Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Боженко, А. Ф. Гришин, К. Г. Малютин, Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 2, 21–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8064>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 09:33:45

УДК 517.538.7

О. А. Боженко, А. Ф. Гришин, К. Г. Малютин

Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка

Получены два критерия разрешимости задачи простой свободной интерполяции в классе целых функций заранее не фиксированного конечного типа относительно нулевого уточненного порядка $\rho(r)$, на который налагается только естественное ограничение, связанное с отличием рассматриваемого класса от множества полиномов. Один из критериев сформулирован в терминах меры, порожденной узлами интерполяции, другой – в терминах канонического произведения, порожденного этими узлами.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: нулевой уточненный порядок, свободная интерполяция, интерполяционная последовательность, каноническое произведение, мера Дирака, неванлинновская считающая функция.

DOI: 10.4213/im8064

§ 1. Введение

В настоящей статье используются термины “возрастающая” и “строго возрастающая функции”, соответствующие также часто используемым терминам “неубывающая” и “возрастающая функции”. Число x , удовлетворяющее неравенству $x \geq 0$, мы называем *положительным*, а число x , удовлетворяющее неравенству $x > 0$, – *строго положительным*. Используются также обозначения $a^+ = \max\{a; 0\}$, $[a]$ – целая часть числа a , $f'_+(x)$ – правая производная в точке x . Символ ∞ в нашей статье тождествен символу $+\infty$. Мы будем использовать следующие сокращения: у. п. – уточненный порядок, н. у. п. – нулевой уточненный порядок.

Ограничим историческую часть нашей статьи ссылкой на обзор Б. Я. Левина и В. А. Ткаченко “Интерполяция целыми функциями”, помещенный в [1, гл. 4]. Кроме того, сошлемся на статью А. В. Братищева и Ю. Ф. Коробейника [2] как на близко предшествующую настоящей работе.

Введем необходимые определения.

Функция $\rho(r)$, определенная на полуоси $(0, \infty)$ и удовлетворяющая условию Липшица на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$, называется *уточненным порядком*, если выполняются условия:

- 1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$;
- 2) $\lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'_+(r) \ln r = 0$.

Детальное изложение свойств уточненного порядка можно найти в работах [3]–[6]. В статье используется обозначение $V(r) = r^{\rho(r)}$.

Приведем наиболее часто цитируемое свойство уточненного порядка. Оно состоит в том, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = t^\rho, \quad t > 0, \quad (1)$$

и этот предел равномерный на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$.

В случае, если число ρ в определении уточненного порядка равно нулю, уточненный порядок $\rho(r)$ называется *нулевым уточненным порядком*.

Приведенное выше определение уточненного порядка не является общепринятым. Некоторые авторы требуют непрерывной дифференцируемости функции $\rho(r)$. Однако в некоторых случаях (например, в нашей статье, когда мы представляем функцию $N(r)$ в виде $N(r) = r^{\rho(r)}$) требование непрерывной дифференцируемости функции $\rho(r)$ становится обременительным. Отметим, что известны случаи и более далекого отхода от требования дифференцируемости функции $\rho(r)$.

Из (1) следует, что если $\rho(r)$ – н. у. п., то для любого $t > 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = 1.$$

Пусть $L(r)$ – функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что для любого $t > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(rt)}{L(r)} = 1.$$

Такие функции называются *медленно меняющимися*. Они были введены в рассмотрение Караматой. Иногда, например в теоремах, связанных с исследованием асимптотических свойств интегралов, функцию $V(r)$ можно заменить на измеримую медленно меняющуюся функцию $L(r)$. Изложение теории медленно меняющихся функций можно найти в [4].

Заметим, что медленно меняющиеся функции не обязаны быть дифференцируемыми. Если $c(r)$ – произвольная (вообще говоря, неизмеримая) функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что $c(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, а $\rho(r)$ – н. у. п., то функция $L(r) = c(r)V(r)$ является медленно меняющейся. Как будет видно из дальнейшего, формулировки и доказательства основных теорем не зависят от поведения $\rho(r)$ на фиксированном сегменте $[0, a]$, $a > 0$. Поэтому далее будем считать, что $V(+0) > 0$.

Приведем две известные теоремы о свойствах нулевого уточненного порядка, которые мы будем использовать.

ТЕОРЕМА А. Пусть $K(t)$ – измеримая функция на полуоси $(0, \infty)$ такая, что для некоторого $\delta > 0$ функции $t^{\pm\delta}K(t)$ принадлежат пространству $L_1(0, \infty)$. Пусть $\rho(r)$ – н. у. п. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rV(r)} \int_0^\infty K\left(\frac{t}{r}\right) V(t) dt = \int_0^\infty K(t) dt.$$

В [4] имеется более сильная теорема 4.1.3. Заметим, что теорема А будет несправедливой, если не налагать ограничений на поведение функции $V(r)$ в окрестности нуля.

Уточненные порядки $\rho(r)$ и $\rho_1(r)$ называются *эквивалентными*, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = 1, \quad \text{где} \quad V_1(r) = r^{\rho_1(r)}.$$

В тех случаях, когда доказательства некоторого утверждения для уточненных порядков $\rho(r)$ и $\rho_1(r)$ являются эквивалентными задачами, ограничения на дифференцируемость функции $\rho(r)$ являются несущественными. Это вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА В. Пусть $\rho(r)$ – н.у.п. Тогда существует эквивалентный у.п. $\rho_1(r)$ такой, что функция $V_1(r)$ допускает голоморфное продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ и для любого $n \geq 1$ выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^n \ln r \rho_1^{(n)}(r) = 0.$$

Доказательство того, что в качестве $V_1(z)$ можно взять функцию

$$V_1(z) = \frac{2z}{\pi} \int_0^\infty \frac{V(t)}{t^2 + z^2} dt,$$

можно получить как легкое следствие теоремы А. Отметим, кроме того, что доказательство теоремы В можно найти в [5] и [6].

§ 2. Основные результаты

Пусть $f(z)$ – целая функция, $M(f, r) = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |f(re^{i\varphi})|$. Через $[\rho(r), \infty)$ обозначим класс целых функций f , для которых выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(f, r)}{V(r)} < \infty.$$

Заметим, что класс $[\rho(r), \infty)$ является линейным пространством и даже алгеброй над полем комплексных чисел. Этот факт используется в статье.

Пусть $A = \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ – такая последовательность комплексных чисел, что выполняются соотношения $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$, $a_n \neq a_k$ при $n \neq k$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Такие последовательности будем называть *допустимыми*.

Задачу о нахождении в классе $[\rho(r), \infty)$ целой функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям

$$f(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

при единственном ограничении

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty \quad (3)$$

теперь называют *задачей свободной простой интерполяции* в классе $[\rho(r), \infty)$.

Последовательность a_n называется *интерполяционной* в классе $[\rho(r), \infty)$, если задача (2) разрешима в классе $[\rho(r), \infty)$ для любой последовательности чисел b_n , удовлетворяющей условию (3).

В основном тексте статьи мы дополнительно предполагаем, что выполняется неравенство $|a_1| > 0$. Это упрощает доказательство и формулировки некоторых утверждений, однако не ограничивает общности наших рассуждений. По ходу

статьи мы делаем замечание, что последовательности $a_1, a_2, \dots$ и $0, a_1, a_2, \dots$ являются одновременно интерполяционными.

На н. у. п. $\rho(r)$ мы налагаем ограничение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{\ln r} = \infty. \quad (4)$$

Если это условие не выполняется, то класс $[\rho(r), \infty)$ состоит из полиномов. В этом случае никакая допустимая последовательность не является интерполяционной.

В работе находятся различные необходимые условия для того, чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Указываются два различных набора, каждый из которых состоит из трех вышеупомянутых условий. Доказывается, что выполнение всех трех условий из каждого набора оказывается достаточным для того, чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, при этом решение интерполяционной задачи строится в виде специального ряда.

С каждой допустимой последовательностью a_n мы связываем следующую меру в комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(z - a_n), \quad (5)$$

где $\delta(z - a_n)$ – мера Дирака, т. е. единичная мера, сосредоточенная в точке a_n . Мы будем употреблять следующие обозначения:

$$C(z, t) = \{w \in \mathbb{C}: |w - z| < t\}, \quad B(z, t) = \{w \in \mathbb{C}: |w - z| \leq t\}.$$

Функция $n(t) = \mu(B(0, t))$ называется *считающей функцией* последовательности a_n , а функция $N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x} dx$ называется *неванлинновской считающей функцией* последовательности a_n . В этом определении важно условие $|a_1| > 0$. Для произвольных последовательностей a_n , $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, функция $N(t)$ определяется более сложным образом:

$$N(t) = m \ln t + \int_0^t \frac{n(x) - m}{x} dx,$$

где m – кратность нуля в последовательности $\{a_n\}$.

По ходу работы будем использовать, кроме того, следующие объекты. Пусть $f(z)$ – целая функция, и пусть $\{z_n, n = 1, 2, \dots\}$ – множество корней этой функции, перенумерованных в порядке возрастания их модулей. С целой функцией f связывается следующая мера μ_f в комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mu_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(z_n) \delta(z - z_n),$$

где $m(z_n)$ – кратность корня z_n .

Функция $n_f(t) = \mu_f(B(0, t))$ называется *считающей функцией* корней функции f , а функция

$$N_f(t) = m(0) \ln t + \int_0^t \frac{n_f(x) - m(0)}{x} dx$$

называется *неванлинновской считающей функцией* корней функции f .

Заметим, что мера μ_f является риссовской мерой субгармонической функции $v(z) = \ln |f(z)|$.

Рассмотрим более подробно результаты работы [2], в ней изучается разрешимость задачи кратной интерполяции в классах $[\rho(r), \infty)$, причем рассматривается случай $\rho \geq 0$. Авторы работы [2] выделяют случай $\rho = 0$ и замечают, что в их работе впервые рассматривается интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка. Сформулируем частный случай теоремы 5 из [2], который соответствует задаче простой интерполяции и случаю $\rho = 0$.

ТЕОРЕМА С. Пусть $\rho(r)$ – н. у. п. такой, что функция $V(r)$ является логарифмически выпуклой, причем $\lim_{r \rightarrow \infty} rV'(r) > 0$, а функция $\frac{V(r)}{rV'(r)}$ является возрастающей (не обязательно строго) и неограниченной на луче $[r_0, \infty)$. Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{rV'(r)} = 0$;
- 2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|\Phi_n^\delta(a_n)|} < \infty$ для любого фиксированного $\delta \in (0, 1)$, где

$$\Phi_n^\delta(z) = \prod_{0 < |a_n - a_k| < \delta |a_n|} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Заметим, что формулировка теоремы С нуждается в уточнении. В приведенной формулировке она не верна. Об этом говорится в замечании 1 к теореме 10.

Приведем формулу Пуассона для субгармонической функции v и круга $B(z, R)$, на которую часто будем ссылаться в нашей статье:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + Re^{i\varphi}) d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_v(B(z, t))}{t} dt. \quad (6)$$

Здесь μ_v – риссовская мера функции v .

В случае, если $f(z)$ – целая функция, a – простой корень функции f , $v(z) = \ln \left| \frac{f(z)}{z-a} \right|$, формула Пуассона (6) для круга $B(a, R)$ приобретает вид

$$\ln |f'(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(a + Re^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_f(B(a, t)) - 1}{t} dt - \ln R. \quad (7)$$

Основным результатом работы является следующая теорема. Напомним, мы считаем, что выполняется условие $|a_1| > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\rho(r)$ – н. у. п., удовлетворяющий условию (4), a_n – допустимая последовательность. Для того чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty$;
- 2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty$, где $E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$;
- 3) для любого числа $M > 0$ существует целая функция $g \in [\rho(r), \infty)$ такая, что для любого n выполняется неравенство

$$\ln |g(a_n)| \geq MV(|a_n|).$$

В случае, если выполняются условия 1)–3) теоремы 1, решение интерполяционной задачи (2), где последовательность b_n удовлетворяет условию (3), можно найти в виде

$$f(z) = E(z)g_1(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{g_1(a_n)E'(a_n)(z - a_n)},$$

где g_1 – некоторая функция из класса $[\rho(r), \infty)$.

ТЕОРЕМА 2. В теореме 1 условие 2) можно заменить на условие

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{V(r)} \int_0^r \frac{(\mu(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt < \infty.$$

В дальнейшем это условие мы будем называть условием 2) теоремы 2.

Отметим, что в случае, когда $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0$, в теоремах, аналогичных теоремам 1, 2, нет аналога условию 3), потому что в этом случае, как показал один из авторов в [7], условие 3) является следствием предыдущих условий. Однако рассуждения из [7] не распространяются на случай, когда $\rho = 0$. Поэтому в теоремах 1, 2 появляется специфическое условие 3).

В заключение статьи мы приводим теоремы 10–14, которые можно рассматривать как примеры применения теорем 1, 2 и которые, на наш взгляд, имеют самостоятельный интерес.

§ 3. Необходимые условия разрешимости интерполяционной задачи

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., удовлетворяющий условию (4). Пусть a_n – интерполяционная последовательность в классе $[\rho(r), \infty)$, $N(r)$ – неванлинновская считающая функция последовательности a_n . Тогда выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – целая функция из класса $[\rho(r), \infty)$, решающая следующую интерполяционную задачу: $f(a_1) = 1$, $f(a_n) = 0$ при $n \geq 2$. По предположению теоремы такая функция существует. Запишем формулу (6) для функции $v(z) = \ln |f(z)|$ и круга $B(a_1, R)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(a_1 + Re^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_f(B(a_1, t))}{t} dt. \quad (9)$$

Далее имеем (см. формулу (5)):

$$\begin{aligned} N(R) &= \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \int_{|a_1|}^R \frac{dt}{t} + \int_{|a_1|}^R \frac{\mu(B(0, t)) - 1}{t} dt \\ &\leq \ln \frac{R}{|a_1|} + \int_{|a_1|}^R \frac{\mu_f(B(0, t))}{t} dt \leq \ln \frac{R}{|a_1|} + \int_{|a_1|}^R \frac{\mu_f(B(a_1, t + |a_1|))}{t} dt \\ &= \ln \frac{R}{|a_1|} + \int_{2|a_1|}^{R+|a_1|} \frac{\mu_f(B(a_1, u))}{u - |a_1|} du \leq \ln \frac{R}{|a_1|} + 2 \int_0^{R+|a_1|} \frac{\mu_f(B(a_1, u))}{u} du. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства и формул (1), (4), (9) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующей теоремой из работы [8].

ТЕОРЕМА D. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., удовлетворяющий условию (4), $\{b_n\}$ – возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел, $n(r)$ – считающая функция этой последовательности, а $N(r)$ – ее неванлинновская считающая функция. Если $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{V(r)} = 0. \quad (10)$$

Следующая теорема является следствием теорем 3, D.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., удовлетворяющий условию (4). Если $\{a_n\}$ – интерполяционная последовательность в классе $[\rho(r), \infty)$, то выполняется равенство (10).

Далее нам понадобится следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., удовлетворяющий условию (4), $\{a_n\}$ – интерполяционная последовательность в классе $[\rho(r), \infty)$,

$$E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Тогда $E(z) \in [\rho(r), \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \ln |M(r, E)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right) = \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r}{t}\right) dn(t) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{rn(t)}{(t+r)t} dt = \int_0^{\infty} \frac{rN(t)}{(t+r)^2} dt \leq \frac{M}{r} \int_0^{\infty} \frac{V(t)}{(1+t/r)^2} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Неравенство $N(t) \leq MV(t)$ на полуоси $(0, \infty)$ вытекает из следующих фактов:

1) функции $N(t)$ и $V(t)$ непрерывны на полуоси $(0, \infty)$, функция $V(t)$ на полуоси $(0, \infty)$ удовлетворяет неравенству $V(t) \geq m_1 > 0$;

2) выполняется неравенство (8) и равенство $N(t) = 0$, $t \in [0, |a_1|]$.

Утверждение теоремы следует из неравенства (11) и теоремы A.

Теперь заметим, что если допустимая последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, то последовательность $0, a_1, a_2, \dots$ также является интерполяционной в этом классе. Действительно, рассмотрим интерполяционную задачу $f_1(0) = b_0$, $f_1(a_n) = b_n$, где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty.$$

Пусть $f \in [\rho(r), \infty)$ – решение интерполяционной задачи $f(a_n) = b_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда функция

$$f_1(z) = f(z) + (b_0 - f(0))E(z)$$

принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$ и является решением поставленной интерполяционной задачи. Тем самым, ограничение $a_1 \neq 0$ не является существенным.

ТЕОРЕМА 6. Пусть последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Тогда

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{V(r)} \int_0^r \frac{(\mu(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt < \infty. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \int_0^{|a_n|/2} \frac{\mu(B(a_n, t)) - 1}{t} dt < \infty. \quad (13)$$

Если это не так, то существует последовательность $n_k \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ такая, что

$$\frac{1}{V(|a_{n_k}|)} \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{\mu(B(a_{n_k}, t)) - 1}{t} dt \geq k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Дополнительно можно считать, что выполняется неравенство $|a_{n_{k+1}}| > 4|a_{n_k}|$, $k = 1, 2, \dots$.

Пусть $f(z)$ – функция из класса $[\rho(r), \infty)$, которая решает интерполяционную задачу $f(a_{n_k}) = 1$, $k = 1, 2, \dots$, $f(a_n) = 0$, если $n \neq n_k$. По условию теоремы такая функция существует.

Запишем формулу (6) для функции $v(z) = \ln |f(z)|$ и круга $B(a_{n_k}, \frac{1}{2}|a_{n_k}|)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f \left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi} \right) \right| d\varphi - \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{\mu_f(B(a_{n_k}, t))}{t} dt.$$

При $t \in [0, \frac{1}{2}|a_{n_k}|]$ справедливо неравенство $\mu_f(B(a_{n_k}, t)) \geq \mu(B(a_{n_k}, t)) - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{\mu(B(a_{n_k}, t)) - 1}{t} dt &\leq \int_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{\mu_f(B(a_{n_k}, t))}{t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f \left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi} \right) \right| d\varphi. \end{aligned}$$

Полученное неравенство, соотношение $f \in [\rho(r), \infty)$ и неравенство (14) в совокупности противоречивы. Тем самым, неравенство (13) доказано.

Из теоремы 4 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \int_{|a_n|/2}^{|a_n|} \frac{\mu(B(a_n, t))}{t} dt = 0;$$

отсюда и из неравенства (13) получаем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \int_0^{|a_n|} \frac{\mu(B(a_n, t)) - 1}{t} dt < \infty. \quad (15)$$

Пусть z – произвольное комплексное число и $a = a(z)$ – ближайшая к z точка последовательности a_n . Обозначим через F_1 множество тех z , для которых выполняется неравенство $|z - a| > \frac{1}{2}|z|$. Из теоремы 4 легко следует, что

$$\sup_{z \in F_1} \frac{1}{V(r)} \int_0^r \frac{(\mu(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt < \infty.$$

Поэтому в дальнейшем доказательстве можно считать, что выполняется неравенство $|z - a| \leq \frac{1}{2}|z|$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{V(r)} \int_0^r \frac{(\mu(B(z, t)) - 1)^+}{t} dt &= \frac{1}{V(r)} \int_{|z-a|}^r \frac{\mu(B(z, t)) - 1}{t} dt \\ &\leq \frac{1}{V(r)} \int_{|z-a|}^r \frac{\mu(B(a, t + |z - a|)) - 1}{t} dt \\ &= \frac{1}{V(r)} \int_{2|z-a|}^{r+|z-a|} \frac{\mu(B(a, u)) - 1}{u - |z - a|} du \leq \frac{2}{V(r)} \int_0^{r+|z-a|} \frac{\mu(B(a, u)) - 1}{u} du. \end{aligned}$$

Из приведенных рассуждений следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\rho(r)$ – н.у.н., удовлетворяющий условию (4). Пусть a_n – такая допустимая последовательность, что выполняется неравенство (8). Пусть $E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n})$. Тогда условие (15) эквивалентно условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (15). Напишем равенство (7) для функции $E(z)$ и круга $B(a_n, R)$:

$$\ln |E'(a_n)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |E(a_n + Re^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^R \frac{\mu(B(a_n, t)) - 1}{t} dt - \ln R. \quad (17)$$

Равенство (17) можно переписать в виде

$$\ln \frac{1}{|E'(a_n)|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|E(a_n + Re^{i\varphi})|} d\varphi + \int_0^R \frac{\mu(B(a_n, t)) - 1}{t} dt + \ln R. \quad (18)$$

Далее мы воспользуемся следующей теоремой.

ТЕОРЕМА Е [3, гл. I, § 8, теорема 11]. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $B(0, 2eR)$, $R > 0$, $f(0) = 1$ и η – произвольное положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $B(0, R)$, но вне исключительных кругов с общей суммой радиусов, не превышающей $4R\eta$, выполняется неравенство

$$\ln |f(z)| \geq - \left(2 + \ln \frac{3e}{2\eta} \right) \ln M(f, 2eR).$$

Поскольку $E \in [\rho(r), \infty)$, то существует постоянная M_1 такая, что во всей плоскости $\mathbb{C}$ выполняется неравенство $\ln |E(z)| \leq M_1 V(r)$. Из этого неравенства и теоремы Е, примененной к функции $E(z)$ и кругу $B(0, 3e|a_n|)$, следует, что существуют постоянная M_2 , не зависящая от n , и число $R_1 \in [\frac{1}{2}|a_n|, |a_n|]$ такие, что для всех φ будет выполняться неравенство

$$\ln \frac{1}{|E(a_n + R_1 e^{i\varphi})|} \leq M_2 V(|a_n|).$$

Выбирая $R = R_1$ в равенстве (18), получим доказательство импликации (15) $\Rightarrow$ (16). Импликация (16) $\Rightarrow$ (15), очевидно, следует из равенства (18), где $R = |a_n|$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., допустимая последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$ и M – произвольное положительное число. Тогда существует целая функция $g(z)$ нормального типа относительно у. н. $\rho(r)$ такая, что для любого n выполняется неравенство

$$\ln |g(a_n)| \geq MV(|a_n|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения интерполяционной последовательности следует, что в классе $[\rho(r), \infty)$ существует такая функция $g(z)$, для которой выполняются равенства $\ln g(a_n) = MV(|a_n|)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., а $\Lambda = \{\lambda_n: n = 1, 2, \dots\}$, $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, – такая последовательность комплексных чисел, что ее неванлинновская считающая функция $N_\Lambda(r)$ не выше нормального типа относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Пусть

$$f(z) = z^{m-1} \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad g(z) = z^{m-1} \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{|\lambda_n|}\right),$$

где $m - 1$ – количество нулей в последовательности Λ . Пусть H – такое неограниченное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V(r)} \int_0^r \frac{\mu_\Lambda(B(z, t))}{t} dt = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V(r)} (\ln |f(z)| - \ln g(r)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на следующую теорему, являющуюся следствием теоремы 2 из [8].

ТЕОРЕМА F. Пусть $v(z)$ – субгармоническая функция в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, гармоническая в некоторой окрестности нуля, μ_v – риссовская мера этой функции. Пусть неванлинновская считающая функция меры μ_v

$$N_v(r) = \int_0^r \frac{\mu_v(B(0, x))}{x} dx$$

не выше нормального типа относительно нулевого уточненного порядка $\rho(r)$. Тогда выполняется равенство

$$v(z) = - \int_0^r \frac{\mu_v(B(z, t))}{t} dt + N_v(r) + o(1)V(r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Заметим, что разность $\ln |f(z)| - \ln g(r)$ не зависит от m . Поэтому можно считать, что $m = 1$. В этом случае

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{|\lambda_n|}\right).$$

Обозначим $v(z) = \ln |f(z)|$, $u(z) = \ln |g(z)|$. Применяя теорему F к субгармоническим функциям $v(z)$ и $u(z)$, получим равенства

$$\ln |f(z)| = - \int_0^r \frac{\mu_v(B(z, t))}{t} dt + N_v(r) + o(1)V(r), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$\ln g(r) = - \int_0^r \frac{\mu_u(B(r, t))}{t} dt + N_u(r) + o(1)V(r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Поскольку мера μ_u сосредоточена на луче $(-\infty, 0)$, то

$$\int_0^r \frac{\mu_u(B(r, t))}{t} dt = 0.$$

Заметим, что $N_v(r) = N_u(r)$. Тогда из асимптотических представлений для $\ln |f(z)|$ и $\ln g(r)$ получаем формулу

$$\ln |f(z)| - \ln g(r) = - \int_0^r \frac{\mu_v(B(z, t))}{t} dt + o(1)V(r), \quad r \rightarrow \infty,$$

из которой легко следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Опишем отображение T , которое определяется на классе $[\rho(r), \infty)$. Пусть целая функция

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right)$$

принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$, и пусть a_n – допустимая последовательность, неванлинновская считающая функция $N_1(r)$ которой удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r)}{V(r)} < \infty. \quad (19)$$

Обозначим $K_n = \{z: |a_n| - \frac{2}{1+|a_n|} < |z| < |a_n| + \frac{2}{1+|a_n|}\}$, $R_k = \{z: 2^k < |z| \leq 2^{k+1}\}$.

Преобразование T состоит в том, что каждый корень b_m заменяется на b''_m . При этом из равенства $b_{m_1} = b_{m_2}$ не обязательно следует равенство $b''_{m_1} = b''_{m_2}$. Требуется, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\text{Arg } b_m = \text{Arg } b''_m$;
- 2) в каждом кольце R_k количество корней b_m совпадает с количеством корней b''_m ;
- 3) для любых m и n выполняется соотношение $b''_m \notin K_n$;
- 4) если $b''_m, b''_{m+1}, b''_{m+2} \in R_k$, то должно выполняться приближенное равенство $|b''_{m+1}| - |b''_m| \approx |b''_{m+2}| - |b''_{m+1}|$.

Поскольку равенство $|b''_{m+1}| - |b''_m| \approx |b''_{m+2}| - |b''_{m+1}|$ лишено формального смысла, мы должны дать формальное определение преобразования T . Сдвиги $b_m \rightarrow b''_m$ в каждом кольце R_k будут определяться независимо друг от друга.

Рассмотрим последовательность интервалов

$$I_n = \left(|a_n| - \frac{2}{1+|a_n|}, |a_n| + \frac{2}{1+|a_n|}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Если $|a_{n_1}| = |a_{n_2}|$, то $I_{n_1} = I_{n_2}$. Через $|I_n|$ будем обозначать длину интервала I_n . Имеем $|I_n| = \frac{4}{1+|a_n|}$.

Из равенства (10) следует, что

$$L := \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \infty.$$

Пусть

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad S_k = (2^k, 2^{k+1}] \setminus G, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и пусть k_0 – такое число, что при $k \geq k_0$ выполняется неравенство $|S_k| \geq 2^{k-1}$.

Пусть ν_k – число корней функции $f(z)$ в кольце R_k . Предположим, что $\nu_k > 0$. Пусть это будут корни $b_{n_k+1}, \dots, b_{n_k+\nu_k}$.

Определим числа $b'_{n_k+\nu}$, $\nu \in \overline{1, \nu_k}$, следующим образом. Число b'_{n_k+1} определяется равенством $b'_{n_k+1} = 2^k + x_1$, где x_1 определяется из условий

$$|S_k \cap [2^k, 2^k + x_1]| = \frac{|S_k|}{\nu_k}, \quad x_1 \notin G.$$

Если числа $b'_{n_k+\nu}$ при $\nu \leq m$ уже определены равенствами $b'_{n_k+\nu} = 2^k + x_\nu$ и $m < \nu_k$, то число b'_{n_k+m+1} определяется равенством $b'_{n_k+m+1} = 2^k + x_{m+1}$, где число x_{m+1} определяется из условий

$$|S_k \cap [x_m, x_{m+1}]| = \frac{|S_k|}{\nu_k}, \quad x_{m+1} \notin G.$$

Таким образом, числа $b'_{n_k+\nu}$ будут определены для любого $\nu \in \overline{1, \nu_k}$.

Далее определим последовательность b''_n по следующему правилу: $b''_n = b_n$, если $|b_n| \leq 2^{k_0}$, если же $|b_n| > 2^{k_0}$, то $\text{Arg } b''_n = \text{Arg } b_n$, $|b''_n| = |b'_n|$. Функцию

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b''_n}\right)$$

обозначим следующим образом: $f_1 = Tf$.

Следующая лемма показывает, что в некотором смысле функции f и Tf мало отличаются.

ЛЕММА 1. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., и пусть $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{b_n})$ является целой функцией из класса $[\rho(r), \infty)$. Тогда выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V(r)} \left(\ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{|b_n|}\right) - \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{|b''_n|}\right) \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$A = \left| \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{|b_n|}\right) - \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{|b''_n|}\right) \right| = \left| \int_{2^{k_0}}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r}{t}\right) (dn(t) - dn_1(t)) \right|,$$

где $n(t)$ и $n_1(t)$ – считающие функции последовательностей b_n и b''_n . После интегрирования по частям получим

$$A \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{r|n(t) - n_1(t)|}{t(t+r)} dt.$$

Поскольку для любого k выполняется равенство $n(2^k) = n_1(2^k)$, то при $t \in [2^k, 2^{k+1}]$ выполняется неравенство $|n(t) - n_1(t)| \leq n(2^{k+1}) - n(2^k)$. Из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{k=k_0}^{\infty} (n(2^{k+1}) - n(2^k)) \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{r dt}{t(t+r)} \\ &= \sum_{k=k_0}^{\infty} n(2^{k+1}) \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{r dt}{t(t+r)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} n(2^k) \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{r dt}{t(t+r)} \\ &= \sum_{k=k_0+1}^{\infty} n(2^k) \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{r dt}{t(t+r)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} n(2^k) \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{r dt}{t(t+r)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь, делая в первом из выписанных интегралов в (20) замену $u = 2t$ и переобозначая новую переменную u через t , получим

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} n(2^k) \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{r}{t} \left(\frac{2}{t+2r} - \frac{1}{t+r} \right) dt \\ &= \sum_{k=k_0+1}^{\infty} n(2^k) \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{r dt}{(t+r)(t+2r)} \leq \int_{2^{k_0+1}}^{\infty} \frac{rn(t)}{(t+r)(t+2r)} dt. \end{aligned}$$

Пусть ε – произвольное строго положительное число. Пусть $k_1 \geq k_0 + 1$ – такое число, что при $t \geq 2^{k_1}$ выполняется неравенство $n(t) < \varepsilon V(t)$. Тогда получим

$$A \leq \frac{2^{k_1} n(2^{k_1})}{2r} + \varepsilon \int_{2^{k_1}}^{\infty} \frac{rV(t)}{(t+r)(t+2r)} dt.$$

Отсюда и из теоремы A легко следует утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., b_n – бесконечная возрастающая последовательность строго положительных чисел, функция $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{b_n})$ принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$, a_n – допустимая последовательность, удовлетворяющая условию (19), и

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(a_n, \frac{1}{1+|a_n|}\right).$$

Пусть отображение T построено с помощью последовательности a_n , и пусть $f_1 = Tf$. Тогда выполняется равенство

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V(r)} (\ln |f_1(z)| - \ln f(r)) = 0, \quad z = re^{i\varphi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим следующие меры:

$$\mu_k = \sum_{|b_n''| \in (2^k, 2^{k+1}]} \delta(z - b_n''), \quad \mu = \sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k.$$

Величина $\mu_k(B(z, t))$ не превосходит числа точек b_n' , попавших на сегмент $[|z| - t, |z| + t]$. Поэтому справедливо неравенство

$$\mu_k(B(z, t)) \leq 1 + \frac{2t}{\delta_k},$$

где $\delta_k = \frac{|S_k|}{\nu_k}$. Оценим при $z \in H$, $k \geq k_0$ следующую величину:

$$J_k(z) = \frac{1}{V(r)} \int_0^{r/2} \frac{\mu_k(B(z, t))}{t} dt.$$

Если $r = |z| \notin [2^{k-1}, 2^{k+2}]$, то $J_k(z) = 0$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $r \in [2^{k-1}, 2^{k+2}]$. Пусть $z \in B(a_n, \frac{1}{1+|a_n|})$. Тогда выполняются неравенства $r - 1 \leq |a_n| \leq r + 1$. Кроме того, поскольку интервал $(\frac{2}{1+|a_n|}, \frac{2}{|a_n| + \frac{2}{1+|a_n|}})$ не содержит точек b_n' , получаем, что $\mu_k(B(a_n, \frac{1}{1+|a_n|})) = 0$.

Пусть $b = b(z)$ – точка последовательности b''_n , ближайшая к z . Заметим, что $|b - z| \geq \frac{1}{1+|a_n|}$. Если $|b - z| \geq \frac{1}{2}r$, то $J_k(z) = 0$. В противном случае имеем

$$\begin{aligned} J_k(z) &= \frac{1}{V(r)} \int_{|z-b|}^{r/2} \frac{\mu_k(B(z, t))}{t} dt = \frac{1}{V(r)} \ln \frac{r}{2|z-b|} \\ &\quad + \frac{1}{V(r)} \int_{|z-b|}^{r/2} \frac{\mu_k(B(z, t)) - 1}{t} dt \leq \frac{1}{V(r)} \left(\ln r + \ln(1 + |a_n|) + \frac{r}{\delta_k} \right) \\ &\leq \frac{1}{V(r)} \left(\ln r + \ln(r+2) + \frac{2^{k+2}}{|S_k|} \nu_k \right) \leq \frac{1}{V(r)} (\ln r + \ln(r+2) + 8n(4r)), \end{aligned} \quad (21)$$

где $n(r)$ – считающая функция последовательности b_n .

Из последнего неравенства в (21) следует, что существует равномерный относительно k предел

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} J_k(z) = 0. \quad (22)$$

Поскольку круг $B(z, \frac{1}{2}r)$ пересекает не более двух колец R_k , из (22) следует, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V(r)} \int_0^{r/2} \frac{\mu(B(z, t))}{t} dt = 0. \quad (23)$$

Пусть Λ – последовательность b''_n . Ограничение меры μ_Λ на внешность круга $B(0, 2^{k_0})$ (k_0 – параметр, введенный при определении отображения T) совпадает с мерой μ . Вместе с (23) и теоремой D это влечет

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V(r)} \int_0^r \frac{\mu_\Lambda(B(z, t))}{t} dt = 0.$$

В силу последнего равенства, теоремы 9 и леммы 1 следует утверждение леммы. Лемма доказана.

§ 4. Критерии разрешимости интерполяционной задачи

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. Необходимость условия 1) утверждается в теореме 3. Необходимость условия 2) следует из теорем 6, 7. Необходимость условия 3) утверждается в теореме 8.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1)–3) теоремы. Будем искать решение интерполяционной задачи (2) в виде

$$f(z) = E(z)g_1(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{g_1(a_n)E'(a_n)(z - a_n)}, \quad (24)$$

где функцию g_1 необходимо еще определить.

Последовательность b_n удовлетворяет условию (3). Поэтому существует постоянная M_1 такая, что для всех n выполняется неравенство $|b_n| \leq e^{M_1 V(|a_n|)}$.

Из условия 2) теоремы следует, что существует постоянная M_2 такая, что для всех n выполняется неравенство

$$\frac{1}{|E'(a_n)|} \leq e^{M_2 V(|a_n|)}.$$

Теперь мы можем определить функцию g_1 . В качестве g_1 возьмем целую функцию из класса $[\rho(r), \infty)$ такую, что для любого n выполняется неравенство $\ln |g_1(a_n)| \geq (M_1 + M_2 + 1)V(|a_n|)$. Существование такой функции следует из условия 3) теоремы.

Обозначим

$$c_n = \frac{b_n}{g_1(a_n)E'(a_n)}.$$

Для всех n выполняется неравенство $|c_n| \leq e^{-V(|a_n|)}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|(1 + |a_n|) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)e^{-V(|a_n|)} = \int_0^{\infty} (1 + t)e^{-V(t)} dn(t) \\ &= \int_0^{\infty} n(t)(V'(t) - 1)e^{-V(t)} dt \leq \int_0^{\infty} n(t)V'(t)e^{-V(t)} dt. \end{aligned}$$

Из равенства

$$\frac{tV'(t)}{V(t)} = \rho(t) + t\rho'(t) \ln t,$$

теоремы D и условия (4) следует, что подынтегральная функция в последнем интеграле убывает на бесконечности быстрее любой степени t , и поэтому этот интеграл сходится. Тем самым доказано, что

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|(1 + |a_n|) < \infty. \quad (25)$$

Обозначим

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z - a_n}.$$

Из (25) следует, что для любого компакта K существует число $n_0 = n_0(K)$ такое, что ряд

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{c_n}{z - a_n}$$

сходится равномерно на компакте K . Поэтому функция $\psi(z)$ является мероморфной функцией в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Ее полюсы содержатся во множестве $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$, причем каждый полюс является простым. Поэтому функция $f(z)$, определяемая равенством (24), является целой функцией, решающей интерполяционную задачу $f(a_n) = b_n, n = 1, 2, \dots$.

Пусть

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(a_n, \frac{1}{1 + |a_n|}\right).$$

Из (25) следует, что при $z \notin H$ выполняется неравенство $|\psi(z)| \leq A$. Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |a_n|} = \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{1 + t} = \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{(1 + t)^2} dt,$$

неравенства $|\psi(z)| \leq A$ и принадлежности функций $g_1(z)$ и $E(z)$ классу $[\rho(r), \infty)$ следует, что функция $f(z)$ принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$. Теорема доказана.

Теорема 2 является следствием теорем 1, 7.

Далее мы докажем шесть теорем, которые можно рассматривать как примеры приложения теорем 1, 2.

§ 5. Приложения теорем 1, 2

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\rho(r)$ – н. у. п., удовлетворяющий условию (4) и такой, что функция $V(r) = r^{\rho(r)}$ является логарифмически выпуклой на некоторой полуоси (r_0, ∞) . Пусть a_n – допустимая последовательность. Для того чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty$;
- 2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий 1) и 2) следует из теоремы 1. Поэтому в доказательстве нуждается только достаточность. Из условия теоремы следует, что функция $rV'_+(r)$ является возрастающей на полуоси (r_0, ∞) . Из равенства (4) следует, что это неограниченная функция. Утверждения теоремы не зависят от поведения функции $V(r)$ на полуинтервале $(0, r_0]$. Поэтому можно считать, что функция $V(r)$ является логарифмически выпуклой на полуоси $(0, \infty)$ и существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow +0} V'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +0} V(r) > 0.$$

Пусть b_n – возрастающая последовательность точек роста функции $[rV'_+(r)]$. Точки этой последовательности могут повторяться так, чтобы считающая функция последовательности b_n имела вид $n_1(r) = [rV'_+(r)]$. Функция $n_1(r)$ эквивалентна функции $rV'_+(r)$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому для неванлинновской считающей функции $N_1(r)$ выполняются равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r)}{V(r)} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r(N_1)'_+(r)}{N(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r)}{N_1(r)} = 0.$$

Следовательно, выполняется равенство $N_1(r) = r^{\rho_1(r)}$, где $\rho_1(r)$ – н. у. п.

Обозначим

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{b_n}\right).$$

Имеем

$$\ln f_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{b_n}\right) = \int_0^{\infty} \frac{rN_1(t)}{(t+r)^2} dt.$$

Теперь из теоремы А следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f_1(r)}{V(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f_1(r)}{N_1(r)} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = 1.$$

Пусть отображение T строится с помощью последовательности a_n , и пусть

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(a_n, \frac{1}{1+|a_n|}\right).$$

Обозначим $f_2 = Tf_1$. Из леммы 1, примененной к функции f_1 , следует соотношение $\ln f_1(r) \sim \ln f_2(r)$, $r \rightarrow \infty$. Из этого соотношения и леммы 2 следует, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V_1(r)} (\ln |f_2(z)| - \ln f_1(r)) = 0, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Тем самым для всех достаточно больших n в круге $B(a_n, \frac{1}{1+|a_n|})$ будет выполняться неравенство

$$\ln |f_2(z)| \geq \frac{1}{2} V(|a_n|).$$

Тогда если λ и целое m – достаточно большие числа, $g(z) = \lambda f_2^m(z)$, то для любого n в круге $B(a_n, \frac{1}{1+|a_n|})$ будет выполняться неравенство $\ln |g(z)| \geq MV(|a_n|)$ с любым наперед заданным M . Теперь из теоремы 1 будет следовать, что последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С помощью теоремы 10 можно убедиться в том, что теорема C сформулирована неточно. Пусть $V(r) = \ln^2 r$ при $r \geq e$. Тогда функция $V(r)$ удовлетворяет всем ограничениям, которые налагаются на эту функцию в теореме C. Рассмотрим последовательность $a_n = e^{n/2}$ и функцию

$$E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{e^{n/2}}\right).$$

Справедливы соотношения

$$N(r) \sim \ln^2 r, \quad r \rightarrow \infty, \quad \ln |E'(a_n)| \sim \ln^2 a_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда по теореме 10 последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\frac{2 \ln \ln r}{\ln r}, \infty)$, между тем условие 1) из теоремы C не выполняется, так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{rV'(r)} = 1.$$

Теорему 10 можно считать правильным вариантом теоремы C.

То, что в замечании 1 в качестве функции $V(r)$ взята функция $\ln^2 r$, вовсе не обязательно. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\rho(r)$ – дважды непрерывно дифференцируемый н.у.н., удовлетворяющий условию (4) и такой, что функция $r^2 \ln r \rho''(r)$ является ограниченной, а функция $V(r)$ – логарифмически выпуклой. Пусть a_n – точки роста функции $[rV'(r)]$. Тогда a_n – интерполяционная последовательность в классе $[\rho(r), \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $V(r)$ – логарифмически выпуклая функция, то $rV'(r)$ – возрастающая функция. Из условия (4) следует, что $rV'(r)$ – неограниченная функция. Считающая функция последовательности a_n имеет вид $n(r) = [rV'(r)]$. Функция $n(r)$ эквивалентна функции $rV'(r)$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому для невалинновской считающей функции последовательности a_n выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} = 1.$$

Мы хотим доказать неравенство (15) для построенной последовательности a_n . Имеем

$$\begin{aligned}\mu(B(a_n, t)) &= n(a_n + t) - n((a_n - t) - 0) \\ &\leq (a_n + t)V'(a_n + t) - (a_n - t)V'(a_n - t) + 1 = \int_{a_n - t}^{a_n + t} (\tau V'(\tau))' d\tau + 1.\end{aligned}$$

Далее, находим

$$\begin{aligned}(\tau V'(\tau))' &= ((\rho(\tau) + \rho'(\tau)\tau \ln \tau)V(\tau))' \\ &= \frac{V(\tau)}{\tau} (2\tau\rho'(\tau) + \rho'(\tau)\tau \ln \tau + \rho''(\tau)\tau^2 \ln \tau + (\rho(\tau) + \rho'(\tau)\tau \ln \tau)^2) \\ &= \varepsilon(\tau) \frac{V(\tau)}{\tau},\end{aligned}$$

где $\varepsilon(t)$ – ограниченная функция. Поэтому при $t \in [0, \frac{1}{2}a_n]$ выполняется неравенство

$$\int_{a_n - t}^{a_n + t} (\tau V'(\tau))' d\tau \leq \varepsilon_n \frac{V(a_n)}{a_n} t,$$

где ε_n – некоторая ограниченная последовательность. Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \int_0^{|a_n|/2} \frac{\mu(B(a_n, t)) - 1}{t} dt < \infty,$$

откуда в силу равенства $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{V(r)} = 0$ следует неравенство

$$\overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \int_0^{|a_n|} \frac{\mu(B(a_n, t)) - 1}{t} dt < \infty,$$

а вместе с ним и неравенство (15). Теперь из теорем 7, 1 следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Докажем усиление теоремы 10.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., удовлетворяющий условию (4), и пусть существует логарифмически выпуклая на некоторой полуоси (r_0, ∞) функция $h(r)$ такая, что

$$0 < \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{h(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{h(r)} < \infty. \quad (26)$$

Пусть a_n – допустимая последовательность. Для того чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty$;
- 2) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий 1), 2) теоремы следует из теоремы 1. Докажем достаточность. По условию теоремы функция $h(r)$ является логарифмически выпуклой на полуоси (r_0, ∞) . Если $a > 0$ – произвольное число, то справедливость теоремы не зависит от поведения функции на полуинтервале $(0, a]$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что функция $h(r)$

является логарифмически выпуклой на полуоси $(0, \infty)$ и выполняются соотношения $h(+0) \in (0, \infty)$, $h'(+0) = 0$.

Поскольку функция $h(r)$ является логарифмически выпуклой, функция $rh'_+(r)$ является возрастающей. Из условий (4) и (26) следует, что эта функция неограничена.

Обозначим $n_1(r) = [rh'_+(r)]$. Пусть b_n – точки роста функции $n_1(r)$, причем точка b_n берется с такой кратностью, чтобы функция $n_1(r)$ была считающей функцией последовательности b_n . Справедливы соотношения

$$n_1(r) \sim rh'_+(r), \quad N_1(r) \sim h(r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (26) следует, что

$$0 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r)}{V(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r)}{V(r)} < \infty. \quad (27)$$

Далее с помощью теоремы D получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r)}{V(r)} = 0$$

и, кроме того,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r)}{N_1(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r)}{V(r)} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{N_1(r)} = 0.$$

Тем самым доказано, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_1(r)}{N_1(r)} = 0.$$

Введем функцию $\rho_1(r)$ с помощью равенства $N_1(r) = r^{\rho_1(r)}$. Из (27) следует, что $\rho_1(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$. Далее, имеем

$$\rho_1(r) + r \ln r (\rho_1)'_+(r) = \frac{r(N_1)'_+(r)}{N_1(r)} = \frac{n_1(r)}{N_1(r)}.$$

Отсюда видно, что $\rho_1(r)$ – н. у. п.

Обозначим

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{b_n}\right).$$

Имеем

$$\ln f_1(r) = \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r}{t}\right) dn_1(t) = \int_0^{\infty} \frac{rn_1(t)}{t(t+r)} dt = \int_0^{\infty} \frac{rN_1(t)}{(t+r)^2} dt.$$

Из теоремы 4 следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f_1(r)}{N_1(r)} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = 1.$$

Тем самым доказано, что функция f_1 принадлежит классу $[\rho_1(r), \infty)$. Отсюда и из (27) следует, что $f_1 \in [\rho(r), \infty)$.

Пусть теперь последовательность a_n удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы и T – отображение, построенное с помощью последовательности a_n . Пусть, кроме того, $f_2 = Tf_1$, и пусть

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(a_n, \frac{1}{1 + |a_n|}\right).$$

По лемме 2, примененной к функции f_1 , выполняется равенство

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V(r)} (\ln |f_2(z)| - \ln f_1(r)) = 0.$$

В частности, имеем

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in H}} \frac{1}{V(|a_n|)} (\ln |f_2(a_n)| - \ln f_1(|a_n|)) = 0.$$

Отсюда и из (26) и (27) следует, что существует число $\alpha > 0$ такое, что при всех достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$\ln |f_2(a_n)| \geq \alpha V(|a_n|).$$

Пусть $M > 0$ – произвольное число, $f_3(z) = \gamma f_2^m(z)$. Существуют $\gamma > 0$ и натуральное m такие, что для всех $n \geq 1$ будет выполняться неравенство

$$|f_3(a_n)| \geq e^{MV(|a_n|)}.$$

Теперь из теоремы 1 следует, что последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Теорема доказана.

Далее мы докажем, что ограничение, наложенное на функцию $V(r)$ в теореме 12, близко к оптимальному. Точнее, покажем, что должно выполняться дополнительное ограничение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{\ln^2 r} > 0, \quad (28)$$

чтобы утверждение теоремы 12 оставалось верным.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., удовлетворяющий условию (28). Пусть a_n – допустимая последовательность. Для того чтобы утверждения:

- i) a_n – интерполяционная последовательность в классе $[\rho(r), \infty)$,
- ii) выполняются условия:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty,$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовала логарифмически выпуклая функция $h(r)$ на некоторой полуоси (r_0, ∞) такая, что

$$0 < \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{h(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{h(r)} < \infty. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* То, что при выполнении условия (29) условия i) и ii) эквивалентны, – это теорема 12.

Необходимость. Сначала заметим, что из утверждения i) следует утверждение ii). Это вытекает из теоремы 1. Поэтому нам осталось доказать, что если из утверждения ii) следует утверждение i), то выполняется условие (29).

Пусть $a_n = e^{n/2}$ – последовательность из замечания 1. Выполняются условия

$$N(r) \sim \ln^2 r, \quad r \rightarrow \infty, \quad \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} \sim -\ln^2 a_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из условия (28) следует, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty.$$

Таким образом, для последовательности a_n справедливо утверждение ii). По предположению из этого следует, что последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Поэтому существует функция $f(z)$ из этого класса, которая решает следующую интерполяционную задачу: $f(a_n) = e^{V(a_n)}$, $f(0) = 1$. Пусть b_n – корни функции $f(z)$. Имеем

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right).$$

Введем теперь функцию

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{|b_n|}\right).$$

Функция f_1 также принадлежит классу $[\rho(r), \infty)$. Поэтому с некоторым M_1 выполняется неравенство

$$h(r) := \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{|b_n|}\right) < M_1 V(r).$$

Кроме того,

$$V(a_n) = \ln f(a_n) \leq \ln f_1(a_n) = h(a_n).$$

Пусть $r \in [a_n, a_{n+1})$. Имеем

$$V(r) = \frac{V(r)}{V(a_n)} V(a_n) \leq \frac{V(r)}{V(a_n)} h(a_n) \leq \frac{V(r)}{V(a_n)} h(r).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{h(r)} \leq 1.$$

Тем самым доказано, что

$$\frac{1}{M_1} < \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{h(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{h(r)} < \infty.$$

Поскольку $h(r)$ – логарифмически выпуклая функция, доказано соотношение (29), а вместе с ним и теорема.

В теореме 12 мы приводим дополнительное ограничение для у. п. $\rho(r)$, которое выполняется для широкого класса уточненных порядков и выполнение которого позволяет в теоремах 1, 2 отказаться от условия 3). Теперь мы сформулируем дополнительные ограничения, налагаемые на последовательность a_n узлов интерполяции, выполнение которых позволяет в теоремах 1, 2 отбросить ограничение 2).

Последовательность a_n называется $\rho(r)$ -отделимой, если существует число $d > 0$ такое, что выполняется одно из двух условий:

$R_1)$ круги $B(a_n, \frac{d|a_n|}{\sqrt{V(|a_n|)}})$ не пересекаются;

$R_2)$ для любого $n \geq 1$ выполняется неравенство $|a_{n+1}| - |a_n| \geq \frac{d|a_n|}{\sqrt{V(|a_n|)}}$.

Понятие $\rho(r)$ -отделимости восходит к работе Б. Я. Левина [3, гл. 2, § 1, гл. 4, § 4]. Он рассматривал специальные последовательности a_n , удовлетворяющие условию $\rho(r)$ -отделимости. Множества $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ он называл *R-множествами*. В дальнейшем понятие *R-множества* использовалось в работах многих математиков. В [9] рассматривались $\rho(r)$ -отделимые последовательности a_n без каких-либо дополнительных ограничений для a_n . В этой работе множества $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ называются *слабо регулярными множествами*.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\rho(r)$ – н. у. н., удовлетворяющий условию (4), и пусть a_n – допустимая $\rho(r)$ -отделимая последовательность. Пусть $N(r)$ – неванлинновская считающая функция последовательности a_n . Для того чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty;$$

2) для любого числа $M > 0$ существует целая функция $g \in [\rho(r), \infty)$ такая, что для любого n выполняется неравенство

$$\ln |g(a_n)| \geq MV(|a_n|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Эта часть теоремы следует из теоремы 1.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия 1) и 2) теоремы. Будем оценивать величину $\mu(B(a_n, t))$ при $t \in [0, \frac{1}{2}|a_n|]$. Если $a_k \in B(a_n, \frac{1}{2}|a_n|)$, то существует число n_0 такое, что при $n \geq n_0$ будет выполняться неравенство

$$\frac{|a_k|}{\sqrt{V(|a_k|)}} : \frac{|a_n|}{V(|a_n|)} = \frac{|a_k|}{|a_n|} \sqrt{\frac{(V(|a_n|))^2}{V(|a_k|)}} \leq 2. \quad (30)$$

Пусть выполняется условие $R_1)$ из определения $\rho(r)$ -отделимой последовательности. Если $t \in [0, d\frac{|a_n|}{\sqrt{V(|a_n|)}}]$, то выполняется равенство

$$\mu(B(a_n, t)) = 1.$$

Пусть теперь $a_k \in B(a_n, t)$,

$$t \in \left(d\frac{|a_n|}{\sqrt{V(|a_n|)}}, \frac{1}{2}|a_n|\right]. \quad (31)$$

Тогда

$$B\left(a_k, d\frac{|a_k|}{\sqrt{V(|a_k|)}}\right) \subset B\left(a_n, t + d\frac{|a_k|}{\sqrt{V(|a_k|)}}\right) = B\left(a_n, t\left(1 + \frac{d}{t} \frac{|a_k|}{\sqrt{V(|a_k|)}}\right)\right).$$

Из соотношений (30), (31) следует, что

$$B\left(a_k, d\frac{|a_k|}{\sqrt{V(|a_k|)}}\right) \subset B(a_n, 3t).$$

Из последнего соотношения и условия R_1) следует, что для t , удовлетворяющих условию (31), и для всех достаточно больших n выполняются неравенства

$$\mu(B(a_n, t)) \leq \frac{9}{d^2} t^2 \max_{a_k \in B(a_n, t)} \frac{V(|a_k|)}{|a_k|^2} \leq \frac{37}{d^2} \frac{t^2}{|a_n|^2} V(|a_n|).$$

Таким образом, при выполнении условия R_1) для всех достаточно больших n при $t \in [0, \frac{1}{2}|a_n|]$ будет выполняться неравенство

$$\mu(B(a_n, t)) \leq \frac{37}{d^2} \frac{t^2}{|a_n|^2} V(|a_n|) + 1. \quad (32)$$

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется условие R_2) из определения $\rho(r)$ -отделимой последовательности. В этом случае выполняется неравенство $\mu(B(a_n, t)) \leq K_2 - K_1$, где

$$K_2 = \max\{k : |a_k| \leq |a_n| + t\}, \quad K_1 = \max\{k : |a_k| < |a_n| - t\}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} 2t &\geq |a_{K_2}| - |a_{K_1+1}| = \sum_{m=K_1+1}^{K_2-1} (|a_{m+1}| - |a_m|) \geq d \sum_{m=K_1+1}^{K_2-1} \frac{|a_m|}{V(|a_m|)} \\ &\geq \frac{d}{2} (K_2 - K_1 - 1) |a_n| \min \left\{ \frac{1}{V(|a_m|)} : K_1 + 1 \leq m \leq K_2 - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Приведенное рассуждение справедливо, если выполняется неравенство $K_2 - K_1 \geq 2$. В противном случае выписанное неравенство очевидно, поскольку $2t \geq 0$.

Таким образом, если выполняется условие R_2), то при всех достаточно больших n при $t \in [0, \frac{1}{2}|a_n|]$ выполняется неравенство

$$\mu(B(a_n, t)) \leq K_2 - K_1 \leq \frac{5}{d} t \frac{V(|a_n|)}{|a_n|} + 1. \quad (33)$$

Из каждого неравенства (32), (33) следует неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \int_0^{|a_n|/2} \frac{\mu(B(a_n, t)) - 1}{t} dt < \infty.$$

Отсюда, как это можно увидеть из доказательства теоремы 6, следует условие 2) теоремы 2. Теперь из теоремы 2 следует, что последовательность a_n является интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$. Теорема доказана.

Сформулируем упрощенный вариант теоремы 14.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $\rho(r)$ – н.у.н., удовлетворяющий условию (4) и такой, что функция $V(r)$ является логарифмически выпуклой на некоторой полуоси $[r_0, \infty)$. Пусть a_n – допустимая $\rho(r)$ -отделимая последовательность. Для того чтобы последовательность a_n была интерполяционной в классе $[\rho(r), \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty,$$

где $N(r)$ – неванлинновская считающая функция последовательности a_n .

Список литературы

1. А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский, “Целые и мероморфные функции”, *Комплексный анализ. Одна переменная* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **85**, ВИНТИ, М., 1991, 5–185; англ. пер.: A. A. Gol'dberg, B. Ya. Levin, I. V. Ostrovskij, “Entire and meromorphic functions”, *Complex analysis*, I, Encyclopaedia Math. Sci., **85**, Springer, Berlin, 1995, 1–193.
2. А. В. Братищев, Ю. Ф. Коробейник, “Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:5 (1976), 1102–1127; англ. пер.: A. V. Bratishchev, Yu. F. Korobeinik, “The multiple interpolation problem in the space of entire functions of given proximate order”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:5 (1976), 1049–1074.
3. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956, 632 с.; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1964, viii+493 pp.
4. N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia Math. Appl., **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, xx+491 pp.
5. А. Ф. Гришин, Т. И. Малютина, “Об уточненном порядке”, *Комплексный анализ и математическая физика*, Красноярский гос. ун-т, Красноярск, 1998, 10–24.
6. А. Ф. Гришин, И. В. Поединцева, “Абелевы и тауберовы теоремы для интегралов”, *Алгебра и анализ*, **26**:3 (2014), 1–88.
7. К. Г. Малютин, *Интерполяция голоморфными функциями*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Харьковский гос. ун-т им. А. М. Горького, Харьков, 1980, 104 с.
8. А. А. Гольдберг, Н. В. Заболоцкий, “Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка”, *Матем. заметки*, **34**:2 (1983), 227–236; англ. пер.: A. A. Gol'dberg, N. V. Zabolotskii, “Concentration index of a subharmonic function of zeroth order”, *Math. Notes*, **34**:2 (1983), 596–601.
9. K. G. Malyutin, O. A. Bozhenko, “Weakly regular sets”, *İstanb. Univ. Sci. Fac. J. Math. Phys. Astronom.*, **4** (2013), 1–8.

ОКСАНА АНАТОЛЬЕВНА БОЖЕНКО

(OKSANA A. BOZHENKO)

Сумский государственный университет, Украина

Поступило в редакцию

27.10.2012

09.04.2014

Анатолий Филиппович Гришин

(ANATOLY F. GRISHIN)

Харьковский национальный университет

им. В. Н. Каразина, Украина

E-mail: grishin@univer.kharkov.ua

Константин Геннадьевич Малютин

(KONSTANTIN G. MALYUTIN)

Сумский государственный университет, Украина;

Харьковский национальный университет

им. В. Н. Каразина, Украина

E-mail: malyutink@gmail.com