}), l_*(I) \geq \eta\}.$$

ЛЕММА F. Для любой функции $f \in L \setminus L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$, принимающей натуральные значения, и любого $\nu \in \mathbb{N}$ существуют множество $A \subset \text{supp } f$, число $\eta > 0$ и функция g на $\mathbb{R}^n$ со свойствами:

- 1) $A \subset \{f \geq 2^\nu\}$ и $f\chi_A$ — ограниченная функция;
- 2) g равноизмерима с $f\chi_A$ и $\text{supp } g \subset \mathbb{I}^n$;
- 3) существует множество $F \subset \mathbb{I}^n$ такое, что $G_{\mathbf{I}_d}^{[\eta, 1/2^\nu)}(g)(\mathbf{x}) > \nu$ для любого $\mathbf{x} \in F$ и $|F \cap Q| \geq c_2(n)|Q|$ для любого двоичного куба $Q \subset \mathbb{I}^n$ с ребрами длины $1/2^\nu$;
- 4) $M_{\mathbf{I}_d}^{[1/2^\nu]}(g)(\mathbf{x}) \leq 1/2^\nu$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$.

ЛЕММА 5. Для любой функции $f \in L \setminus L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n)$, принимающей натуральные значения, и любых $\nu \in \mathbb{N}$ и $R > 1$ существуют множество $A \subset \text{supp } f$, функция g на $\mathbb{I}^n$ и число $R^* > R$ со свойствами:

- 1) $A \subset \{f \geq 2^\nu\}$ и $f\chi_A$ — ограниченная функция;
- 2) g равноизмерима с $f\chi_A$;
- 3) существует множество $E \subset \mathbb{I}_d^n$ такое, что $\max_{R < r < R^*} |G_r(g)(\mathbf{x})| > \nu$ для любого $\mathbf{x} \in E$ и $|E \cap Q| \geq c_3(n)|Q|$ для любого двоичного куба $Q \subset \mathbb{I}^n$ с ребрами длины $1/2^\nu$;
- 4) $\max_{r \leq R} |G_r(g)(\mathbf{x})| < 1/2^\nu$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $p \in \mathbb{N}$. Число $N \in \mathbb{N}$ подберем так, чтобы

$$|\{\mathbf{x} \in \widetilde{\Gamma}_d^n : \alpha_{\mathbf{x}} \leq N, k_{\mathbf{x}} \leq N\}| > 1 - \frac{c_2(n)}{2^{np+2}}, \quad (11)$$

где $\alpha_{\mathbf{x}}$ и $k_{\mathbf{x}}$ – числа из леммы D. Множество в левой части (11) будем обозначать через P .

Ниже нам понадобится следующая оценка (см., например, [14, гл. II, § 3]):

$$|\{M_{\mathbf{I}(\alpha)}(h) > \lambda\}| \leq c(n, \alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h|}{\lambda} \left(1 + \ln^+ \frac{|h|}{\lambda}\right)^{n-2}, \quad (12)$$

где $\alpha \geq 1$, $h \in L(\mathbb{R}^n)$ и $\lambda > 0$.

Множество $A_0 \subset \text{supp } f$ подберем так, чтобы

$$f\chi_{A_0} \notin L(\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{I}^n), \quad (13)$$

$$c(n, 2N) \int_{\mathbb{R}^n} 2^n c_1(n) f\chi_{A_0} (1 + \ln^+(2^n c_1(n) f\chi_{A_0}))^{n-2} < \frac{c_2(n)}{2^{np+2}}. \quad (14)$$

Допустим, что $q \in \mathbb{N}$, $q \geq p$ и $2^q > 2N$. Учитывая (13) и используя лемму F для функции $f\chi_{A_0}$ и числа q , мы находим множества $A \subset A_0$, $F \subset \mathbb{I}^n$, функцию g и число $\eta > 0$ со свойствами из леммы F.

Из (12) и (14) имеем

$$\left| \left\{ M_{\mathbf{I}(2N)}(g) > \frac{1}{2^n c_1(n)} \right\} \right| < \frac{c_2(n)}{2^{np+2}}. \quad (15)$$

Обозначим $T = \mathbb{I}^n \cap \{M_{\mathbf{I}(2N)}(g) \leq \frac{1}{2^n c_1(n)}\}$ и $E = F \cap P \cap T$.

Пусть $\mathbf{x} \in E$. Имеем

$$G_{\mathbf{I}(2N)}(g)(\mathbf{x}) \leq 2^n M_{\mathbf{I}(2N)}(g)(\mathbf{x}) < \frac{1}{c_1(n)}. \quad (16)$$

Поскольку $G_{\mathbf{I}_d}^{[\eta, 1/2^q]}(g)(\mathbf{x}) > q$, то из (16) мы находим $I \in \mathbf{I}[2N]$, $\ell^*(I) < 1/2^q$, $\ell_*(I) > \eta$, такое, что

$$G_I(g) > q.$$

Из условий $\pi(I) > 2N$ и $\ell^*(I) < 1/2^q$ легко вытекает, что

$$\pi(\mathbf{m}(I, \mathbf{x})) > N \geq \alpha_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{m}(I, \mathbf{x}) > 2^{q-1} \cdot \mathbf{1} > N \cdot \mathbf{1} \geq k_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{1}.$$

Следовательно, по лемме D имеем

$$\#(H(\mathbf{x}) \cap \mathbb{S}_r^n \cap \Pi(\alpha)) = 0,$$

где $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mathbf{m}(I, \mathbf{x})_i)^2}$. С другой стороны, в силу леммы C множество $H(\mathbf{x}) \cap \mathbb{S}_r^n$, кроме точки $\mathbf{m}(I, \mathbf{x})$, содержит не больше, чем $c_1(n)$ точек $\mathbf{m}(1), \dots, \mathbf{m}(j)$, при этом $\pi(\mathbf{m}(i)) \leq N$, $i \in \overline{1, j}$. Ясно, что $\pi(\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m}(i))}(\mathbf{x})) \leq 2N$, $i \in \overline{1, j}$, откуда по лемме B получаем

$$G_{\mathbf{m}(i)}(g)(\mathbf{x}) = G_{\Delta_{\mathbf{k}(\mathbf{m}(i))}(\mathbf{x})}(g) \leq 2^n M_{\mathbf{I}(2N)}(g)(\mathbf{x}) < \frac{1}{c_1(n)}.$$

Таким образом,

$$|G_r(g)(\mathbf{x})| \geq |G_{\mathbf{m}(I, \mathbf{x})}(g)(\mathbf{x})| - \sum_{i=1}^j |G_{\mathbf{m}(i)}(g)(\mathbf{x})| > q - 1. \quad (17)$$

Здесь же заметим, что

$$r \geq 2^q, \quad r \leq \frac{2n}{\eta}. \quad (18)$$

Из (11), (15) и свойств множества F получаем

$$|E \cap Q| \geq \frac{c_2(n)}{2} |Q| \quad (19)$$

для каждого двоичного куба Q такого, что $\ell(Q) = 1/2^p$.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$. Имеем $M_{\mathbf{I}_d}^{[1/2^q]}(g)(\mathbf{x}) \leq 1/2^q$. Следовательно, $|G_I(g)| \leq 2^n/2^q$ для каждого $I \in \mathbf{I}_d(\mathbf{x})$, $\ell_*(I) \geq 1/2^q$. Тогда в силу леммы В получаем

$$|G_{\mathbf{m}}(g)(\mathbf{x})| \leq \frac{2^n}{2^q}, \quad \text{если } \mathbf{m} \leq 2^q \cdot \mathbf{1}.$$

Теперь из леммы С имеем

$$|G_r(g)(\mathbf{x})| \leq c_1(n) \frac{2^n}{2^q}, \quad \text{если } r \leq 2^q. \quad (20)$$

Наконец заметим, что если p и q достаточно большие, то на основании соотношений (17)–(20) параметры g , E , A , $R = 2^q$ и $R^* = 2n/\eta$ удовлетворяют всем нужным условиям. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $n \geq 3$, функция $f \in L \setminus L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$ принимает натуральные значения, $\nu \geq 2$ и $R > 1$. Пусть $\Delta \subset \mathbb{I}$ – одномерный интервал со свойствами $|\Delta| = 1/\nu$ и $\Delta \subset [0, 1/2]$ или $\Delta \subset [1/2, 1]$, а $J = [0, 1]^{n-1} \times [1/2, 1]$, если $\Delta \subset [0, 1/2]$, и $J = [0, 1]^{n-1} \times [0, 1/2]$, если $\Delta \subset [1/2, 1]$. Тогда существуют множества $A \subset \text{supp } f$ и $E \subset J \cap \mathbb{I}_d^n$, функция g на $\mathbb{I}^n$ и число $R^* > R$ со свойствами:

- 1) $A \subset \{f \geq 2^\nu\}$ и $f\chi_A$ – ограниченная функция;
- 2) g равноизмерима с $f\chi_A$;
- 3) $\text{supp } g \subset [0, 1]^{n-1} \times \Delta$;
- 4) $|E \cap Q| \geq c_3(n)|Q|$ для любого двоичного куба $Q \subset J$ с ребрами длины $1/2^\nu$;
- 5) $\max_{R < r < R^*} |G_r(g)(\mathbf{x})| > \nu$ для любого $\mathbf{x} \in E$;
- 6) $\max_{r \leq R} |G_r(g)(\mathbf{x})| < 1/\nu$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_d^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что если $v_0 \in L(\mathbb{I}^{n-1})$ и

$$v(x_1, \dots, x_n) = v_0(x_1, \dots, x_{n-1})\chi_\Delta(x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n,$$

то для любых $\mathbf{x} \in J$ и $r \geq 1$

$$G_r(v)(x_1, \dots, x_n) = |\Delta| G_{\sqrt{r^2-1}}(v_0)(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (21)$$

Для доказательства (21) достаточно заметить, что $c_{\mathbf{m}}(v)h_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} \in J$ и $m_n > 1$, и $c_{\mathbf{m}}(v) = |\Delta|c_{(m_1, \dots, m_{n-1})}(v_0)$, если $m_n = 1$, где $c_{\mathbf{m}}(v)$ и $c_{(m_1, \dots, m_{n-1})}(v_0)$ обозначают коэффициенты Фурье относительно n -кратной и $(n-1)$ -кратной системы Хаара соответственно.

Рассмотрим сохраняющее меру и обратимое отображение $\omega: \mathbb{I}^{n-1} \rightarrow \mathbb{I}^n$ и положим $\tilde{f} = f \circ \omega$.

Применим лемму 5 для $\tilde{f}$, $\tilde{R} = \sqrt{R^2 + 1}$ и $\tilde{\nu} = [\nu/|\Delta|] + 1$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Тогда мы найдем множество $\tilde{A} \subset \text{supp } \tilde{f}$, функцию $\tilde{g}$ на $\mathbb{I}^{n-1}$, число $\tilde{R}^* > R$ и множество $\tilde{E} \subset \mathbb{I}^{n-1}$ со свойствами из леммы 5.

Параметры A , g , E и R^* подберем следующим образом:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1})\chi_{\Delta}(x_n), & \mathbf{x} \in \mathbb{I}^n, \\ A &= \omega(\tilde{A}), & R^* = \sqrt{(\tilde{R}^*)^2 - 1}, \\ E &= \begin{cases} \tilde{E} \times [0, 1/2], & \text{если } \Delta \subset [1/2, 1], \\ \tilde{E} \times [1/2, 1], & \text{если } \Delta \subset [0, 1/2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание (21), из свойств $\tilde{A}$, $\tilde{g}$, $\tilde{R}^*$ и $\tilde{E}$ легко заключаем справедливость леммы.

Следующая лемма является следствием теоремы Варда (см., например, [15, гл. 4, § 11]) и предложения 3.

ЛЕММА 7. Если $f \in L(\mathbb{I}^n)$, $E \subset \mathbb{I}_{\mathbf{d}}^n$ и для любого $\mathbf{x} \in E$ существует $\eta(\mathbf{x}) > 0$ такое, что $M_{\mathbf{I}}^{[\eta(\mathbf{x})]}(|f|)(\mathbf{x}) < \infty$, то $\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ для почти всех $\mathbf{x} \in E$.

Следующая лемма непосредственно вытекает из следствия 2.

ЛЕММА 8. Если $f \in L(\mathbb{I}^n)$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{I}_{\mathbf{d}}^n$, то

$$\sup_{r \geq \sqrt{n}} |G_r(f)(\mathbf{x})| \leq 2c(n)M_{\mathbf{I}_{\mathbf{d}}}(f)(\mathbf{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 проведем в несколько шагов.

Шаг I: функция f принимает натуральные значения.

При каждом $k \in \mathbb{N}$ применим лемму 6 для параметров $f\chi_{T_k}$, ν_k , R_k и Δ_k (о подборе которых см. далее). Соответствующие объекты (т.е. объекты, существования которых обусловлены леммой 6) обозначим через A_k , E_k , g_k и R_k^* . Мы предполагаем, что параметры выбраны так, чтобы

$$T_k \cap T_{k'} = \emptyset, \quad k \neq k', \quad (22)$$

$$f\chi_{T_k} \notin L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n), \quad (23)$$

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots, \quad \nu_k \geq 2^k, \quad (24)$$

$$\nu_k > 4c(n) \sum_{i=1}^{k-1} \|g_i\|_{L^\infty}, \quad (25)$$

$$\inf \Delta_{2k-1} \downarrow 0, \quad \sup \Delta_{2k} \uparrow 1, \quad (26)$$

$$\Delta_{2k-1} \subset [0, 1/2], \quad \Delta_{2k} \subset [1/2, 1], \quad (27)$$

$$\Delta_k \cap \Delta_{k'} = \emptyset, \quad k \neq k', \quad (28)$$

$$R_k^* < R_{k+1}. \quad (29)$$

Положим $v = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ и $E = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k$.

Сначала заметим, что:

а) v равноизмеримо с $f \chi_{\bigcup_k T_k}$ (см. (22) и (28));

б) из свойств множеств E_k легко вытекает, что E – множество полной меры.

Пусть $\mathbf{x} \in E_k$. Тогда существует $r \in (R_k, R_k^*)$ такое, что

$$|G_r(g_k)(\mathbf{x})| > \nu_k. \quad (30)$$

С другой стороны, на основании леммы 8 для $i < k$ имеем

$$|G_r(g_i)(\mathbf{x})| \leq 2c(n)M_{\mathbf{I}_d}(g_i)(\mathbf{x}) \leq 2c(n)\|g_i\|_{L^\infty}, \quad (31)$$

а для $i > k$ имеем (см. (29))

$$|G_r(g_i)(\mathbf{x})| < \frac{1}{\nu_i}. \quad (32)$$

Из (25) и (30)–(32) получаем

$$\begin{aligned} |G_r(v)(\mathbf{x})| &\geq |G_r(g_k)(\mathbf{x})| - \sum_{i=1}^{k-1} |G_r(g_i)(\mathbf{x})| - \sum_{i=k+1}^{\infty} |G_r(g_i)(\mathbf{x})| \\ &\geq \nu_k - \frac{\nu_k}{2} - 1 = \frac{\nu_k}{2} - 1. \end{aligned} \quad (33)$$

В силу (33) заключаем, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} |G_r(v)(\mathbf{x})| = \infty \quad (34)$$

для каждого $\mathbf{x} \in E$ и, следовательно, для п. в. $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$.

Функция v ограничена на $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]^n$ при каждом $\varepsilon \in (0, 1/2)$ (см. (26)–(28)).

Следовательно, в силу леммы 7 имеем

$$\lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(v)(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) \quad \text{для п. в. } \mathbf{x} \in \mathbb{I}^n. \quad (35)$$

Пусть v' – функция, соответствующая функции f и множествам $\mathbb{I}^n \setminus \bigcup_k T_k$ и $\mathbb{I}^n \setminus \text{supp } v$ согласно лемме Е. Очевидно, функция $g = v + v'$ равноизмерима с f . Поскольку $M_{\mathbf{I}}(v')(\mathbf{x}) < \infty$ для п. в. $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$, из лемм 7, 8 получим

$$\sup_{r \geq \sqrt{n}} |G_r(v')(\mathbf{x})| < \infty, \quad \lim_{\mathbf{m} \rightarrow \infty} S_{\mathbf{m}}(v')(\mathbf{x}) = v'(\mathbf{x}) \quad \text{п. в.} \quad (36)$$

Из (34)–(36) заключаем справедливость теоремы в рассматриваемом случае.

Шаг II: f принимает неотрицательные значения.

Положим $f^*(\mathbf{x}) = 1$, если $0 \leq f(\mathbf{x}) < 1$, и $f^*(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x})]$ в другом случае, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Пусть g^* – равноизмеримая с f функция, удовлетворяющая условиям теоремы 4.

Обозначим $E_k = \{f^* = k\}$ и $E_k^* = \{g^* = k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $E_k = \{k \leq f < k+1\}$ и $|E_k| = |E_k^*|$.

Пусть g_k , $k \in \mathbb{N}$, – функция, соответствующая функции f и множествам E_k и E_k^* согласно лемме Е. Тогда $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ равноизмерима с f и $\|g - g^*\|_{L^\infty} \leq 1$. Отсюда, учитывая леммы 7, 8, заключаем, что g является искомой функцией.

Шаг III: f – произвольная функция из $L \setminus L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$.

Обозначим

$$f_1 = f\chi_{\{f>0\}}, \quad f_2 = |f|\chi_{\{f<0\}}.$$

Очевидно, хотя бы одна из функций f_1 и f_2 не принадлежит $L(\ln^+ L)^{n-2}(\mathbb{I}^n)$. Не ограничивая общности, предположим, что такой является f_1 .

Пусть g_1 – равноизмеримая с f_1 функция, удовлетворяющая условиям теоремы 4. Пусть g_2 – функция, соответствующая функции f и множествам $\{f < 0\}$ и $\mathbb{I}^n \setminus \text{supp } g_2$ согласно лемме Е. Тогда, учитывая леммы 7, 8, легко заключаем, что $g = g_1 - g_2$ является искомой функцией.

Теорема доказана.

Список литературы

1. F. Móricz, “On the convergence in a restricted sense of multiple series”, *Anal. Math.*, **5:2** (1979), 135–147.
2. F. Móricz, “Some remarks on the notion of regular convergence of multiple series”, *Acta Math. Hungar.*, **41:1–2** (1983), 161–168.
3. О. П. Дзагнидзе, “Представление измеримых функций двух переменных двойными рядами”, *Сообщ. АН ГССР*, **34** (1964), 277–282.
4. Т. Ш. Зерекидзе, “Сходимость кратных рядов Фурье–Хаара и сильная дифференцируемость интегралов”, *Тр. Тбилисс. матем. ин-та им. А. Размадзе*, **76** (1985), 80–99.
5. Г. Г. Кемхадзе, “О сходимости шаровых частных сумм кратных рядов Фурье–Хаара”, *Тр. Тбилисс. матем. ин-та им. А. Размадзе*, **55** (1977), 27–38.
6. Г. Е. Tkebuchava, “On the divergence of spherical sums of double Fourier–Haar series”, *Anal. Math.*, **20:2** (1994), 147–153.
7. Г. Г. Ониани, “О расходимости кратных рядов Фурье–Хаара”, *Докл. РАН*, **419:2** (2008), 169–170; англ. пер.: G. G. Oniani, “On the divergence of multiple Fourier–Haar series”, *Dokl. Math.*, **77:2** (2008), 203–204.
8. G. G. Oniani, “On the divergence of multiple Fourier–Haar series”, *Anal. Math.*, **38:3** (2012), 227–247.
9. Г. Г. Ониани, “О взаимосвязи между сходимостями по прямоугольникам и по сферам кратных рядов Хаара”, *УМН*, **67:1** (2012), 185–186; англ. пер.: G. G. Oniani, “On the relationship between rectangular convergence and spherical convergence of multiple Haar series”, *Russian Math. Surveys*, **67:1** (2012), 186–187.
10. G. G. Oniani, “On the regular convergence by rectangles of multiple Fourier–Haar series”, *Bull. Georgian Natl. Acad. Sci. (N.S.)*, **6:2** (2012), 31–33.
11. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.

12. Г. Алексич, *Проблемы сходимости ортогональных рядов*, ИЛ, М., 1963; пер. с англ.: G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Pergamon Press, New York–Oxford–Paris, 1961.
13. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
14. М. Гусман, *Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$* , Мир, М., 1978; пер. с англ.: M. de Guzman, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$* , Lecture Notes in Math., **481**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975.
15. С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, Dover Publ., New York, 1937.

ГЕОРГИЙ ГИГЛАЕВИЧ ОНИАНИ

(GIORGI G. ONIANI)

Государственный университет им. А. Церетели,

г. Кутаиси, Грузия

E-mail: oniani@atsu.edu.ge

Поступило в редакцию

27.08.2012

15.12.2012