Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Неганова, В. И. Трофимов, Симметрические расширения графов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 4, 175–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8054>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 04:35:42

УДК 512.54+519.17

Е. А. Неганова, В. И. Трофимов

Симметрические расширения графов

Исследуются симметрические расширения графов, причем особое внимание уделяется симметрическим и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим расширениям d -мерных решеток Λ^d посредством конечных графов. Рассматриваемые вопросы представляют интерес для теории групп и теории графов, а также могут представлять интерес для кристаллографии и некоторых разделов физики. Доказывается существование связного локально конечного графа, имеющего бесконечное число симметрических расширений посредством фиксированного конечного графа. С другой стороны, в ряде представляющих интерес случаев доказывается конечность числа симметрических и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа. Кроме того, для каждого целого положительного числа d строятся все $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические расширения d -мерной решетки Λ^d посредством графов с двумя вершинами.

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: симметрическое расширение графов, граф Кэли группы, d -мерная решетка, автоморфизмы графа.

DOI: 10.4213/im8054

§ 1. Введение

Пусть Γ и Δ – графы (под графом в настоящей работе понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер). Следуя [1], назовем связный граф $\tilde{\Gamma}$ *симметрическим расширением графа Γ посредством графа Δ* , если существуют такая вершинно-транзитивная группа $\tilde{G}$ автоморфизмов графа $\tilde{\Gamma}$ и такая система импримитивности σ группы $\tilde{G}$ на множестве $V(\tilde{\Gamma})$ вершин графа $\tilde{\Gamma}$, что факторграф $\tilde{\Gamma}/\sigma$ изоморфен графу Γ и блоки системы σ порождают в $\tilde{\Gamma}$ подграфы, изоморфные графу Δ . Ясно, что симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ существует лишь для Γ и Δ , допускающих транзитивные на вершинах группы автоморфизмов, причем граф Γ должен быть связным. (В случае, если граф Γ имеет более одной вершины, эти условия являются также достаточными для существования симметрического расширения Γ посредством Δ . Действительно, в этом случае в качестве симметри-

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00349-а), Программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и Программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018); кроме того, работа первого автора поддержана грантом УрО РАН для молодых ученых (проект АЗ, 2012 г.), а работа второго автора выполнена в рамках проекта, подпадающего под Соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом (№ 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

ческого расширения Γ посредством Δ может быть взято, например, лексикографическое произведение графов Γ и Δ ; см. [2].) Если в приведенном выше определении симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ отказаться от условия связности графа $\tilde{\Gamma}$, то получим определение *обобщенного симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ* . При этом если φ – изоморфизм графа $\tilde{\Gamma}/\sigma$ на граф Γ , то будем говорить, что $\tilde{\Gamma}$ – обобщенное симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ , *реализуемое $\tilde{G}$, σ , φ* .

Симметрические расширения графов представляют интерес в силу целого ряда причин (см. ниже). При этом часто бывает важно, чтобы (мы используем обозначения из приводимого выше определения симметрического расширения Γ посредством Δ) при изоморфизме $\tilde{\Gamma}/\sigma$ на Γ индуцируемая $\tilde{G}$ группа $\tilde{G}^\sigma$ автоморфизмов графа $\tilde{\Gamma}/\sigma$ переходила в некоторую заданную группу автоморфизмов G графа Γ . В связи с этим, следуя [1], для графов Γ , Δ и вершинно-транзитивной группы автоморфизмов G графа Γ связный граф $\tilde{\Gamma}$ назовем *G -симметрическим расширением графа Γ посредством графа Δ* , если граф $\tilde{\Gamma}$ является симметрическим расширением графа Γ посредством графа Δ , реализуемым такими $\tilde{G}$, σ , φ , что $\varphi\tilde{G}^\sigma\varphi^{-1} = G$. Если в этом определении отказаться от условия связности графа $\tilde{\Gamma}$, то получим определение *обобщенного G -симметрического расширения графа Γ посредством графа Δ* (реализуемого $\tilde{G}$, σ , φ).

Укажем некоторые направления исследований, где (обобщенные) симметрические расширения графов возникают естественным образом, а их изучение может представлять интерес (ср. [1]).

1. Понятие симметрического расширения одного графа посредством другого графа аналогично хорошо известному понятию расширения одной группы посредством другой группы. Связь между расширениями групп и симметрическими расширениями графов можно формализовать следующим образом. Если $\tilde{G}$ – группа с системой порождающих $\tilde{M}$ такой, что $1 \notin \tilde{M} = \tilde{M}^{-1}$, и N – нормальная подгруппа группы $\tilde{G}$, то для группы $G = \tilde{G}/N$ и ее естественного действия на своем графе Кэли $\Gamma_{G,M}$, построенном по системе порождающих $M = \{gN : g \in \tilde{M} \setminus N\}$, граф Кэли $\Gamma_{\tilde{G},\tilde{M}}$ группы $\tilde{G}$, построенный по системе порождающих $\tilde{M}$, является G -симметрическим расширением $\Gamma_{G,M}$ посредством графа Кэли $\Gamma_{N,\tilde{M} \cap N}$ группы N , построенного по множеству $\tilde{M} \cap N$. (Определение графа Кэли группы, построенного по ее подмножеству, не содержащему 1 и замкнутому относительно операции взятия обратного элемента, см. в § 2.) В связи с этим изучение симметрических расширений графов представляет интерес для теории групп.

2. Для вершинно-симметрических (т. е. допускающих транзитивные на вершинах группы автоморфизмов) графов Γ и Δ ряд известных конструкций теории графов, таких, например, как декартово, прямое, лексикографическое и некоторые другие произведения (см. [2]), приводят к симметрическим расширениям Γ посредством Δ . Далее, если Γ – связный граф, допускающий вершинно-транзитивную группу автоморфизмов G , и если $\psi: V(\tilde{\Gamma}) \rightarrow V(\Gamma)$ – накрывающее отображение связного графа $\tilde{\Gamma}$ на граф Γ такое, что соответствующая ему накрывающая группа $\tilde{G} := \{g \in \text{Aut}(\tilde{\Gamma}) : \psi g \in G\psi\}$ группы G

вершинно-транзитивна, то множество слоев $\sigma := \{\psi^{-1}(x) : x \in V(\Gamma)\}$ есть система импримитивности $\tilde{G}$ (на $V(\tilde{\Gamma})$) и ψ индуцирует изоморфизм φ графа $\tilde{\Gamma}/\sigma$ на Γ такой, что $\varphi\tilde{G}^\sigma\varphi^{-1}$ – вершинно-транзитивная подгруппа группы G . Следовательно, $\tilde{\Gamma}$ является $(\varphi\tilde{G}^\sigma\varphi^{-1})$ -симметрическим расширением Γ посредством Δ , где Δ – подграф графа $\tilde{\Gamma}$, порожденный некоторым слоем из σ .

3. Ранее для ряда важных классов связанных бесконечных локально конечных вершинно-симметрических графов были получены описания, имеющие по существу следующий вид: графы из рассматриваемого класса являются в точности G -симметрическими расширениями некоторых известных графов Γ посредством конечных графов, где G – некоторые заданные группы автоморфизмов графов Γ . Указанного вида описания были получены, например, для графов с полиномиальным ростом (см. [3]), для графов с рекуррентным случайным блужданием (см. [4]) и для графов с вершинно-транзитивной группой ограниченных автоморфизмов (см. [5]). Изучение таких G -симметрических расширений графов Γ посредством конечных графов является, таким образом, более детальным исследованием этих классов. Определенный интерес представляет, следовательно, изучение симметрических расширений бесконечных локально конечных графов посредством конечных графов.

4. Если $\tilde{\Gamma}$ – симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ , то граф $\tilde{\Gamma}$ можно интерпретировать “кристаллографически” как граф Γ , вершины которого наделены внутренней структурой вида Δ (такие наделенные внутренней структурой вершины графа Γ являются своего рода “молекулами” вида Δ), причем эти внутренние структуры вершин графа Γ согласуются со структурой Γ так, что вся получающаяся в результате конструкция $\tilde{\Gamma}$ симметрична (т. е. граф $\tilde{\Gamma}$ допускает вершинно-транзитивную группу автоморфизмов, отображающих “молекулы” на “молекулы”). В связи с этим для кристаллографии частиц с внутренней структурой интерес представляют симметрические расширения d -мерных решеток Λ^d (определение см. в § 2) посредством конечных графов. Определенный интерес представляет следующий вопрос: верно ли, что для любого целого положительного числа d и любого конечного графа Δ существует лишь конечное число симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством графа Δ ?

5. В некоторых физических теориях (см., например, [6]) пространство-время наряду с d “обычными размерностями” имеет несколько “компактифицированных размерностей”. В качестве трансляционно-однородных дискретных аппроксимаций такого пространства-времени могут выступать $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические расширения d -мерной решетки Λ^d посредством конечных графов, где $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ – группа всех сдвигов решетки Λ^d . (Под трансляционной однородностью здесь понимается возможность перемещения любой вершины в любую другую вершину автоморфизмом, индуцирующим сдвиг Λ^d , т. е. трансляцию на “обычных размерностях” пространства-времени.) В связи с этим представляют интерес $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические расширения d -мерных решеток Λ^d посредством конечных графов.

В настоящей работе нас интересуют симметрические расширения бесконечных локально конечных графов Γ и, в особенности, $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические

расширения d -мерных решеток Λ^d посредством конечных графов Δ . При этом нас интересует, прежде всего, вопрос о конечности их числа для заданных Γ (или d в случае решеток) и Δ . В § 3 настоящей работы доказывается, что существует весьма широкий класс локально конечных графов, каждый из которых имеет бесконечное число симметрических расширений посредством фиксированного конечного графа (существование таких графов ранее было анонсировано в [1]). Это является первым основным результатом статьи. Остается, однако, открытым следующий вопрос (см. [1, вопрос 3]): верно ли, что для любого целого положительного числа d и любого конечного графа Δ существует лишь конечное число $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством графа Δ ? (Отметим, что открытым является и аналогичный вопрос для симметрических расширений d -мерных решеток.) В § 4 настоящей работы дается положительный ответ на этот вопрос в случае, когда число вершин графа Δ есть произвольное простое число (а также в некоторых других случаях; подробнее содержание § 4, посвященного исследованию вопросов о конечности числа симметрических и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа, мы обсудим в заключительной части введения). Это является вторым основным результатом статьи. Далее, в силу указанных выше причин наряду с вопросом о конечности числа $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа интерес представляет описание всех (обобщенных) $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа Δ для фиксированных (как правило, небольших) d и Δ . В § 5 получено такое описание для произвольного целого положительного числа d и произвольного графа Δ с двумя вершинами. Это является третьим основным результатом статьи. Отметим, что в [7]–[9] получено описание $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством графа Δ для всех $d \leq 2$ и Δ с тремя и четырьмя вершинами.

Как было указано выше, симметрические расширения графов естественным образом возникают при исследовании расширений групп, а также в некоторых направлениях исследований в теории графов. Однако развитие в связи с этим методы их исследования применимы, как правило, лишь к так называемым накрывающим симметрическим расширениям графов. (Это же справедливо и для соответствующим образом модифицированных методов теории накрывающих пространств.) Под *накрывающим симметрическим расширением графа* Γ (соответственно, *накрывающим G -симметрическим расширением графа* Γ , где G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ) *посредством графа* Δ понимается симметрическое (соответственно, G -симметрическое) расширение $\tilde{\Gamma}$ графа Γ посредством графа Δ , для которого σ (см. определение симметрического (соответственно, G -симметрического) расширения Γ посредством Δ в начале статьи) может быть выбрана со следующим дополнительным свойством: для произвольной вершины x графа $\tilde{\Gamma}$ каждый блок системы σ , смежный в графе $\tilde{\Gamma}/\sigma$ с x^σ , содержит в точности одну смежную с x вершину. (Когда говорится, что накрывающее симметрическое (соответственно, G -симметрическое) расширение графа Γ посредством графа Δ реализуется $\tilde{G}$,

σ, φ , то подразумевается, что σ обладает указанным дополнительным свойством.) Отметим, что фактически в §3 строится весьма широкий класс локально конечных графов, каждый из которых имеет бесконечное число именно накрывающих симметрических расширений посредством фиксированного конечного графа. В §4 доказывается, что, в отличие от случая произвольного локально конечного вершинно-симметрического графа, d -мерная решетка для каждого целого положительного числа d имеет лишь конечное число накрывающих симметрических расширений посредством любого фиксированного конечного графа (см. следствие 4.3).

В целом, §4 работы посвящен исследованию вопросов о конечности числа симметрических (п. 4.1) и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических (п. 4.2) расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа. Наш подход к исследованию этих вопросов основывается на проверке выполнения для симметрических и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа следующего условия $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности. Пусть Γ – обобщенное симметрическое расширение решетки Λ^d посредством конечного графа, реализуемое некоторыми G, σ, φ . Скажем, что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_1, \dots, n_d$ – целые положительные числа, если существуют такие автоморфизмы $g_1, \dots, g_d$ графа Γ , сохраняющие разбиение σ , что $[g_i, g_j] = 1$ для всех $1 \leq i < j \leq d$ и $\varphi g_i^\sigma \varphi^{-1} = t_i^{n_i}$ для всех $1 \leq i \leq d$. (Это определение не зависит от выбора вершинно-транзитивной группы G автоморфизмов графа Γ , для которой σ является системой импримитивности.)

Несложно показать (см. теорему 4.1), что для произвольных целых чисел $d \geq 1, n_1, \dots, n_d \geq 1$ и произвольного конечного графа Δ существует лишь конечное число графов Γ , являющихся обобщенными симметрическими расширениями решетки Λ^d посредством графа Δ , реализуемыми такими G, σ, φ , что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности. Таким образом, для доказательства конечности числа обобщенных симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа Δ достаточно показать, что каждое из них может быть реализовано такими G, σ, φ , что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности для некоторых фиксированных $n_1, \dots, n_d$. Именно этим способом доказываются в §4 результаты о конечности числа симметрических и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа. В связи с изложенным уместно сформулировать следующие вопросы (ср. [1, вопросы 4, 5]), представляющие также самостоятельный интерес. Пусть Γ – симметрическое (или $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое) расширение d -мерной решетки Λ^d посредством произвольного конечного графа Δ , реализуемое некоторыми G, σ, φ . Верно ли, что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности для некоторых целых положительных чисел $n_1, \dots, n_d$? Могут ли при этом числа $n_1, \dots, n_d$ быть выбраны зависящими только от d и Δ ? Как было отмечено выше, из положительного ответа на последний вопрос для заданных d и Δ следует (согласно теореме 4.1) конечность числа симметрических (соответственно, $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических) расширений d -мерной решетки Λ^d посредством Δ . Отметим также, что для произвольного конечного графа Δ при $d = 1$

положительный ответ на последний вопрос очевиден, а при $d = 2$ положительный ответ на первый вопрос следует из [10, предложение 2].

Как будет видно из дальнейшего, в ряде интересных случаев симметрические расширения решетки Λ^d , d – целое положительное число, посредством конечного графа Δ удовлетворяют условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где n_i , $1 \leq i \leq d$, ограничены сверху величинами, зависимость которых от графа Δ сводится к зависимости от числа его вершин. В связи с этим нам будет удобно ввести следующие общие определения. Для произвольного целого положительного числа q связный граф $\tilde{\Gamma}$ называется *симметрическим q -расширением графа Γ* (соответственно, *G -симметрическим q -расширением графа Γ* , где G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ), если $\tilde{\Gamma}$ – симметрическое (соответственно, G -симметрическое) расширение графа Γ посредством некоторого графа с q вершинами. Если в этом определении отказаться от условия связности графа $\tilde{\Gamma}$, то получим определение *обобщенного симметрического* (соответственно, *G -симметрического*) *q -расширения графа Γ* .

Многие представляющие интерес симметрические расширения решетки Λ^d , d – целое положительное число, посредством конечного графа допускают реализацию такими G , σ , φ , что группа G имеет конечный стабилизатор вершины. В теореме 4.2 настоящей работы доказывается, что если Γ – обобщенное симметрическое q -расширение решетки Λ^d для некоторых целых положительных чисел d и q , реализуемое G , σ , φ , причем группа G имеет конечный стабилизатор вершины, то $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где числа n_i , $1 \leq i \leq d$, ограничены сверху величинами, зависящими (явно указываемым образом) лишь от d , q и порядка стабилизатора вершины в группе G . С учетом теоремы 4.1 отсюда следует, что для произвольных целых положительных чисел d , q и m существует лишь конечное число обобщенных симметрических q -расширений решетки Λ^d , которые могут быть реализованы такими G , σ , φ , что порядок стабилизатора вершины в группе G не превосходит m (см. следствие 4.2). В связи с этим было бы интересно исследовать для произвольных заданных d и q вопрос о существовании одного и того же числа m с этим свойством для всех q -симметрических расширений решетки Λ^d (предварительно исследовав, возможно, вопрос о реализуемости обобщенных симметрических q -расширений решетки Λ^d такими G , σ , φ , что G имеет конечный стабилизатор вершины).

В п. 4.2 с использованием теоремы 4.2 доказывается, что если Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое q -расширение решетки Λ^d для некоторого целого положительного числа d и некоторого целого положительного простого числа q , реализуемое G , σ , φ , то $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где числа n_i , $1 \leq i \leq d$, ограничены сверху величинами, зависящими (явно указываемым образом) лишь от d и q (см. следствие 4.5). С учетом теоремы 4.1 это влечет отмеченный выше результат о конечности числа $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^d для произвольного целого положительного числа d и произвольного целого положительного простого числа q (см. следствие 4.5). (В п. 4.2 аналогичные результаты доказываются в более общем случае, когда вместо простоты числа q предполагается лишь квазипримитивность действия

на блоке системы импримитивности σ стабилизатора этого блока в группе G ; см. теорему 4.3 и следствие 4.4.)

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

Используемая в работе терминология, в основном, стандартна.

Если Γ – граф (напомним, что в настоящей работе рассматриваются только неориентированные графы без петель и без кратных ребер), то $V(\Gamma)$ – множество его вершин и $E(\Gamma)$ – множество его ребер (ребра рассматриваются как двухэлементные подмножества множества $V(\Gamma)$). Граф Γ называется *локально конечным*, если валентности всех его вершин конечны.

Для связного графа Γ через d_Γ обозначается обычная метрика на $V(\Gamma)$, $d_\Gamma(x, y)$ для $x, y \in V(\Gamma)$ есть длина кратчайшего пути между x и y в графе Γ . Для графа Γ и целого положительного числа n через Γ^n обозначается граф такой, что $V(\Gamma^n) = V(\Gamma)$ и $\{x, y\} \in E(\Gamma^n)$ тогда и только тогда, когда $x \neq y$ и между x и y в графе Γ найдется путь длины, не превосходящей n .

Для графа Γ и $X \subseteq V(\Gamma)$ через $\langle X \rangle_\Gamma$ обозначается подграф графа Γ , порожденный X . Для графа Γ и разбиения σ множества $V(\Gamma)$ через Γ/σ обозначается факторграф графа Γ по разбиению σ . Для $x \in V(\Gamma)$ через x^σ обозначается при этом подмножество из σ , содержащее x (таким образом, $x^\sigma \in V(\Gamma/\sigma)$).

Мы рассматриваем изоморфизм графа Γ_1 на граф Γ_2 как биекцию $V(\Gamma_1)$ на $V(\Gamma_2)$, отображающую смежные вершины в смежные, а несмежные вершины в несмежные. Соответственно, мы рассматриваем автоморфизм графа Γ как подстановку на $V(\Gamma)$, отображающую смежные вершины в смежные, а несмежные вершины в несмежные. Группа всех автоморфизмов графа Γ обозначается через $\text{Aut}(\Gamma)$.

В настоящей работе, говоря о конечности или бесконечности числа графов с определенным свойством, мы, как обычно, понимаем число таких графов с точностью до изоморфизма.

Если g – автоморфизм графа Γ и X – g -инвариантное подмножество множества $V(\Gamma)$, то g^X – подстановка на X , индуцируемая g . Соответственно, если G – группа автоморфизмов графа Γ и X – G -инвариантное подмножество множества $V(\Gamma)$, то G^X – группа подстановок на X , индуцируемая G . Если g – автоморфизм графа Γ , сохраняющий разбиение σ множества $V(\Gamma)$, то g^σ – автоморфизм графа Γ/σ , индуцируемый g . Соответственно, если G – группа автоморфизмов графа Γ , сохраняющая разбиение σ множества $V(\Gamma)$, то G^σ – группа автоморфизмов графа Γ/σ , индуцируемая G .

Если G – группа автоморфизмов графа Γ , $x \in V(\Gamma)$ и $X \subseteq V(\Gamma)$, то $G_x = \{g \in G: g(x) = x\}$ – стабилизатор x в G , $G_X = \{g \in G: g(x') = x' \text{ для всех } x' \in X\}$ – поэлементный стабилизатор X в G , $G_{\{X\}} = \{g \in G: g(X) = X\}$ – глобальный стабилизатор X в G .

Как обычно, если G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ , то разбиение σ множества $V(\Gamma)$ такое, что $g(X) \in \sigma$ для всех $g \in G$, и $X \in \sigma$ называется системой импримитивности группы G . Элементы систем импримитивности группы G называются блоками импримитивности группы G .

Напомним еще ряд стандартных определений, используемых в настоящей работе.

Если G – группа и $M = M^{-1}$ – подмножество группы G , не содержащее 1, то *графом Кэли группы G , построенным по M* , называется граф $\Gamma_{G,M}$ с множеством вершин $V(\Gamma_{G,M}) = G$ и множеством ребер $E(\Gamma_{G,M}) = \{\{g, ga\} : g \in G, a \in M\}$. Действие G левыми сдвигами на $V(\Gamma_{G,M})$ есть действие автоморфизмами графа $\Gamma_{G,M}$ (и называется *естественным действием группы G на графе $\Gamma_{G,M}$*). Граф $\Gamma_{G,M}$ связан тогда и только тогда, когда M – система порождающих группы G .

Пусть d – целое положительное число. Под *d -мерной решеткой Λ^d* мы понимаем граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы $(a_1, \dots, a_d)$ из d целых чисел, и две вершины $(a'_1, \dots, a'_d)$ и $(a''_1, \dots, a''_d)$ смежны тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$|a'_1 - a''_1| + \dots + |a'_d - a''_d| = 1.$$

Для d -мерной решетки Λ^d и $1 \leq j \leq d$ мы полагаем $\text{Pr}_j : V(\Lambda^d) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\text{Pr}_j((a_1, a_2, \dots, a_d)) = a_j$.

Сдвигом решетки Λ^d называется ее автоморфизм, который переводит произвольную вершину $(a_1, \dots, a_d)$ в вершину $(a_1 + k_1, \dots, a_d + k_d)$ для некоторых фиксированных целых чисел $k_1, \dots, k_d$. Для каждого $1 \leq i \leq d$ через t_i обозначается сдвиг решетки Λ^d , для которого $k_i = 1$ и $k_j = 0$ при всех $j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$. Через $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ обозначается подгруппа группы автоморфизмов решетки Λ^d , состоящая из всех ее сдвигов. Ясно, что $\text{Aut}_0(\Lambda^d) = \langle t_1, \dots, t_d \rangle \cong \mathbb{Z}^d$ и Λ^d изоморфна графу Кэли группы $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$, построенному по системе порождающих $\{t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}\}$. В соответствии с § 1 для произвольного целого положительного числа q связный граф Γ называется симметрическим (соответственно, $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим) q -расширением решетки Λ^d , если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка q , что найдется изоморфизм φ графа Γ/σ на решетку Λ^d (соответственно, найдется изоморфизм φ графа Γ/σ на решетку Λ^d , для которого $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = \text{Aut}_0(\Lambda^d)$). При этом будем говорить, что Γ – симметрическое (соответственно, $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое) q -расширение решетки Λ^d , реализуемое G , σ , φ .

Напомним (см. [5]), что для произвольного связного графа Γ через $\text{Aut}_0(\Gamma)$ обозначается группа всех его ограниченных автоморфизмов, т. е. таких автоморфизмов g , что расстояния в графе Γ между x и $g(x)$, где x пробегает множество всех вершин графа Γ , ограничены в совокупности. (Введенное выше обозначение $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ согласуется с этим определением.) Из [5, следствие 2, (i)] легко следует, что если Γ – связный локально конечный граф, то множество $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ всех ограниченных автоморфизмов конечного порядка графа Γ является (нормальной) подгруппой группы $\text{Aut}(\Gamma)$. Следующий результат, вытекающий из [5, следствие 1], используется далее при доказательстве теоремы 3.1.

(Он также используется в [1] при доказательстве теоремы 2, приводимой ниже как предложение 2.2, непосредственными следствиями которой являются предложения 4.1, 4.2 настоящей работы.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть Γ – бесконечный связный локально конечный граф такой, что $\text{Aut}_0(\Gamma)$ – вершинно-транзитивная группа его автоморфизмов. Тогда множество $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ элементов конечного порядка группы $\text{Aut}_0(\Gamma)$ является (нормальной) подгруппой с конечными орбитами группы $\text{Aut}(\Gamma)$, причем для системы импримитивности σ группы $\text{Aut}_0(\Gamma)$ на $V(\Gamma)$, состоящей из $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбит, имеем $\text{Aut}_0(\Gamma)^\sigma \cong \mathbb{Z}^d$, где d – целое положительное число.

Следующее предложение потребуется нам в § 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [1, теорема 2]. Пусть Γ – связный локально конечный граф, G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и σ – система импримитивности группы G на $V(\Gamma)$ с конечными блоками. Предположим, что каждый неединичный элемент группы G^σ имеет бесконечный порядок и действует без неподвижных точек на σ . Тогда блоки σ являются $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбитами на $V(\Gamma)$.

Как отмечено в [1] (см. также предложение 4.1 ниже), из предложения 2.2 вытекает, что если Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое расширение решетки Λ^d , d – целое положительное число, посредством конечного графа, реализуемое G , σ , φ , то блоки σ однозначно определены (они являются $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбитами на $V(\Gamma)$) и Γ является $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим расширением решетки Λ^d , реализуемым $\text{Aut}_0(\Gamma)$, σ , φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $\tilde{\Gamma}$ – симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ , реализуемое $\tilde{G}$, σ , φ , то в ряде случаев (в связи, например, с пп. 1, 4 из § 1) вместо $\tilde{\Gamma}$ предпочтительно рассматривать пару $(\tilde{\Gamma}, \sigma)$. При этом пара $(\tilde{\Gamma}, \sigma)$ считается эквивалентной паре $(\tilde{\Gamma}', \sigma')$ (где $\tilde{\Gamma}'$ – также симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ , реализуемое некоторыми $\tilde{G}'$, σ' , φ'), если существует изоморфизм графа $\tilde{\Gamma}$ на граф $\tilde{\Gamma}'$, который переводит разбиение σ в разбиение σ' . Более того, в случае, когда для заданной вершинно-транзитивной группы автоморфизмов G графа Γ граф $\tilde{\Gamma}$ есть G -симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ , реализуемое $\tilde{G}$, σ , φ , вместо пары $(\tilde{\Gamma}, \sigma)$ предпочтительно рассматривать тройку $(\tilde{\Gamma}, \sigma, \tilde{G})$. При этом тройка $(\tilde{\Gamma}, \sigma, \tilde{G})$ считается эквивалентной тройке $(\tilde{\Gamma}', \sigma', \tilde{G}')$ (где $\tilde{\Gamma}'$ – также симметрическое расширение графа Γ посредством графа Δ , реализуемое некоторыми $\tilde{G}'$, σ' , φ'), если существует изоморфизм ψ графа $\tilde{\Gamma}$ на граф $\tilde{\Gamma}'$, который переводит разбиение σ в разбиение σ' и для которого $(\psi G \psi^{-1})^{\sigma'} = (G')^{\sigma'}$. Однако для целей настоящей работы такое рассмотрение пар и троек нам не потребуется. Отметим лишь, что согласно утверждению, непосредственно предшествующему настоящему замечанию, в случае, когда $\Gamma = \Lambda^d$ – d -мерная решетка, где $d \geq 1$, Δ – конечный граф и $G = \text{Aut}_0(\Lambda^d)$, произвольные тройки $(\tilde{\Gamma}, \sigma, \tilde{G})$, $(\tilde{\Gamma}', \sigma', \tilde{G}')$ эквивалентны.

§ 3. Существование графов с бесконечным числом расширений посредством конечного графа

В настоящем параграфе доказывается существование связного локально конечного графа Γ и конечного графа Δ таких, что имеется бесконечное число симметрических расширений Γ посредством Δ (этот результат был ранее анонсирован в [1]). Более того, нами строится весьма широкий класс графов Γ , имеющих для любого целого числа $q > 1$ бесконечное число накрывающих симметрических расширений посредством одного и того же конечного графа Δ с q вершинами (см. замечание 3.1 далее).

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует группа G с конечной системой порождающих $M = M^{-1}$, $1 \notin M$, такая, что для любого целого числа $q > 1$ граф Кэли $\Gamma_{G,M}$ группы G , построенный по системе порождающих M , имеет бесконечное число накрывающих G -симметрических, относительно естественного действия G на $\Gamma_{G,M}$, q -расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – группа с системой порождающих $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$, где d – целое положительное число, и B – центральная подгруппа группы A такие, что выполнены следующие условия:

1) $a_k a_l^{-1} \notin B$ для всех $1 \leq k \leq d$, $1 \leq l \leq d$, $k \neq l$, и $a_k a_l \notin B$ для всех $1 \leq k \leq d$, $1 \leq l \leq d$;

2) B – свободная абелева группа счетного ранга;

3) порядок любой конечной подгруппы группы A/B не превосходит некоторого натурального числа r .

(Примеры таких A , $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$ и B будут приведены в конце параграфа.)

Положим $G = A/B$, и пусть $\varphi: A \rightarrow A/B = G$ – естественный гомоморфизм группы A на группу G . Пусть, кроме того, $M := \{\varphi(a_1^{\pm 1}), \dots, \varphi(a_d^{\pm 1})\}$. Покажем, что для каждого целого числа $q > 1$ граф Кэли $\Gamma_{G,M}$ группы G , построенный по системе порождающих M , имеет бесконечное число накрывающих G -симметрических, относительно естественного действия G на $\Gamma_{G,M}$, q -расширений.

Пусть q – произвольное целое число, большее единицы. С учетом 2) имеем $Z(A) \geq B = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \dots$, где $\langle b_i \rangle \cong \mathbb{Z}$ для всех целых положительных чисел i . Положим $B_1 = \langle b_1^q \rangle \times \langle b_2 \rangle \times \dots$ и $B_i = \langle b_1 \rangle \times \dots \times \langle b_{i-1} \rangle \times \langle b_i^q \rangle \times \langle b_{i+1} \rangle \times \dots$ для всех целых чисел $i > 1$.

Пусть i – произвольное целое положительное число. Положим $G_i = A/B_i$, и пусть φ_i – естественный гомоморфизм $A \rightarrow A/B_i = G_i$. Тогда множество $M_i := \{\varphi_i(a_1^{\pm 1}), \dots, \varphi_i(a_d^{\pm 1})\}$ является системой порождающих группы G_i , причем с учетом 1) имеем $M_i = M_i^{-1}$, $1 \notin M_i$. Далее, $K_i := B/B_i$ – циклическая подгруппа порядка q группы $Z(G_i)$ и группа $G_i/K_i = (A/B_i)/(B/B_i)$ естественным образом изоморфна группе G . отождествим группу G_i с индуцируемой ей при естественном действии группой автоморфизмов графа Кэли Γ_{G_i, M_i} . Тогда для системы импримитивности σ_i группы G_i на $V(\Gamma_{G_i, M_i})$, состоящей из K_i -орбит, справедливы следующие утверждения:

а) блоки σ_i имеют порядок q ;

б) для произвольной вершины x графа Γ_{G_i, M_i} каждый блок системы σ_i , смежный в графе $\Gamma_{G_i, M_i}/\sigma_i$ с x^{σ_i} , содержит в точности одну смежную с x вершину;

с) естественный изоморфизм группы G_i/K_i на G индуцирует изоморфизм ψ_i графа $\Gamma_{G_i, M_i}/\sigma_i$ на граф $\Gamma_{G, M}$, для которого $\psi_i G_i^{\sigma_i} \psi_i^{-1} = G$.

Таким образом, для каждого целого положительного числа i граф Γ_{G_i, M_i} является накрывающим G -симметрическим q -расширением графа $\Gamma_{G, M}$, реализуемым G_i, σ_i, ψ_i . Покажем, что среди графов Γ_{G_i, M_i} при целом положительном i имеется бесконечное множество попарно неизоморфных графов. Предположим противное. Тогда среди графов $\Gamma_{G_{i_j}, M_{i_j}}$ существует бесконечное множество $\{\Gamma_{G_{i_j}, M_{i_j}} : j - \text{целое неотрицательное число}\}$ попарно изоморфных графов. Положим $\Xi_j = \Gamma_{G_{i_j}, M_{i_j}}, \tau_j = \sigma_{i_j}$ для каждого целого неотрицательного числа j . Пусть, кроме того, χ_j – изоморфизм Ξ_j на $\Xi_0, j \geq 1$. Выберем произвольную вершину x_0 графа Ξ_0 и положим $x_j = \chi_j^{-1}(x_0) \in V(\Xi_j)$ для каждого целого положительного числа j .

Для каждого целого неотрицательного числа j обозначим через l_j длину кратчайшего пути графа Ξ_j , начинающегося в x_j и заканчивающегося в $x_j^{\tau_j} \setminus \{x_j\}$. Тогда l_j – длина кратчайшей записи неединичного элемента из K_{i_j} через M_{i_j} . Другими словами, l_j – длина кратчайшего слова над $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$ с тем свойством, что представляемый им элемент группы A содержится в $B \setminus B_{i_j}$. Отсюда следует, что для любого целого положительного числа c найдется такое целое положительное число n_c , что $l_n > c$ для всех $n \geq n_c$. Действительно, для любого целого положительного числа c найдется такое целое положительное число n_c , что каждый элемент группы $B = \langle b_1 \rangle \times \dots$, представимый словом над $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$ длины, не превосходящей c , содержится в $\langle b_1 \rangle \times \dots \times \langle b_{n_c-1} \rangle$.

Покажем, что найдется целое положительное число m , для которого

$$\left| \bigcup_{1 \leq j \leq m} \chi_j(x_j^{\tau_j}) \right| > qr. \quad (3.1)$$

Действительно, в противном случае для любого целого положительного числа m

$$\left| \bigcup_{1 \leq j \leq m} \chi_j(x_j^{\tau_j}) \right| \leq qr$$

и, следовательно, найдется целое положительное число c такое, что множество $\bigcup_{j \geq 1} \chi_j(x_j^{\tau_j})$ содержится в шаре радиуса c графа Ξ_0 с центром x_0 . Однако, как показано выше, существует целое положительное число n_c такое, что $l_{n_c} > c$ и, следовательно, $\chi_j(x_j^{\tau_j})$ при $j = n_c$ не содержится в шаре радиуса c графа Ξ_0 с центром x_0 . Полученное противоречие доказывает (3.1).

Положим $X = \bigcup_{1 \leq j \leq m} \chi_j(x_j^{\tau_j})$. Тогда найдется целое положительное число s такое, что для каждого $0 \leq j \leq m$ и произвольных $y_1, y_2 \in \chi_j(x_j^{\tau_j})$ справедливо $d_{\Xi_0}(y_1, y_2) \leq s$. Ясно, что для любого $0 \leq j \leq m$ блоки системы τ_j порождают клики графа Ξ_j^s (определяемого по графу Ξ_j так, как указано в начале §2). Следовательно, при $0 \leq j \leq m$ неединичные элементы группы K_{i_j} переводят

каждую вершину графа Ξ_j^s в смежные с ней вершины. Таким образом, при $1 \leq j \leq m$ любой неединичный элемент группы $\chi_j K_{i_j} \chi_j^{-1}$ автоморфизмов графа Ξ_0^s также переводит каждую вершину графа Ξ_0^s в смежную с ней вершину.

Положим $L = \langle K_{i_0}, \chi_j K_{i_j} \chi_j^{-1} : 1 \leq j \leq m \rangle$. Отметим, что L порождается набором элементов, каждый из которых отображает любую вершину графа Ξ_0^s в смежную с ней вершину и имеет конечный порядок. Заметим, кроме того, что $X \subseteq L(x_0)$.

Пусть $R := \langle g \in \text{Aut}_0(\Xi_0) : d_{\Xi_0}(y, g(y)) \leq s \text{ для всех } y \in V(\Xi_0) \rangle$. Тогда $L \leq T(R) := R \cap T(\text{Aut}_0(\Xi_0))$. Обозначим через Σ подграф графа Ξ_0^s , порожденный $R(x_0)$. Тогда Σ связан и R индуцирует на Σ группу ограниченных автоморфизмов. В частности, $\text{Aut}_0(\Sigma)$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Σ и $L^{V(\Sigma)} \leq T(\text{Aut}_0(\Sigma))$. По предложению 2.1 система импримитивности τ группы $\text{Aut}(\Sigma)$ на $V(\Sigma)$, состоящая из $T(\text{Aut}_0(\Sigma))$ -орбит, имеет конечные блоки и $\text{Aut}_0(\Sigma)^\tau \cong \mathbb{Z}^d$ для некоторого целого неотрицательного числа d .

Покажем, что x_0^τ – блок импримитивности группы $\text{Aut}(\Xi_0)$ на $V(\Xi_0)$. Поскольку $R \trianglelefteq \text{Aut}(\Xi_0)$, то $V(\Sigma)$ – блок импримитивности группы $\text{Aut}(\Xi_0)$ на $V(\Xi_0)$. Кроме того, $x_0^\tau = T(\text{Aut}_0(\Sigma))(x_0)$ – блок импримитивности группы $\text{Aut}(\Sigma)$ на $V(\Sigma)$. Следовательно, x_0^τ – блок импримитивности группы $\text{Aut}(\Xi_0)$ на $V(\Xi_0)$.

Поскольку $\Xi_0 = \Gamma_{G_{i_0}, M_{i_0}}$ – граф Кэли группы G_{i_0} , на котором она действует естественным образом, то, обозначая через H стабилизатор в группе G_{i_0} блока импримитивности x_0^τ группы $\text{Aut}(\Xi_0)$ на $V(\Xi_0)$, имеем $|H| = |x_0^\tau|$. Отсюда следует, что H – конечная группа порядка, большего qr . Действительно, поскольку $|X| > qr$ (см. (3.1)), $X \subseteq L(x_0)$ (см. выше), $L \subseteq T(R)$ (см. выше) и $T(R)$ индуцирует на Σ группу ограниченных автоморфизмов конечного порядка, то

$$qr < |X| \leq |L(x_0)| \leq |T(R)(x_0)| \leq |T(\text{Aut}_0(\Sigma))(x_0)| = |x_0^\tau| = |H|.$$

В то же время $K_{i_0} \leq H$. Действительно, поскольку $K_{i_0} \leq L$ (по выбору L), $L \leq T(R)$ (см. выше) и $T(R)$ индуцирует на Σ группу ограниченных автоморфизмов конечного порядка, то K_{i_0} индуцирует на Σ группу ограниченных автоморфизмов конечного порядка и, следовательно, оставляет на месте $T(\text{Aut}_0(\Sigma))$ -орбиту x_0^τ .

Таким образом, группа $G \cong G_{i_0}/K_{i_0}$ содержит конечную подгруппу H/K_{i_0} порядка, большего r . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как следует из приведенного доказательства в качестве G в теореме 3.1 может быть взята любая группа, представимая в виде $G = A/B$, где A – группа с системой порождающих $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$ (d – целое положительное число) и B – центральная подгруппа группы A такие, что выполнены следующие условия:

1) $a_k a_l^{-1} \notin B$ для всех $1 \leq k \leq d$, $1 \leq l \leq d$, $k \neq l$, и $a_k a_l \notin B$ для всех $1 \leq k \leq d$, $1 \leq l \leq d$;

2) B – свободная абелева группа счетного ранга;

3) порядки всех конечных подгрупп группы A/B не превосходят некоторого целого положительного числа r .

При этом в качестве M может быть взято множество $\{a_i^{\pm 1}B: 1 \leq i \leq d\}$, а в качестве графа Δ с $|V(\Delta)| = q$, для которого граф $\Gamma_{G,M}$ имеет бесконечное число накрывающих G -симметрических расширений посредством Δ , – произвольный граф Кэли циклической группы порядка q (например, в качестве Δ может быть взят полный граф с q вершинами).

Приведем примеры группы A с системой порождающих $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$, где d – целое положительное число, и центральной подгруппы B группы A , для которых выполнены условия 1)–3) из замечания 3.1 (или, что то же, из доказательства теоремы 3.1).

ПРИМЕР 3.1. Покажем, что для произвольных целых чисел $n \geq 2$ и $d \geq 2$ существуют группа A с системой порождающих $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$ и ее центральная подгруппа B , которые обладают свойствами 1)–3) из замечания 3.1 и для которых A/B – свободная разрешимая группа ступени n с d (свободными) порождающими. Согласно замечанию 3.1 этим будет доказано, что в качестве группы G в теореме 3.1 можно взять свободную разрешимую группу ступени n с d (свободными) порождающими.

Пусть F – свободная группа со свободной системой порождающих $\{f_1^{\pm 1}, \dots, f_d^{\pm 1}\}$ и $N = F^{(n)}$ – n -й член ее ряда коммутантов. Тогда согласно [11, теорема А] (где следует положить R равной $(n-1)$ -му члену ряда коммутантов группы F и s , равным 2) с учетом формулы Хопфа (см. [11, с. 125]) имеем

$$N/[N, F] = [F, F] \cap N/[N, F] = C_1 \times C_2,$$

где C_1 – свободная абелева группа счетного ранга и C_2 – некоторая абелева группа. Обозначим через Q полный прообраз C_2 при естественном гомоморфизме $F \rightarrow F/[N, F]$. Положим $A = F/Q$, $a_i = f_iQ \in F/Q$ для всех $1 \leq i \leq d$ и $B = N/Q \cong C_1$. Тогда $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$ – система порождающих группы A и B – центральная подгруппа группы A , причем для них выполняются условия 1) и 2) из замечания 3.1. Поскольку $A/B \cong F/N$ – свободная разрешимая группа ступени n с d (свободными) порождающими, то A/B не содержит неединичных элементов конечного порядка и, следовательно, для A/B выполнено условие 3) из замечания 3.1. Таким образом, A , $\{a_1^{\pm 1}, \dots, a_d^{\pm 1}\}$ и B обладают требуемыми свойствами.

Как показывает пример 3.1, группа G в теореме 3.1 может быть группой без кручения (т. е. без неединичных элементов конечного порядка). С другой стороны, следующий пример показывает, что группа G в теореме 3.1 может быть периодической и даже группой, все собственные подгруппы которой имеют фиксированный простой порядок.

ПРИМЕР 3.2. Пусть $G(\infty)$ – построенная в [12, п. 27.2] бесконечная 2-порожденная группа, все собственные подгруппы которой имеют фиксированный простой порядок. Группа $G(\infty)$ представима в виде F/N , где F – свободная группа со свободной системой порождающих $\{f_1^{\pm 1}, f_2^{\pm 1}\}$ и N – нормальная подгруппа

группы F , построенная в соответствии с [12, п. 27.2]. Согласно [12, леммы 27.2, 25.1 и теорема 31.1] группа $N/[N, F]$ является свободной абелевой группой счетного ранга. Таким образом, полагая $A = F/[N, F]$, $a_1 = f_1[N, F] \in F/[N, F]$, $a_2 = f_2[N, F] \in F/[N, F]$ и $B = N/[N, F]$, получаем, что группа A с системой порождающих $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}\}$ и ее центральная подгруппа B удовлетворяют условиям 1)–3) из замечания 3.1. Согласно замечанию 3.1 в качестве группы G в теореме 3.1 может быть взята группа $A/B \cong G(\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. С учетом замечания 3.1 из доказательства теоремы 3.1 и примера 3.2 следует справедливость теоремы 1 из [1], приведенной в [1] без доказательства.

§ 4. Симметрические и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические q -расширения решеток Λ^d

4.1. Условие периодичности для симметрических q -расширений решеток Λ^d . Как было отмечено во введении, в настоящей работе наш подход к вопросам о конечности числа симметрических и $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических расширений d -мерной решетки Λ^d посредством конечного графа основывается на проверке выполнения для таких расширений условия $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности и на следующем результате.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для произвольных целых чисел $d \geq 1$, $q \geq 1$, $n_1, \dots, n_d \geq 1$ существует лишь конечное число графов Γ , являющихся обобщенными симметрическими q -расширениями решетки Λ^d , реализуемыми такими G, σ, φ , что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – обобщенное симметрическое q -расширение решетки Λ^d , реализуемое G, σ, φ , причем $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности. Пусть, кроме того, Γ' – обобщенное симметрическое q -расширение решетки Λ^d , реализуемое G', σ', φ' , причем $(\Gamma', \sigma', \varphi')$ также удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности. Положим

$$X_0 = \{x \in V(\Gamma): 0 \leq \text{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) < n_i \quad \forall 1 \leq i \leq d\},$$

$$X_j = \{x \in V(\Gamma): \text{Pr}_j(\varphi(x^\sigma)) = n_j, 0 \leq \text{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) < n_i \quad \forall 1 \leq i \leq d, i \neq j\}$$

для каждого $1 \leq j \leq d$ и

$$X = \bigcup_{0 \leq j \leq d} X_j.$$

Аналогично, положим

$$X'_0 = \{x \in V(\Gamma'): 0 \leq \text{Pr}_i(\varphi'(x^{\sigma'})) < n_i \quad \forall 1 \leq i \leq d\},$$

$$X'_j = \{x \in V(\Gamma'): \text{Pr}_j(\varphi'(x^{\sigma'})) = n_j, 0 \leq \text{Pr}_i(\varphi'(x^{\sigma'})) < n_i \quad \forall 1 \leq i \leq d, i \neq j\}$$

для каждого $1 \leq j \leq d$ и

$$X' = \bigcup_{0 \leq j \leq d} X'_j.$$

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что графы Γ и Γ' изоморфны, если выполнены следующие условия:

- 1) существует изоморфизм ψ подграфа $\langle X \rangle_\Gamma$ на подграф $\langle X' \rangle_{\Gamma'}$ такой, что для любого $x \in X$ справедливо равенство $\varphi(x^\sigma) = \varphi'(\psi(x)^{\sigma'})$;
- 2) существуют $g_1, \dots, g_d \in \text{Aut}(\Gamma)$ и $g'_1, \dots, g'_d \in \text{Aut}(\Gamma')$ такие, что:
 - (i) $[g_k, g_l] = 1$ и $[g'_k, g'_l] = 1$ для всех $1 \leq k < l \leq d$,
 - (ii) $\varphi g_k^\sigma \varphi^{-1} = t_k^{n_k} = \varphi'(g'_k)^{\sigma'} (\varphi')^{-1}$ для всех $1 \leq k \leq d$,
 - (iii) для любого $1 \leq j \leq d$ и для любой вершины x графа Γ таких, что $\text{Pr}_j(\varphi(x^\sigma)) = 0$ и $0 \leq \text{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) < n_i$ для всех $1 \leq i \leq d$ с условием $i \neq j$, справедливо равенство $\psi(g_j(x)) = g'_j(\psi(x))$.

Предположим, что для Γ и Γ' выполнены условия 1), 2). Следующим образом определим отображение $\tilde{\psi}: V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$. Пусть $x \in V(\Gamma)$. Тогда найдутся однозначно определенные целые числа $k_1(x), \dots, k_d(x)$ такие, что $g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x) \in X_0$. Полагаем

$$\tilde{\psi}(x) = (g'_1)^{-k_1(x)} \dots (g'_d)^{-k_d(x)} \psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x)).$$

Ясно, что это определение корректно. Кроме того, ясно, что $\tilde{\psi}$ – биекция $V(\Gamma)$ на $V(\Gamma')$. Покажем, что $\tilde{\psi}$ является изоморфизмом графа Γ на граф Γ' .

Пусть x и y – некоторые различные вершины графа Γ . Покажем, что $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)\} \in E(\Gamma')$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда для некоторого $1 \leq j \leq d$ имеем $\text{Pr}_j(\varphi(x^\sigma)) = \text{Pr}_j(\varphi(y^\sigma)) + 1$ и $\text{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) = \text{Pr}_i(\varphi(y^\sigma))$ для всех $1 \leq i \leq d$ с условием $i \neq j$. Заметим, что в этом случае $k_j(y) \in \{k_j(x), k_j(x) + 1\}$ и $k_i(x) = k_i(y)$ для всех $1 \leq i \leq d$ с условием $i \neq j$.

Если $k_j(y) = k_j(x)$, то $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\{g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x), g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(y)\} \in E(\Gamma),$$

т.е. тогда и только тогда, когда

$$\{\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x)), \psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(y))\} \in E(\Gamma'),$$

что, в свою очередь, эквивалентно включению

$$\{(g'_1)^{-k_1(x)} \dots (g'_d)^{-k_d(x)} (\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x))), \\ (g'_1)^{-k_1(x)} \dots (g'_d)^{-k_d(x)} (\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(y)))\} \in E(\Gamma').$$

Поскольку здесь

$$(g'_1)^{-k_1(x)} \dots (g'_d)^{-k_d(x)} (\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x))) = \tilde{\psi}(x)$$

и (с учетом того, что в рассматриваемом случае $k_i(y) = k_i(x)$ для всех $1 \leq i \leq d$)

$$(g'_1)^{-k_1(x)} \dots (g'_d)^{-k_d(x)} (\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(y))) = \tilde{\psi}(y),$$

то в рассматриваемом случае $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)\} \in E(\Gamma')$.

Предположим, что $k_j(y) = k_j(x) + 1$. В этом случае $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \{g_1^{k_1(y)} \dots g_d^{k_d(y)}(x), g_1^{k_1(y)} \dots g_d^{k_d(y)}(y)\} \\ = \{g_j g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x), g_1^{k_1(y)} \dots g_d^{k_d(y)}(y)\} \in E(\Gamma). \end{aligned}$$

Поскольку в случае $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ с учетом $k_j(y) = k_j(x) + 1$ имеем $\text{Pr}_j(\varphi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x)^\sigma)) = 0$ и, следовательно, $g_j g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x) \in X$, то в силу условия 1) включение $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ эквивалентно включению

$$\{\psi(g_j g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x)), \psi(g_1^{k_1(y)} \dots g_d^{k_d(y)}(y))\} \in E(\Gamma').$$

Таким образом, согласно условию 2) включение $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ эквивалентно включению

$$\{g'_j(\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x))), \psi(g_1^{k_1(y)} \dots g_d^{k_d(y)}(y))\} \in E(\Gamma')$$

и, следовательно, эквивалентно включению

$$\begin{aligned} \{(g'_1)^{-k_1(y)} \dots (g'_d)^{-k_d(y)} g'_j(\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x))), \\ (g'_1)^{-k_1(y)} \dots (g'_d)^{-k_d(y)}(\psi(g_1^{k_1(y)} \dots g_d^{k_d(y)}(y)))\} \\ = \{(g'_1)^{-k_1(x)} \dots (g'_d)^{-k_d(x)}(\psi(g_1^{k_1(x)} \dots g_d^{k_d(x)}(x))), \\ (g'_1)^{-k_1(y)} \dots (g'_d)^{-k_d(y)}(\psi(g_1^{k_1(y)} \dots g_d^{k_d(y)}(y)))\} \\ = \{\tilde{\psi}(x), \tilde{\psi}(y)\} \in E(\Gamma'), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Непосредственным следствием теоремы 4.1 является конечность числа обобщенных симметрических q -расширений решетки Λ^1 для произвольного целого положительного числа q .

В дальнейшем с использованием теоремы 4.1 мы установим конечность числа (обобщенных) симметрических q -расширений решетки Λ^d в ряде представляющих интерес случаев (см. следствия 4.2–4.5).

Пусть d и q – целые положительные числа, и пусть Γ – обобщенное симметрическое q -расширение решетки Λ^d , реализуемое некоторыми G, σ, φ . Тогда $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов решетки Λ^d . Следовательно, для каждого $1 \leq i \leq d$ найдется целое положительное число s такое, что $t_i^s \in \varphi G^\sigma \varphi^{-1}$, причем (поскольку стабилизатор вершины решетки Λ^d в группе $\text{Aut}(\Lambda^d)$ имеет порядок $2^d d!$) число s может быть выбрано не превосходящим $2^d d!$. Таким образом, обозначая для каждого $1 \leq i \leq d$ через $s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ наименьшее из целых положительных чисел s со свойством $t_i^s \in \varphi G^\sigma \varphi^{-1}$, имеем $|s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)| \leq 2^d d!$. Заметим, что если $\text{Aut}_0(\Lambda^d) \leq \varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ (в частности, если Γ – обобщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое q -расширение решетки Λ^d , реализуемое G, σ, φ), то $s_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = \dots = s_d(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 1$. Обратно, последние равенства влекут, очевидно, $\text{Aut}_0(\Lambda^d) \leq \varphi G^\sigma \varphi^{-1}$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть Γ – обобщенное симметрическое q -расширение решетки Λ^d для некоторых целых положительных чисел d и q , реализуемое G , σ , φ . Предположим, что группа G имеет конечный стабилизатор G_x вершины x графа Γ . Тогда $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_i \leq s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)(q|G_x|)^{i-1} \leq 2^d d! (q|G_x|)^{i-1}$ для всех $1 \leq i \leq d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $s_i = s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$, $1 \leq i \leq d$. Для доказательства теоремы последовательно определим для каждого $1 \leq i \leq d$ элемент g_i группы G такой, что $[g_i, g_j] = 1$ для всех $1 \leq j < i$ и $\varphi g_i^\sigma \varphi^{-1} = t_i^{s_i m_i}$, где $0 < m_i \leq (q|G_x|)^{i-1}$. В качестве g_1 возьмем произвольный элемент группы G со свойством $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = t_1^{s_1}$. Предположим теперь, что $i > 1$ и элементы $g_1, \dots, g_{i-1}$ уже определены. Пусть a – такой элемент группы G , что $\varphi a^\sigma \varphi^{-1} = t_i^{s_i}$. Тогда для каждого $1 \leq j \leq i-1$ и произвольного целого k элемент $[g_j, a^k]$ группы G стабилизирует блок x^σ . Однако в группе G имеется лишь $q|G_x|$ элементов, стабилизирующих блок x^σ . Следовательно, $[g_j, a^{k_1}] = [g_j, a^{k_2}]$ для некоторых $0 \leq k_1 < k_2 \leq q|G_x|$. Поэтому, полагая $m'_j = k_2 - k_1$, имеем $[g_j, a^{m'_j}] = 1$, где $0 < m'_j \leq q|G_x|$. Следовательно, для элемента $g_i := a^{m'_1 \dots m'_{i-1}}$ справедливо равенство $[g_i, g_j] = 1$ при всех $1 \leq j < i$ и $\varphi g_i^\sigma \varphi^{-1} = t_i^{s_i m_i}$, где $m_i := m'_1 \dots m'_{i-1} \leq (q|G_x|)^{i-1}$.

Таким образом, полагая $n_i = s_i m_i$ для каждого $1 \leq i \leq d$, получаем, что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_i \leq s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)(q|G_x|)^{i-1}$ для каждого $1 \leq i \leq d$. Поскольку для каждого $1 \leq i \leq d$ имеем $|s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)| \leq 2^d d!$, теорема доказана.

Теорема 4.2 влечет справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть Γ – обобщенное симметрическое q -расширение решетки Λ^d для некоторых целых положительных чисел d и q , реализуемое G , σ , φ . Предположим, что группа G имеет конечный стабилизатор G_x вершины x графа Γ . Тогда Γ допускает группу автоморфизмов, изоморфную $\mathbb{Z}^d$, с не более чем $q(2^d d!)^d (q|G_x|)^{\frac{d(d-1)}{2}}$ орбитами.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теорем 4.1, 4.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Для произвольных целых положительных чисел d , q и t имеется лишь конечное число обобщенных симметрических q -расширений решетки Λ^d , которые могут быть реализованы такими G , σ , φ , что порядок стабилизатора вершины в группе G не превосходит t .

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть Γ – накрывающее симметрическое q -расширение решетки Λ^d для некоторых целых положительных чисел d и q , реализуемое G , σ , φ . Тогда $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_i \leq (2^d d!)^i (q!)^{i-1}$ для всех $1 \leq i \leq d$. В частности, для произвольных целых положительных чисел d и q имеется лишь конечное число накрывающих симметрических q -расширений решетки Λ^d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – произвольное накрывающее симметрическое q -расширение решетки Λ^d , где d и q – целые положительные числа, реализуемое некоторыми G , σ , φ . Для $x \in V(\Gamma)$, если элемент g группы G стабилизирует

поэлементно множество x^σ и стабилизирует глобально каждый блок системы импримитивности σ группы G , с учетом связности Γ имеем $g = 1$. Следовательно, поэлементный стабилизатор множества x^σ в группе G изоморфно вкладывается в стабилизатор вершины решетки Λ^d в группе $\text{Aut}(\Lambda^d)$, порядок которого равен $2^d d!$. Таким образом, $|G_x| \leq 2^d d!(q-1)!$. Справедливость следствия вытекает теперь из теоремы 4.2 и следствия 4.2.

4.2. $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические q -расширения решеток Λ^d и условие периодичности для них. Далее в этом параграфе рассматриваются $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические q -расширения решеток Λ^d , где d и q – целые положительные числа. Как было отмечено во введении, этот случай представляет интерес для физики.

Следующее предложение 4.1, полученное в [1], показывает, в частности, что если Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое q -расширение решетки Λ^d , то соответствующая этому расширению система импримитивности σ определена однозначно. Для доказательства этого предложения достаточно воспользоваться применительно к Γ предложением 2.2, полагая в нем $G = \text{Aut}_0(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое расширение решетки Λ^d , где d – целое положительное число, посредством конечного графа, реализуемое G, σ, φ . Тогда блоки σ являются $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбитами на $V(\Gamma)$ и Γ является $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим расширением решетки Λ^d , реализуемым $\text{Aut}_0(\Gamma), \sigma, \varphi$.

Пусть Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое q -расширение решетки Λ^d , где d и q – целые положительные числа. Тогда разбиение множества $V(\Gamma)$, состоящее из $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбит, назовем *системой блоков* на $V(\Gamma)$, соответствующей $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическому q -расширению Γ решетки Λ^d .

Из предложения 4.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть граф $\Gamma_i, i \in \{1, 2\}$, является $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим q -расширением решетки Λ^d , где d и q – целые положительные числа, и σ_i – соответствующая ему система блоков на $V(\Gamma_i)$. Тогда если φ – изоморфизм графа Γ_1 на граф Γ_2 , то φ биективно отображает множество блоков системы σ_1 на множество блоков системы σ_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В отличие от $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрического расширения решетки Λ^d , где d – целое положительное число, посредством конечного графа, для произвольного симметрического расширения решетки Λ^d , где d – целое положительное число, посредством конечного графа соответствующая этому расширению система импримитивности σ определяется, вообще говоря, неоднозначно. (Это имеет непосредственное отношение к замечанию 2.1.) Так, очевидно, уже $\Gamma = \Lambda^1$ является $\text{Aut}(\Lambda^1)$ -симметрическим 1-расширением решетки Λ^1 , реализуемым группой $G_1 = \text{Aut}(\Gamma)$, системой импримитивности $\sigma_1 = \{\{i\} : i \in \mathbb{Z}\}$ и изоморфизмом φ_1 , отображающим $\{i\}$ в i для каждого $i \in \mathbb{Z}$, и в то же время является $\text{Aut}(\Lambda^1)$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^1 , реализуемым группой $G_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$, где g_1 отображает i в $i + 2$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$ и g_2 отображает i в $-i + 1$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$, системой

импримитивности $\sigma_2 = \{\{2i, 2i+1\} : i \in \mathbb{Z}\}$ и изоморфизмом φ_2 , отображающим $\{2i, 2i+1\}$ в i для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Конечно, указанный граф Γ является также $\text{Aut}_0(\Lambda^1)$ -симметрическим 1-расширением решетки Λ^1 (реализуемым $\text{Aut}_0(\Gamma)$, σ_1, φ_1), и соответствующая ему система блоков есть σ_1 .

Легко также привести примеры $\text{Aut}(\Lambda^d)$ -симметрических расширений решетки Λ^d , d – целое положительное число, посредством конечного графа, не являющихся $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическими расширениями решетки Λ^d , $d \geq 1$, посредством конечного графа. Так, граф Γ , заданный следующим образом:

$$\begin{aligned} V(\Gamma) &= \{(i, k) : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}, \\ E(\Gamma) &= \{(2i-1, k), (2i, k) : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\} \\ &\quad \cup \{(2i, k), (2i+1, l) : i \in \mathbb{Z}, k, l \in \{1, 2\}\}, \end{aligned}$$

является $\text{Aut}(\Lambda^1)$ -симметрическим 4-расширением Λ^1 , но не является $\text{Aut}_0(\Lambda^1)$ -симметрическим расширением решетки Λ^1 посредством конечного графа. С другой стороны, существуют $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические расширения решетки Λ^d , d – целое положительное число, посредством конечного графа, не являющиеся $\text{Aut}(\Lambda^d)$ -симметрическими расширениями решетки Λ^d , $d \geq 1$, посредством конечного графа. При $d = 1$ в качестве такого графа можно взять, например, граф с множеством вершин

$$\{(i, k) : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

и множеством ребер

$$\begin{aligned} &\{(i, 1), (i+1, 1)\}, \{(i, 1), (i+1, 3)\}, \{(i, 2), (i+1, 1)\}, \{(i, 2), (i+1, 3)\}, \\ &\{(i, 3), (i+1, 2)\}, \{(i, 3), (i+1, 4)\}, \{(i, 4), (i+1, 2)\}, \{(i, 4), (i+1, 4)\}, \\ &\{(i, 1), (i, 3)\}, \{(i, 2), (i, 4)\} : i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Напомним, что группа подстановок называется *квазиимпримитивной*, если каждая ее неединичная нормальная подгруппа транзитивна. Заметим, что каждая транзитивная группа подстановок простой степени квазиимпримитивна.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть Γ – обобщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое q -расширение решетки Λ^d для некоторых целых положительных чисел d и q , реализуемое G, σ, φ , причем стабилизатор в G блока из σ индуцирует на этом блоке квазиимпримитивную группу. Тогда $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_i \leq (q!)^{i-1}$ для всех $1 \leq i \leq d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного элемента $(i_1, \dots, i_d)$ группы $\mathbb{Z}^d$ положим $B_{(i_1, \dots, i_d)} = \varphi^{-1}((i_1, \dots, i_d))$. Для каждого $1 \leq j \leq d$ обозначим через e_j элемент $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{j-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{d-j}$ группы $\mathbb{Z}^d$.

Легко видеть, что для произвольных $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ и $j \in \{1, \dots, d\}$, полагая $X = B_{(i_1, \dots, i_d)}$, $Y = B_{(i_1, \dots, i_d) + e_j}$, имеем: $G_X^Y = 1$ тогда и только тогда, когда $G_Y^X = 1$. Действительно, с учетом $G_{\{X\}} = G_{\{Y\}}$ и $|G_{\{X\}}^X| = |G_{\{Y\}}^Y|$ имеем

$$|G_X^Y| = |G_{\{X\}}^{X \cup Y}| / |G_{\{X\}}^X| = |G_{\{Y\}}^{X \cup Y}| / |G_{\{Y\}}^Y| = |G_Y^X|,$$

и, следовательно, равенства $G_X^Y = 1$ и $G_Y^X = 1$ равносильны.

Обозначим через J множество $\{j \in \{1, \dots, d\} : G_{B_{0, \dots, 0}}^{B_{e_j}} = 1\}$, и пусть Λ_J^d – подграф решетки Λ^d , порожденный множеством вершин $\{(i_1, \dots, i_d) : i_k = 0 \text{ для всех } k \in \{1, \dots, d\} \setminus J\}$. Ясно, что при $J \neq \emptyset$ граф Λ_J^d изоморфен $|J|$ -мерной решетке $\Lambda^{|J|}$. Обозначим при $J \neq \emptyset$ через ψ изоморфизм графа Λ_J^d на $|J|$ -мерную решетку $\Lambda^{|J|}$, отображающий вершину $(i_1, \dots, i_d)$ графа Λ_J^d в вершину $(i_{j_1}, \dots, i_{j_{|J|}})$, где $\{j_1, \dots, j_{|J|}\} = J$ и $j_1 < \dots < j_{|J|}$.

Положим $U_J = \varphi^{-1}(V(\Lambda_J^d))$. Тогда с учетом изложенного в предыдущем абзаце имеем $G_{B_{0, \dots, 0}}^{U_J} = 1$. Пусть $\Gamma_J = \langle U_J \rangle_\Gamma$ – подграф графа Γ , порожденный множеством U_J , $G_J := G_{\{U_J\}}^{U_J}$ – ограничение на U_J стабилизатора U_J (глобального) в группе G , $\sigma_J := \{X \in \sigma : X \subseteq U_J\} = \{X \in \sigma : \text{Рг}_k(\varphi(X)) = 0 \text{ для всех } k \in \{1, \dots, d\} \setminus J\}$ – множество содержащихся в U_J блоков σ , $\varphi_J := \varphi|_{\sigma_J}$. Ясно, что при $J \neq \emptyset$ граф Γ_J является обобщенным $\text{Aut}_0(\Lambda^{|J|})$ -симметрическим q -расширением решетки $\Lambda^{|J|}$, реализуемым G_J , σ_J , $\psi\varphi_J$. При этом в силу $G_{B_{0, \dots, 0}}^{U_J} = 1$ имеем $|(G_J)_x| \leq (q-1)!$ для $x \in V(\Gamma_J) = U_J$. Согласно теореме 4.2 отсюда следует, что $(\Gamma_J, \sigma_J, \psi\varphi_J)$ удовлетворяет условию $[n'_1, \dots, n'_{|J|}]$ -периодичности, где $n'_i \leq (q|(G_J)_x|)^{i-1} \leq (q!)^{i-1}$ для всех $1 \leq i \leq |J|$.

Если $k \in \{1, \dots, d\} \setminus J$, то $G_{B_{0, \dots, 0}}^{B_{e_k}} \neq 1$ и, следовательно, с учетом $G_{B_{0, \dots, 0}}^{B_{e_k}} \leq G_{\{B_{e_k}\}}^{B_{e_k}}$ и квазипримитивности группы $G_{\{B_{e_k}\}}^{B_{e_k}}$ группа $G_{B_{0, \dots, 0}}^{B_{e_k}}$ транзитивна. Тогда для произвольного $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ каждая вершина из $B_{(i_1, \dots, i_d)}$ смежна в графе Γ с каждой вершиной из $B_{(i_1, \dots, i_d) + e_k}$.

Теперь легко видеть, что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_i = 1$ при $i \in \{1, \dots, d\} \setminus J$ и $n_i = n'_i$ при $i = j_l \in J$. Заметим, что в силу $j_1 < \dots < j_{|J|}$ при $i = j_l \in J$ имеем $i \geq l$ и, следовательно, $n_i = n'_i \leq (q!)^{l-1} \leq (q!)^{i-1}$. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 4.3 в силу теоремы 4.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Для произвольных целых положительных чисел d и q имеется лишь конечное число обобщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^d , которые могут быть реализованы такими G, σ, φ , что стабилизатор в G блока из σ индуцирует на этом блоке квазипримитивную группу.*

Наконец, поскольку транзитивная группа подстановок простой степени является квазипримитивной, то из теоремы 4.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Пусть Γ – обобщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое q -расширение решетки Λ^d для некоторого целого положительного числа d и некоторого целого положительного простого числа q , реализуемое G, σ, φ . Тогда $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_i \leq (q!)^{i-1}$ для всех $1 \leq i \leq d$. В частности, в силу теоремы 4.1 для произвольного целого положительного числа d и произвольного целого простого числа q имеется*

лишь конечное число обобщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^d .

§ 5. $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические 2-расширения решеток Λ^d

Как было отмечено во введении, значительный интерес представляет задача нахождения всех $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических q -расширений решетки Λ^d для фиксированных d и q . В настоящем параграфе дается описание $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d для любого целого положительного числа d (см. теорему 5.1 далее). Это позволяет, в частности, указать для любого d число $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d (см. следствие 5.1 далее).

Пусть d – целое положительное число и Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализуемое G, σ, φ . Граф Γ называется *насыщенным* $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^d , если блоки системы σ (напомним, что σ согласно предложению 4.1 однозначно определяется графом Γ) порождают в Γ подграфы, изоморфные полному графу на двух вершинах. (В общем случае для произвольных целых положительных чисел d и q насыщенными $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическими q -расширениями решетки Λ^d называются $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические расширения решетки Λ^d посредством полного графа на q вершинах.) Для каждого такого графа Γ обозначим через $\nu(\Gamma)$ граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа Γ , а множество ребер получается из множества ребер графа Γ удалением всех ребер, соединяющих в Γ вершины из одного и того же блока системы σ . Ясно, что так определенный граф $\nu(\Gamma)$ является обобщенным $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^d , реализуемым G, σ, φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Очевидно, что соответствие $\Gamma \mapsto \nu(\Gamma)$ задает для каждого целого положительного числа d биекцию множества насыщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d на множество обобщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d , не являющихся насыщенными.

Легко видеть, что обобщенные $\text{Aut}_0(\Lambda^1)$ -симметрические 2-расширения решетки Λ^1 исчерпываются следующими графами $\Gamma_n^{1,2}$, $1 \leq n \leq 4$ (верхние индексы 1, 2 означают, что $\Gamma_n^{1,2}$ являются обобщенными $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическими q -расширениями d -мерной решетки Λ^d при $d = 1, q = 2$).

Для каждого $1 \leq n \leq 4$

$$V(\Gamma_n^{1,2}) = \{(i, k) : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\},$$

и для каждого $1 \leq n \leq 4$

$$E(\Gamma_n^{1,2}) = E_0(\Gamma_n^{1,2}) \cup E_1(\Gamma_n^{1,2}),$$

где для

$$D_0 = \{(i, 1), (i, 2) : i \in \mathbb{Z}\},$$

$$D_1 = \{(i, k), (i+1, l) : i \in \mathbb{Z}, k, l \in \{1, 2\}\}$$

множества $E_0(\Gamma_n^{1,2}) = E(\Gamma_n^{1,2}) \cap D_0$ и $E_1(\Gamma_n^{1,2}) = E(\Gamma_n^{1,2}) \cap D_1$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} n = 1: & \quad E_0(\Gamma_1^{1,2}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_1^{1,2}) = \{(i, k), (i+1, k)\} : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}; \\ n = 2: & \quad E_0(\Gamma_2^{1,2}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_2^{1,2}) = D_1; \\ n = 3: & \quad E_0(\Gamma_3^{1,2}) = \emptyset, \quad E_1(\Gamma_3^{1,2}) = E_1(\Gamma_2^{1,2}); \\ n = 4: & \quad E_0(\Gamma_4^{1,2}) = \emptyset, \quad E_1(\Gamma_4^{1,2}) = E_1(\Gamma_1^{1,2}). \end{aligned}$$

Отметим, что графы $\Gamma_1^{1,2}$ и $\Gamma_2^{1,2}$ являются насыщенными $\text{Aut}_0(\Lambda^1)$ -симметрическими 2-расширениями решетки Λ^1 , $\Gamma_3^{1,2} = \nu(\Gamma_2^{1,2})$, $\Gamma_4^{1,2} = \nu(\Gamma_1^{1,2})$. При этом среди графов $\Gamma_i^{1,2}$, $1 \leq i \leq 4$, лишь граф $\Gamma_4^{1,2}$ несвязен (и, следовательно, не является $\text{Aut}_0(\Lambda^1)$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^1).

Далее, несложно показать, что обобщенные $\text{Aut}_0(\Lambda^2)$ -симметрические 2-расширения решетки Λ^2 исчерпываются следующими графами $\Gamma_n^{2,2}$, $1 \leq n \leq 8$ (верхние индексы 2, 2 означают, что $\Gamma_n^{2,2}$ являются обобщенными $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическими q -расширениями d -мерной решетки Λ^d при $d = 2$, $q = 2$).

Для каждого $1 \leq n \leq 8$

$$V(\Gamma_n^{1,2}) = \{(i, j, k) : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\},$$

и для каждого $1 \leq n \leq 8$

$$E(\Gamma_n^{2,2}) = E_0(\Gamma_n^{2,2}) \cup E_1(\Gamma_n^{2,2}) \cup E_2(\Gamma_n^{2,2}),$$

где для

$$D_0 = \{(i, j, 1), (i, j, 2)\} : i, j \in \mathbb{Z}\},$$

$$D_1 = \{(i, j, k), (i+1, j, l)\} : i, j \in \mathbb{Z}, k, l \in \{1, 2\}\},$$

$$D_2 = \{(i, j, k), (i, j+1, l)\} : i, j \in \mathbb{Z}, k, l \in \{1, 2\}\}$$

множества $E_0(\Gamma_n^{2,2}) = E(\Gamma_n^{2,2}) \cap D_0$, $E_1(\Gamma_n^{2,2}) = E(\Gamma_n^{2,2}) \cap D_1$ и $E_2(\Gamma_n^{2,2}) = E(\Gamma_n^{2,2}) \cap D_2$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} n = 1: & \quad E_0(\Gamma_1^{2,2}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_1^{2,2}) = \{(i, j, k), (i+1, j, k)\} : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}, \\ & \quad E_2(\Gamma_1^{2,2}) = \{(i, j, k), (i, j+1, k)\} : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}; \\ n = 2: & \quad E_0(\Gamma_2^{2,2}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_2^{2,2}) = E_1(\Gamma_1^{2,2}), \\ & \quad E_2(\Gamma_2^{2,2}) = \{(i, j, k), (i, j+1, k)\} : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}, i \equiv 0 \pmod{2}\} \\ & \quad \cup \{(i, j, 1), (i, j+1, 2)\}, \{(i, j, 2), (i, j+1, 1)\} : i, j \in \mathbb{Z}, i \equiv 1 \pmod{2}\}; \\ n = 3: & \quad E_0(\Gamma_3^{2,2}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_3^{2,2}) = E_1(\Gamma_1^{2,2}), \quad E_2(\Gamma_3^{2,2}) = D_2; \\ n = 4: & \quad E_0(\Gamma_4^{2,2}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_4^{2,2}) = D_1, \quad E_2(\Gamma_4^{2,2}) = D_2; \\ n = 5: & \quad E_0(\Gamma_5^{2,2}) = \emptyset, \quad E_1(\Gamma_5^{2,2}) = E_1(\Gamma_2^{2,2}), \quad E_2(\Gamma_5^{2,2}) = E_2(\Gamma_2^{2,2}); \\ n = 6: & \quad E_0(\Gamma_6^{2,2}) = \emptyset, \quad E_1(\Gamma_6^{2,2}) = E_1(\Gamma_3^{2,2}), \quad E_2(\Gamma_6^{2,2}) = E_2(\Gamma_3^{2,2}); \\ n = 7: & \quad E_0(\Gamma_7^{2,2}) = \emptyset, \quad E_1(\Gamma_7^{2,2}) = E_1(\Gamma_4^{2,2}), \quad E_2(\Gamma_7^{2,2}) = E_2(\Gamma_4^{2,2}); \\ n = 8: & \quad E_0(\Gamma_8^{2,2}) = \emptyset, \quad E_1(\Gamma_8^{2,2}) = E_1(\Gamma_1^{2,2}), \quad E_2(\Gamma_8^{2,2}) = E_2(\Gamma_1^{2,2}). \end{aligned}$$

Отметим, что графы $\Gamma_i^{2,2}$, $1 \leq i \leq 4$, являются насыщенными $\text{Aut}_0(\Lambda^2)$ -симметрическими 2-расширениями решетки Λ^2 , $\Gamma_5^{2,2} = \nu(\Gamma_2^{2,2})$, $\Gamma_6^{2,2} = \nu(\Gamma_3^{2,2})$, $\Gamma_7^{2,2} = \nu(\Gamma_4^{2,2})$, $\Gamma_8^{2,2} = \nu(\Gamma_1^{2,2})$. При этом среди графов $\Gamma_i^{2,2}$, $1 \leq i \leq 8$, лишь граф $\Gamma_8^{2,2}$ несвязен (и, следовательно, не является $\text{Aut}_0(\Lambda^2)$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^2).

Перейдем к описанию $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d для произвольного целого положительного числа d .

Пусть Γ – произвольное насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , где $d \geq 1$, реализуемое некоторыми G , σ , φ . (Согласно предложению 4.1 система импримитивности σ группы G совпадает с множеством всех $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбит на $V(\Gamma)$ и можно считать, что $G = \text{Aut}_0(\Gamma)$.)

Для целого числа i , $1 \leq i \leq d$, скажем, что в графе Γ *относительно φ направление $\{i\}$ реализует тип $\Gamma_1^{1,2}$* (соответственно, $\Gamma_2^{1,2}$), если подграф графа Γ , порожденный множеством

$$\{x \in V(\Gamma) : \text{Pr}_j(\varphi(x^\sigma)) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}\},$$

изоморфен графу $\Gamma_1^{1,2}$ (соответственно, $\Gamma_2^{1,2}$).

Для различных целых чисел i и j , $1 \leq i, j \leq d$, скажем, что в графе Γ *относительно φ пара направлений $\{i, j\}$ реализует тип $\Gamma_1^{2,2}$* (соответственно, $\Gamma_2^{2,2}$, $\Gamma_3^{2,2}$ или $\Gamma_4^{2,2}$), если подграф графа Γ , порожденный множеством

$$\{x \in V(\Gamma) : \text{Pr}_k(\varphi(x^\sigma)) = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}\},$$

изоморфен графу $\Gamma_1^{2,2}$ (соответственно, $\Gamma_2^{2,2}$, $\Gamma_3^{2,2}$ или $\Gamma_4^{2,2}$).

Пусть вновь Γ – насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , где $d \geq 1$, реализуемое некоторыми G , σ , φ . Предположим, что существует целое число c , $0 \leq c \leq d$, такое, что для каждого целого числа i с условием $1 \leq i \leq c$ относительно изоморфизма φ в графе Γ направление $\{i\}$ реализует тип $\Gamma_2^{1,2}$, а для каждого целого числа i с условием $c < i \leq d$ относительно изоморфизма φ в графе Γ направление $\{i\}$ реализует тип $\Gamma_1^{1,2}$. Полагая $\mathcal{P} := \{\{i, j\} : c < i < j \leq d \text{ и относительно изоморфизма } \varphi \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_1^{2,2}\}$, скажем, что в этом случае граф Γ *относительно изоморфизма φ реализует набор $(c, \mathcal{P})$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Множество $\mathcal{P}$ совпадает с $\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d \text{ и относительно изоморфизма } \varphi \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_1^{2,2}\}$, а множество $\{\{i, j\} : c < i < j \leq d\} \setminus \mathcal{P}$ совпадает с $\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d \text{ и относительно изоморфизма } \varphi \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_2^{2,2}\}$. Кроме того, $\{\{i, j\} : 1 \leq i \leq c < j \leq d\} = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d \text{ и относительно изоморфизма } \varphi \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_3^{2,2}\}$ и $\{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq c\} = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d \text{ и относительно изоморфизма } \varphi \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_4^{2,2}\}$.

Далее, скажем, что для целого числа c с условием $0 \leq c \leq d$ и $\mathcal{P} \subseteq \{\{i, j\}: c < i < j \leq d\}$ граф Γ , являющийся насыщенным $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^d , реализует набор $(c, \mathcal{P})$, если для некоторого изоморфизма φ графа Γ/σ , где σ – соответствующая Γ система блоков, на решетку Λ^d граф Γ реализует набор $(c, \mathcal{P})$ относительно φ .

Следующая теорема дает описание $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d для произвольного целого положительного числа d .

ТЕОРЕМА 5.1. *Для произвольного целого положительного числа d справедливы следующие утверждения:*

- 1) *каждое насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d реализует некоторый набор $(c, \mathcal{P})$, где $0 \leq c \leq d$ и $\mathcal{P} \subseteq \{\{i, j\}: c < i < j \leq d\}$;*
- 2) *для любых $0 \leq c \leq d$ и $\mathcal{P} \subseteq \{\{i, j\}: c < i < j \leq d\}$ существует единственное с точностью до изоморфизма насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализующее набор $(c, \mathcal{P})$;*
- 3) *граф, реализующий набор $(c, \mathcal{P})$, где $0 \leq c \leq d$ и $\mathcal{P} \subseteq \{\{i, j\}: c < i < j \leq d\}$, изоморфен графу, реализующему набор $(c^*, \mathcal{P}^*)$, где $0 \leq c^* \leq d$ и $\mathcal{P}^* \subseteq \{\{i, j\}: c^* < i < j \leq d\}$, тогда и только тогда, когда $c^* = c$ и существует подстановка на $\{c+1, \dots, d\}$, переводящая $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}^*$;*
- 4) *если Γ – произвольное насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализующее отличный от $(0, \{\{i, j\}: 1 \leq i < j \leq d\})$ набор, то сопоставление графу Γ графа $\nu(\Gamma)$ есть сохраняющая отношение изоморфности биекция множества насыщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d , реализующих отличные от $(0, \{\{i, j\}: 1 \leq i < j \leq d\})$ наборы, на множество $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d , не являющихся насыщенными.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Утверждение 2) теоремы 5.1 в части единственности (с точностью до изоморфизма) реализации набора $(c, \mathcal{P})$ следует из утверждения 3) теоремы 5.1. Однако утверждение 2) в приведенной выше форме доказывается нами индуктивно и используется при доказательстве утверждения 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Докажем утверждение 1). Пусть Γ – произвольное насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализуемое некоторыми G, σ, φ . (При этом, см. предложение 4.1, σ совпадает с множеством $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбит на $V(\Gamma)$.)

Предположим, что ни для какого целого i с условием $1 \leq i \leq d$ в графе Γ относительно φ направление $\{i\}$ не реализует тип $\Gamma_2^{1,2}$. Тогда, полагая $\mathcal{P} = \{\{i, j\}: 1 \leq i < j \leq d\}$ и относительно φ пара направлений $\{i, j\}$ реализует тип $\Gamma_1^{2,2}$, получаем, что граф Γ является $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим 2-расширением графа Λ^d и относительно изоморфизма φ реализует набор $(0, \mathcal{P})$.

Предположим теперь, что в графе Γ относительно φ некоторое направление реализует тип $\Gamma_2^{1,2}$. Пусть $i_1, \dots, i_c$ – все такие i , $1 \leq i \leq d$, что относительно φ

в графе Γ направление $\{i\}$ реализует тип $\Gamma_2^{1,2}$. Пусть, кроме того, ψ – автоморфизм Λ^d такой, что $\{\psi t_{i_1} \psi^{-1}, \dots, \psi t_{i_c} \psi^{-1}\} = \{t_1, \dots, t_c\}$. Тогда относительно $\psi\varphi$ в графе Γ направления $\{i\}$, где $1 \leq i \leq c$, реализуют тип $\Gamma_2^{1,2}$, а направления $\{i\}$, где $c < i \leq d$, реализуют тип $\Gamma_1^{1,2}$. Полагая $\mathcal{P} = \{\{i, j\} : c < i < j \leq d \text{ и относительно } \psi\varphi \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_1^{2,2}\}$, получаем, что граф Γ является насыщенным $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим 2-расширением графа Λ^d и относительно изоморфизма $\psi\varphi$ реализует набор $(c, \mathcal{P})$. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Очевидно, оно справедливо при $d \leq 2$. Предположим, что утверждение 2) справедливо при $d = d_0 \geq 2$. Докажем его справедливость при $d = d_0 + 1$. Пусть $1 \leq c \leq d_0 + 1$ и $\mathcal{P} \subseteq \{\{i, j\} : c < i < j \leq d_0 + 1\}$.

Если $c = d_0 + 1$, то $\mathcal{P} = \emptyset$ и, очевидно, единственным (с точностью до изоморфизма) насыщенным $\text{Aut}_0(\Lambda^{d_0+1})$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^{d_0+1} , реализующим набор $(c, \mathcal{P})$, является граф Γ , определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} V(\Gamma) &= \{(i_1, \dots, i_{d_0+1}, k) : i_1, \dots, i_{d_0+1} \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}, \\ E(\Gamma) &= \{ \{(i_1, \dots, i_{d_0+1}, 1), (i_1, \dots, i_{d_0+1}, 2)\} : i_1, \dots, i_{d_0+1} \in \mathbb{Z} \} \\ &\cup \{ \{(i_1, \dots, i_{d_0+1}, k), (i'_1, \dots, i'_{d_0+1}, l)\} : i_1, \dots, i_{d_0+1}, i'_1, \dots, i'_{d_0+1} \in \mathbb{Z}, \\ &\quad k, l \in \{1, 2\}, |i_1 - i'_1| + \dots + |i_{d_0+1} - i'_{d_0+1}| = 1 \} \}. \end{aligned}$$

Пусть $c < d_0 + 1$. По предположению индукции существует единственное (с точностью до изоморфизма) $\text{Aut}_0(\Lambda^{d_0})$ -симметрическое 2-расширение Γ' решетки Λ^{d_0} , реализующее набор $(c, \mathcal{P}')$, где $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap \{\{i, j\} : c < i < j \leq d_0\}$. Пусть Γ' реализуется G', σ', φ' и реализует относительно φ' набор $(c, \mathcal{P}')$. отождествим множество вершин Γ' с множеством $\{(i_1, \dots, i_{d_0}, k) : i_1, \dots, i_{d_0} \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}$ так, чтобы $\varphi'((i_1, \dots, i_{d_0}, k)^{\sigma'}) = (i_1, \dots, i_{d_0})$ для любых $i_1, \dots, i_{d_0} \in \mathbb{Z}$ и $k \in \{1, 2\}$.

Определим следующим образом граф Γ . Положим

$$V(\Gamma) = \{(i_1, \dots, i_{d_0+1}, k) : i_1, \dots, i_{d_0+1} \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}.$$

Кроме того, положим

$$\begin{aligned} E(\Gamma) &= \{ \{(i_1, \dots, i_{d_0+1}, k), (i'_1, \dots, i'_{d_0+1}, l)\} : i_1, \dots, i_{d_0+1}, i'_1, \dots, i'_{d_0+1} \in \mathbb{Z}, \\ &\quad k, l \in \{1, 2\}, i_{d_0+1} = i'_{d_0+1}, \{(i_1, \dots, i_{d_0}, k), (i'_1, \dots, i'_{d_0}, l)\} \in E(\Gamma') \} \cup E', \end{aligned}$$

где E' определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} E' &= \left\{ \{(i_1, \dots, i_{d_0}, i_{d_0+1}, k), (i_1, \dots, i_{d_0}, i_{d_0+1} + 1, l)\} : i_1, \dots, i_{d_0}, i_{d_0+1} \in \mathbb{Z}, \right. \\ &\quad k, l \in \{1, 2\}, k = l \text{ при } R = \emptyset \text{ или при } \sum_{r \in R} i_r \equiv 0 \pmod{2}, \\ &\quad \left. k \neq l \text{ при } R \neq \emptyset \text{ и } \sum_{r \in R} i_r \equiv 1 \pmod{2} \right\} \end{aligned}$$

для $R = \{r : c < r < d_0 + 1, \{r, d_0 + 1\} \notin \mathcal{P}\}$.

Покажем, что граф Γ является $\text{Aut}_0(\Lambda^{d_0+1})$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^{d_0+1} , реализующим набор $(c, \mathcal{P})$.

Предварительно определим автоморфизмы h_i , $0 \leq i \leq d_0$, графа Γ' . Пусть h_0 – автоморфизм графа Γ' , меняющий местами вершины во всех блоках σ' . Кроме того, для каждого $0 < i \leq d_0$ пусть h_i – некоторый автоморфизм графа Γ' такой, что $\varphi' h_i^{\sigma'} (\varphi')^{-1}$ есть сдвиг t_i решетки Λ^{d_0} .

Теперь следующим образом определим ограниченные автоморфизмы g_i , $0 \leq i \leq d_0 + 1$, графа Γ . Положим

$$g_0: (i_1, \dots, i_{d_0+1}, k) \mapsto (i_1, \dots, i_{d_0+1}, l), \quad i_1, \dots, i_{d_0+1} \in \mathbb{Z}, \quad k, l \in \{1, 2\}, \quad k \neq l.$$

Если $i \leq c$ или $\{i, d_0 + 1\} \in \mathcal{P}$, то положим

$$\begin{aligned} g_i: (i_1, \dots, i_{d_0+1}, k) &\mapsto (i'_1, \dots, i'_{d_0+1}, l), \\ i_1, \dots, i_{d_0+1}, i'_1, \dots, i'_{d_0+1} &\in \mathbb{Z}, \quad k, l \in \{1, 2\}, \\ i_{d_0+1} = i'_{d_0+1}, \quad h_i((i_1, \dots, i_{d_0}, k)) &= (i'_1, \dots, i'_{d_0}, l). \end{aligned}$$

Если $c < i < d_0 + 1$ и $\{i, d_0 + 1\} \notin \mathcal{P}$, то положим

$$\begin{aligned} g_i: (i_1, \dots, i_{d_0+1}, k) &\mapsto (i'_1, \dots, i'_{d_0+1}, l), \\ i_1, \dots, i_{d_0+1}, i'_1, \dots, i'_{d_0+1} &\in \mathbb{Z}, \quad k, l \in \{1, 2\}, \\ i_{d_0+1} = i'_{d_0+1}, \quad h_i((i_1, \dots, i_{d_0}, k)) &= (i'_1, \dots, i'_{d_0}, l) \quad \text{при } i_{d_0+1} \equiv 0 \pmod{2}, \\ h_0 h_i((i_1, \dots, i_{d_0}, k)) &= (i'_1, \dots, i'_{d_0}, l) \quad \text{при } i_{d_0+1} \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Наконец, положим

$$\begin{aligned} g_{d_0+1}: (i_1, \dots, i_{d_0}, i_{d_0+1}, k) &\mapsto (i_1, \dots, i_{d_0}, i_{d_0+1} + 1, k), \\ i_1, \dots, i_{d_0+1} &\in \mathbb{Z}, \quad k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Из определений автоморфизмов g_i , $0 \leq i \leq d_0 + 1$, следует, что $G := \langle g_0, g_1, \dots, g_{d_0+1} \rangle$ – вершинно-транзитивная группа ограниченных автоморфизмов графа Γ и $\sigma := \{ \{(i_1, \dots, i_{d_0+1}, 1), (i_1, \dots, i_{d_0+1}, 2)\} : i_1, \dots, i_{d_0+1} \in \mathbb{Z} \}$ – система импримитивности группы G с блоками порядка 2, причем

$$\varphi: (\{(i_1, \dots, i_{d_0+1}, 1), (i_1, \dots, i_{d_0+1}, 2)\}) \mapsto (i_1, \dots, i_{d_0+1}), \quad i_1, \dots, i_{d_0+1} \in \mathbb{Z},$$

является изоморфизмом графа Γ/σ на решетку Λ^{d_0+1} , для которого $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = \text{Aut}_0(\Lambda^{d_0+1})$. Следовательно, Γ является $\text{Aut}_0(\Lambda^{d_0+1})$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^{d_0+1} . При этом из построения графа Γ следует, что он относительно φ реализует набор $(c, \mathcal{P})$.

Пусть теперь Γ – произвольное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , где $d = d_0 + 1$, реализуемое некоторыми G , σ , φ и реализующее набор $(c, \mathcal{P})$ относительно изоморфизма φ . (При этом, см. предложение 4.1, σ совпадает с множеством $T(\text{Aut}_0(\Gamma))$ -орбит на $V(\Gamma)$.) Покажем, что этими условиями

граф Γ однозначно (с точностью до изоморфизма) определен. Очевидно, не теряя общности, можно считать, что справедливо следующее утверждение:

$$\begin{aligned} (a) \quad V(\Gamma) &= \{(i_1, \dots, i_d, k) : i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}, \\ \sigma &= \{\{(i_1, \dots, i_d, 1), (i_1, \dots, i_d, 2)\} : i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}\}, \\ \varphi : V(\Gamma/\sigma) &\rightarrow V(\Lambda^d), \quad \varphi(\{(i_1, \dots, i_d, 1), (i_1, \dots, i_d, 2)\}) = (i_1, \dots, i_d). \end{aligned}$$

Предположим сначала, что $c \geq 1$. Тогда для каждого целого числа i_0 подграф графа Γ , порожденный множеством вершин $\{(i_0, i_1, \dots, i_{d_0}, k) : i_1, \dots, i_{d_0} \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}$, является, очевидно, $\text{Aut}_0(\Lambda^{d_0})$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^{d_0} , реализующим набор $(c-1, \mathcal{P}'')$, где $\mathcal{P}'' = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d_0, \{i+1, j+1\} \in \mathcal{P}\}$. По предположению индукции существует единственное (с точностью до изоморфизма) $\text{Aut}_0(\Lambda^{d_0})$ -симметрическое 2-расширение Γ'' решетки Λ^{d_0} , реализующее набор $(c-1, \mathcal{P}'')$. Пусть Γ'' реализуется G'', σ'', φ'' и реализует относительно φ'' набор $(c-1, \mathcal{P}'')$. отождествим множество вершин Γ'' с множеством $\{(i_1, \dots, i_{d_0}, k) : i_1, \dots, i_{d_0} \in \mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}\}$ так, чтобы $\varphi''((i_1, \dots, i_{d_0}, k)^{\sigma''}) = (i_1, \dots, i_{d_0})$ для любых $i_1, \dots, i_{d_0} \in \mathbb{Z}$ и $k \in \{1, 2\}$. Очевидно, не теряя общности, можно считать, что для каждого целого числа i отображение

$$\psi_i : V(\Gamma'') \rightarrow V(\Gamma), \quad \psi_i((i_1, \dots, i_{d-1}, k)) = (i, i_1, \dots, i_{d-1}, k),$$

есть изоморфное вложение графа Γ'' в граф Γ . Теперь

$$E(\Gamma) = \{\{\psi_i(x), \psi_i(y)\} : i \in \mathbb{Z}, \{x, y\} \in E(\Gamma'')\} \cup E'',$$

где

$$E'' = \{\{(i_1, \dots, i_{d-1}, i_d, k), (i_1, \dots, i_{d-1}, i_d + 1, l)\} : i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}, k, l \in \{1, 2\}\},$$

и, следовательно, $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализующее набор $(c, \mathcal{P})$, единственно (с точностью до изоморфизма).

Предположим поэтому, что $c = 0$. Очевидно, не теряя общности, можно считать, что справедливо следующее утверждение:

(b) для каждого целого числа i отображение $\varphi_i : V(\Gamma') \rightarrow V(\Gamma)$, $\varphi_i((i_1, \dots, i_{d-1}, k)) = (i, i_1, \dots, i_{d-1}, k)$, есть изоморфное вложение графа Γ' в граф Γ .
Теперь

$$E(\Gamma) = \{\{\varphi_i(x), \varphi_i(y)\} : i \in \mathbb{Z}, \{x, y\} \in E(\Gamma')\} \cup E'',$$

где

$$E'' \subseteq \{\{(i_1, \dots, i_{d-1}, i_d, k), (i_1, \dots, i_{d-1}, i_d + 1, l)\} : i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}, k, l \in \{1, 2\}\},$$

причем (в силу $c = 0$) для произвольных $i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}$ множество $E_{i_1, \dots, i_d} := \{(k, l) : k, l \in \{1, 2\}, \{(i_1, \dots, i_{d-1}, i_d, k), (i_1, \dots, i_{d-1}, i_d + 1, l)\} \in E''\}$ совпадает с одним из множеств: $\{(1, 1), (2, 2)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}$. (Вообще говоря, множество $E_{i_1, \dots, i_d}$ зависит от выбора $i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z}$.) Не теряя общности (меняя местами,

в случае необходимости, вершины внутри блоков σ , принадлежащих множествам $\varphi_i(V(\Gamma'))$ для подходящих $i \in \mathbb{Z}$, можно считать, что (наряду с (а) и (б)) справедливо следующее утверждение:

(с) $E_{0,\dots,0,i} = \{(1,1), (2,2)\}$ для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Теперь для завершения доказательства утверждения 2) теоремы покажем индукцией по $n = |i_1| + \dots + |i_{d-1}|$, где $i_1, \dots, i_{d-1} \in \mathbb{Z}$, что для каждого $i \in \mathbb{Z}$ множество $E_{i_1,\dots,i_{d-1},i}$ однозначно определяется множеством $\mathcal{P}$.

При $n = 0$ справедливость утверждения следует из (с). Предположим, что утверждение справедливо при всех $n \leq n_0$, где n_0 – некоторое целое неотрицательное число, и пусть $i_1, \dots, i_{d-1} \in \mathbb{Z}$ такие, что $|i_1| + \dots + |i_{d-1}| = n_0 + 1$. Тогда для некоторого $1 \leq j \leq d-1$ имеем $i_j \neq 0$. Положим $i'_k = i_k$ при $1 \leq k \leq d-1$ и $k \neq j$, и пусть $i'_j := i_j - \varepsilon$, где $\varepsilon = 1$ при $i_j > 0$ и $\varepsilon = -1$ при $i_j < 0$. Тогда $|i'_1| + \dots + |i'_{d-1}| = n_0$, и по предположению индукции для каждого $i \in \mathbb{Z}$ множество $E_{i'_1,\dots,i'_{d-1},i}$ однозначно определяется множеством $\mathcal{P}$.

Пусть x – произвольная вершина графа Γ из $\{(i_1, \dots, i_{d-1}, i, 1), (i_1, \dots, i_{d-1}, i, 2)\}$ и y – произвольная вершина графа Γ из $\{(i_1, \dots, i_{d-1}, i+1, 1), (i_1, \dots, i_{d-1}, i+1, 2)\}$. По x и y однозначно определяются вершина $x' \in \{(i'_1, \dots, i'_{d-1}, i, 1), (i'_1, \dots, i'_{d-1}, i, 2)\}$ и вершина $y' \in \{(i'_1, \dots, i'_{d-1}, i+1, 1), (i'_1, \dots, i'_{d-1}, i+1, 2)\}$ такие, что $\{x, x'\}, \{y, y'\} \in E(\Gamma)$. (Вершины x', y' определяются условиями $\{\varphi_i^{-1}(x'), \varphi_{i+1}^{-1}(y')\} \in \{(i'_1, \dots, i'_{d-1}, 1), (i'_1, \dots, i'_{d-1}, 2)\}$, $\{\varphi_i^{-1}(x), \varphi_i^{-1}(x')\} \in E(\Gamma')$, $\{\varphi_{i+1}^{-1}(y), \varphi_{i+1}^{-1}(y')\} \in E(\Gamma')$.) Если $\{j, d\} \in \mathcal{P}$, то $\{x, y\} \in E_{(i_1,\dots,i_{d-1},i)}$ тогда и только тогда, когда $\{x', y'\} \in E_{(i'_1,\dots,i'_{d-1},i)}$. Если $\{j, d\} \notin \mathcal{P}$, то $\{x, y\} \in E_{(i_1,\dots,i_{d-1},i)}$ тогда и только тогда, когда $\{x', y'\} \notin E_{(i'_1,\dots,i'_{d-1},i)}$. Таким образом, $E_{(i_1,\dots,i_{d-1},i)}$ однозначно определяется по $E_{(i'_1,\dots,i'_{d-1},i)}$ и $\mathcal{P}$, что завершает доказательство утверждения 2) теоремы.

Докажем утверждение 3). Пусть Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализуемое G, σ, φ и реализующее относительно изоморфизма φ набор $(c, \mathcal{P})$, и Γ^* – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализуемое G^*, σ^*, φ^* и реализующее относительно изоморфизма φ^* набор $(c^*, \mathcal{P}^*)$.

Предположим, что имеется изоморфизм $\chi: \Gamma \rightarrow \Gamma^*$. Покажем, что в этом случае $c^* = c$ и существует подстановка на $\{c+1, \dots, d\}$, переводящая $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}^*$. Согласно предложению 4.2 изоморфизм χ графа Γ на граф Γ^* индуцирует изоморфизм $\bar{\chi}$ графа Γ/σ на граф Γ^*/σ^* . Положим $\omega = \varphi^* \bar{\chi} \varphi^{-1} \in \text{Aut}(\Lambda^d)$. Для каждого $1 \leq i \leq d$ обозначим через $\Lambda_{\{i\}}^d$ множество $\{x \in V(\Lambda^d): \text{Pr}_j(x) = 0, 1 \leq j \leq d, j \neq i\}$. Автоморфизм ω решетки Λ^d задает на множестве $\{1, \dots, d\}$ подстановку π_ω такую, что $\omega(\Lambda_{\{i\}}^d) = \Lambda_{\{\pi_\omega(i)\}}^d$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$. Ясно, что для произвольного $1 \leq i \leq d$ в Γ относительно φ направление $\{i\}$ реализует тип $\Gamma_2^{1,2}$ тогда и только тогда, когда в Γ^* относительно φ^* направление $\{\pi_\omega(i)\}$ реализует тип $\Gamma_2^{1,2}$. Ясно также, что для произвольных $1 \leq i < j \leq d$ в Γ относительно φ пара направлений $\{i, j\}$ реализует тип $\Gamma_1^{2,2}$ тогда и только тогда, когда в Γ^* относительно φ^* пара направлений $\{\pi_\omega(i), \pi_\omega(j)\}$ реализует тип $\Gamma_1^{2,2}$. Поскольку $\{1, \dots, c\} = \{i: 1 \leq i \leq d \text{ и в } \Gamma \text{ относительно } \varphi \text{ направление } \{i\} \text{ реализует тип } \Gamma_2^{1,2}\}$ и $\{1, \dots, c^*\} = \{i: 1 \leq i \leq d \text{ и в } \Gamma^* \text{ относительно } \varphi^* \text{ направление } \{i\} \text{ реализует тип } \Gamma_2^{1,2}\}$, то $c^* = c$ и $\{1, \dots, c\} - \pi_\omega$ -инвариантное

множество. Кроме того, поскольку $\mathcal{P} = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d \text{ и в } \Gamma \text{ относительно } \varphi \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_1^{2,2}\}$ и $\mathcal{P}^* = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d \text{ и в } \Gamma^* \text{ относительно } \varphi^* \text{ пара направлений } \{i, j\} \text{ реализует тип } \Gamma_1^{2,2}\}$, то π_ω переводит $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}^*$.

Покажем, что обратное утверждение также справедливо, т. е. что из $c = c^*$ и существования подстановки на $\{c+1, \dots, d\}$, переводящей $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}^*$, следует изоморфизм графов Γ и Γ^* . Пусть π – подстановка на $\{c+1, \dots, d\}$, переводящая $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}^*$. Следующим образом определим подстановку $\tilde{\pi}$ на $\{1, \dots, d\}$: $\tilde{\pi}(i) = i$ при $i \leq c$ и $\tilde{\pi}(i) = \pi(i)$ при $i > c$. Найдется такой автоморфизм ω решетки Λ^d , что $\tilde{\pi}$ совпадает с подстановкой π_ω на $\{1, \dots, d\}$, определяемой по правилу: $\omega(\Lambda_{\{i\}}^d) = \Lambda_{\{\pi_\omega(i)\}}^d$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$, где $\Lambda_{\{i\}}^d = \{x \in V(\Lambda^d) : \text{Pr}_j(x) = 0, 1 \leq j \leq d, j \neq i\}$ для каждого $1 \leq i \leq d$. Для так определенного автоморфизма ω граф Γ^* реализует набор $(c, \mathcal{P})$ относительно изоморфизма $\omega^{-1}\varphi^* : \Gamma^*/\sigma^* \rightarrow \Lambda^d$. В силу утверждения 2) теоремы отсюда следует, что граф Γ изоморфен графу Γ^* .

Утверждение 4) очевидно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Согласно замечанию 5.1 для любого целого положительного числа d имеется единственное (с точностью до изоморфизма) несвязное обобщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , которое является дизъюнктивным объединением двух графов, изоморфных Λ^d . Это несвязное обобщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d изоморфно $\nu(\Gamma)$, где Γ – насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализующее набор $(0, \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq d\})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Зафиксируем произвольное целое положительное число d . Пусть Γ – насыщенное $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , реализующее относительно изоморфизма φ (графа Γ/σ , где σ – соответствующая Γ система блоков, на решетку Λ^d) набор $(c, \mathcal{P})$ (по утверждению 1) теоремы 5.1 для каждого Γ такие φ и $(c, \mathcal{P})$ существуют). По Γ и φ следующим образом определим граф $[\Gamma]_\varphi$: $V([\Gamma]_\varphi) = \{c+1, \dots, d\}$, $E([\Gamma]_\varphi) = \mathcal{P}$.

Согласно утверждению 2) теоремы 5.1 каждый конечный граф с не более чем d вершинами изоморфен графу $[\Gamma]_\varphi$ для подходящих Γ и φ . Далее, если Γ , помимо реализуемости относительно изоморфизма φ набора $(c, \mathcal{P})$, реализует относительно изоморфизма φ' набор $(c', \mathcal{P}')$, то согласно утверждению 3) теоремы 5.1 графы $[\Gamma]_\varphi$ и $[\Gamma]_{\varphi'}$ изоморфны. Более того, согласно утверждению 3) теоремы 5.1 если для каждого $k \in \{1, 2\}$ граф Γ_k является насыщенным $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическим 2-расширением решетки Λ^d , реализующим относительно изоморфизма φ_k набор $(c_k, \mathcal{P}_k)$, $0 \leq c_k \leq d$, $\mathcal{P}_k \subseteq \{\{i, j\} : c_k < i < j \leq d\}$, то графы Γ_1 и Γ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы $[\Gamma_1]_{\varphi_1}$ и $[\Gamma_2]_{\varphi_2}$. Таким образом, существует биективное соответствие между множеством изоморфных типов насыщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d и множеством изоморфных типов конечных графов с не более чем d вершинами (включая граф с пустым множеством вершин).

Теорема 5.1 позволяет получить формулу для числа $N_{d,2}$ (попарно неизоморфных) $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d , где d – произ-

вольное целое положительное число. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение (см. следствие 5.1 далее), для каждого целого положительного числа k обозначим через N_k число (попарно неизоморфных) графов с k вершинами. Тогда (см., например, [13, теорема 15.5])

$$N_k = \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \mathbb{Z}^k \\ j_1, j_2, \dots, j_k \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + \dots + kj_k = k}} \frac{2^{m(j_1, j_2, \dots, j_k)}}{\prod_{i=1}^k j_i! i^{j_i}},$$

где

$$m(j_1, j_2, \dots, j_k) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} i \left(j_{2i} + \frac{j_i(j_i - 1)}{2} \right) + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} i j_{2i+1} + \sum_{1 \leq l < m \leq k-1} \text{НОД}(l, m) j_l j_m.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для произвольного целого положительного числа d имеем

$$N_{d,2} = 2(N_1 + \dots + N_d) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 5.5 число (попарно неизоморфных) насыщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d равно $1 + N_1 + \dots + N_d$. В силу утверждения 4) теоремы 5.1 и замечания 5.4 отсюда следует, что число всех (попарно неизоморфных) $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d равно $1 + 2(N_1 + \dots + N_d)$ (а число всех обобщенных $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрических 2-расширений решетки Λ^d равно $2(1 + N_1 + \dots + N_d)$).

При $d \leq 10$ следствие 5.1 дает для $N_{d,2}$ приводимые ниже значения:

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= 3, & N_{6,2} &= 417, \\ N_{2,2} &= 7, & N_{7,2} &= 2505, \\ N_{3,2} &= 15, & N_{8,2} &= 27197, \\ N_{4,2} &= 37, & N_{9,2} &= 576533, \\ N_{5,2} &= 105, & N_{10,2} &= 24586869. \end{aligned}$$

Из следствия 5.1 и [14, формула (9.1.2)] вытекает справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. При $d \rightarrow \infty$ имеем

$$N_{d,2} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{d(d-1)}{2}}}{d!} \left(1 + \frac{d^2 - d}{2^{d-1}} \right) + O\left(\frac{2^{\frac{d(d-3)}{2}}}{(d-1)!} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Еще одним следствием теоремы 5.1 является выполнение для произвольного $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрического 2-расширения решетки Λ^d условия $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_1, \dots, n_d \leq 2$. Точнее, справедливо следующее утверждение. Пусть Γ – $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрическое 2-расширение решетки Λ^d , $d \geq 1$, реализующее набор $(c, \mathcal{P})$ относительно некоторого изоморфизма φ графа Γ/σ , где σ – соответствующая Γ система блоков, на решетку Λ^d .

Тогда $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \dots, n_d]$ -периодичности, где $n_1, \dots, n_d$ выбираются следующим образом: фиксируется произвольная максимальная клика K графа $[\Gamma]_\varphi$ (см. замечание 5.5), после чего n_i полагается равным 1 для всех $1 \leq i \leq s$ и всех i , являющихся вершинами клики K , и полагается равным 2 для всех $s < i \leq d$, не являющихся вершинами клики K .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Основные результаты настоящего параграфа ранее были анонсированы в [15].

Список литературы

1. V. I. Trofimov, "Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory", *Тр. ИММ УрО РАН*, **17:4** (2011), 316–320; *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **279**, suppl. 1 (2012), 107–112.
2. W. Imrich, S. Klavžar, *Product graphs. Structure and recognition*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley-Interscience, New York, 2000, xvi+358 pp.
3. В. И. Трофимов, "Графы с полиномиальным ростом", *Матем. сб.*, **123(165):3** (1984), 407–421; англ. пер.: V. I. Trofimov, "Graphs with polynomial growth", *Math. USSR-Sb.*, **51:2** (1985), 405–417.
4. W. Woess, "Topological groups and recurrence of quasi transitive graphs", *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **64:1** (1996), 185–213.
5. В. И. Трофимов, "Ограниченные автоморфизмы графов и одна характеристика решеток", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47:2** (1983), 407–420; англ. пер.: V. I. Trofimov, "Automorphisms of graphs and a characterization of lattices", *Math. USSR-Izv.*, **22:2** (1984), 379–391.
6. М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен, *Теория суперструн*, т. 1, 2, Мир, М., 1990, 520 с., 656 с.; пер. с англ.: М. В. Green, J. Н. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, v. 1, 2, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, x+469 pp., xii+596 pp.
7. Е. А. Неганова, В. И. Трофимов, "О симметрических q -расширениях 2-мерной решетки", *Тр. ИММ УрО РАН*, **16:3** (2010), 199–209; англ. пер.: Е. А. Neganova, V. I. Trofimov, "On symmetrical q -extensions of the 2-dimensional grid", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **272**, suppl. 1 (2011), 127–137.
8. Е. А. Неганова, В. И. Трофимов, "О симметрических 4-расширениях 2-мерной решетки", *Тр. ИММ УрО РАН*, **17:3** (2011), 242–257.
9. Е. А. Неганова, " $\text{Aut}_0(\Lambda^2)$ -симметрические 4-расширения 2-мерной решетки Λ^2 ", *Тр. ИММ УрО РАН*, **17:4** (2011), 222–243; англ. пер.: Е. А. Neganova, " $\text{Aut}_0(\Lambda^2)$ -symmetrical 4-extensions of the 2-dimensional grid Λ^2 ", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **279**, suppl. 1 (2012), 84–106.
10. N. Seifter, V. I. Trofimov, "Automorphism groups of graphs with quadratic growth", *J. Combin. Theory Ser. B*, **71:2** (1997), 205–210.
11. G. Baumslag, R. Strebel, M. W. Thomson, "On the multiplier of $F/\gamma_c R$ ", *J. Pure Appl. Algebra*, **16:2** (1980), 121–132.
12. А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Современная алгебра, Наука, М., 1989, 448 с.; англ. пер.: А. Ю. Ol'shanskii, *Geometry of defining relations in groups*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **70**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991, xxvi+505 pp.
13. Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973, 300 с.; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.–Menlo Park, Calif.–London, 1969, ix+274 pp.

14. Ф. Харари, Э. Палмер, *Перечисление графов*, Мир, М., 1977, 324 с.; пер. с англ.: F. Harary, E. M. Palmer, *Graphical enumeration*, Academic Press, New York–London, 1973, xiv+271 pp.
15. Е. А. Неганова, В. И. Трофимов, “ $\text{Aut}_0(\Lambda^d)$ -симметрические 2-расширения решеток Λ^d ”, *Тез. докладов 41-й Всероссийской молодежной конференции “Проблемы теоретической и прикладной математики”*, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2010, 64–70.

ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА НЕГАНОВА
(ELENA A. NEGANOVA)

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург
E-mail: nega-le@yandex.ru

Поступило в редакцию
01.10.2012

ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ ТРОФИМОВ
(VLADIMIR I. TROFIMOV)

Институт математики и механики УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
E-mail: trofimov@imm.uran.ru