Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Бьянка, М. Феррара, L. Guerrini, Асимптотический предел интегро-дифференциального уравнения, моделирующего сложные системы, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 6, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8066>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:04:46

УДК 517.968.74

К. Бьянка, М. Феррара, Л. Гуэррини

Асимптотический предел интегро-дифференциального уравнения, моделирующего сложные системы

Проведен асимптотический анализ математической модели, которая была недавно предложена для моделирования сложных систем, находящихся под действием внешнего силового поля, в прикладных науках. Эта модель состоит из интегро-дифференциального кинетического уравнения, соединенного с гауссовым изокинетическим термостатом. Асимптотический анализ выполняется в пределе больших значений времени и слабого поля. Показано, что в этом пределе возникает диффузионное поведение в макроскопическом масштабе.

Библиография: 50 наименований.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, предел слабого поля, процесс со скачками скорости, активные частицы, кинетическая теория.

DOI: 10.4213/im8066

§ 1. Введение

Соединение кинетической модели с гауссовым изокинетическим термостатом было недавно предложено в [1] и впоследствии изучалось в [2] и [3] для моделирования сложных систем, находящихся под действием макроскопических внешних векторных полей при ограничениях, сохраняющих постоянными некоторые моменты решений [4], например полную энергию. Приложения этой модели, называемой термостатированной кинетической моделью, включают живые системы, особенно явления хемотаксиса в биологических системах, самоорганизующееся поведение в динамике толп и роёв, а также экономические системы (см. [5], [6]). Термостатированная кинетическая модель является обобщением кинетических моделей для активных частиц [7] на системы, которые выводятся из равновесия внешними воздействиями (давление окружающей среды, действие вакцины, нападение хищника, катастрофическое событие, изменяющее экономический рост, и т. д.). Более того, термостатированная кинетическая модель позволяет учитывать эволюцию неравновесных устойчивых состояний, которые характерны для большинства реальных систем [8]. Неравновесное устойчивое состояние достигается, когда система приводится внешними силами в стационарное неравновесное состояние, в котором ее свойства не

Работа первого автора выполнена при поддержке L'Agence Nationale de la Recherche (ANR T-KiNeT Project).

изменяются со временем, т. е. статистические физические параметры, описывающие систему в макроскопическом масштабе, постоянны во времени несмотря на то, что система уже не находится в тепловом равновесии (см., например, работы [9]–[17]).

Вывод макроскопических уравнений из кинетических моделей для живых систем представляется сложной задачей ввиду эволюции во времени как механических переменных (координаты и скорости), так и стратегии (активности), развиваемой частицами. Соотношение между разными скоростями, характеризующими каждую эволюцию, играет важную роль при анализе математической структуры макроскопических уравнений, выводимых из исходных микроскопических уравнений. Соответственно, макроскопические модели выводятся из исходных кинетических моделей путем устремления межчастичных расстояний к расстояниям макроскопического масштаба. Более того, необходимо учитывать разные пространственные явления, включающие инвазию и возникновение устойчивых структур из-за агрегации и хемотаксиса [18]–[23].

В последнее время анализ применимости асимптотических методов достиг важной стадии развития как с точки зрения так называемых параболических, так и гиперболических пределов, или, равносильно, пределов слабого и сильного поля. Параболический предел (предел слабого поля) кинетических уравнений приводит к системе типа дрейфа–диффузии (или системе реакции–диффузии), в которой диффузионные процессы определяют поведение решений (см. [24]–[26] и обзорную статью [27]). Впоследствии разные авторы развивали метод моделирования, включающий дополнительные биологические явления, такие как эффекты распространения/разрушения, связанные с динамикой на клеточном уровне (см. [28], [29]).

Целью настоящей работы является асимптотический анализ термостатированной кинетической теории для модели активных частиц, а именно асимптотический анализ интегро-дифференциального уравнения для эволюции во времени функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$ системы; здесь t – переменная времени, $\mathbf{x}$ показывает типичное положение частицы-системы, $\mathbf{v}$ обозначает скорость частицы, а u представляет вещественную скалярную переменную, моделирующую стратегию, коллективно выражаемую частицами (*активность частицы*). Анализ выполняется в пределе больших значений времени и в пределе слабого поля, так что можно увидеть медленный процесс существенных изменений преобладающих свойств. Соответствующие макроскопические уравнения показывают возникновение различных возможных видов асимптотического поведения, включающих диффузию.

Содержание настоящей работы таково. В § 2 вводится термостатированная математическая модель. Рассматриваемая здесь кинетическая модель является техническим обобщением модели, развитой в [1], а именно рассматриваемая модель учитывает процессы со скачками скорости. В § 3 рассматривается предел больших значений времени и проводится соответствующий абстрактный асимптотический анализ, полученный из микроскопического описания с помо-

пью стохастических возмущений скорости пространственно-однородной динамики [30]. Более того, этот параграф иллюстрирует результаты, полученные с помощью конкретной модели, а именно релаксационной модели. Наконец, в § 4 отмечены некоторые перспективы будущих исследований.

§ 2. Исходная термостатированная кинетическая модель

В данном параграфе рассматривается термостатированная кинетическая модель (включающая описание процессов со скачками скорости), которую можно предложить для моделирования сложных систем в прикладных науках. Сложная система составлена из большого числа неоднородных взаимодействующих частиц, которые называются активными частицами, потому что их микроскопические состояния $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$ содержат как механические переменные: пространственное положение $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^3$ и скорость $\mathbf{v} \in D_{\mathbf{v}} \subseteq \mathbb{R}^3$, так и скалярную переменную $u \in D_u \subseteq \mathbb{R}$, которая представляет функциональную активность, коллективно выражаемую частицами. Система подвергается воздействию внешнего силового поля $F = F(u): D_u \rightarrow \mathbb{R}$, которое изменяет асимптотическое поведение системы и выводит систему из равновесия.

Полагая $\Gamma = D_{\mathbf{x}} \times D_{\mathbf{v}} \times D_u$, статистически представим эволюцию системы в целом путем определения функции распределения $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u): [0, \infty) \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$, зависящей от микроскопического состояния частиц $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$. Если $d\Gamma = d\mathbf{x} d\mathbf{v} du$ обозначает инфинитезимальный элемент объема с центром в $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$, то величина $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) d\Gamma$ означает плотность системы в момент времени t и в инфинитезимальном объеме $d\Gamma$. Если $f \in L^1_{\text{loc}}(\Gamma, d\Gamma)$, то глобальная плотность системы $\mathbf{n}[f] = \mathbf{n}[f](t)$ в момент времени t имеет вид

$$\mathbf{n}[f](t) = \int_{\Gamma} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) d\Gamma. \quad (2.1)$$

Определены также локальные величины, а именно локальная плотность системы $\rho[f] = \rho[f](t, \mathbf{x}, u)$ в момент времени t в положении $\mathbf{x}$ и при активности u запишется следующим образом:

$$\rho[f](t, \mathbf{x}, u) = \int_{D_{\mathbf{v}}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) d\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Эволюционное уравнение для функции распределения f получено при следующих предположениях.

1. Взаимодействия между частицами бинарны, мгновенны и происходят, когда две частицы очень близки друг к другу. Это предположение исключает возможность скоплений и многократных взаимодействий.

2. Скорость взаимодействий между частицами является неотрицательной функцией $\eta(u_*, u^*)$, где $u_*, u^* \in D_u$. А именно, $\eta(u_*, u^*)$ обозначает вероятность того, что пара частиц соответственно с активностями u_* и u^* будет иметь мгновенное столкновение. Более точно, вероятность того, что произойдет ровно одно столкновение, равна $\eta(u_*, u^*)$; вероятность того, что столкновение не произойдет, равна $1 - \eta(u_*, u^*)$.

3. Вероятность того, что после столкновения между двумя частицами соответственно с активностями u_* и u^* частица, имевшая активность u_* , окажется с активностью в интервале $(u, u + du)$ (при произвольном изменении активности частицы с начальной активностью u^*), обозначается через $\mathcal{A}(u_*, u^*, u)du$, $\mathcal{A} \geq 0$. Функция $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_{D_u} \mathcal{A}(u_*, u^*, u) du = 1 \quad \forall u_*, u^* \in D_u. \quad (2.3)$$

4. Перенос в пространстве линейен относительно скорости $\mathbf{v} \in D_{\mathbf{v}}$, причем область $D_{\mathbf{v}}$ ограничена и сферически симметрична относительно начала координат (т.е. $\mathbf{v}, -\mathbf{v} \in D_{\mathbf{v}}$); тогда активные частицы способны выбирать любое направление.

5. Скорость изменяется в соответствии со стохастическим процессом: *частица движется с постоянной скоростью по прямой, останавливается после определенного момента времени, выбирает новое направление, продолжает движение и т.д.* События поворота (и, таким образом, изменения скорости частицы $\mathbf{v}$) подчиняются пуассоновскому процессу [31], [32].

В предположениях 1–5 эволюционное уравнение для функции распределения f получается приравниванием производной f по времени к балансу членов выигрышей и потерь. Поэтому термостатированная кинетическая модель имеет вид

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})f + \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{\Gamma} u f d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) f \right) = J[f] + \nu V[f], \quad (2.4)$$

где через ν обозначена частота скачков скорости, поэтому $1/\nu$ – среднее время пробега (здесь ν предполагается постоянной, но может зависеть от пространственного положения и активности).

Оператор $J[f] = J[f](t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$, который моделирует взаимодействия в переменной активности, имеет вид

$$J[f] = \int_{D_u \times D_u} \eta(u_*, u^*) \mathcal{A}(u_*, u^*, u) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u_*) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u^*) du_* du^* - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) \int_{D_u} \eta(u, u^*) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u^*) du^*. \quad (2.5)$$

Первый член в правой части равенства (2.5) моделирует выигрыш от переходов из других состояний. А именно, частица с активностью u_* после взаимодействия с частицей, имеющей активность u^* , приобретает активность u . Второй член в правой части равенства (2.5) – потеря от переходов в другое состояние: частица в состоянии u , столкнувшись с частицей в состоянии u^* , в результате изменит свою активность и таким образом выйдет из активности u .

Оператор $V[f]$, ответственный за моделирование с помощью процесса со скачками скорости, был предложен разными авторами для моделирования динамики биологических организмов и определяется следующим образом:

$$V[f](t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) = \int_{D_{\mathbf{v}}} [T(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, u) - T(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)] d\mathbf{v}^*, \quad (2.6)$$

где $T(\mathbf{v}^*, \mathbf{v})$ – ядро поворота, являющееся вероятностью того, что в момент скачка скорость $\mathbf{v}^* \in D_{\mathbf{v}}$ становится скоростью $\mathbf{v} \in D_{\mathbf{v}}$. Отметим, что выбор новой скорости не зависит от времени пробега.

Оператор $\mathcal{T}_F[f]$, моделирующий гауссов изокINETический термостат [33], [34], имеет вид

$$\mathcal{T}_F[f](t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) = \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{\Gamma} u f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) \right).$$

Термин “гауссов” используется потому, что этот термостат основан на принципе Гаусса наименьшего ограничения (движения) [35].

Пусть $f_0(u): D_u \rightarrow \mathbb{R}^+$ – L^1 -интегрируемая функция на D_u , для которой $\|f_0\|_{L^1(D_u)} = 1$. Проблема Коши для термостатированной модели (2.4) в условиях однородности по пространственному положению и по скорости, а именно в случае, когда $f = f(t, u)$, имеет вид

$$\Xi_F[f](t, u) = J[f](t, u), \quad f(0, u) = f_0(u), \quad (2.7)$$

где $\Xi_F[f]$ – оператор, заданный следующим образом:

$$\Xi_F[f](t, u) = \partial_t f(t, u) + \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{D_u} u f(t, u) du \right) f(t, u) \right).$$

Пусть F и η постоянные. Если f – неотрицательная функция, удовлетворяющая (2.7) и такая, что $\|f\|_{L^1(D_u)} = 1$ и $f(t, u) = 0$ при $u \in \partial D_u$, то (см. [2])

$$\theta(t) := \int_{D_u} u f(t, u) du = \frac{A^+(A^- - B) - A^-(A^+ - B) \exp\left(-\frac{\sqrt{\eta^2 + 4F^2}}{F} t\right)}{(A^- - B) - (A^+ - B) \exp\left(-\frac{\sqrt{\eta^2 + 4F^2}}{F} t\right)},$$

где

$$A^{\pm} = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4F^2}}{2F}, \quad B = \int_{D_u} u f_0(u) du.$$

Соответственно, термостатированную модель можно записать следующим образом:

$$\partial_t f + F(1 - u\theta(t))\partial_u f + (1 - uF\theta(t))f = G[f](t, u), \quad (2.8)$$

где

$$G[f](t, u) = \eta \int_{D_u \times D_u} \mathcal{A}(u_*, u^*, u) f(t, u_*) f(t, u^*) du_* du^*.$$

Поэтому (2.8) является полулинейным уравнением первого порядка. Применяя преобразование

$$\varphi_t(u) = u e^{-\alpha(t)} + F e^{-\alpha(t)} \int_0^t e^{\alpha(v)} dv, \quad \alpha(t) = F \int_0^t \theta(v) dv,$$

получаем

$$\partial_t f_{\varphi} + (1 - F\theta(t)u)f_{\varphi} = G_{\varphi}[f](t), \quad (2.9)$$

где $f_\varphi(t, u) = f(t, \varphi_t(u))$ и $G_\varphi[f](t) = G[f](t, \varphi_t(u))$. Положим

$$\Upsilon(t) = \int_0^t (1 - F\theta(v)) dv = t - \alpha(t).$$

Пусть $T > 0$ фиксировано. Интегральный вид уравнения (2.9) в интервале времени $[0, T]$ есть

$$f_\varphi(t, u) = e^{-\Upsilon(v)} f_\varphi(0, u) + e^{-\Upsilon(v)} \int_0^t e^{\Upsilon(v)} G_\varphi[f](\tau, v) d\tau,$$

и тогда

$$f(t, u) = e^{-\Upsilon(v)} f_0(\varphi_t^{-1}(u)) + e^{-\Upsilon(v)} \int_0^t e^{\Upsilon(v)} G[f](\tau, \varphi_\tau \circ \varphi_t^{-1}(u)) d\tau. \quad (2.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $f_0(u): D_u \rightarrow \mathbb{R}^+$ — L^1 -интегрируемая функция на D_u такая, что $\|f_0\|_{L^1(D_u)} = 1$. Функция f называется *мягким решением проблемы Коши* (2.7), если $f(t, u) \in C((0, \infty), L^1(D_u))$ и f удовлетворяет равенству (2.10).

Пусть $\mathcal{K}_f(D_u)$ обозначает следующее функциональное пространство:

$$\mathcal{K}_f(D_u) := \{f = f(t, u) \mid [0, \infty) \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^+ : \|f\|_{L^1(D_u)} = \|u^2 f\|_{L^1(D_u)} = 1\}. \quad (2.11)$$

Следующий результат доказывается с помощью интегрирования вдоль характеристических кривых, выполняемого, как в [3].

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{A}(u_*, u^*, u): D_u \times D_u \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^+$ — четная неотрицательная функция на $D_u = [-a, a]$, $a > 0$, удовлетворяющая условию (2.3) и обладающая следующими свойствами:

$$\int_{D_u} \mathcal{A}(u_*, u^*, u) du = 1 \quad \forall u_*, u^* \in D_u, \quad (2.12)$$

$$\int_{D_u} u^2 \mathcal{A}(u_*, u^*, u) du = u_*^2 \quad \forall u_*, u^* \in D_u. \quad (2.13)$$

Если η и F постоянные, то мягкое решение $f \in C^1((0, \infty), L^1(D_u))$ проблемы Коши (2.7) существует глобально по времени и единственно. Более того, решение удовлетворяет $f \in \mathcal{K}_f(D_u)$.

Заметим, что существование решений для проблемы Коши (2.7) в условиях неоднородности по пространственному положению и по скорости обеспечивается при подходящих предположениях для оператора поворота V . Это является содержанием незавершенной работы, и результат будет представлен в последующих публикациях.

§ 3. Асимптотический предел

В настоящем параграфе рассмотрен асимптотический предел математической модели (2.4). Как уже упоминалось, модель (2.4) соответствует предположению, что функциональная динамика активных частиц управляется только переменной активности, поэтому эта модель соответствует пространственно-однородному случаю, возмущенному процессом скачков скорости, связанным с оператором V . Обычно в сложных системах, особенно системах биологической природы, величина частоты взаимодействия η , связанной с переменной активности, мала по сравнению с величиной частоты поворотов ν , связанной с переменной скорости (см. [31]). В соответствии с этим, считая, что $\eta(u_*, u^*) = \eta$, выберем следующие значения параметров:

$$\eta = \varepsilon^r, \quad \nu = \frac{1}{\varepsilon^p}, \quad (3.1)$$

где $r \geq 1$, $p \geq 1$, а ε – малый вещественный безразмерный параметр. Более того, рассмотрим масштаб времени, соответствующий диффузии, и предел слабого поля, а именно рассмотрим следующее масштабирование микроскопических переменных вместе с переходом к слабому полю:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \frac{t}{\varepsilon}, & \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x}, & \mathbf{v} &\rightarrow \mathbf{v}, \\ F(u) &\rightarrow \varepsilon^l F(u), & l &\geq 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Переход к асимптотическому пределу технически заключается в соответствующей модификации функции распределения f , включающей параметр масштабирования ε , и устремлении ε к нулю. Полагая

$$f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u\right),$$

с помощью вышеописанного масштабирования получаем следующую масштабированную термостатированную кинетическую модель:

$$(\varepsilon \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\varepsilon + \varepsilon^l \partial_u \left(F \left(1 - u \int_{\Gamma} u f_\varepsilon d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) f_\varepsilon \right) = \varepsilon^r J[f_\varepsilon] + \frac{1}{\varepsilon^p} V[f_\varepsilon], \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} J[f_\varepsilon](t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) &= \int_{D_u \times D_u} \mathcal{A}(u_*, u^*, u) f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u_*) f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u^*) du_* du^* \\ &\quad - f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) \int_{D_u} f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u^*) du^*, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$V[f_\varepsilon](t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) = \int_{D_{\mathbf{v}}} [T(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}) f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, u) - T(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)] d\mathbf{v}^*. \quad (3.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. По техническим причинам далее мы также будем использовать обозначения $f_* = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u_*)$, $f^* = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u^*)$ и $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $F = F(u)$, $x \in D_u$, – внешнее силовое поле, дифференцируемое относительно u . Функция $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u): (0, \infty) \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *решением уравнения (3.3)*, если:

- 1) $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) \in C((0, \infty), L^1(\Gamma))$;
- 2) f дифференцируема по переменным t , $\mathbf{x}$ и u ;
- 3) uf интегрируема относительно элементарной меры $d\gamma = d\mathbf{x} d\mathbf{v} du$;
- 4) $\mathcal{A}f_* f^*$ интегрируема относительно элементарной меры $d\mu = du_* du^*$;
- 5) Tf интегрируема относительно элементарной меры $d\mathbf{v}$;
- 6) f удовлетворяет (3.3) для всех $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) \in (0, \infty) \times D_{\mathbf{x}} \times D_{\mathbf{v}} \times D_u$.

3.1. Предположения и основные свойства оператора поворота. Приведем здесь формулировки технических предположений об операторе поворота V и соответствующие основные свойства. Эти предположения позволяют вывести макроскопическое уравнение и обеспечивают свойства сходимости, когда выполняется переход к асимптотическому пределу, а именно когда ε стремится к нулю в уравнении (3.3).

Асимптотический анализ будет выполняться при рассмотрении гильбертова пространства $L^2(D_{\mathbf{v}}, d\mathbf{v})$, снабженного обычным скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \int_{D_{\mathbf{v}}} f(\mathbf{v})g(\mathbf{v})d\mathbf{v} \quad \forall f, g \in L^2(D_{\mathbf{v}}, d\mathbf{v}).$$

В частности, далее мы обозначаем через $\langle f \rangle = \langle f \rangle(t, \mathbf{x}, u)$ интеграл функции $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$ по переменной скорости $\mathbf{v}$:

$$\langle f \rangle := \langle f, 1 \rangle = \int_{D_{\mathbf{v}}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) d\mathbf{v}. \quad (3.6)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть V – оператор поворота, заданный равенством (3.5), а f – функция распределения. Тогда

$$\langle V[f] \rangle = 0. \quad (3.7)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $T(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*)$ – ограниченное ядро поворота. Тогда существует ограниченное распределение скорости $P(\mathbf{v}): D_{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ такое, что:

- a) $\langle P(\mathbf{v}) \rangle = 1$;
- b) $\langle \mathbf{v}P(\mathbf{v}) \rangle = 0$;
- c) $T(\mathbf{v}^*, \mathbf{v})P(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*)P(\mathbf{v}^*)$ для любых $(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) \in D_{\mathbf{v}} \times D_{\mathbf{v}}$;
- d) $T(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) \geq \lambda P(\mathbf{v})$ для любых $(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) \in D_{\mathbf{v}} \times D_{\mathbf{v}}$, $\lambda > 0$.

При предположениях 3.1, 3.2 выполняются следующие свойства оператора поворота V (см. доказательство в [18] и [28]):

(i) если $g \in L^2(D_{\mathbf{v}}, d\mathbf{v}/P(\mathbf{v}))$ – известная функция от $\mathbf{v}$, то интегральное уравнение $V[f] = g$ допускает единственное решение $f \in L^2(D_{\mathbf{v}}, d\mathbf{v}/P(\mathbf{v}))$, более того, $\langle f(\mathbf{v}) \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle g(\mathbf{v}) \rangle = 0$;

(ii) интегральный оператор $V[f]$ определяет самосопряженный оператор Фредгольма относительно скалярного произведения в $L^2(D_{\mathbf{v}}, d\mathbf{v}/P(\mathbf{v}))$;

(iii) векторное интегральное уравнение $V[f] = \mathbf{v}P(\mathbf{v})$ допускает единственное векторное решение $h(\mathbf{v}): D_{\mathbf{v}} \rightarrow \mathbb{R}^3$;

(iv) ядро оператора V является множеством, порожденным $P(\mathbf{v})$, а именно $\text{Ker}[V] = \text{span}\{P(\mathbf{v})\}$.

3.2. Эволюционное уравнение для макроскопической плотности.

Асимптотический предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, дающий макроскопическое уравнение, формально излагается в этом пункте для математической модели (3.3). Вывод макроскопического уравнения выполняется следующим образом.

Пусть f – поточечный предел п. в. в $[0, \infty) \times \Gamma$ функции f_ε , когда ε стремится к нулю. Тогда, умножая уравнение (3.3) на ε^p и устремляя ε к нулю, получаем $V[f] = 0$. Поэтому в соответствии с (iv) существует функция $\rho = \rho(t, \mathbf{x}, u): [0, \infty) \times D_{\mathbf{x}} \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) = \rho(t, \mathbf{x}, u)P(\mathbf{v}). \quad (3.8)$$

Неизвестная функция ρ является макроскопической плотностью, соответствующей f . Действительно, согласно нормировочному предположению для $P(\mathbf{v})$ интегрирование по $\mathbf{v}$ уравнения (3.8) дает

$$\int_{D_{\mathbf{v}}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) d\mathbf{v} = \int_{D_{\mathbf{v}}} \rho(t, \mathbf{x}, u)P(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \rho(t, \mathbf{x}, u) \int_{D_{\mathbf{v}}} P(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \rho(t, \mathbf{x}, u).$$

Интегрируя уравнение (3.3) по $\mathbf{v}$, согласно предположению 3.1 получим

$$\partial_t \langle f_\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon \rangle + \varepsilon^{l-1} \left\langle \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{\Gamma} u f_\varepsilon d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) f_\varepsilon \right) \right\rangle = \varepsilon^{r-1} \langle J[f_\varepsilon] \rangle. \quad (3.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = (G_1(x_1, x_2, x_3), G_2(x_1, x_2, x_3), G_3(x_1, x_2, x_3))$ – векторное поле в $\mathbb{R}^3$. Назовем *обобщенным оператором дивергенции поля $\mathbf{G}$* следующее скалярное поле:

$$\text{div } \mathbf{G} = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial G_3}{\partial x_3}. \quad (3.10)$$

Чтобы выполнить переход к пределу в уравнении (3.9), когда ε стремится к нулю, сначала проведем анализ асимптотического поведения второго члена в (3.9). В соответствии с определением 3.1 имеем

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{v} f_\varepsilon \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_{\mathbf{x}} \left\langle \mathbf{v} f_\varepsilon \frac{P(\mathbf{v})}{P(\mathbf{v})} \right\rangle. \quad (3.11)$$

Поскольку член (3.11) можно записать в виде

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_{\mathbf{x}} \left\langle \mathbf{v} f_\varepsilon \frac{P(\mathbf{v})}{P(\mathbf{v})} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_{\mathbf{x}} \left\langle \frac{\mathbf{v} P(\mathbf{v})}{P(\mathbf{v})} f_\varepsilon \right\rangle, \quad (3.12)$$

из свойств (iii) и (ii) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{div}_{\mathbf{x}} \left\langle \frac{\mathbf{v} P(\mathbf{v})}{P(\mathbf{v})} f_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_{\mathbf{x}} \left\langle \frac{V[h(\mathbf{v})]}{P(\mathbf{v})} f_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_{\mathbf{x}} \left\langle \frac{V[f_\varepsilon]}{P(\mathbf{v})} h(\mathbf{v}) \right\rangle. \quad (3.13)$$

Так как выполняется уравнение (3.3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} V[f_\varepsilon] &= \varepsilon^p \partial_t f_\varepsilon + \varepsilon^{p+l-1} \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{\Gamma} u f_\varepsilon d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) f_\varepsilon \right) \\ &\quad + \varepsilon^{p-1} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon - \varepsilon^{p+r-1} J[f_\varepsilon], \end{aligned} \quad (3.14)$$

а подставляя (3.14) в (3.13) и учитывая (3.8), выводим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon \rangle \rightarrow \delta_{p,1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \langle (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho) h(\mathbf{v}) \rangle.$$

В частности, если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $h(\mathbf{v}) = (h_1(\mathbf{v}), h_2(\mathbf{v}), h_3(\mathbf{v}))$, то

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho) h(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} h_1 v_1 & h_1 v_2 & h_1 v_3 \\ h_2 v_1 & h_2 v_2 & h_2 v_3 \\ h_3 v_1 & h_3 v_2 & h_3 v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \rho \\ \partial_{x_2} \rho \\ \partial_{x_3} \rho \end{pmatrix} := [\mathbf{v} \otimes h(\mathbf{v})] \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho. \quad (3.15)$$

Поскольку ρ не зависит от $\mathbf{v}$, имеем

$$\langle (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho) h(\mathbf{v}) \rangle = \left(\int_{D_{\mathbf{v}}} [\mathbf{v} \otimes h(\mathbf{v})] d\mathbf{v} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho.$$

Член, относящийся к гауссовому изокINETическому термостату, имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^{l-1} \langle \mathcal{T}_F[f_\varepsilon] \rangle &= \varepsilon^{l-1} \left\langle \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{\Gamma} u f_\varepsilon d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) f_\varepsilon \right) \right\rangle \\ &\rightarrow \delta_{l,1} \left\langle \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{\Gamma} u \rho P d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) \rho P \right) \right\rangle \\ &= \delta_{l,1} \left\langle \partial_u \left(F(u) \left(1 - u \int_{D_{\mathbf{x}} \times D_u} u \rho d\mathbf{x} du \right) \rho P \right) \right\rangle \\ &= \delta_{l,1} \partial_u (F(u) (1 - u \mathbb{U}[\rho](t)) \rho), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\mathbb{U}[\rho](t) = \int_{D_{\mathbf{x}} \times D_u} u \rho(t, \mathbf{x}, u) d\mathbf{x} du. \quad (3.17)$$

Наконец, $\varepsilon^{r-1} \langle J[f_\varepsilon] \rangle \rightarrow \delta_{r,1} K[\rho]$, где

$$\begin{aligned} K[\rho] &= \langle P^2(\mathbf{v}) \rangle \int_{D_u \times D_u} \mathcal{A}(u_*, u^*, u) \rho(t, \mathbf{x}, u_*) \rho(t, \mathbf{x}, u^*) du_* du^* \\ &\quad - \rho(t, \mathbf{x}, u) \langle P^2(\mathbf{v}) \rangle \int_{D_u} \rho(t, \mathbf{x}, u^*) du^*. \end{aligned} \quad (3.18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $F = F(u)$, $u \in D_u$, – внешнее силовое поле, дифференцируемое по u , и пусть $h(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in D_{\mathbf{v}}$, – векторная функция, определенная в (iii) и такая, что $\mathbf{v} \otimes h(\mathbf{v})$ интегрируема относительно элементарной меры $d\mathbf{v}$. Функция $\rho: (0, \infty) \times D_{\mathbf{x}} \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *решением* уравнения

$$\partial_t \rho + \delta_{l,1} \partial_u (F(u) (1 - u \mathbb{U}[\rho](t)) \rho) = \delta_{p,1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (D_{\rho} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho) + \delta_{r,1} K[\rho], \quad (3.19)$$

где D_ρ – тензор, заданный формулой

$$D_\rho = - \int_{D_v} [\mathbf{v} \otimes h(\mathbf{v})] d\mathbf{v}, \quad (3.20)$$

а K – оператор, заданный равенством (3.18), если $\rho(t, \mathbf{x}, u) \in C((0, \infty), L^1(D_{\mathbf{x}} \times D_u))$; ρ дифференцируема по переменным t , $\mathbf{x}$ и u ; $\nabla \rho$ дифференцируема по переменной $\mathbf{x}$; $u\rho$ интегрируема относительно элементарной меры $d\gamma = d\mathbf{x} du$; $A\rho_*\rho^*$ интегрируема относительно элементарной меры $d\mu = du_* du^*$; ρ удовлетворяет (3.19) для всех $(t, \mathbf{x}, u) \in (0, \infty) \times D_{\mathbf{x}} \times D_u$.

Поэтому основной результат настоящей работы можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f_\varepsilon(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)$ – последовательность решений масштабированных кинетических уравнений (3.3) такая, что f_ε сходится п. в. в $[0, \infty) \times \Gamma$ к функции f при ε , стремящемся к нулю. Если выполнены предположения 3.1, 3.2, а члены

$$\partial_t \langle f_\varepsilon \rangle, \quad \langle f_\varepsilon \rangle, \quad \langle V[f_\varepsilon] \rangle, \quad \langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f_\varepsilon \rangle, \quad \langle J[f_\varepsilon] \rangle, \quad \langle \mathcal{T}_F[f_\varepsilon] \rangle$$

сходятся п. в. в $[0, \infty) \times \Gamma$ к соответствующим членам

$$\partial_t \langle f \rangle, \quad \langle f \rangle, \quad \langle V[f] \rangle, \quad \langle \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f \rangle, \quad \langle J[f] \rangle, \quad \langle \mathcal{T}_F[f] \rangle,$$

то асимптотический предел f последовательности f_ε имеет вид (3.8), где ρ – решение уравнения (3.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В общем случае тензор D_ρ , называемый тензором диффузии, не является скалярным кратным единичного (неизотропный тензор).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Когда $p > 1$, макроскопическое уравнение (3.19) приобретает вид

$$\partial_t \rho + \delta_{l,1} \partial_u (F(u)(1 - uU[\rho](t))\rho) = \delta_{r,1} K[\rho], \quad (3.21)$$

поэтому масштаб времени εt , соответствующий диффузии, не дает вклада в диффузионное приближение. В этом случае предлагается масштабирование

$$\varepsilon(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) f_\varepsilon + \varepsilon^l \partial_u \left(F \left(1 - u \int_{\Gamma} u f_\varepsilon d\mathbf{x} d\mathbf{v} du \right) f_\varepsilon \right) = \varepsilon^r J[f_\varepsilon] + V[f_\varepsilon], \quad (3.22)$$

которое дает асимптотическое уравнение (3.21).

3.3. Изотропный тензор диффузии: релаксационная модель. В этом пункте приводится конкретный пример асимптотического эволюционного уравнения для макроскопической плотности. После задания конкретного оператора поворота мы получаем явную формулу тензора диффузии D_ρ , который в этом конкретном примере изотропен. А именно, мы считаем, что

$$T(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}) = \lambda P(\mathbf{v}), \quad \lambda > 0.$$

Поэтому оператор поворота имеет вид

$$\begin{aligned}
 V[f](t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) &= \int_{D_{\mathbf{v}}} [T(\mathbf{v}^*, \mathbf{v})f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, u) - T(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*)f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)] d\mathbf{v}^* \\
 &= \lambda \int_{D_{\mathbf{v}}} [P(\mathbf{v})f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, u) - P(\mathbf{v}^*)f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)] d\mathbf{v}^* \\
 &= \lambda \left(P(\mathbf{v}) \int_{D_{\mathbf{v}}} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, u) d\mathbf{v}^* - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u) \int_{D_{\mathbf{v}}} P(\mathbf{v}^*) d\mathbf{v}^* \right) \\
 &= \lambda (\rho(t, \mathbf{x}, u)P(\mathbf{v}) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, u)).
 \end{aligned}$$

Несложными вычислениями получаем, что функция $h(\mathbf{v})$, являющаяся решением интегрального уравнения $V[h(\mathbf{v})] = \mathbf{v}P(\mathbf{v})$ и такая, что $\langle h(\mathbf{v}) \rangle = 0$, есть

$$h(\mathbf{v}) = -\frac{\mathbf{v}P(\mathbf{v})}{\lambda}.$$

Поэтому тензор диффузии D_ρ имеет вид

$$D_\rho = - \int_{D_{\mathbf{v}}} [\mathbf{v} \otimes h(\mathbf{v})] d\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \int_{D_{\mathbf{v}}} [\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}P(\mathbf{v})] d\mathbf{v}. \quad (3.23)$$

В частности, если $D_{\mathbf{v}}$ — $(n-1)$ -сфера (в нашем случае $n=3$) радиуса $r > 0$ и $P(\mathbf{v}) = 1/|D_{\mathbf{v}}|$, то имеем

$$D_\rho = \frac{1}{\lambda|D_{\mathbf{v}}|} \int_{D_{\mathbf{v}}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (3.24)$$

По формуле

$$\int_{D_{\mathbf{v}}} v_i v_j d\mathbf{v} = |D_{\mathbf{v}}| \frac{r^2}{n} \delta_{ij}$$

получаем, что

$$D_\rho = \frac{r^2}{\lambda n} \mathbb{I}, \quad (3.25)$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица. Поскольку

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(D_\rho \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho) = \frac{r^2}{\lambda n} \Delta_{\mathbf{x}} \rho,$$

макроскопическое уравнение (3.19), таким образом, имеет вид

$$\partial_t \rho + \delta_{l,1} \partial_u (F(u)(1 - u\mathbb{U}[\rho](t))\rho) = \delta_{p,1} \frac{r^2}{\lambda n} \Delta_{\mathbf{x}} \rho + \delta_{r,1} K[\rho], \quad (3.26)$$

где $K[\rho] = K[\rho](t, \mathbf{x}, u)$ — оператор, заданный следующим образом:

$$K[\rho](t, \mathbf{x}, u) = \frac{J[\rho](t, \mathbf{x}, u)}{|D_{\mathbf{v}}|}. \quad (3.27)$$

§ 4. Приложения и перспективы

Настоящая работа посвящена тому, чтобы показать, как макроскопические модели могут быть получены с помощью подходящего асимптотического анализа, примененного к интегро-дифференциальному уравнению, моделирующему исходное описание, доставляемое термостатированной кинетической теорией. Анализ, предложенный в настоящей работе, дает общую математическую модель, которую можно учитывать при выводе конкретных моделей, интересных для приложений. Все модели характеризуются параметрами, которые нужно применять на основе экспериментальных данных. Другими словами, модель должна быть привязана к конкретному эксперименту, и, если она подтверждается, ее можно использовать для того, чтобы моделировать сложные явления, несколько отличающиеся от тех, которые использовались в эксперименте.

Отметим, что выполненный в настоящей работе вывод макроскопического уравнения для локальной плотности асимптотическим методом является подходом, который альтернативен механике сплошной среды и должен быть более правильным. Действительно, определение макроскопических моделей в рамках механики сплошной среды не учитывает динамики в мезоскопическом (кинетическом) масштабе.

Приложения макроскопического уравнения, выведенного в настоящей работе, относятся к биологическим и экономическим системам. В частности, макроскопические уравнения могут быть предложены в качестве моделей для изучения эволюции во времени плотности метастазов опухолей на уровне тканей – эволюции, сильно зависящей от событий, происходящих в клеточном масштабе (см. недавние исследования об образовании келоидов [36] и о карциноме груди [37], [38]). В случае экономических систем макроскопическое поведение относится к экономическому росту как результату накопления капитала и энергии (см. среди прочих работы [39]–[43]).

Дальнейшие аналитические исследования решений макроскопических уравнений, выведенных в настоящей работе, могут быть направлены на сравнение функций распределения, рассматриваемых в этой работе, с функциями распределения, определенными в [47]–[49].

Хотя асимптотический анализ был сосредоточен на рассмотрении предела больших значений времени и предела слабого поля, вывод гиперболических моделей также представляет интерес для приложений.

Отметим, что нужно развивать более глубокий анализ, обобщающий метод, предложенный в данной работе, на сложные системы, составленные из разных взаимодействующих популяций активных частиц (представление функциональных подсистем [50]). Особенно важно развитие вышеупомянутого анализа до кратномасштабного анализа, который определенно в перспективе будет стимулировать дальнейшие исследования.

Авторы благодарны А. Беллукуиду (A. Bellouquid) за обсуждения и замечания, которые улучшили работу.

Список литературы

1. C. Bianca, “Kinetic theory for active particles modelling coupled to Gaussian thermostats”, *Appl. Math. Sci. (Ruse)*, **6**:13-16 (2012), 651–660.
2. C. Bianca, “An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for thermostatted-KTAP models”, *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, **6**:17-20 (2012), 813–824.
3. C. Bianca, “Onset of nonlinearity in thermostatted active particles models for complex systems”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **13**:6 (2012), 2593–2608.
4. C. Bianca, M. Ferrara, L. Guerrini, “High-order moments conservation in thermostatted kinetic models”, *J. Global Optim.*, **58**:2 (2014), 389–404.
5. C. Bianca, “Thermostatted kinetic equations as models for complex systems in physics and life sciences”, *Phys. Life Rev.*, **9**:4 (2012), 359–399.
6. C. Bianca, “Thermostatted models – Multiscale analysis and tuning with real-world systems data”, *Phys. Life Rev.*, **9**:4 (2012), 418–425.
7. N. Bellomo, C. Bianca, M. Delitala, “Complexity analysis and mathematical tools towards the modelling of living systems”, *Phys. Life Rev.*, **6**:3 (2009), 144–175.
8. C. Bianca, “Existence of stationary solutions in kinetic models with Gaussian thermostats”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **36**:13 (2013), 1768–1775.
9. B. Derrida, “Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current”, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2007, №7, P07023, 45 pp. (electronic).
10. A. Dickson, A.R. Dinner, “Enhanced sampling of nonequilibrium steady states”, *Annu. Rev. Phys. Chem.*, **61** (2010), 441–459.
11. J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet, L. Rey-Bellet, “Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures”, *Comm. Math. Phys.*, **201**:3 (1999), 657–697.
12. A. Fruleux, R. Kawai, K. Sekimoto, “Momentum transfer in nonequilibrium steady states”, *Phys. Rev. Lett.*, **108**:16 (2012), 160601.
13. M. F. Gelin, D. S. Kosov, “Asymptotic nonequilibrium steady-state operators”, *Phys. Rev. E* (3), **80**:2 (2009), 022101, 4 pp.
14. H. Ge, M. Qian, H. Qian, “Stochastic theory of nonequilibrium steady states. Part II. Applications in chemical biophysics”, *Phys. Rep.*, **510**:3 (2012), 87–118.
15. D. Hurowitz, S. Rahav, D. Cohen, “The non-equilibrium steady state of sparse systems with non-trivial topology”, *EPL*, **98**:2 (2012), 20002, 6 pp.
16. Ch. Kwon, P. Ao, “Nonequilibrium steady state of a stochastic system driven by a nonlinear drift force”, *Phys. Rev. E*, **84**:6 (2011), 061106.
17. E. Tjhung, M. E. Cates, D. Marenduzzo, “Nonequilibrium steady states in polar active fluids”, *Soft Matter*, **7**:16 (2011), 7453–7464.
18. F. A. C. C. Chalub, P. A. Markowich, B. Perthame, C. Schmeiser, “Kinetic models for chemotaxis and their drift-diffusion limits”, *Monatsh. Math.*, **142**:1-2 (2004), 123–141.
19. F. Chalub, Y. Dolak-Struss, P. Markowich, D. Oeltz, C. Schmeiser, A. Soreff, “Model hierarchies for cell aggregation by chemotaxis”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **16**:7 (2006), 1173–1197.
20. Y. Dolak, C. Schmeiser, “Kinetic models for chemotaxis: Hydrodynamic limits and spatio-temporal mechanisms”, *J. Math. Biol.*, **51**:6 (2005), 595–615.
21. R. Erban, H. G. Othmer, “From individual to collective behaviour in bacterial chemotaxis”, *SIAM J. Appl. Math.*, **65**:2 (2004/05), 361–391 (electronic).

22. F. Filbet, P. Laurençot, B. Perthame, “Derivation of hyperbolic models for chemosensitive movement”, *J. Math. Biol.*, **50**:2 (2005), 189–207.
23. N. Bellomo, A. Bellouquid, J. Nieto, J. Soler, “Multiscale biological tissue models and flux-limited chemotaxis for multicellular growing systems”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **20**:7 (2010), 1179–1207.
24. A. Bellouquid, “On the asymptotic analysis of kinetic models towards the compressible Euler and acoustic equations”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **14**:6 (2004), 853–882.
25. C. Bianca, C. Dogbe, “A mathematical model for crowd dynamics: multiscale analysis, fluctuations and random noise”, *Nonlinear Stud.*, **20**:3 (2013), 349–373.
26. L. L. Bonilla, J. S. Soler, “High-field limit for the Vlasov–Poisson–Fokker–Planck system: a comparison of different perturbation methods”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **11**:8 (2001), 1457–1468.
27. N. Bellomo, A. Bellouquid, J. Nieto, J. Soler, “On the asymptotic theory from microscopic to macroscopic growing tissue models: an overview with perspectives”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:1 (2012), 1130001, 37 pp.
28. A. Bellouquid, C. Bianca, “Modelling aggregation-fragmentation phenomena from kinetic to macroscopic scales”, *Math. Comput. Modelling*, **52**:5–6 (2010), 802–813.
29. M. Lachowicz, “Micro and meso scales of description corresponding to a model of tissue invasion by solid tumours”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **15**:11 (2005), 1667–1683.
30. H. G. Othmer, T. Hillen, “The diffusion limit of transport equations derived from velocity-jump processes”, *SIAM J. Appl. Math.*, **61**:3 (2000), 751–775 (electronic).
31. H. G. Othmer, S. R. Dunbar, W. Alt, “Models of dispersal in biological systems”, *J. Math. Biol.*, **26**:3 (1988), 263–298.
32. H. G. Othmer, T. Hillen, “The diffusion limit of transport equations. II. Chemotaxis equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **62**:4 (2002), 1222–1250 (electronic).
33. G. P. Morriss, C. P. Dettmann, “Thermostats: analysis and application”, *Chaos*, **8**:2 (1998), 321–336.
34. D. Ruelle, “Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics”, *J. Statist. Phys.*, **95**:1–2 (1999), 393–468.
35. K. F. Gauß, “Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik”, *J. Reine Angew. Math.*, **1829**:4 (1829), 232–235.
36. C. Bianca, L. Fermo, “Bifurcation diagrams for the moments of a kinetic type model of keloid-immune system competition”, *Comput. Math. Appl.*, **61**:2 (2011), 277–288.
37. C. Bianca, M. Pennisi, “The triplex vaccine effects in mammary carcinoma: a nonlinear model in tune with SimTriplex”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **13**:4 (2012), 1913–1940.
38. C. Bianca, F. Pappalardo, M. Pennisi, M. A. Ragusa, “Persistence analysis in a Kolmogorov-type model for cancer-immune system competition”, *AIP Conf. Proc.*, **1558** (2013), 1797–1800.
39. R. M. Solow, “A contribution to the theory of economic growth”, *Quart. J. Econom.*, **70**:1 (1956), 65–94.
40. T. W. Swan, “Economic growth and capital accumulation”, *Econ. Rec.*, **32**:2 (1956), 334–361.
41. R. B. Banks, *Growth and diffusion phenomena. Mathematical frameworks and applications*, Texts Appl. Math., **14**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, xx+455 pp.
42. M. Ferrara, L. Guerrini, “On the dynamics of a three-sector growth model”, *Int. Rev. Econ.*, **55**:3 (2008), 275–283.
43. C.-J. Dalgaard, H. Strulik, “Energy distribution and economic growth”, *Resour. Energy Econ.*, **33**:4 (2011), 782–797.

44. C. Bianca, M. Ferrara, L. Guerrini, “Hopf bifurcations in a delayed-energy-based model of capital accumulation”, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **7**:1 (2013), 139–143.
45. C. Bianca, M. Ferrara, L. Guerrini, “The Cai model with time delay: existence of periodic solutions and asymptotic analysis”, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **7**:1 (2013), 21–27.
46. C. Bianca, L. Guerrini, “On the Dalgaard–Strulik model with logistic population growth rate and delayed-carrying capacity”, *Acta Appl. Math.*, **128**:1 (2013), 39–48.
47. M. A. Ragusa, “Embeddings for Morrey–Lorentz Spaces”, *J. Optim Theory Appl.*, **154**:2 (2012), 491–499.
48. M. A. Ragusa, “Necessary and sufficient condition for a *VMO* function”, *Appl. Math. Comput.*, **218**:24 (2012), 11952–11958.
49. M. A. Ragusa, “Commutators of fractional integral operators on Vanishing–Morrey spaces”, *J. Global Optim.*, **40**:1–3 (2008), 361–368.
50. C. Bianca, “Modeling complex systems by functional subsystems representation and thermostatted-KTAP methods”, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **6**:3 (2012), 495–499.

КАРЛО БЬЯНКА
(CARLO BIANCA)
Laboratoire de Physique Théorique
de la Matière Condensée et CNRS,
Sorbonne Universités, Paris, France
E-mail: bianca@lptmc.jussieu.fr

Поступило в редакцию
18.09.2012
28.12.2013

МАССИМИЛИАНО ФЕРРАРА
(MASSIMILIANO FERRARA)
Department of Law and Economics
University “Mediterranea” of Reggio Calabria, Italy
E-mail: massimiliano.ferrara@unirc.it

ЛУКА ГУЭРРИНИ
(LUCA GUERRINI)
Department of Mathematics,
University of Bologna, Italy
E-mail: luca.guerrini@unibo.it

Перевод с английского Е. И. Хухро