Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Исаев, Асимптотическое перечисление эйлеровых циклов в графах, обладающих сильными перемешивающими свойствами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2013, том 77, выпуск 6, 45–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8052>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:02:20

УДК 519.1

М. И. Исаев

Асимптотическое перечисление эйлеровых циклов в графах, обладающих сильными перемешивающими свойствами

Доказана асимптотическая формула для подсчета числа эйлеровых циклов в графах, обладающих сильными перемешивающими свойствами, все вершины которых имеют четную степень. Искомое значение определено с точностью до мультипликативной ошибки $O(n^{-1/2+\varepsilon})$, где n – число вершин.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: эйлеров цикл, асимптотический анализ, гауссовский интеграл, алгебраическая связность, матрица Лапласа.

DOI: 10.4213/im8052

§ 1. Введение

Пусть G является простым связным неориентированным графом, все вершины которого имеют четную степень. *Эйлеровым циклом* в G называется замкнутый путь, который использует все ребра G ровно один раз (см., например, [1]). Будем считать, что два эйлеровых цикла *эквивалентны*, если один является циклической перестановкой другого. Ясно, что размер такого класса эквивалентности равен числу ребер в G . Пусть $EC(G)$ – число классов эквивалентности эйлеровых циклов в графе G .

Задача о точном подсчете числа эйлеровых циклов в простом графе (графе без петель и кратных ребер) является полной для класса $\#P$, т. е. существование полиномиального алгоритма для данной задачи влечет существование полиномиального алгоритма для любой задачи из класса $\#P$ и, в частности, эквивалентность классов P и NP (см. [2]). Другими словами, задача о точном подсчете числа эйлеровых циклов является трудной с точки зрения теории сложности. Более того, стоит отметить, что в отличие от многих других сложных задач перечисления на графах (см., например, [3] и [4]) даже приближенные и вероятностные эффективные алгоритмы для подсчета числа эйлеровых циклов в общем случае до сих пор не были получены и известны только для специальных классов графов, обладающих невысокой плотностью (см. [5], [6]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00398_а).

Для полного графа K_n точное выражение числа эйлеровых циклов при нечетном n неизвестно (легко видеть, что $EC(K_n) = 0$ для четных n) и получена только следующая асимптотическая формула (см. [7]): при нечетном $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} EC(K_n) &= 2^{\frac{(n-1)^2}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n-2}{2}} \left(\left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)! \right)^n (1 + O(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})) \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n^2}{2} + \frac{11}{12}n} n^{\frac{(n-2)(n+1)}{2}} (1 + O(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})) \end{aligned} \quad (1.1)$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

В [8] был обобщен аналитический подход из [7], основанный на представлении результата в виде многомерного интеграла и его оценке при размерности, стремящейся к бесконечности. Определено асимптотическое поведение числа эйлеровых циклов в простых графах с большой алгебраической связностью. Этот класс графов подразумевается нами как класс графов, обладающих сильными перемешивающими свойствами.

Существуют несколько классических параметров графов, которые выражают свойства смешиваемости графов: алгебраическая связность, константа Чигера (изопериметрическое число), спектральный зазор между 1 и вторым по величине собственным значением матрицы вероятностей перехода случайного блуждания на графе. Стоит отметить, что, используя любой из этих параметров, можно получить эквивалентные определения класса графов, обладающих сильными перемешивающими свойствами (для более подробной информации см. [9]).

Кроме того в [9] показано, что случайный граф в модели Гильберта $G(n, p)$ (каждое ребро графа с n вершинами входит независимо с вероятностью p) при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $p > 0$ обладает сильными перемешивающими свойствами с вероятностью, близкой к 1 (за исключением экспоненциально малой по n величины).

В настоящей работе продолжены исследования, проведенные в [7]–[9]. Доказана асимптотическая формула для подсчета числа эйлеровых циклов в графах, обладающих сильными перемешивающими свойствами. Основной результат подробно изложен в §2 настоящей работы.

Фактически оценка числа эйлеровых циклов была сведена в [8] к оценке n -мерного интеграла гауссовского типа. Данное сведение частично повторено в §3, 8 настоящей работы. Кроме того, в §4, 6, 7 разработан подход для оценки интегралов такого типа. Основной результат доказан в §5.

Ориентация ребер графа, для которой в каждой вершине число входящих и исходящих ребер одинаково, называется *эйлеровой ориентацией*. Отметим, что в [10] было определено асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций графов, обладающих сильными перемешивающими свойствами. По-видимому, исходя из результатов [10] и оценок настоящей работы, можно доказать асимптотическую формулу для числа эйлеровых ориентаций, приведенную без доказательства в [9]. В последующей работе планируется развитие результатов в данном направлении.

§ 2. Основной результат

Пусть G – неориентированный простой граф с множеством вершин $VG = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством ребер EG . Определим $(n \times n)$ -матрицу Q следующим образом:

$$Q_{jk} = \begin{cases} -1, & \{v_j, v_k\} \in EG, \\ d_j, & j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.1)$$

где $n = |VG|$ и d_j – степень $v_j \in VG$. Матрица $Q = Q(G)$ называется *матрицей Лапласа* графа G . Собственные значения $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ матрицы Q являются неотрицательными вещественными числами, причем количество нулевых собственных значений совпадает с количеством компонент связности графа G , в частности $\lambda_1 = 0$. Число $\lambda_2 = \lambda_2(G)$ называется *алгебраической связностью* графа G . Кроме того, верны следующие неравенства:

$$2 \min_j d_j - n + 2 \leq \lambda_2 \leq \frac{n}{n-1} \min_j d_j. \quad (2.2)$$

Для дополнительной информации о спектральных свойствах матрицы Лапласа см., например, работы [11] и [12].

Ациклический связный подграф графа G , в который входят все его вершины, называется *остовным деревом* графа G . По теореме Кирхгофа [13] (матричная теорема о деревьях) имеем

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n = \det M_{11}, \quad (2.3)$$

где $t(G)$ – число остовных деревьев графа G , матрица M_{11} получается при удалении первого столбца и первой строки в Q .

Граф G назовем γ -*перемешивающим графом*, $\gamma > 0$, если

$$\lambda_2 = \lambda_2(G) \geq \gamma |VG|, \quad (2.4)$$

где λ_2 – алгебраическая связность графа.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть G – неориентированный простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \dots, v_n$, имеющими четную степень. Пусть G является γ -перемешивающим графом для некоторого $\gamma > 0$. Тогда

$$EC(G) = (1 + \delta(G)) e^{K_{ec}} \left(2^{|EG| - \frac{n-1}{2}} \pi^{-\frac{n-1}{2}} \sqrt{t(G)} \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j}{2} - 1 \right) \right), \quad (2.5)$$

$$K_{ec} = -\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{d_j + 1} - \frac{1}{d_k + 1} \right)^2,$$

где EG – множество ребер графа, d_j – степень вершины v_j , $t(G)$ – число остовных деревьев G и для любого $\varepsilon > 0$

$$|\delta(G)| \leq C n^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}; \quad (2.6)$$

здесь константа $C > 0$ зависит только от γ и ε .

Доказательство теоремы 2.1 приведено в § 5. Оно основано на результатах, представленных в § 3, 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для случая полного графа имеем

$$\lambda_2(K_n) = n, \quad EK_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad t(K_n) = n^{n-2}, \quad K_{ec} = 0. \quad (2.7)$$

Мы получаем, что результат теоремы 2.1 для случая полного графа эквивалентен (1.1).

§ 3. Сведение к интегралу

Ориентированным корневым деревом с корнем v называется связный ориентированный граф T такой, что $v \in VT$ не имеет выходящих ребер, а любая другая вершина имеет ровно одно выходящее ребро, т. е. T – дерево, все ребра которого ориентированы в сторону v .

Пусть G – связный неориентированный простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \dots, v_n$, имеющими четные степени. Заметим, что для любого остовного дерева T графа G и любой вершины $v_r \in VG$ существует ровно одна ориентация ребер T такая, что получается ориентированное корневое дерево с корнем v_r . Обозначим через $\mathcal{T}_r$ множество ориентированных корневых остовных деревьев с корнем v_r , которые могут быть получены таким путем.

Напомним, что (см. [8, § 4, формулы (4.6), (4.7)])

$$EC(G) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_j}{2} - 1 \right)! \cdot 2^{|EG| - n + 1} \pi^{-n} S, \quad (3.1)$$

где для любого $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$,

$$S = \int_{U_n(\pi/2)} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}) d\vec{\xi}; \quad (3.2)$$

здесь $\Delta_{jk} = \xi_j - \xi_k$ и

$$U_n(\rho) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n : |\xi_j| \leq \rho, j = 1, \dots, n\}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим область интегрирования, которая вносит основной вклад в значение интеграла (3.2). Везде в дальнейшем мы зафиксируем некоторую константу $0 < \varepsilon \ll 1$. Определим

$$V_0 = \left\{ \vec{\xi} \in U_n\left(\frac{\pi}{2}\right) : |\xi_j - \xi_k|_\pi \leq n^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}, 1 \leq j, k \leq n \right\}, \quad (3.4)$$

$$|\xi_j - \xi_k|_\pi = \min_{l \in \mathbb{Z}} |\xi_j - \xi_k + \pi l|,$$

и пусть S_0 – вклад в S области $\vec{\xi} \in V_0$:

$$S_0 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \int_{U_n(\pi/2)} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}) d\vec{\xi}. \quad (3.5)$$

В настоящем параграфе мы используем стандартное обозначение $f = O(g)$ при $n \rightarrow \infty$, которое соответствует тому факту, что существуют $c, n_0 > 0$ такие, что если $n \geq n_0$, то выполняется $|f| \leq c|g|$.

При выполненных предположениях теоремы 2.1 известно, что при $n \rightarrow \infty$

$$S = (1 + O(\exp(-cn^{2\varepsilon})))S_0 \quad (3.6)$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ (для доказательства (3.6) см. [8, теорема 6.3]).

Пусть

$$W = \widehat{Q}^{-1} = (Q + J)^{-1}, \quad (3.7)$$

где Q – матрица Лапласа, J – матрица, все элементы которой равны 1. Определим $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\alpha_j = W_{jj}. \quad (3.8)$$

Пусть

$$R(\vec{\xi}) = \text{tr}(\Lambda(\vec{\xi})W\Lambda(\vec{\xi})W), \quad (3.9)$$

где $\text{tr}(\cdot)$ – след матрицы, $\Lambda(\vec{\xi})$ – диагональная матрица, соответствующие диагональные элементы которой равны компонентам вектора $Q\vec{\xi}$.

Суммирование по $\mathcal{T}_r$ в подынтегральном выражении из (3.2) может быть представлено в виде определителя согласно следующей теореме из [14], которая является обобщением вышеупомянутой теоремы Кирхгофа (матричной теоремы о деревьях).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть w_{jk} ($1 \leq j, k \leq n, j \neq k$) заданы произвольно. Пусть $(n \times n)$ -матрица A определена следующим образом:

$$A_{jk} = \begin{cases} -w_{jk}, & \text{если } j \neq k, \\ \sum_{r \neq j} w_{jr}, & \text{если } k = j, \end{cases} \quad (3.10)$$

с суммой по $1 \leq r \leq n$ и $r \neq j$. Для любого $r, 1 \leq r \leq n$, пусть M_r – главный минор A , получающийся удалением r -го столбца и r -й строки. Тогда

$$\det M_r = \sum_T \prod_{(v_j, v_k) \in ET} w_{jk}, \quad (3.11)$$

где сумма берется по всем корневым ориентированным деревьям T с множеством вершин $VT = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и корнем v_r .

Используя формулы (3.2) и (3.6), теорему 3.1 и разложение в ряд Тейлора $\cos \Delta_{jk}$ и $\text{tg} \Delta_{jk}$ в области V_0 , можно получить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть предположения теоремы 2.1 выполнены. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$S_0 = (1 + O(n^{-\frac{1}{2} + 6\varepsilon}))2^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}n^{-1} \det \widehat{Q} \text{Int}, \quad (3.12)$$

$$\text{Int} = \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(i\vec{\xi}^T Q \vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\xi}^T \widehat{Q} \vec{\xi} - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + \frac{1}{2}R(\vec{\xi})\right) d\vec{\xi}, \quad (3.13)$$

где $\widehat{Q}$, $\vec{\alpha}$ и $R(\vec{\xi})$ определены формулами (3.7), (3.8) и (3.9) соответственно.

Докажем предложение 3.1 в § 8. Фактически данное доказательство неявно приведено в [8, лемма 5.3].

Тем самым, получается, что для доказательства теоремы 2.1 осталось только оценить интеграл Int из (3.12).

§ 4. Асимптотические оценки интегралов

Зафиксируем константы $a, b, \varepsilon > 0$. В настоящем параграфе мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от a, b и ε .

Для действительного $p \geq 1$ и вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1)$$

В случае $p = \infty$ полагаем

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_j |x_j|. \quad (4.2)$$

Векторной p -норме соответствует матричная норма

$$\|A\|_p = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_p}. \quad (4.3)$$

Если A – матрица самосопряженного оператора (симметрическая матрица), то норма $\|A\|_2$ совпадает с наибольшим модулем собственного значения A , и поэтому для $p \geq 1$ выполняется неравенство

$$\|A\|_p \geq \|A\|_2. \quad (4.4)$$

Для обратимых матриц определяется число обусловленности

$$\mu_p(A) = \|A\|_p \|A^{-1}\|_p \geq \|AA^{-1}\|_p = 1. \quad (4.5)$$

Пусть I – единичная $(n \times n)$ -матрица и $A = I + X$ – такая матрица, для которой выполнены следующие условия:

- (i) A – положительно определенная симметрическая матрица;
- (ii) $|X_{jk}| \leq \frac{a}{n}$, $X_{jj} = 0$, $\|A^{-1}\|_2 \leq b$.

Заметим, что

$$\|A^{-1}\|_2^{-1} \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_\infty = \|A\|_1 = \max_j \sum_{k=1}^n |A_{jk}| = O(1). \quad (4.6)$$

Напомним, что при выполненных предположениях (i), (ii) (см. [10, лемма 3.2])

$$\mu_\infty(A) = \mu_1(A) = O(\mu_2(A)). \quad (4.7)$$

Используя (4.4), (4.6), (4.7), получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. Пусть A удовлетворяет условиям (i), (ii). Тогда

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \|A^{-1}\|_1 = O(1), \quad (4.8)$$

$$|X'_{jk}| = O(n^{-1}), \quad (4.9)$$

где

$$X' = A^{-1} - I = A^{-1}(I - A) = -A^{-1}X. \quad (4.10)$$

Мы используем следующее обозначение:

$$\langle g \rangle_{F,\Omega} = \int_{\Omega} g(\vec{\theta}) e^{F(\vec{\theta})} d\vec{\theta}, \quad (4.11)$$

где g, F – некоторые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$. Пусть при $r > 0$

$$\langle g \rangle_{F,r} = \langle g \rangle_{F,U_n(rn^{\varepsilon})}; \quad (4.12)$$

здесь

$$U_n(\rho) = \{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n : |\theta_j| \leq \rho, j = 1, \dots, n\}. \quad (4.13)$$

В качестве F используются функции следующего вида:

$$F(\vec{\theta}) = -\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + H(\vec{\theta}), \quad (4.14)$$

где A удовлетворяет условиям (i), (ii). Рассмотрим следующие условия для H , которые будут использоваться в дальнейшем:

$$H(\vec{\theta}) \leq c_1 \frac{\vec{\theta}^T A \vec{\theta}}{n}, \quad (4.15)$$

$$\left\| \frac{\partial H(\vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}} \right\|_{\infty} \leq c_2 \frac{\|\vec{\theta}\|_{\infty}^3 + \|\vec{\theta}\|_{\infty}}{n}. \quad (4.16)$$

Для случая $H \equiv 0$ используем обозначения

$$\langle g \rangle_{\Omega} = \langle g \rangle_{F,\Omega}, \quad \langle g \rangle_r = \langle g \rangle_{F,r}, \quad \langle g \rangle = \langle g \rangle_{+\infty}. \quad (4.17)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – такая область, что $U_n(r_1 n^{\varepsilon}) \subset \Omega \subset U_n(r_2 n^{\varepsilon})$ для некоторых $r_2 > r_1 > 0$. Пусть A удовлетворяет условиям (i), (ii) и предположения (4.15), (4.16) выполнены для некоторых $c_1, c_2 > 0$. Тогда

$$\langle 1 \rangle_{\Omega} = (1 + O(\exp(-c_3 n^{2\varepsilon}))) \langle 1 \rangle, \quad (4.18)$$

$$\langle 1 \rangle_{F,\Omega} = O(\langle 1 \rangle), \quad (4.19)$$

$$\langle \theta_k^2 \rangle_{F,\Omega} = \frac{1}{2} \langle 1 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (4.20)$$

$$\langle \theta_k^4 \rangle_{F,\Omega} = \frac{3}{4} \langle 1 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle \quad (4.21)$$

и для $k \neq l$

$$\langle \theta_k \theta_l \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (4.22)$$

$$\langle \theta_k \theta_l^3 \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (4.23)$$

$$\langle \theta_k^2 \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega} = \frac{1}{4} \langle 1 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (4.24)$$

где F определена в (4.14) и $c_3 = c_3(r_1, r_2, c_1, c_2, a, b, \varepsilon) > 0$.

Кроме того, для любого $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{p}\|_\infty = O(n^{-1/2})$,

$$\langle \theta_k e^{i\vec{\theta}^T \vec{p} - ip_k \theta_k} \rangle_{F, \Omega} = \frac{i}{2} \sum_{j \neq k, j \leq n} p_j (A^{-1})_{jk} \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p} - ip_k \theta_k} \rangle_{(F - \frac{1}{2} p_k^2 \theta_k^2), \Omega} + O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (4.25)$$

где через $(A^{-1})_{jk}$ обозначен (j, k) -й элемент матрицы A^{-1} .

Доказательство леммы 4.2 приведено в § 6.

§ 5. Доказательство теоремы 2.1

Для матрицы Лапласа Q графа G (определенной в (2.1)) вектор $(1, 1, \dots, 1)^T$ является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 0$. Пусть $\hat{Q} = Q + J$, где J – матрица, все элементы которой равны 1. Заметим, что Q и $\hat{Q}$ имеют одинаковый набор собственных значений и векторов, за исключением собственного значения, соответствующего вектору $(1, 1, \dots, 1)^T$, которое равно 0 для Q и n для $\hat{Q}$. Используя (2.3), находим, что

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n = \frac{\det \hat{Q}}{n^2}. \quad (5.1)$$

Из (4.4) получаем

$$\lambda_n = \|Q\|_2 \leq \|\hat{Q}\|_2 \leq \|\hat{Q}\|_1 = \max_j \sum_{k=1}^n |\hat{Q}_{jk}| = n. \quad (5.2)$$

По условию теоремы 2.1 имеем

$$\|\hat{Q}^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_2} \leq \frac{1}{\gamma n}. \quad (5.3)$$

Используя (2.2), получаем

$$n - 1 \geq d_j \geq \lambda_2 \frac{n - 1}{n} \geq \gamma(n - 1). \quad (5.4)$$

где d_j – степень вершины v_j .

Рассмотрим интеграл из предложения 3.1:

$$\text{Int} = \int_{U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} \exp\left(i \vec{\xi}^T \vec{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\xi}^T \hat{Q} \vec{\xi} - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + \frac{R(\vec{\xi})}{2}\right) d\vec{\xi}, \quad (5.5)$$

$$R(\vec{\xi}) = \text{tr}(\Lambda(\vec{\xi}) \hat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \hat{Q}^{-1}), \quad \vec{\beta} = Q \vec{\alpha},$$

где $\Lambda(\vec{\xi})$ – диагональная матрица, соответствующие диагональные элементы которой равны компонентам вектора $Q \vec{\xi}$, и $\vec{\alpha}$ – вектор, компоненты которого равны соответствующим диагональным элементам $\hat{Q}^{-1}$.

Определим $\vec{\xi}(\vec{\theta}) = (\xi_1(\vec{\theta}), \xi_2(\vec{\theta}), \dots, \xi_n(\vec{\theta}))^T$ следующим образом:

$$\theta_k = \sqrt{\frac{d_k + 1}{2}} \xi_k. \quad (5.6)$$

Тогда можно переписать (5.5) в обозначениях из § 4:

$$\text{Int} = \langle e^{i\vec{p}^T \vec{\theta}} \rangle_{F, \Omega} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{(d_j + 1)/2}}, \quad (5.7)$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$,

$$p_k = \frac{\beta_k}{\sqrt{(d_j + 1)/2}}, \quad (5.8)$$

$$F(\vec{\theta}) = -\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + H(\vec{\theta}), \quad (5.9)$$

$$\vec{\theta}^T A \vec{\theta} = \frac{1}{2} \vec{\xi}(\vec{\theta})^T \widehat{Q} \vec{\xi}(\vec{\theta}), \quad A_{jk} = \frac{1}{\sqrt{(d_j + 1)(d_k + 1)}} \widehat{Q}_{jk}, \quad (5.10)$$

$$H(\theta) = -\frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + \frac{R(\vec{\xi}(\vec{\theta}))}{2}, \quad (5.11)$$

$$\Omega = \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n : \vec{\xi}(\vec{\theta}) \in U_n(n^{-1/2+\varepsilon})\}. \quad (5.12)$$

Выразим интеграл Int из (5.7), используя лемму 4.2, с помощью

$$\langle 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det \widehat{Q}}} \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{d_j + 1}{2}}. \quad (5.13)$$

Будем действовать следующим образом: сначала необходимо проверить, что все предположения леммы 4.2 выполнены, затем постепенно избавимся от осциллирующего члена $e^{i\vec{p}^T \vec{\theta}}$, квадратичного члена $\frac{R(\vec{\xi}(\vec{\theta}))}{2}$ и остаточного члена $-\frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4$.

В дальнейшем в этом параграфе будем использовать обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq c|g|$ для некоторой константы $c > 0$, зависящей только от γ и ε .

5.1. Проверка предположений леммы 4.2. Комбинируя (5.3), (5.4), (5.6), (5.10) и (5.12), получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть матрица A и область Ω определены в (5.10) и (5.12). Тогда A удовлетворяет условиям (i), (ii) из § 4 и $U_n(r_1 n^\varepsilon) \subset \Omega \subset U_n(r_2 n^\varepsilon)$ для некоторых $a, b, r_1, r_2 > 0$, зависящих только от γ .

Пусть $\vec{e}^{(k)} = (e_1^{(k)}, \dots, e_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$ такой, что $e_j^{(k)} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера. Вследствие линейности $\Lambda(\vec{\xi})$ и $\text{tr}(\cdot)$ находим, что

$$R(\vec{\xi}(\vec{\theta})) = \vec{\xi}(\vec{\theta})^T R \vec{\xi}(\vec{\theta}) = \vec{\theta}^T S \vec{\theta}, \quad (5.14)$$

где

$$R_{jk} = \text{tr}(\Lambda(\vec{e}^{(j)}) \widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{e}^{(k)}) \widehat{Q}^{-1}), \quad (5.15)$$

$$S_{jk} = \frac{R_{jk}}{\sqrt{(d_j + 1)/2} \sqrt{(d_k + 1)/2}}.$$

Мы используем следующие неравенства для $(n \times n)$ -матриц X, Y :

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(XY)| &\leq \|X\|_{HS} \|Y\|_{HS}, \\ \|XY\|_{HS} &\leq \|X\|_{HS} \|Y^T\|_2, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $\|\cdot\|_{HS}$ обозначает норму Гильберта–Шмидта:

$$\|X\|_{HS} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |X_{jk}|^2}. \quad (5.17)$$

Комбинируя (5.2), (5.3), (5.14)–(5.16), находим, что

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_1^T R \vec{\xi}_2 &\leq \|\Lambda(\vec{\xi}_1) \widehat{Q}^{-1}\|_{HS} \|\Lambda(\vec{\xi}_2) \widehat{Q}^{-1}\|_{HS} \leq \|\Lambda(\vec{\xi}_1)\|_{HS} \|\Lambda(\vec{\xi}_2)\|_{HS} \|\widehat{Q}^{-1}\|_2^2 \\ &= \|Q \vec{\xi}_1\|_2 \|Q \vec{\xi}_2\|_2 \|\widehat{Q}^{-1}\|_2^2 \leq \|Q\|_2^2 \|\widehat{Q}^{-1}\|_2^2 \|\vec{\xi}_1\|_2 \|\vec{\xi}_2\|_2 = O(1) \|\vec{\xi}_1\|_2 \|\vec{\xi}_2\|_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Используя (5.2), (5.10), (5.11) и (5.18), получаем

$$\begin{aligned} H(\vec{\theta}) &\leq R(\vec{\xi}(\vec{\theta})) = \vec{\xi}(\vec{\theta})^T R \vec{\xi}(\vec{\theta}) = O(1) \|\vec{\xi}(\vec{\theta})\|_2^2 = O(1) \frac{\vec{\xi}(\vec{\theta})^T \widehat{Q} \vec{\xi}(\vec{\theta})}{n} \\ &= O(n^{-1}) \vec{\theta}^T A \vec{\theta}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Пусть $(\widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1})_{kk} - (k, k)$ -й элемент матрицы $\widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1}$. Для любого $1 \leq k \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\vec{\xi})}{\partial \xi_k} &= 2 \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \Lambda(\vec{\xi})}{\partial \xi_k} \widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1} \right) = 2 \operatorname{tr} (\Lambda(\vec{e}^{(k)}) \widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1}) \\ &= 2 d_k (\widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1})_{kk} + 2 \operatorname{tr} (\widetilde{\Lambda} \widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\widetilde{\Lambda}$ – диагональная матрица с элементами $\widetilde{\Lambda}_{jj} = \Lambda(\vec{e}^{(k)})_{jj}$ в случае $j \neq k$ и $\widetilde{\Lambda}_{kk} = 0$ на диагонали. В частности, выполняется

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_2 \leq 1. \quad (5.21)$$

Поскольку $\Lambda(\vec{\xi})$ – диагональная матрица, получаем

$$|d_k (\widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1})_{kk}| = |d_k \Lambda(\vec{\xi})_{kk}| \|(\widehat{Q}^{-1})_k\|_2^2 \leq d_k \|\Lambda(\vec{\xi})\|_2 \|(\widehat{Q}^{-1})_k\|_2^2, \quad (5.22)$$

где $(\widehat{Q}^{-1})_k$ – k -й столбец матрицы $\widehat{Q}^{-1}$. Заметим, что

$$\|(\widehat{Q}^{-1})_k\|_2 \leq \|\widehat{Q}^{-1}\|_2 \|\widehat{Q}(\widehat{Q}^{-1})_k\|_2 = \|\widehat{Q}^{-1}\|_2. \quad (5.23)$$

Отметим также, что

$$\|\Lambda(\vec{\xi})\|_2 = \|Q \vec{\xi}\|_\infty \leq 2n \|\vec{\xi}\|_\infty. \quad (5.24)$$

Комбинируя (5.3), (5.4), (5.21)–(5.24), получаем

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(\widetilde{\Lambda} \widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1})| &\leq n \|\widetilde{\Lambda} \widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1}\|_2 \leq n \|\widetilde{\Lambda}\|_2 \|\Lambda(\vec{\xi})\|_2 \|\widehat{Q}^{-1}\|_2^2 = O(1) \|\vec{\xi}\|_\infty, \\ d_k (\widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1})_{kk} &= O(1) \|\vec{\xi}\|_\infty. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Используя (5.4), (5.6), (5.14), (5.20) и (5.25) для всех $1 \leq k \leq n$, убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} 2\|R\vec{\xi}\|_{\infty} &= \left\| \frac{\partial R(\vec{\xi})}{\partial \vec{\xi}} \right\|_{\infty} = O(1)\|\vec{\xi}\|_{\infty}, \\ 2\|S\vec{\theta}\|_{\infty} &= \left\| \frac{\partial R(\vec{\xi}(\vec{\theta}))}{\partial \vec{\theta}} \right\|_{\infty} = O(n^{-1})\|\vec{\theta}\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Для любого $1 \leq k \leq n$ имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sum_{\{v_j, v_l\} \in EG} \Delta_{jl}^4 \right| \leq 4 \sum_{j=1}^n |\Delta_{jk}|^3 = O(n)\|\vec{\xi}\|_{\infty}^3. \quad (5.27)$$

Комбинируя (5.6) и (5.27), получаем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} \sum_{\{v_j, v_l\} \in EG} \Delta_{jl}^4 \right\|_{\infty} = O(n^{-1})\|\vec{\theta}\|_{\infty}^3. \quad (5.28)$$

Используя (4.9), равенство

$$(\widehat{Q}^{-1})_{jk} = \frac{(A^{-1})_{jk}}{\sqrt{(d_j+1)/2}\sqrt{(d_k+1)/2}} \quad (5.29)$$

и соотношение (5.4), находим, что

$$\|\vec{p}\|_{\infty} = \sup_{1 \leq k \leq n} \frac{\beta_k}{\sqrt{(d_j+1)/2}} = O(n^{-\frac{1}{2}})\|Q\alpha\|_{\infty} = O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad (5.30)$$

где вектор $\vec{p}$ определен согласно (5.8).

Собирая вместе (5.10), (5.19), (5.26), (5.28), (5.30), в силу утверждения 5.1 убеждаемся в том, что все предположения леммы 4.2 с данными (5.8)–(5.12) выполнены для некоторых констант $a, b, r_1, r_2, c_1, c_2 > 0$, зависящих только от γ .

5.2. Осциллирующий член. Определим $\vec{p}^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})^T \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$p_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{для } j \leq k, \\ p_j & \text{для } j > k. \end{cases} \quad (5.31)$$

Пусть

$$F^{(k)}(\vec{\theta}) = F(\vec{\theta}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k p_j^2 \theta_j^2. \quad (5.32)$$

Заметим, что

$$F^{(0)}(\vec{\theta}) = F(\vec{\theta}). \quad (5.33)$$

Используя (5.30) и равенство

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \sum_{j=1}^n p_j^2 \theta_j^2 = 2p_k^2 \theta_k = O(n^{-1})\|\vec{\theta}\|_{\infty}, \quad (5.34)$$

мы убеждаемся в том, что все предположения леммы 4.2 выполнены, если $F^{(k)}(\vec{\theta})$ рассмотреть в качестве функции $F(\vec{\theta})$, вектор $\vec{p}^{(k)}$ – в качестве вектора $\vec{p}$ при некоторых константах $a, b, r_1, r_2, c_1, c_2 > 0$, зависящих только от γ .

Заметим, что

$$\vec{\theta} \in \Omega \implies \|\vec{\theta}\|_\infty = O(n^\varepsilon). \quad (5.35)$$

Учитывая (5.30) и используя разложение в ряд Тейлора, получаем

$$e^{ip_k \theta_k} = e^{-\frac{1}{2}p_k^2 \theta_k^2} + ip_k \theta_k + O(n^{-\frac{3}{2}+3\varepsilon}), \quad \vec{\theta} \in \Omega. \quad (5.36)$$

Используя (5.30) и (4.19), (4.25) для $F^{(k-1)}$ и $\vec{p}^{(k-1)}$, находим, что

$$\begin{aligned} ip_k \langle \theta_k e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}^{(k)}} \rangle_{F^{(k-1)}, \Omega} \\ = -\frac{p_k}{2} \sum_{j=k+1}^n p_j (A^{-1})_{jk} \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}^{(k)}} \rangle_{F^{(k)}, \Omega} + O(n^{-\frac{3}{2}+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Комбинируя (4.19), (5.36) и (5.37), получаем

$$\begin{aligned} \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}^{(k-1)}} \rangle_{F^{(k-1)}, \Omega} = \left(1 - \frac{p_k}{2} \sum_{j=k+1}^n p_j (A^{-1})_{jk} \right) \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}^{(k)}} \rangle_{F^{(k)}, \Omega} \\ + O(n^{-\frac{3}{2}+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Используя (4.9), (5.8), (5.10) и (5.30), получаем также, что

$$\begin{aligned} p_j p_k (A^{-1})_{jk} = \beta_j \beta_k (\widehat{Q}^{-1})_{jk} = O(n^{-2}), \quad j \neq k, \\ p_k \sum_{j \neq k, j \leq n} p_j (A^{-1})_{jk} = O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Согласно (5.33), (5.39) и (5.38) для $k = 1, 2, \dots, n$, получаем

$$\langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}} \rangle_{F, \Omega} = C_1 \langle 1 \rangle_{F^{(n)}, \Omega} + O(n^{-\frac{1}{2}+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (5.40)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 = \exp \left(- \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \beta_k (\widehat{Q}^{-1})_{jk} \beta_j \right) \\ = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{p_k}{2} \sum_{j=k+1}^n (\widehat{A}^{-1})_{jk} p_j \right) + O(n^{-1}) = O(1). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Учитывая (5.30) и используя разложение в ряд Тейлора, находим, что

$$e^{-\frac{1}{2}p_k^2 \theta_k^2} = 1 - \frac{1}{2}p_k^2 \theta_k^2 + O(n^{-2+4\varepsilon}), \quad \vec{\theta} \in \Omega. \quad (5.42)$$

Комбинируя (5.42) и (4.19), (4.20) для $F^{(k)}$, получаем

$$\langle 1 \rangle_{F^{(k)}, \Omega} = \left(1 - \frac{1}{4}p_k^2 \right) \langle 1 \rangle_{F^{(k-1)}, \Omega} + O(n^{-2+4\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \quad (5.43)$$

Используя (5.30), (5.33) и (5.43) для $k = 1, 2, \dots, n$, находим, что

$$\langle 1 \rangle_{F^{(n)}, \Omega} = C_2 \langle 1 \rangle_{F, \Omega} + O(n^{-1+4\epsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (5.44)$$

где

$$C_2 = \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k^2}{2(d_k + 1)}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4} p_k^2\right) + O(n^{-1}) = O(1). \quad (5.45)$$

5.3. Квадратичный член. Определим $\vec{\theta}^k = (\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_n^k)^T \in \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\theta_j^k = \begin{cases} 0 & \text{для } j \leq k, \\ \theta_j & \text{для } j > k. \end{cases} \quad (5.46)$$

Пусть

$$F^k(\vec{\theta}) = -\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + H^k(\vec{\theta}), \quad H^k(\vec{\theta}) = -\frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + \frac{1}{2} R(\vec{\xi}(\vec{\theta}^k)). \quad (5.47)$$

Аналогичным образом, как и в п. 5.1, мы убеждаемся в том, что все предположения леммы 4.2 выполнены для случая, когда $F^k(\vec{\theta})$ рассматривается вместо $F(\vec{\theta})$, и для констант $a, b, r_1, r_2, c_1, c_2 > 0$, зависящих только от γ .

Заметим, что

$$F^0(\vec{\theta}) = F(\vec{\theta}), \quad (5.48)$$

$$R(\vec{\xi}(\vec{\theta}^k)) = \vec{\xi}(\vec{\theta}^k)^T R \vec{\xi}(\vec{\theta}^k) = (\vec{\theta}^k)^T S \vec{\theta}^k, \quad (5.49)$$

где R, S – те же самые матрицы, что и в (5.14), (5.15).

Комбинируя (5.47), теорему Лагранжа о среднем значении и (5.26), получаем

$$\begin{aligned} |F^{k-1}(\vec{\theta}) - F^k(\vec{\theta})| &= \frac{1}{2} |R(\vec{\xi}(\vec{\theta}^{k-1})) - R(\vec{\xi}(\vec{\theta}^k))| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{\partial R(\vec{\xi}(\vec{\theta}^*))}{\partial \theta_k} \theta_k \right| = O(n^{-1}) \|\vec{\theta}\|_\infty^2, \end{aligned} \quad (5.50)$$

где $\vec{\theta}^*$ лежит на отрезке между $\vec{\theta}^{k-1}$ и $\vec{\theta}^k$. Используя (5.35), (5.50) и разложение в ряд Тейлора, находим, что

$$\begin{aligned} e^{F^{k-1}(\vec{\theta}) - F^k(\vec{\theta})} &= 1 + F^{k-1}(\vec{\theta}) - F^k(\vec{\theta}) + O(n^{-2+4\epsilon}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} S_{kk} \theta_k^2 + \sum_{j=k+1}^n S_{jk} \theta_j \theta_k + O(n^{-2+4\epsilon}), \quad \vec{\theta} \in \Omega. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Используя (5.4), (5.15), (5.18), убеждаемся в том, что

$$S_{kk} = \frac{(\vec{e}^{(k)})^T R \vec{e}^{(k)}}{(d_k + 1)/2} = O(n^{-1}) \|\vec{e}^{(k)}\|_2^2 = O(n^{-1}). \quad (5.52)$$

Поскольку (5.26) подразумевает, что $\|S\|_\infty = O(n^{-1})$, используя (4.22), получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=k+1}^n S_{jk} \langle \theta_j \theta_k \rangle_{F^{k-1}, \Omega} \right| &\leq \left| \sup_{k < j \leq n} \langle \theta_j \theta_k \rangle_{F^{k-1}, \Omega} \right| \sum_{j=k+1}^n |S_{jk}| \\ &= O(n^{-1+5\varepsilon}) \|S\|_\infty = O(n^{-2+5\varepsilon}). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Комбинируя (4.19), (4.20), (5.51) и (5.53), находим, что

$$\langle 1 \rangle_{F^{k-1}, \Omega} = \left(1 + \frac{1}{4} S_{kk} \right) \langle 1 \rangle_{F^k, \Omega} + O(n^{-2+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \quad (5.54)$$

Используя (5.48), (5.52) и (5.54) для $k = 1, 2, \dots, n$, получаем

$$\langle 1 \rangle_{F, \Omega} = C_3 \langle 1 \rangle_{F^n, \Omega} + O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (5.55)$$

где

$$C_3 = \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{R_{kk}}{2(d_k + 1)} \right) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{4} S_{kk} \right) + O(n^{-1}) = O(1). \quad (5.56)$$

5.4. Остаточный член. Для подмножества Θ множества ребер EG определим

$$\begin{aligned} F_\Theta(\vec{\theta}) &= -\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + H_\Theta(\vec{\theta}), \\ H_\Theta(\vec{\theta}) &= -\frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in \Theta} \Delta_{jk}^4. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Аналогичным образом, как и в п. 5.1, мы убеждаемся в том, что все предположения леммы 4.2 выполнены для случая, когда $F_\Theta(\vec{\theta})$ рассматривается вместо $F(\vec{\theta})$, и для констант $a, b, r_1, r_2, c_1, c_2 > 0$, зависящих только от γ .

Заметим, что

$$F_{EG}(\vec{\theta}) = F^n(\vec{\theta}), \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{jk}^4 &= \frac{4\theta_j^4}{(d_j + 1)^2} - 4 \frac{4\theta_j^3 \theta_k}{(d_j + 1)^{3/2} (d_k + 1)^{1/2}} + 6 \frac{4\theta_j^2 \theta_k^2}{(d_j + 1)(d_k + 1)} \\ &\quad - 4 \frac{4\theta_k^3 \theta_j}{(d_k + 1)^{3/2} (d_j + 1)^{1/2}} + \frac{4\theta_k^4}{(d_k + 1)^2}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Комбинируя (4.21), (4.23), (4.24), (5.4) и (5.59), получаем

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{jk}^4 \rangle_{F_\Theta, \Omega} &= \left(\frac{3}{4} \frac{4}{(d_j + 1)^2} + \frac{6}{4} \frac{4}{(d_j + 1)(d_k + 1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \frac{4}{(d_k + 1)^2} \right) \langle 1 \rangle_{F_\Theta, \Omega} + O(n^{-3+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Используя (4.19) и (5.60), находим, что

$$\langle e^{-\frac{1}{12} \Delta_{jk}^4} \rangle_{F_\Theta, \Omega} = P_{jk} \langle 1 \rangle_{F_\Theta, \Omega} + O(n^{-3+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (5.61)$$

где

$$P_{jk} = 1 - \frac{1}{4(d_j + 1)^2} - \frac{1}{2(d_j + 1)(d_k + 1)} - \frac{1}{4(d_k + 1)^2}. \quad (5.62)$$

Отметим, что

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq P_{jk} \leq 1. \quad (5.63)$$

Используя (4.19), (5.61), мы постепенно избавляемся от всех ребер в остаточном члене H_{EG} и получаем

$$\langle 1 \rangle_{F_{EG}, \Omega} = \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} P_{jk} \langle 1 \rangle_{\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \quad (5.64)$$

Комбинируя (4.18) и (5.64), находим, что

$$\langle 1 \rangle_{F_{EG}, \Omega} = C_4 \langle 1 \rangle + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (5.65)$$

где

$$C_4 = \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{d_j + 1} + \frac{1}{d_k + 1} \right)^2 \right). \quad (5.66)$$

Используя (5.40), (5.44), (5.55), (5.58) и (5.65), убеждаемся в том, что

$$\langle e^{i\vec{p}^T \vec{\theta}} \rangle_{F, \Omega} = C_1 C_2 C_3 C_4 \langle 1 \rangle + O(n^{-\frac{1}{2}+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \quad (5.67)$$

Учитывая (4.9), (5.10), (5.41), (5.45), получаем

$$\begin{aligned} C_1 C_2 &= \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{\beta}^T \hat{Q}^{-1} \vec{\beta} \right), \\ \vec{\beta}^T \hat{Q}^{-1} \vec{\beta} &= \vec{\alpha}^T Q^T \hat{Q}^{-1} (Q + J) \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^T Q \hat{Q}^{-1} J \vec{\alpha} \\ &= \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{d_j + 1} - \frac{1}{d_k + 1} \right)^2 + O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Используя вновь (4.9), (5.10), находим, что

$$\begin{aligned} R_{kk} &= \text{tr}(\Lambda(\vec{e}^{(k)}) \hat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{e}^{(k)}) \hat{Q}^{-1}) \\ &= \sum_{j,m=1}^n \Lambda_{jj}(\vec{e}^{(k)}) (\hat{Q}^{-1})_{jm} \Lambda_{mm}(\vec{e}^{(k)}) (\hat{Q}^{-1})_{mj} = 1 + O(n^{-1}), \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{R_{kk}}{2(d_k + 1)} \right) = \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2(d_k + 1)} \right) + O(n^{-1}) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \left(\frac{1}{(d_j + 1)^2} + \frac{1}{(d_k + 1)^2} \right) \right) + O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Собирая вместе (3.1), (3.6), (3.12), (5.1), (5.7), (5.13) и (5.65)–(5.70), мы получаем (2.5) и (2.6) для $n \geq n_0(\gamma, \varepsilon) > 0$ (однако с показателем 7ε вместо ε). Оценка (2.6) для $n \leq n_0$ выполняется при выборе достаточно большой константы C .

§ 6. Доказательство леммы 4.2

В настоящем параграфе мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от r_1, r_2, c_1, c_2, a, b и ε .

Пусть

$$\vec{\varphi}(\vec{\theta}) = (\varphi_1(\vec{\theta}), \varphi_2(\vec{\theta}), \dots, \varphi_n(\vec{\theta}))^T = A\vec{\theta}. \quad (6.1)$$

Согласно условиям (i), (ii) из § 4 имеем $A = I + X$, $X_{jj} = 0$, и поэтому получаем, что для некоторого $g_1(\vec{\theta}) = g_1(\theta_2, \dots, \theta_n)$

$$\vec{\theta}^T A \vec{\theta} = \varphi_1^2(\vec{\theta}) + g_1(\vec{\theta}). \quad (6.2)$$

Используя условия (i), (ii) из § 4, а также (6.2) и оценивая части гауссовского интеграла следующего типа:

$$\int (\max\{|x|, k_1\})^s e^{-(x-k_2)^2} dx, \quad (6.3)$$

находим, что для любых $r > 0, s \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle \|\vec{\theta}\|_\infty^s \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-g_1(\theta_2, \dots, \theta_n)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 \right) d\theta_2 \dots d\theta_n \\ &= (1 + O(\exp(-c_4 n^{2\varepsilon}))) \int_{|\varphi_1(\vec{\theta})| \leq rn^\varepsilon} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $c_4 = c_4(r, \varepsilon, s) > 0$. Комбинируя выражения, аналогичные (6.4) для $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, получаем

$$\int_{\|\vec{\varphi}(\vec{\theta})\|_\infty \leq rn^\varepsilon} \|\vec{\theta}\|_\infty^s e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} = (1 + O(\exp(-c_5 n^{2\varepsilon}))) \langle \|\vec{\theta}\|_\infty^s \rangle, \quad (6.5)$$

где $c_5 = c_5(r, \varepsilon, s) > 0$. Комбинируя (4.8), (6.1) и (6.5) для $s = 0$, мы получаем (4.18).

Используя (4.15), находим, что

$$|\langle 1 \rangle_{F, \Omega}| \leq \int_{\Omega} |e^{F(\vec{\theta})}| d\vec{\theta} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + \frac{c_1}{n} \vec{\theta}^T A \vec{\theta}\right) d\vec{\theta} = O(\langle 1 \rangle). \quad (6.6)$$

Для того чтобы показать (4.20)–(4.24), используются следующие две леммы. Их доказательства приведены в § 7.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – такая область, что $U_n(r_1 n^\varepsilon) \subset \Omega \subset U_n(r_2 n^\varepsilon)$ для некоторых $r_2 > r_1 > 0$. Пусть A удовлетворяет условиям (i), (ii) из § 4 и предположения (4.15), (4.16) выполнены для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$. Пусть $P = P(x) = O(|x|^s)$ для некоторого фиксированного $s \geq 0$. Тогда для любой функции $T(\vec{\theta})$ такой, что $|T(\vec{\theta})| \leq P(\|\vec{\theta}\|_\infty)$, выполняется

$$\langle T(\vec{\theta}) \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle \quad (6.7)$$

и для любой функции $T(\vec{\theta})$ такой, что $\tilde{T}(\vec{\theta}) = \tilde{T}(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n)$ и $\tilde{T}(\vec{\theta}) \leq P(\|\vec{\theta}\|_\infty)$, выполняются соотношения

$$\langle \varphi_k^2(\vec{\theta}) \tilde{T}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} = \frac{1}{2} \langle \tilde{T}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle |\tilde{T}(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle, \quad (6.8)$$

$$\langle \varphi_k^4(\vec{\theta}) \tilde{T}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} = \frac{3}{4} \langle \tilde{T}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle |\tilde{T}(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle, \quad (6.9)$$

$$\langle \varphi_k(\vec{\theta}) \tilde{T}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle |\tilde{T}(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle, \quad (6.10)$$

$$\langle \varphi_k^3(\vec{\theta}) \tilde{T}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+6\varepsilon}) \langle |\tilde{T}(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle, \quad (6.11)$$

где функция F определена согласно (4.14), вектор $\vec{\varphi}(\vec{\theta})$ определен согласно (6.1) и константа $c_6 = c_6(r_1, r_2, c_1, c_2, a, b, \varepsilon, P)$ больше нуля.

ЛЕММА 6.2. Пусть предположения леммы 6.1 выполнены. Для неотрицательных целых чисел $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ пусть

$$M(\vec{x}) = x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}, \quad s = s_1 + \dots + s_n > 0. \quad (6.12)$$

Пусть

$$s_k = 0, \quad |\{j: s_j \neq 0\}| \leq 3. \quad (6.13)$$

Тогда

$$\langle \varphi_k(\vec{\theta}) M(\vec{\varphi}(\vec{\theta})) \rangle_{F,\Omega} = O(sn^{-1+(s+4)\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \quad (6.14)$$

Используя (4.9), находим, что

$$\theta_k = \varphi_k + \vec{q}_k^T \vec{\varphi}, \quad \|\vec{q}_k\|_\infty = O(n^{-1}). \quad (6.15)$$

Комбинируя (6.6), (6.15), лемму 6.1 и лемму 6.2, получаем

$$\begin{aligned} \langle \delta_k^2(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} &= \langle (\vec{q}_k^T \vec{\varphi})^2 \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-2}) \left(\sum_j \langle \varphi_j^2(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} + \sum_{j_1 \neq j_2} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega}| \right) \\ &= (O(n^{-1}) + O(n^{-1+5\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta_k^4(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} &= \langle (\vec{q}_k^T \vec{\varphi})^4 \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-4}) \sum_j \langle \varphi_j^4(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} \\ &\quad + O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2} \langle \varphi_{j_1}^2(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}^2(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}^3(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega}| \\ &\quad + O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta}) \varphi_{j_3}^2(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega}| \\ &\quad + O(n^{-4}) \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta}) \varphi_{j_3}(\vec{\theta}) \varphi_{j_4}(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega}| \\ &= (O(n^{-3}) + O(n^{-2+4\varepsilon}) + O(n^{-3+7\varepsilon}) + O(n^{-2+7\varepsilon}) + O(n^{-1+7\varepsilon})) \langle 1 \rangle \\ &= O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где

$$\delta_k(\vec{\theta}) = \theta_k - \varphi_k(\vec{\theta}). \quad (6.18)$$

Согласно условиям (i), (ii) из § 4 имеем

$$\delta_k(\vec{\theta}) = \delta_k(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n). \quad (6.19)$$

Используя (6.6), (6.15)–(6.17), (6.19) и лемму 6.1, получаем

$$\langle \varphi_k(\vec{\theta}) \delta_k(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle |\delta_k(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_k^2 \rangle_{F,\Omega} &= \langle (\varphi_k(\vec{\theta}) + \delta_k(\vec{\theta}))^2 \rangle_{F,\Omega} = \langle \varphi_k^2(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle 1 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\langle \varphi_k(\vec{\theta}) \delta_k^3(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle |\delta_k^3(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k^2(\vec{\theta}) \delta_k^2(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} &= \left(\frac{1}{2} + O(n^{-1+4\varepsilon}) \right) \langle \delta_k^2(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} \\ &\quad + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\langle \varphi_k^3(\vec{\theta}) \delta_k(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+6\varepsilon}) \langle |\delta_k(\vec{\theta})| \rangle_{F,\Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_k^4 \rangle_{F,\Omega} &= \langle (\varphi_k(\vec{\theta}) + \delta_k^4(\vec{\theta})) \rangle_{F,\Omega} = \langle \varphi_k^4(\vec{\theta}) \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle \\ &= \frac{3}{4} \langle 1 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Аналогичным образом, как и в (6.16), (6.17), используя (6.20)–(6.24), находим, что

$$\begin{aligned} \langle \delta_k(\vec{\theta}) \theta_l \rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-1}) \sum_j \langle \varphi_j(\vec{\theta}) \theta_l \rangle_{F,\Omega} \\ &= (O(n^{-1+2\varepsilon}) + O(n^{-1+5\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta_k^2(\vec{\theta}) \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-2}) \sum_j \langle \varphi_j^2(\vec{\theta}) \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega} \\ &\quad + O(n^{-2}) \sum_{j_1 \neq j_2} |\langle \varphi_{j_1}(\vec{\theta}) \varphi_{j_2}(\vec{\theta}) \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega}| \\ &= (O(n^{-1+2\varepsilon}) + O(n^{-1+7\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta_k(\vec{\theta}) \theta_l^3 \rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-1}) \sum_{j \neq l} \langle \varphi_j(\vec{\theta}) \theta_l^3 \rangle_{F,\Omega} + O(n^{-1}) \langle \varphi_l(\vec{\theta}) \theta_l^3 \rangle_{F,\Omega} \\ &= (O(n^{-1+7\varepsilon}) + O(n^{-1+4\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Используя (6.6), (6.19), (6.26)–(6.28) и лемму 6.1, получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k(\vec{\theta}) \delta_k(\vec{\theta}) \theta_l^2 \rangle_{F,\Omega} &= O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle |\delta_k(\vec{\theta}) \theta_l^2| \rangle_{F,\Omega} \\ &\quad + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle = O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\langle \theta_k \theta_l \rangle_{F,\Omega} = \langle (\varphi_k(\vec{\theta}) + \delta_k(\vec{\theta})) \theta_l \rangle_{F,\Omega} = O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (6.30)$$

$$\langle \theta_k \theta_l^3 \rangle_{F, \Omega} = \langle (\varphi_k(\vec{\theta}) + \delta_k(\vec{\theta})) \theta_l^3 \rangle_{F, \Omega} = O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_k^2 \theta_l^2 \rangle_{F, \Omega} &= \langle (\varphi_k(\vec{\theta}) + \delta_k(\vec{\theta}))^2 \theta_l^2 \rangle_{F, \Omega} = \langle \varphi_k^2(\vec{\theta}) \theta_l^2 \rangle_{F, \Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (\varphi_l(\vec{\theta}) + \delta_l(\vec{\theta}))^2 \rangle_{F, \Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle = \frac{1}{4} \langle 1 \rangle_{F, \Omega} + O(n^{-1+7\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Поскольку $\|\vec{p}\|_\infty = O(n^{-1/2})$, используем выражение

$$e^{\frac{1}{2} p_k^2 \theta_k^2} = 1 + O(n^{-1+2\varepsilon}), \quad \vec{\theta} \in \Omega, \quad (6.33)$$

и (6.6), находим, что

$$\langle \theta_k e^{i\vec{\theta}^T \vec{p} - ip_k \theta_k} \rangle_{F, \Omega} = \langle \theta_k e^{i\vec{\theta}^T \vec{p} - ip_k \theta_k} \rangle_{F', \Omega} + O(n^{-1+3\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \quad (6.34)$$

где $F' = F - \frac{1}{2} p_k^2 \theta_k^2$. Очевидно, что F' удовлетворяет всем предположениям леммы 6.1. Для любого $\vec{p}' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_n) \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\|\vec{p}'\|_\infty = O(n^{-1/2})$, выполняется

$$e^{ip'_l \theta_l} = 1 + ip'_l \theta_l + O(n^{-1+2\varepsilon}), \quad e^{-ip'_l \theta_l} = 1 + O(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \vec{\theta} \in \Omega. \quad (6.35)$$

Используя (6.6), (6.8) и (6.10) при F' вместо F , а также (6.35), получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_l(\vec{\theta}) e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} &= O(n^{-1+4\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \\ \langle \varphi_l(\vec{\theta}) \delta_l(\vec{\theta}) e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} &= O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle, \\ \langle \varphi_l(\vec{\theta}) \theta_l e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} &= \langle \varphi_l^2(\vec{\theta}) e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} + \langle \varphi_l(\vec{\theta}) \delta_l(\vec{\theta}) e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} \\ &= \frac{1}{2} \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} + O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle = \frac{1}{2} \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}'} \rangle_{F', \Omega} + O(n^{-\frac{1}{2}+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Комбинируя (6.35) и (6.36), находим, что

$$\begin{aligned} \langle \varphi_l(\vec{\theta}) e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}'} \rangle_{F', \Omega} &= \langle \varphi_l(\vec{\theta}) e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} \\ &\quad + ip'_l \langle \varphi_l(\vec{\theta}) \theta_l e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}' - ip'_l \theta_l} \rangle_{F', \Omega} + O(n^{-1+3\varepsilon}) \langle 1 \rangle \\ &= \frac{i}{2} p'_l \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}'} \rangle_{F', \Omega} + O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Используя (4.8), (6.1) и (6.37), получаем

$$\langle \theta_k e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}'} \rangle_{F', \Omega} = \frac{i}{2} \sum_{l=1}^n p'_l (A^{-1})_{lk} \langle e^{i\vec{\theta}^T \vec{p}'} \rangle_{F', \Omega} + O(n^{-1+5\varepsilon}) \langle 1 \rangle. \quad (6.38)$$

Комбинируя (6.34) и (6.38) для $\vec{p}' = \vec{p} - p_k \vec{e}^{(k)}$, мы получаем (4.25).

§ 7. Доказательства леммы 6.1 и леммы 6.2

В настоящем параграфе мы продолжаем использовать обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от констант r_1, r_2, c_1, c_2, a, b и ε .

Пусть

$$\vec{\theta}^{(k)} = (\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, 0, \theta_{k+1}, \dots, \theta_n)^T. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.1. Используя (4.8), (6.1) и (6.5), находим, что

$$|\langle T \rangle_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}| \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} P(\|\vec{\theta}\|_\infty^s) e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta}} d\vec{\theta} = O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle. \quad (7.2)$$

Для простоты пусть $k = 1$. Используя (7.2), получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1^p(\vec{\theta}) \tilde{T}(\vec{\theta}) \rangle_{F, \Omega} &= \int_{\Omega} \varphi_1^p(\vec{\theta}) \tilde{T}(\theta_2, \dots, \theta_n) e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + H(\vec{\theta})} d\vec{\theta} \\ &= \int_{U_n(r_2 n^\varepsilon)} \varphi_1^p(\vec{\theta}) \tilde{T}(\theta_2, \dots, \theta_n) e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + H(\vec{\theta})} d\vec{\theta} \\ &\quad + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle, \quad p = 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $H(\vec{\theta}) \equiv 0$ для $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Комбинируя (4.16) и теорему Лагранжа о среднем значении, находим, что

$$H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)}) = O(n^{-1+4\varepsilon}), \quad \vec{\theta} \in U_n(r_2 n^\varepsilon). \quad (7.4)$$

Используя (6.2), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{U_n(r_2 n^\varepsilon)} \varphi_1^p(\vec{\theta}) \tilde{T}(\theta_2, \dots, \theta_n) e^{-\vec{\theta}^T A \vec{\theta} + H(\vec{\theta})} d\vec{\theta} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle \\ &= \int_{-r_2 n^\varepsilon}^{r_2 n^\varepsilon} \dots \int_{-r_2 n^\varepsilon}^{r_2 n^\varepsilon} \tilde{T} e^{-g_1(\theta_2, \dots, \theta_n) + H(\vec{\theta}^{(1)})} \\ &\quad \times \left(\int_{-r_2 n^\varepsilon}^{r_2 n^\varepsilon} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta}) + H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)})} d\theta_1 \right) d\theta_2 \dots d\theta_n, \quad p = 0, \dots, 4. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Комбинируя (4.8) и (7.4), получаем, что для $\vec{\theta}^{(1)} \in U_n(r_2 n^\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &\int_{-r_2 n^\varepsilon}^{r_2 n^\varepsilon} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta}) + H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)})} d\theta_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 + O(\exp(-c_7 n^{2\varepsilon})) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 \\ &\quad + \int_{|\varphi_1(\vec{\theta})| \leq r_3 n^\varepsilon} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)})} - 1) d\theta_1, \quad p = 0, \dots, 4, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где $c_7 = c_7(r_2, c_1, c_2, a, b, \varepsilon) > 0$, $r_3 = r_3(r_2, c_1, c_2, a, b, \varepsilon) > 0$.

При $p = 2, 4$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^2 e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^4 e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 &= \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} &\int_{|\varphi_1(\vec{\theta})| < r_3 n^\varepsilon} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)})} - 1) d\theta_1 \\ &= O(n^{-1+4\varepsilon}) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 = O(n^{-1+4\varepsilon}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 \end{aligned} \quad (7.8)$$

для $\vec{\theta}^{(1)} \in U_n(r_2 n^\varepsilon)$, $p = 0, 2, 4$.

Комбинируя (7.2)–(7.8), мы получаем (6.8) и (6.9).

При $p = 1, 3$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 = 0, \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{|\varphi_1(\vec{\theta})| \leq r_3 n^\varepsilon} \varphi_1^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)})} - 1) d\theta_1 \\ &= \int_{0 \leq \varphi_1(\vec{\theta}) \leq r_3 n^\varepsilon} |\varphi_1|^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)})} - 1) d\theta_1 \\ & \quad - \int_{r_3 n^\varepsilon \leq \varphi_1(\vec{\theta}) \leq 0} |\varphi_1|^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} (e^{H(\vec{\theta}) - H(\vec{\theta}^{(1)})} - 1) d\theta_1 \\ &= O(n^{-1+4\varepsilon}) \int_{\varphi_1 \geq 0} |\varphi_1|^p e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 = O(n^{-1+4\varepsilon}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi_1^2(\vec{\theta})} d\theta_1 \end{aligned} \quad (7.10)$$

для $\vec{\theta}^{(1)} \in U_n(r_2 n^\varepsilon)$, $p = 1, 3$.

Комбинируя (7.2)–(7.6), (7.9), (7.10), мы получаем (6.10) и (6.11). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2. Пусть $T(\vec{\theta})$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} |T(\vec{\theta})| &= O(\|\vec{\theta}\|_\infty^s), \\ \frac{\partial T(\vec{\theta})}{\partial \theta_k} &= O(sn^{-1-\varepsilon}) \sup_{\vec{\theta} \in \Omega} |T(\vec{\theta})|, \quad \vec{\theta} \in \Omega. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Комбинируя (6.10) и (7.11), получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k(\vec{\theta}) T(\vec{\theta}) \rangle_{F, \Omega} &= \langle \varphi_k(\vec{\theta}) T(\vec{\theta}^{(k)}) \rangle_{F, \Omega} + \langle \varphi_k(\vec{\theta}) (T(\vec{\theta}) - T(\vec{\theta}^{(k)})) \rangle_{F, \Omega} \\ &= \langle \varphi_k(\vec{\theta}) T(\vec{\theta}^{(k)}) \rangle_{F, \Omega} + O(sn^{-1-\varepsilon}) \left\langle \sup_{\vec{\theta} \in \Omega} |\varphi_k \theta_k T(\vec{\theta})| \right\rangle_{F, \Omega} \\ &= O(sn^{-1+4\varepsilon}) \left\langle \sup_{\vec{\theta} \in \Omega} |T(\vec{\theta})| \right\rangle_{F, \Omega} + O(\exp(-c_6 n^{2\varepsilon})) \langle 1 \rangle. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Используя условия (i), (ii) из § 4, находим, что для $\vec{\theta} \in \Omega$

$$\frac{\partial M(\vec{\varphi}(\vec{\theta}))}{\partial \theta_k} = O(sn^{(s-1)\varepsilon}) \sum_{j: s_j \neq 0} \frac{\partial \varphi_j(\vec{\theta})}{\partial \theta_k} = O(sn^{-1-\varepsilon}) \sup_{\vec{\theta} \in \Omega} |M(\vec{\varphi}(\vec{\theta}))|. \quad (7.13)$$

Комбинируя (6.6) и (7.12) для $T = M$, мы получаем (6.14).

§ 8. Доказательство предложения 3.1

В настоящем параграфе мы используем обозначение $f = O(g)$, подразумевая, что $|f| \leq c|g|$ для некоторого $c > 0$, зависящего только от γ и ε .

Следующая лемма применяется для оценки детерминанта матрицы, близкой к единичной матрице I .

ЛЕММА 8.1. Пусть $\|\cdot\|$ – любая матричная норма. Пусть X является такой $(n \times n)$ -матрицей, что $\|X\| < 1$. Тогда для фиксированного $m \geq 2$

$$\det(I + X) = \exp\left(\sum_{r=1}^{m-1} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \operatorname{tr}(X^r) + E_m(X)\right), \quad (8.1)$$

где $\operatorname{tr}(\cdot)$ – след матрицы и

$$|E_m(X)| \leq \frac{n}{m} \frac{\|X\|^m}{1 - \|X\|}. \quad (8.2)$$

Идея доказательства леммы 8.1 заключается в оценке следа матрицы $\ln(I + X)$ при использовании представления в виде сходящегося ряда. Лемма 8.1 была также сформулирована и подробно доказана в [7].

Имеем

$$S_0 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \int_{V_0} \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}) d\vec{\xi}, \quad (8.3)$$

где $\Delta_{jk} = \xi_j - \xi_k$ и

$$V_0 = \{\vec{\xi} \in U_n(\pi/2) : |\xi_j - \xi_k|_\pi \leq n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, 1 \leq j, k \leq n\}, \quad (8.4)$$

$$|\xi_j - \xi_k|_\pi = \min_{l \in \mathbb{Z}} |\xi_j - \xi_k + \pi l|.$$

Поскольку подынтегральное выражение в (8.3) и область V_0 инвариантны относительно равномерного сдвига всех $\xi_j \bmod \pi$, можно вычислить интеграл меньшей размерности для $\{\vec{\xi} \in V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}) : \sum_{k=1}^n \xi_k = 0\}$ и домножить на отношение промежутка интегрирования π к длине $n^{-1/2}$ вектора $\frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1)^T$. Поэтому получаем

$$S_0 = \pi n^{\frac{1}{2}} \int_{L \cap V_0 \cap U_n(n^{-1/2+\varepsilon})} K(\vec{\xi}) dL, \quad (8.5)$$

$$K(\vec{\xi}) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}),$$

где L – ортогональное дополнение к вектору $(1, 1, \dots, 1)^T$.

Определим $(n \times n)$ -матрицу B следующим образом:

$$B_{jk} = \begin{cases} -\operatorname{tg} \Delta_{jk}, & \text{если } \{v_j, v_k\} \in EG, \\ \sum_{l: \{v_j, v_l\} \in EG} \operatorname{tg} \Delta_{jl}, & \text{если } k = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (8.6)$$

Используя теорему 3.1 для матрицы $Q + iB$, получаем

$$\sum_{r=1}^n \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{(v_j, v_k) \in ET} (1 + i \operatorname{tg} \Delta_{jk}) = \sum_{r=1}^n M_r, \quad (8.7)$$

где M_r – главный минор матрицы $Q + iB$, образованный удалением r -й строки и r -го столбца. Поскольку $(1, 1, \dots, 1)^T$ – общий собственный вектор матриц Q и B , соответствующий собственному значению 0, находим, что

$$\sum_{r=1}^n M_r = \frac{\det(\widehat{Q} + iB)}{n}, \quad (8.8)$$

где $\widehat{Q} = Q + J$ и J – матрица, все элементы которой равны 1. Заметим, что

$$|\Delta_{jk}| \leq n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad \vec{\xi} \in V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad (8.9)$$

$$\|B\|_1 = \max_j \sum_k |B_{jk}| = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.10)$$

Пусть $\Phi = B\widehat{Q}^{-1}$. Используя (4.8), (5.4), (5.29) и (8.10), получаем

$$\|\Phi\|_1 \leq \|B\|_1 \|\widehat{Q}^{-1}\|_1 = O(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.11)$$

Применяя лемму 8.1 для матрицы $i\Phi$, находим, что

$$\det(I + i\Phi) = \exp\left(i \operatorname{tr} \Phi + \frac{\operatorname{tr} \Phi^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}+3\varepsilon})\right), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.12)$$

Пусть

$$B = B_{\text{skew}} + B_{\text{diag}}, \quad (8.13)$$

где B_{skew} – кососимметрическая матрица, а B_{diag} – диагональная матрица. Поскольку $\widehat{Q}$ – симметрическая матрица, то

$$\operatorname{tr}(B_{\text{skew}}\widehat{Q}^{-1}) = 0. \quad (8.14)$$

Используя (8.9), находим, что

$$\|B_{\text{diag}} - \Lambda\|_2 = O(n^{-\frac{1}{2}+3\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad (8.15)$$

где Λ – матрица, соответствующие диагональные элементы которой равны компонентам вектора $Q\vec{\xi}$. Комбинируя (5.3) и (8.15), получаем

$$|\operatorname{tr}((B_{\text{diag}} - \Lambda)\widehat{Q}^{-1})| \leq n\|B_{\text{diag}} - \Lambda\|_2 \|\widehat{Q}^{-1}\|_2 = O(n^{-\frac{1}{2}+3\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.16)$$

Используя (8.14) и (8.16), находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \Phi &= \operatorname{tr}(B_{\text{diag}}\widehat{Q}^{-1}) = \operatorname{tr}(\Lambda\widehat{Q}^{-1}) + O(n^{-\frac{1}{2}+3\varepsilon}) \\ &= \vec{\xi}^T Q \vec{\alpha} + O(n^{-\frac{1}{2}+3\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\vec{\alpha}$ – вектор, компоненты которого равны соответствующим диагональным элементам в $\widehat{Q}^{-1}$.

Используя свойство следа матрицы

$$\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX), \quad (8.18)$$

получаем

$$\mathrm{tr} \Phi^2 = \mathrm{tr}(B_{\mathrm{skew}} \hat{Q}^{-1})^2 + \mathrm{tr}(B_{\mathrm{diag}} \hat{Q}^{-1})^2 + 2 \mathrm{tr}(B_{\mathrm{skew}} \hat{Q}^{-1} B_{\mathrm{diag}} \hat{Q}^{-1}). \quad (8.19)$$

Поскольку B_{skew} – кососимметрическая матрица, а $\hat{Q}^{-1} B_{\mathrm{diag}} \hat{Q}^{-1}$ – симметрическая матрица, находим, что

$$\mathrm{tr}(B_{\mathrm{skew}} \hat{Q}^{-1} B_{\mathrm{diag}} \hat{Q}^{-1}) = 0. \quad (8.20)$$

Согласно (5.16) имеем

$$\mathrm{tr} X^2 \leq \|X\|_{HS}^2, \quad \|XY\|_{HS} \leq \|X\|_{HS} \|Y^T\|_2. \quad (8.21)$$

Поэтому получаем

$$|\mathrm{tr}(B_{\mathrm{skew}} \hat{Q}^{-1})^2| \leq \|B_{\mathrm{skew}} \hat{Q}^{-1}\|_{HS}^2. \quad (8.22)$$

Комбинируя (5.3) и (8.9), находим, что

$$\|B_{\mathrm{skew}} \hat{Q}^{-1}\|_{HS} \leq \|\hat{Q}^{-1}\|_2 \|B_{\mathrm{skew}}\|_{HS} = O(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.23)$$

Используя (5.3), (8.9) и (8.15), получаем

$$\begin{aligned} & |\mathrm{tr}((B_{\mathrm{diag}} - \Lambda) \hat{Q}^{-1} B_{\mathrm{diag}} \hat{Q}^{-1})| \\ & \leq n \|\hat{Q}^{-1}\|_2^2 \|B_{\mathrm{diag}} - \Lambda\|_2 \|B_{\mathrm{diag}}\|_2 = O(n^{-1+4\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}), \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} & |\mathrm{tr}((B_{\mathrm{diag}} - \Lambda) \hat{Q}^{-1} (B_{\mathrm{diag}} - \Lambda) \hat{Q}^{-1})| \\ & \leq n \|\hat{Q}^{-1}\|_2^2 \|B_{\mathrm{diag}} - \Lambda\|_2^2 = O(n^{-2+6\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Комбинируя (8.18), (8.24) и (8.25), мы находим, что

$$\mathrm{tr}(B_{\mathrm{diag}} \hat{Q}^{-1})^2 = \mathrm{tr}(\Lambda \hat{Q}^{-1})^2 + O(n^{-1+4\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.26)$$

Теперь, комбинируя (8.19), (8.20), (8.22), (8.23) и (8.26), получаем

$$\mathrm{tr} \Phi^2 = \mathrm{tr}(\Lambda \hat{Q}^{-1})^2 + O(n^{-1+4\varepsilon}), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.27)$$

Подставляя (8.17) и (8.27) в (8.12), мы убеждаемся в том, что

$$\det(I + i\Phi) = \exp\left(i\vec{\xi}^T Q \vec{\alpha} + \frac{\mathrm{tr}(\Lambda \hat{Q}^{-1})^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}+4\varepsilon})\right), \quad \vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (8.28)$$

Используя разложения в ряд Тейлора, мы находим, что для $\vec{\xi} \in U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$

$$\prod_{\{v_j, v_k\} \in EG} \cos \Delta_{jk} = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + O(n^{-1+6\varepsilon})\right). \quad (8.29)$$

Заметим, что

$$\sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^2 = \vec{\xi}^T Q \vec{\xi}. \quad (8.30)$$

Собирая вместе (8.5) для $r = 1, 2, \dots, n$, (8.7), (8.8), (8.28)–(8.30), мы получаем

$$S_0 = \pi n^{-\frac{3}{2}} \det \widehat{Q} (\text{Int}' + O(n^{-\frac{1}{2}+6\varepsilon}) \text{Int}''), \quad (8.31)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Int}' &= \int_{L \cap V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})} \exp(i\vec{\xi}^T Q \vec{\alpha} + F(\vec{\xi})) dL, \quad \text{Int}'' = \int_{L \cap V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})} e^{F(\vec{\xi})} dL, \\ F(\vec{\xi}) &= -\frac{1}{2} \vec{\xi}^T \widehat{Q} \vec{\xi} - \frac{1}{12} \sum_{\{v_j, v_k\} \in EG} \Delta_{jk}^4 + \frac{1}{2} R(\vec{\xi}); \end{aligned} \quad (8.32)$$

здесь $R(\vec{\xi}) = \text{tr}(\Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1} \Lambda(\vec{\xi}) \widehat{Q}^{-1})$.

Пусть $\text{Pr}(\vec{\xi})$ – ортогональная проекция вектора $\vec{\xi}$ на пространство L , где L – ортогональное дополнение к $(1, 1, \dots, 1)^T$. Заметим, что

$$\text{Pr}(\vec{\xi}) = \vec{\xi} - \bar{\xi}(1, 1, \dots, 1)^T, \quad (8.33)$$

где

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}. \quad (8.34)$$

Поэтому

$$U_n\left(\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \subset \{\vec{\xi}: \text{Pr}(\vec{\xi}) \in V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})\}. \quad (8.35)$$

Заметим, что

$$Q\vec{\xi} = Q \text{Pr}(\vec{\xi}). \quad (8.36)$$

Поэтому подынтегральное выражение в (8.32) не меняется при замене $\vec{\xi}$ на вектор $\text{Pr}(\vec{\xi})$ и

$$\begin{aligned} \text{Int}' &= \int_{\text{Pr}(\vec{\xi}) \in L \cap V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})} e^{i\vec{\xi}^T Q \vec{\alpha} + F(\vec{\xi})} d\vec{\xi} \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}nx^2} dx \\ &= \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{Pr}(\vec{\xi}) \in V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})} e^{i\vec{\xi}^T Q \vec{\alpha} + F(\vec{\xi})} d\vec{\xi}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Int}'' &= \int_{\text{Pr}(\vec{\xi}) \in L \cap V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})} e^{F(\vec{\xi})} d\vec{\xi} \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}nx^2} dx \\ &= \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{Pr}(\vec{\xi}) \in V_0 \cap U_n(n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})} e^{F(\vec{\xi})} d\vec{\xi}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Используя обозначения (5.6)–(5.11) и формулы (4.19), (8.35), (5.67), получаем

$$\text{Int}' = (1 + O(\exp(-c_7 n^{2\varepsilon}))) \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \text{Int}, \quad \text{Int}'' = O(1) \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \text{Int}, \quad (8.39)$$

где $c_7 > 0$ зависит только от γ и ε .

Комбинируя (8.31) и (8.39), мы получаем (3.12).

Работа выполнена под руководством С. П. Тарасова.

Список литературы

1. N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, *Graph theory* 1736–1936, Clarendon Press, Oxford, 1976.
2. G. Brightwell, P. Winkler, “Note on counting Eulerian circuits”, *Proc. of the 7th ALLENEX and 2nd ANALCO* 2005 (ALLENEX/ANALCO 2005, BC), Vancouver, 2005, 259–262, [arXiv:cs/0405067v1](#).
3. S. Arora, D. Karger, M. Karpinski, “Polynomial time approximation schemes for dense instances of NP-hard problems”, *J. Comput. System Sci.*, **58**:1 (1999), 193–210.
4. M. Mihail, P. Winkler, “On the number of Eulerian orientations of a graph”, *Algorithmica*, **16**:4–5 (1996), 402–414.
5. P. Chebulu, M. Cryan, R. Martin, “Exact counting of Euler tours for generalized series-parallel graphs”, *J. Discrete Algorithms*, **10** (2012), 110–122.
6. P. Tetali, S. Vempala, “Random sampling of Euler tours”, *Algorithmica*, **30**:3 (2001), 376–385.
7. B. D. McKay, R. W. Robinson, “Asymptotic enumeration of Eulerian circuits in the complete graph”, *Combin. Probab. Comput.*, **7**:4 (1998), 437–449.
8. M. Isaev, “Asymptotic behaviour of the number of Eulerian circuits”, *Electron. J. Combin.*, **18**:1 (2011), 219.
9. М. И. Исаев, К. В. Исаева, “О классе графов, обладающих сильными смешивающими свойствами”, *Тр. МФТИ*, **5** (2013), 171–181.
10. М. И. Исаев, “Асимптотическое поведение числа эйлеровых ориентаций графов”, *Матем. заметки*, **93**:6 (2013), 828–843; англ. пер.: M. I. Isaev, “Asymptotic behavior of the number of Eulerian orientations of graphs”, *Math. Notes*, **93**:6 (2013), 816–829.
11. M. Fiedler, “Algebraic connectivity of graphs”, *Czechoslovak Math. J.*, **23(98)** (1973), 298–305.
12. B. Mohar, “The Laplacian spectrum of graphs”, *Graph theory, combinatorics, and applications*, v. 2 (Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA, 1988), Wiley, New York, 1991, 871–898.
13. G. Kirchhoff, “Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird”, *Ann. Phys. Chem.*, **72** (1847), 497–508.
14. W. T. Tutte, “The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **44**:4 (1948), 463–482.

М. И. ИСАЕВ

(M. I. ISAEV)

Московский физико-технический институт,

факультет управления и прикладной математики

E-mail: isaev.m.i@gmail.com

Поступило в редакцию

27.09.2012