Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О теоремах сравнения для квазилинейных эллиптических неравенств, учитывающих геометрию области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 4, 123–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 08:16:51

УДК 517.91

А. А. Коньков

О теоремах сравнения для квазилинейных эллиптических неравенств, учитывающих геометрию области

Рассматриваются неотрицательные решения квазилинейных эллиптических неравенств $\operatorname{div} A(x, Du) \geq 0$ в Ω_{R_0, R_1} , $0 \leq R_0 < R_1 \leq \infty$, где $\Omega_{R_0, R_1} = \{x \in \Omega: R_0 < |x| < R_1\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – непустое открытое множество, а функция $A: \Omega_{R_0, R_1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям эллиптичности $C_1|\xi|^p \leq \xi A(x, \xi)$, $|A(x, \xi)| \leq C_2|\xi|^{p-1}$, $C_1, C_2 > 0$, $p > 1$, для почти всех $x \in \Omega_{R_0, R_1}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Получены оценки решений, учитывающие геометрию множества Ω .

Библиография: 15 наименований.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические операторы, неограниченные области, емкость.

DOI: 10.4213/im8068

§ 1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – непустое открытое множество. Обозначим $\Omega_{R_0, R_1} = \{x \in \Omega: R_0 < |x| < R_1\}$ и $\Gamma_{R_0, R_1} = \{x \in \partial\Omega: R_0 < |x| < R_1\}$. Под B_r^x и S_r^x мы подразумеваем соответственно открытый шар и сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке x . В случае $x = 0$ записываем B_r и S_r вместо B_r^0 и S_r^0 . Положим также $B_{R_0, R_1} = \{x \in \mathbb{R}^n: R_0 < |x| < R_1\}$.

Будем изучать решения неравенств

$$\operatorname{div} A(x, Du) \geq 0 \quad \text{в } \Omega_{R_0, R_1}, \quad 0 \leq R_0 < R_1 \leq \infty, \quad (1.1)$$

где $D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ – оператор градиента и $A: \Omega_{R_0, R_1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – измеримая функция, удовлетворяющая для некоторых постоянных $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $p > 1$ условиям эллиптичности

$$C_1|\xi|^p \leq \xi A(x, \xi), \quad |A(x, \xi)| \leq C_2|\xi|^{p-1}$$

для почти всех $x \in \Omega_{R_0, R_1}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Говорим, что u является решением (1.1), если $u \in W_p^1(\Omega_{R_0, r}) \cap L_\infty(\Omega_{R_0, r})$ и $A(x, Du) \in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0, r})$ для любого вещественного числа $r \in (R_0, R_1)$, и при этом

$$-\int_{\Omega_{R_0, R_1}} A(x, Du) D\varphi \, dx \geq 0$$

для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{R_0, R_1})$ [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-12018-офи-м-2011).

Условие

$$u|_{\Gamma_{R_0, R_1}} = 0 \quad (1.2)$$

означает, что $\psi u \in \mathring{W}_p^1(\Omega_{R_0, R_1})$ для любой функции $\psi \in C_0^\infty(B_{R_0, R_1})$.

Несложно увидеть, что в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ условие (1.2) будет выполнено для всех $u \in W_{p, \text{loc}}^1(B_{R_0, R_1})$.

Емкостью компакта $K \subset \omega$ относительно открытого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\text{cap}(K, \omega) = \inf_{\varphi} \int_{\omega} |D\varphi|^p dx,$$

где точная нижняя грань в правой части берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, тождественно равным единице в окрестности K . В случае $\omega = \mathbb{R}^n$ будем записывать $\text{cap}(K)$ вместо $\text{cap}(K, \mathbb{R}^n)$. Если $p = 2$, то $\text{cap}(K)$ совпадает с хорошо известной винеровской емкостью.

Несложно убедиться в том, что определенная выше емкость обладает следующими естественными свойствами:

(i) *монотонностью*, из включений $K_1 \subset K_2$ и $\omega_2 \subset \omega_1$ вытекает неравенство

$$\text{cap}(K_1, \omega_1) \leq \text{cap}(K_2, \omega_2);$$

(ii) *свойством подобия*, если множества K' и ω' получаются из множеств K и ω преобразованием подобия с коэффициентом $\lambda > 0$, т. е. $K' = \lambda K$ и $\omega' = \lambda \omega$, то имеем

$$\text{cap}(K', \omega') = \lambda^{n-p} \text{cap}(K, \omega);$$

(iii) *полуаддитивностью*, для любых компактных подмножеств K_1 и K_2 открытого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\text{cap}(K_1 \cup K_2, \omega) \leq \text{cap}(K_1, \omega) + \text{cap}(K_2, \omega). \quad (1.3)$$

Пусть E – непустое открытое подмножество сферы S_r . Положим

$$\lambda_{\min}(E) = \inf_{\psi \in C_0^\infty(E)} \frac{\int_E |\nabla \psi|^p dS}{\int_E |\psi|^p dS},$$

где $|\nabla \psi| = (g^{ij} \nabla_i \psi \nabla_j \psi)^{1/2}$, $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$, g_{kj} – метрический тензор на S_r , индуцированный естественной метрикой в $\mathbb{R}^n$, а dS – элемент $(n-1)$ -мерного объема сферы S_r . Другими словами, $\lambda_{\min}(E)$ является первым собственным значением спектральной задачи

$$\nabla_i (|\nabla v|^{p-2} g^{ij} \nabla_j v) = -\lambda |v|^{p-2} v \quad \text{в } E, \quad v|_{\partial E} = 0,$$

где $\nabla_i (|\nabla v|^{p-2} g^{ij} \nabla_j v)$ – p -оператор Лапласа–Бельтрами на S_r . В частности, имеем $\lambda_{\min}(S_r) = 0$.

Положим также

$$\mu(x; \delta, \nu) = \sup_{t \in (0, \delta|x|)} (t^{1-n} \text{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \Omega, B_{\nu t}^x))^{1/(p-1)},$$

где $x \in \Omega$, а $\delta > 0$ и $\nu > 1$ – вещественные числа.

Далее везде будем считать, что $S_r \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $r \in (R_0, R_1)$. Если u – решение задачи (1.1), (1.2), то под $M(r; u)$ будем подразумевать величину

$$M(r; u) = \operatorname{ess\,sup}_{S_r \cap \Omega} u, \quad r \in (R_0, R_1),$$

где ограничение функции u на $S_r \cap \Omega$ понимается в смысле следа, а существенная точная верхняя грань в правой части берется по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на сфере S_r .

Вопросы, изучаемые в настоящей работе, ранее исследовались многими авторами (см. [2]–[11]). Нашей целью является нахождение оценок функции $M(\cdot; u)$, учитывающих геометрию множества Ω .

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что $\omega \subset S_1$ – сферическая область и $\lambda = \lambda(\omega)$ – первое собственное значение спектральной задачи

$$\Delta_{S_1} v = -\lambda v \quad \text{в } \omega, \quad v|_{\partial\omega} = 0, \quad (1.4)$$

для оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере. Пусть также $K_\omega = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x/|x| \in \omega\}$ – конус в $\mathbb{R}^n$, порожденный областью ω . Известно, что любое решение задачи

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{в } K_\omega, \quad u \geq 0 \quad \text{в } K_\omega, \quad u|_{\partial K_\omega} = 0, \quad (1.5)$$

отличное от тождественного нуля, допускает оценку

$$M(r; u) \geq Cr^k \quad (1.6)$$

для всех достаточно больших r , где $C > 0$ – некоторая постоянная, а $k \geq 0$ – вещественное число такое, что функция $m(r) = r^k$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$m'' + \frac{n-1}{r} m' = \frac{\lambda(\omega)}{r^2} m.$$

Неравенство (1.6) является точным. Действительно, переходя к полярным координатам [12], получим

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S_1},$$

где r – полярный радиус, а Δ_{S_1} – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере, зависящий только от угловых переменных $\vartheta = (\vartheta^1, \dots, \vartheta^{n-1})$. Таким образом, полагая

$$u(r, \vartheta) = r^k v(\vartheta),$$

где $v \geq 0$ – первая собственная функция задачи (1.4), будем иметь решение задачи (1.5), на котором достигается равенство в формуле (1.6).

Из оценки (1.6) вытекает классическая теорема Фрагмена–Линделёфа для угловых областей [11]. Эту оценку несложно обобщить в случае произвольного непустого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Именно, пусть $\lambda = \lambda(S_r \cap \Omega)$ – первое собственное значение спектральной задачи

$$\Delta_{S_r} v = -\lambda v \quad \text{в } S_r \cap \Omega, \quad v|_{\partial(S_r \cap \Omega)} = 0,$$

где Δ_{S_r} – оператор Лапласа–Бельтрами на сфере S_r , $S_r \cap \Omega \neq \emptyset$. Тогда любое решение задачи

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u \geq 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

отличное от тождественного нуля, допускает оценку

$$M(r; u) \geq m(r) \tag{1.7}$$

для всех достаточно больших r , где m – положительное, монотонно не убывающее решение уравнения

$$m'' + \frac{n-1}{r}m' = \lambda(S_r \cap \Omega)m, \tag{1.8}$$

определенное в некоторой окрестности бесконечности.

Заметим, что из условия $u \not\equiv 0$ следует, что $S_r \cap \Omega \neq \emptyset$ для всех достаточно больших r .

Докажем оценку (1.7). Продолжая функцию u нулем за пределы множества Ω , ввиду [4, лемма 4.2] получим

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n.$$

Из принципа максимума вытекает, что

$$M(r; u) = \operatorname{ess\,sup}_{B_r} u,$$

поэтому $M(\cdot; u)$ монотонно не убывает. Если $M(\cdot; u)$ – постоянная функция в окрестности бесконечности, то в силу строгого принципа максимума найдется вещественное число $m_0 > 0$ такое, что $u = m_0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Тем самым согласно вариационному принципу $\lambda(S_r \cap \Omega) = 0$ для почти всех $r > 0$ таких, что $S_r \cap \Omega \neq \emptyset$, и в правой части (1.7) можно взять $m \equiv m_0$.

Предположим теперь, что $M(r_*; u) < M(r^*; u)$ для некоторых вещественных чисел $0 < r_* < r^*$, и пусть

$$v(x) = \max\{u(x) - M(r_*; u), 0\}.$$

Учитывая [4, лемма 4.2], получим

$$\Delta v \geq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Обозначим

$$\bar{v}(r) = \left(\frac{1}{|S_1|} \int_{S_1} v^2(r, \vartheta) dS_1(\vartheta) \right)^{1/2},$$

где $|S_1|$ – $(n-1)$ -мерный объем единичной сферы S_1 . Поскольку $v \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то $\bar{v}$ – абсолютно непрерывная функция на каждом компактном промежутке интервала $(0, \infty)$. Согласно определению имеем $\bar{v}(r_*) = 0$ и $\bar{v}(r^*) > 0$, поэтому найдется $r_0 \in (r_*, r^*)$ такое, что

$$\bar{v}(r_0) > 0, \quad \bar{v}'(r_0) > 0. \tag{1.10}$$

Имеем также

$$\bar{v}'(r) = \frac{1}{\bar{v}(r)|S_1|} \int_{S_1} \frac{\partial v(r, \vartheta)}{\partial r} v(r, \vartheta) dS_1(\vartheta) \quad (1.11)$$

для почти всех $r \in [r_0, \infty)$.

Покажем, что $\bar{v}$ является обобщенным решением неравенства

$$\bar{v}'' + \frac{n-1}{r} \bar{v}' \geq \lambda(S_r \cap \Omega) \bar{v}, \quad r \geq r_0.$$

Другими словами,

$$\int_{r_0}^{\infty} \left(-\bar{v}' \psi' + \frac{n-1}{r} \bar{v}' \psi \right) dr \geq \int_{r_0}^{\infty} \lambda(S_r \cap \Omega) \bar{v} \psi dr \quad (1.12)$$

для любой неотрицательной функции $\psi \in W_2^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем, принадлежащим множеству $[r_0, \infty)$.

Действительно, учитывая (1.11), получим

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^{\infty} \left(-\bar{v}' \psi' + \frac{n-1}{r} \bar{v}' \psi \right) dr \\ &= -\frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial v}{\partial r} v \psi' dS_1 dr + \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{n-1}{r} \frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial v}{\partial r} v \psi dS_1 dr \\ &= -\frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} r^{n-1} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{\bar{v}} v \psi \right) dS_1 dr \\ & \quad + \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{1}{\bar{v}} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \psi dS_1 dr - \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\bar{v}'}{\bar{v}^2} v \psi dS_1 dr. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из соотношения (1.11) несложно также увидеть, что

$$\int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\bar{v}'}{\bar{v}^2} v \psi dS_1 dr = \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\psi}{\bar{v}^3} \left(\int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial r} v dS_1 \right)^2 dr.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{1}{\bar{v}} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \psi dS_1 dr - \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\bar{v}'}{\bar{v}^2} v \psi dS_1 dr \\ &= \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \frac{\psi}{\bar{v}^3} \left(\bar{v}^2 \int_{S_1} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 dS_1 - \frac{1}{|S_1|} \left(\int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial r} v dS_1 \right)^2 \right) dr. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского справедлива оценка

$$\bar{v}^2 \int_{S_1} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 dS_1 - \frac{1}{|S_1|} \left(\int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial r} v dS_1 \right)^2 \geq 0, \quad r > r_0,$$

поэтому

$$\frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{1}{\bar{v}} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \psi dS_1 dr - \frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\bar{v}'}{\bar{v}^2} v \psi dS_1 dr \geq 0$$

и (1.13) позволяет утверждать, что

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\infty} \left(-\bar{v}' \psi' + \frac{n-1}{r} \bar{v}' \psi \right) dr \\ \geq -\frac{1}{|S_1|} \int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} r^{n-1} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{\bar{v}} v \psi \right) dS_1 dr. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ввиду (1.9) справедливо интегральное неравенство

$$-\int_{\mathbb{R}^n} Dv D\varphi dx \geq 0$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем. Переходя в последнем неравенстве к многомерным полярным координатам, получим

$$-\int_0^{\infty} \int_{S_1} r^{n-1} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + g^{ij} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^i} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta^j} \right) dS_1 dr \geq 0,$$

где $g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}^i$, g_{kj} – метрический тензор на S_r , записанный в угловых переменных $\vartheta = (\vartheta^1, \dots, \vartheta^{n-1})$. В частности, полагая

$$\varphi = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{\bar{v}} v \psi,$$

получим

$$-\int_{r_0}^{\infty} \int_{S_1} r^{n-1} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-1}} \frac{1}{\bar{v}} v \psi \right) dS_1 dr \geq \int_{r_0}^{\infty} \frac{\psi}{\bar{v}} \int_{S_1} g^{ij} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^i} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^j} dS_1 dr. \quad (1.15)$$

Согласно вариационному принципу

$$\int_{S_1} g^{ij} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^i} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^j} dS_1 = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_r} g^{ij} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^i} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^j} dS_r \geq \frac{\lambda(S_r \cap \Omega)}{r^{n-1}} \int_{S_r} v^2 dS_r, \quad r > r_0,$$

откуда немедленно следует, что

$$\frac{1}{|S_1|} \int_{S_1} g^{ij} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^i} \frac{\partial v}{\partial \vartheta^j} dS_1 \geq \lambda(S_r \cap \Omega) \bar{v}^2, \quad r > r_0.$$

Объединяя последнюю оценку с формулами (1.14) и (1.15), получим (1.12).

Покажем теперь, что

$$\bar{v}(r) > m(r) \quad (1.16)$$

для всех $r > r_0$, где m – решение задачи Коши

$$m'' + \frac{n-1}{r} m' = \lambda(S_r \cap \Omega) m, \quad m(r_0) = \bar{v}(r_0), \quad m'(r_0) = 0.$$

В самом деле, из (1.10) вытекает, что неравенство (1.16) выполнено для всех $r \in (r_0, r_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – некоторое вещественное число. Рассуждая от противного, предположим, что найдется $r_1 \in (r_0, \infty)$ такое, что $\bar{v}(r_1) = m(r_1)$, и

при этом (1.16) справедливо для всех $r \in (r_0, r_1)$. Вычитая из (1.12) интегральное тождество

$$\int_{r_0}^{\infty} \left(-m' \psi' + \frac{n-1}{r} m' \psi \right) dr = \int_{r_0}^{\infty} \lambda(S_r \cap \Omega) m \psi dr,$$

получим

$$\int_{r_0}^{\infty} \left(-(\bar{v} - m)' \psi' + \frac{n-1}{r} (\bar{v} - m)' \psi \right) dr \geq \int_{r_0}^{\infty} \lambda(S_r \cap \Omega) (\bar{v} - m) \psi dr$$

для любой неотрицательной функции $\psi \in W_2^1(\mathbb{R})$ с компактным носителем, принадлежащим множеству $[r_0, \infty)$. Полагая в последнем неравенстве

$$\psi(r) = \begin{cases} r^{n-1}(\bar{v}(r) - m(r)), & r \in (r_0, r_1), \\ 0, & r \notin (r_0, r_1), \end{cases}$$

приходим к выводу, что

$$\int_{r_0}^{r_1} r^{n-1} |(\bar{v} - m)'|^2 dr \leq 0,$$

откуда немедленно следует, что $\bar{v}(r) = m(r)$ для всех $r \in (r_0, r_1)$. Полученное противоречие доказывает оценку (1.16), которая, в свою очередь, влечет за собой (1.7).

Если $\Omega = K_\omega$, то оценка (1.7) превращается в (1.6), так как в этом случае любое положительное монотонно не убывающее решение уравнения (1.8) при $r \rightarrow \infty$ эквивалентно правой части формулы (1.6).

Возникает естественный вопрос: справедливы ли аналогичные оценки в случае неравенств общего вида (1.1), когда продемонстрированная выше техника сферических средних, очевидно, неприменима? Ответом на него служат теоремы 2.1, 2.3, доказанные в настоящей статье.

§ 2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $a > p - 2$ и $\zeta > 1$ – некоторые вещественные числа, и пусть $\Lambda: [R_0, R_1] \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция, причем $\Lambda = 0$ на множестве $[R_0, \zeta R_0] \cap [R_0, R_1]$ и

$$\Lambda(r) \leq \inf_{t \in (r/\zeta, r\zeta), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \quad (2.1)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$. Допустим, далее, что u – неотрицательное решение задачи (1.1), (1.2) такое, что $M(\cdot; u)$ – монотонно неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) и при этом

$$M(R_0 + 0; u) > 0. \quad (2.2)$$

Тогда найдется постоянная $\gamma > 0$, зависящая только от n, p, a, ζ, C_1, C_2 , такая, что на промежутке $[R_0, R_1]$ существует решение задачи Коши

$$\frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) = \gamma \Lambda(r) |m|^{p-2} m, \quad (2.3)$$

$$m(R_0) = M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \quad (2.4)$$

удовлетворяющее оценке

$$M(r; u) \geq m(r) > 0 \quad (2.5)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 2.2. В предположениях теоремы 2.1 найдется постоянная $\gamma > 0$, зависящая только от n, p, a, ζ, C_1, C_2 , такая, что

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \int_{R_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \quad (2.6)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $a > p - 2$, $\nu > 1$, $0 < \delta < 1$, $\theta > 1 + \delta$ и $0 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ – некоторые вещественные числа, а $\Lambda: [R_0, R_1] \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция, причем $\Lambda = 0$ на множестве $([R_0, \theta R_0/(1 - \delta)] \cup [R_0, R_0/\sigma_4]) \cap [R_0, R_1)$ и

$$\Lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu^p(x; \delta, \nu) + r^{-n} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \quad (2.7)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$. Допустим, далее, что u – неотрицательное решение задачи (1.1), (1.2) такое, что $M(\cdot; u)$ – монотонно неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) и при этом справедливо соотношение (2.2). Тогда найдется постоянная $\gamma > 0$, зависящая только от $n, p, a, \nu, \delta, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, такая, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение задачи Коши (2.3), (2.4), удовлетворяющее оценке (2.5) для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 2.4. В предположениях теоремы 2.3 найдется постоянная $\gamma > 0$, зависящая только от $n, p, a, \nu, \delta, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, такая, что для всех $r \in (R_0, R_1)$ имеет место неравенство (2.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В случае $n > p$ в теоремах 2.1–2.4 можно взять $a = n - 2$. Таким образом, в левой части (2.3) будем иметь радиальный p -оператор Лапласа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть теорема 2.2 уже доказана. Обозначим $m_0(r) = M(R_0 + 0; u)$ и

$$m_i(r) = M(R_0 + 0; u) + \int_{R_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) m_{i-1}^{p-1}(\xi) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt$$

для всех $i = 1, 2, \dots$. Функции $m_i: [R_0, R_1] \rightarrow (0, \infty)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, являются измеримыми. При этом согласно теореме 2.2 справедливы неравенства $m_{i-1}(r) \leq m_i(r) \leq M(r; u)$ для всех $r \in [R_0, R_1]$, $i = 1, 2, \dots$. Тем самым существует измеримая функция $m: [R_0, R_1] \rightarrow (0, \infty)$ такая, что $m_i \rightarrow m$ при $i \rightarrow \infty$ всюду на промежутке $[R_0, R_1]$.

Из теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$m(r) = M(R_0 + 0; u) + \int_{R_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) m^{p-1}(\xi) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt$$

для всех $r \in [R_0, R_1]$, откуда непосредственным дифференцированием получим (2.3) и (2.4). Несложно увидеть, что будет выполнена оценка (2.5). Теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3 аналогично доказательству теоремы 2.1. Единственное отличие состоит в том, что вместо теоремы 2.2 теперь надлежит воспользоваться теоремой 2.4.

Теоремы 2.2, 2.4 будут доказаны в § 5, 3 соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $u \geq 0$ является решением неравенства

$$\operatorname{div} A(x, Du) \geq 0 \quad \text{в } B_{R_1} \cap \Omega, \quad (2.8)$$

удовлетворяющим условию

$$u|_{B_{R_1} \cap \partial\Omega} = 0, \quad (2.9)$$

то $M(\cdot; u)$ будет монотонно неубывающей функцией ввиду принципа максимума. В этом случае в теоремах 2.3, 2.4 ограничение $\delta < 1$, налагаемое на вещественное число δ , является несущественным. Достаточно также потребовать, чтобы функция Λ обращалась в нуль на множестве $[R_0, \theta R_0] \cap [R_0, R_1]$ и вместо (2.7) было выполнено условие

$$\Lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu^p(x; \delta, \nu) + r^{-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_1}) \quad (2.10)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Функция u называется решением (2.8), если $u \in W_p^1(B_r \cap \Omega) \cap L_\infty(B_r \cap \Omega)$ и $A(x, Du) \in L_{p/(p-1)}(B_r \cap \Omega)$ для любого вещественного числа $r \in (R_0, R_1)$, и при этом

$$-\int_{B_{R_1} \cap \Omega} A(x, Du) D\varphi \, dx \geq 0$$

для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(B_{R_1} \cap \Omega)$. Аналогично, условие (2.9) означает, что $\psi u \in \dot{W}_p^1(B_{R_1} \cap \Omega)$ для любой функции $\psi \in C_0^\infty(B_{R_1})$.

В случае $R_1 = \infty$ соотношения (2.8) и (2.9) принимают соответственно вид

$$\operatorname{div} A(x, Du) \geq 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.12)$$

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $\Lambda: [R_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция такая, что

$$\int_{R_0}^\infty \min\{(t\Lambda(t))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(t)\} \, dt = \infty, \quad (2.13)$$

и при этом для всех $r \in (R_0, \infty)$ выполнено неравенство (2.1), где $\zeta > 1$ – некоторое вещественное число (неравенство (2.10), где $\nu > 1$, $0 < \delta$, $\theta > 1 + \delta$ и $0 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ – некоторые вещественные числа). Тогда любое неотрицательное решение задачи (2.11), (2.12), отличное от тождественного нуля, допускает оценку

$$M(r; u) \geq \exp\left(C \int_{R_0}^r \min\{(t\Lambda(t))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(t)\} \, dt\right) \quad (2.14)$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $C > 0$ зависит только от n , p , ζ , C_1 , C_2 (только от n , p , ν , δ , θ , σ_1 , σ_2 , C_1 , C_2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было замечено ранее, ввиду принципа максимума функция $M(\cdot; u)$ монотонно не убывает на промежутке (R_0, ∞) . Не ограничивая общности, будем считать, что имеет место (2.2). В противном случае заменим R_0 на превосходящее его вещественное число, для которого это условие выполнено. Ввиду того, что $u \not\equiv 0$, такое число, очевидно, существует.

Возьмем $r_0 \in [R_0, \infty)$ и $\sigma \in (1, \infty)$ такие, что $r_0 \geq \zeta R_0$ и $\sigma < \zeta$ (такие, что $r_0 \geq \theta R_0$, $(1 + \delta)\sigma < \theta$ и $\sigma_2 \sigma^2 < \sigma_1$). Обозначим

$$\tilde{\Lambda}(r) = \sup_{t \in (r/\sigma, r\sigma) \cap [R_0, \infty)} \chi_{(r_0, \infty)}(t) \Lambda(t)$$

в случае, когда в условиях теоремы идет речь о неравенстве (2.1), либо

$$\tilde{\Lambda}(r) = \sigma^{-n} \sup_{t \in (r/\sigma, r\sigma) \cap [R_0, \infty)} \chi_{(r_0, \infty)}(t) \Lambda(t)$$

в случае, когда речь идет о неравенстве (2.10), где $\chi_{(r_0, \infty)}$ – характеристическая функция интервала (r_0, ∞) , т. е.

$$\chi_{(r_0, \infty)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (r_0, \infty), \\ 0, & t \notin (r_0, \infty). \end{cases}$$

Несложно увидеть, что для всех $r \in (R_0, \infty)$ величина $\tilde{\Lambda}(r)$ не превосходит правой части выражения (2.1), где вещественное число ζ заменено на ζ/σ (выражения (2.10), где вещественные числа θ , σ_1 и σ_2 заменены соответственно на θ/σ , σ_1/σ и $\sigma_2\sigma$). Таким образом, полагая $a = [p] - 1$ в теореме 2.1 (в теореме 2.3), где $[p]$ – целая часть p , получим, что для некоторой постоянной $\gamma > 0$, зависящей только от n , p , ζ , C_1 , C_2 (только от n , p , ν , δ , θ , σ_1 , σ_2 , C_1 , C_2), на промежутке $[R_0, \infty)$ существует решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) &= \gamma \tilde{\Lambda}(r) |m|^{p-2} m, \\ m(R_0) &= M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \end{aligned}$$

удовлетворяющее для всех $r \in (R_0, \infty)$ неравенству (2.5). Решение этой задачи монотонно не убывает, а функция $\tilde{m}(x) = m(|x|)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(|D\tilde{m}|^{p-2} D\tilde{m}) = \gamma \tilde{\Lambda}(|x|) \tilde{m}^{p-1} \quad \text{в } \mathbb{R}^{2+a} \setminus \overline{B_{R_0}}.$$

Тем самым согласно [13, теорема 2.4] будем иметь

$$M(r; \tilde{m}) \geq \exp \left(\tilde{C} \int_{r_0}^r \min \{ (t\Lambda(t))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(t) \} dt \right) \quad (2.15)$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $\tilde{C} > 0$ зависит только от n , p , ζ , C_1 , C_2 (только от n , p , ν , δ , θ , σ_1 , σ_2 , C_1 , C_2).

Оценка (2.15) влечет оценку (2.14), поскольку в силу (2.5) справедливо неравенство $M(r; u) \geq M(r; \tilde{m})$ для всех $r \in [R_0, \infty)$, при этом ввиду условия (2.13)

$$\int_{r_0}^r \min \{ (t\Lambda(t))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(t) \} dt \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^r \min \{ (t\Lambda(t))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(t) \} dt$$

для всех достаточно больших r . Теорема доказана.

Приведенные выше результаты позволяют получать нелинейные аналоги теоремы Фрагмена–Линделёфа, которую также называют принципом максимума для неограниченных областей.

Функция u является решением уравнения

$$\operatorname{div} A(x, Du) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.16)$$

если $u \in W_p^1(B_r \cap \Omega) \cap L_\infty(B_r \cap \Omega)$ и $A(x, Du) \in L_{p/(p-1)}(B_r \cap \Omega)$ для любого вещественного числа $r \in (R_0, \infty)$, и при этом

$$-\int_{\Omega} A(x, Du) D\varphi \, dx = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Говорим, что $u \leq \alpha$ на $\partial\Omega$, где α – некоторое вещественное число, если $\psi \max\{u - \alpha, 0\} \in \dot{W}_p^1(\Omega)$ для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В свою очередь, условие

$$|u|_{\partial\Omega} \leq \alpha \quad (2.17)$$

означает, что на $\partial\Omega$ одновременно выполнены два неравенства $u \leq \alpha$ и $-u \leq \alpha$.

ТЕОРЕМА 2.6. *В предположениях теоремы 2.5 для любого решения уравнения (2.16), удовлетворяющего условию (2.17), справедлива альтернатива: либо $|u| \leq \alpha$ почти всюду в Ω , либо*

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; |u|)}{\int_{R_0}^r \min\{(t\Lambda(t))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(t)\} dt} \geq C, \quad (2.18)$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от n, p, ζ, C_1, C_2 (только от $n, p, \nu, \delta, \theta, \sigma_1, \sigma_2, C_1, C_2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{mes}\{x \in \Omega: |u(x)| > \alpha\} \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{mes}\{x \in \Omega: u(x) > \alpha\} \neq 0$, в противном случае заменим u на $-u$. Хорошо известно [1], что $u \in C(\Omega)$, поэтому $\Omega_\alpha = \{x \in \Omega: u(x) > \alpha\}$ – непустое открытое множество, а функция $u_\alpha = u - \alpha$ является решением задачи

$$\operatorname{div} A(x, Du_\alpha) = 0 \quad \text{в } \Omega_\alpha, \quad u_\alpha|_{\partial\Omega_\alpha} = 0,$$

положительным на множестве Ω_α . Правая часть неравенства (2.1) (неравенства (2.10)) при замене Ω на Ω_α , очевидно, не уменьшается. Таким образом, применяя теорему 2.5, получим

$$M(r; u_\alpha) \geq \exp\left(C \int_{R_0}^r \min\{(t\Lambda(t))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(t)\} dt\right)$$

для всех достаточно больших r , где постоянная $C > 0$ зависит только от n, p, ζ, C_1, C_2 (только от $n, p, \nu, \delta, \theta, \sigma_1, \sigma_2, C_1, C_2$), откуда, в свою очередь, будем иметь (2.18).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть $\Omega \setminus B_{r_0} \subset \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n: |x_{n-1}| \leq \psi(x_n), x_n \geq r_0\}$, где $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число, а $\psi: [r_0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \rightarrow$*

непрерывная, монотонная в окрестности бесконечности функция такая, что $\psi(t) \leq t$ для всех $t \in [r_0, \infty)$,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{osc}_{(r/2, 2r)} \psi}{\psi(r)} < \infty, \quad (2.19)$$

и при этом

$$\int_{r_0}^{\infty} \min \left\{ \frac{t^{1/(p-1)}}{\psi^{p/(p-1)}(t)}, \frac{1}{\psi(t)} \right\} dt = \infty.$$

Тогда для любого решения задачи (2.16), (2.17) справедлива альтернатива: либо $|u| \leq \alpha$ почти всюду в Ω , либо

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; |u|)}{\int_{r_0}^r \min \left\{ \frac{t^{1/(p-1)}}{\psi^{p/(p-1)}(t)}, \frac{1}{\psi(t)} \right\} dt} \geq C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что K – компактное подмножество ограниченного открытого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$. Любая функция $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ удовлетворяет неравенству Фридрихса

$$\int_{\omega} |D\varphi|^p dx \geq k_1 (\text{diam } \omega)^{-p} \int_{\omega} |\varphi|^p dx,$$

где постоянная $k_1 > 0$ зависит только от p , оптимизируя которое по всем $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, равным единице в окрестности K , получим

$$\text{cap}(K, \omega) \geq k_1 (\text{diam } \omega)^{-p} \text{mes } K. \quad (2.20)$$

Несложно увидеть, что

$$\text{mes } B_{2\psi(|x|)}^x \setminus \Omega \geq k_2 \psi^n(|x|)$$

для всех x из пересечения множества Ω с некоторой окрестностью бесконечности, где постоянная $k_2 > 0$ зависит только от n . Тем самым, полагая $\omega = B_{4\psi(|x|)}^x$ и $K = \overline{B_{2\psi(|x|)}^x} \setminus \Omega$ в (2.20), будем иметь

$$\text{cap}(\overline{B_{2\psi(|x|)}^x} \setminus \Omega, B_{4\psi(|x|)}^x) \geq k_3 \psi^{n-p}(|x|)$$

для всех x из пересечения множества Ω с некоторой окрестностью бесконечности, где $k_3 = 8^{-p} k_1 k_2$, откуда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$\mu(x; 3, 2) \geq \frac{k_4}{\psi(|x|)}$$

для всех x из пересечения множества Ω с некоторой окрестностью бесконечности, где постоянная $k_4 > 0$ зависит только от n, p . Согласно (2.19) существует константа $k_5 > 0$ такая, что

$$\inf_{x \in \Omega_{r/5, 5r}} \mu^p(x; 3, 2) \geq k_5 \psi^{-p}(r)$$

для всех достаточно больших r , поэтому для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 2.6.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $\Omega \setminus B_{r_0} \subset \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_{n-1}| \leq x_n^k, x_n \geq r_0\}$, где $r_0 > 0$ и $k < 1$ – некоторые вещественные числа. В соответствии со следствием 2.1 для любого решения задачи (2.16), (2.17) справедлива альтернатива: либо $|u| \leq \alpha$ почти всюду в Ω , либо

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; |u|)}{r^{1-k}} \geq C, \quad (2.21)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от u .

Если $\Omega \setminus B_{r_0} \subset \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_{n-1}| \leq x_n \ln^l x_n, x_n \geq r_0\}$ для некоторых вещественных чисел $r_0 > 1$ и $l \leq 0$, то формулу (2.21) надо заменить на формулу

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; |u|)}{\ln^{1-l} r} \geq C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от u .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| \leq \psi(x_n), x_n \geq r_0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, где $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число, а $\psi : [r_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – непрерывная, монотонная в окрестности бесконечности функция такая, что $\psi(t) \leq t$ для всех $t \in [r_0, \infty)$, выполнено условие (2.19) и при этом

$$\int_{r_0}^{\infty} \left(\frac{\psi(t)}{t} \right)^{(n-1)/(p-1)} \frac{dt}{t} = \infty. \quad (2.22)$$

Тогда для любого решения задачи (2.16), (2.17) справедлива альтернатива: либо $|u| \leq \alpha$ почти всюду в Ω , либо

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; |u|)}{\int_{r_0}^r \left(\frac{\psi(t)}{t} \right)^{(n-1)/(p-1)} \frac{dt}{t}} \geq C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется постоянная $h_1 > 0$ такая, что

$$\text{mes } B_{r/2} \setminus \Omega \geq h_1 r \psi^{n-1}(r)$$

для всех r , превосходящих некоторое положительное вещественное число. Без ограничения общности можно считать, что этим числом является R_0 . Ввиду неравенства (2.20) существует константа $h_2 > 0$ такая, что

$$\text{cap}(\overline{B_{r/2}} \setminus \Omega, B_r) \geq h_2 r^{1-p} \psi^{n-1}(r)$$

для всех $r > R_0$. Обозначая $\Lambda(r) = h_2 r^{1-n-p} \psi^{n-1}(r)$, получим

$$r^{-n} \text{cap}(\overline{B_{r/2}} \setminus \Omega, B_r) \geq \Lambda(r)$$

для всех $r > R_0$, откуда, учитывая тот факт, что

$$\text{cap}(\overline{B_{r/2}} \setminus \Omega, B_r) \leq \text{cap}(\overline{B_{r/2}}, B_r) \leq h_3 r^{n-p},$$

где постоянная $h_3 > 0$ зависит только от n, p , будем иметь

$$\Lambda(r) \leq h_3 r^{-p}$$

для всех $r > R_0$. Последнее соотношение влечет оценку

$$\min\{(r\Lambda(r))^{1/(p-1)}, \Lambda^{1/p}(r)\} \geq h_4(r\Lambda(r))^{1/(p-1)}$$

для всех $r > R_0$, где постоянная $h_4 > 0$ зависит только от n, p . Таким образом, условие (2.13) эквивалентно условию

$$\int_{R_0}^{\infty} (t\Lambda(t))^{1/(p-1)} dt = \infty,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно (2.22). Доказательство завершается применением теоремы 2.6.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $\{(x', \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: |x'| \leq x_n \ln^l x_n, x_n \geq r_0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, где $r_0 > 1$ и $-(p-1)/(n-1) < l \leq 0$ – некоторые вещественные числа. Согласно следствию 2.2 для любого решения задачи (2.16), (2.17) справедлива альтернатива: либо $|u| \leq \alpha$ почти всюду в Ω , либо

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r; |u|)}{\ln^{l(n-1)/(p-1)+1} r} \geq C,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от u .

В частном случае $l = 0$ мы, очевидно, получим нелинейный аналог классической теоремы Фрагмена–Линделёфа [11].

§ 3. Доказательство теоремы 2.4

Всюду в этом параграфе мы будем подразумевать, что выполнены условия теоремы 2.3. Возьмем вещественное число τ такое, что $1 + \delta < \tau < \theta$.

В соответствии с принципом максимума имеем

$$M(r; u) = \operatorname{ess\,sup}_{B_{R_0, r}} u, \quad r \in (R_0, R_1),$$

откуда, в частности, получим

$$M(r - 0; u) = M(r; u) \quad (3.1)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $R_0 < r_1 < r_2 < R_1$ – некоторые вещественные числа такие, что $r_2 \leq \tau r_1$ и $M(r_1; u) \leq \alpha M(r_2; u) \leq M(r_1 + 0; u)$. Тогда

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq \alpha_1 (r_2 - r_1)^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(r) M(r; u) \quad (3.2)$$

для всех $r \in [r_1/\tau, r_2] \cap (R_0, R_1)$, где постоянная $\alpha_1 > 0$ зависит только от $n, p, \alpha, \nu, \delta, \theta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $R_0 < r_1 < R_1/\tau$ – некоторые вещественные числа такие, что $\alpha M(\tau r_1; u) \leq M(r_1 + 0; u)$. Тогда

$$M(\tau r_1; u) - M(r_1; u) \geq \alpha_2 r_1^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(r) M(r; u) \quad (3.3)$$

для любого $r \in [r_1/\tau, \tau r_1] \cap (R_0, R_1)$, где постоянная $\alpha_2 > 0$ зависит только от $n, p, \alpha, \nu, \delta, \theta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

Доказательства лемм 3.1, 3.2 приведены в § 4.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что $0 < \alpha < 1$, $R_0 < r_1 < r_2 < R_1$, и при этом $\alpha M(r_2; u) \leq M(r_1 + 0; u)$ и $\tau r_1 \leq r_2$. Тогда*

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq \alpha_3 \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt, \quad (3.4)$$

где постоянная $\alpha_3 > 0$ зависит только от $n, p, a, \alpha, \nu, \delta, \theta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $1 < p < 2$. Возьмем $\lambda \in (0, \infty)$ такое, что $a - p + 2 - \lambda > 0$. В соответствии с неравенством Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi &\leq \left(\int_{r_1}^t \xi^{(\lambda+p-2)/(2-p)} d\xi \right)^{2-p} \\ &\quad \times \left(\int_{r_1}^t \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \right)^{p-1} \end{aligned}$$

для всех $t \in (r_1, r_2)$, откуда ввиду того, что

$$\int_{r_1}^t \xi^{(\lambda+p-2)/(2-p)} d\xi \leq \frac{(2-p)t^{\lambda/(2-p)}}{\lambda},$$

немедленно получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ \leq \alpha_4 t^{\lambda/(p-1)} \int_{r_1}^t \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \end{aligned}$$

для всех $t \in (r_1, r_2)$, где $\alpha_4 = ((2-p)/\lambda)^{(2-p)/(p-1)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ \leq \alpha_4 \int_{r_1}^{r_2} t^{(\lambda-a-1)/(p-1)} \int_{r_1}^t \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi dt. \end{aligned}$$

В то же время, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} t^{(\lambda-a-1)/(p-1)} \int_{r_1}^t \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi dt \\ = \frac{1}{\varkappa} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial(r_2^{-\varkappa} - t^{-\varkappa})}{\partial t} \int_{r_1}^t \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi dt \\ = \frac{1}{\varkappa} \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \left(\frac{\xi}{r_2} \right)^{\varkappa} \right) \xi^{1/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi, \end{aligned}$$

где $\varkappa = (a - p + 2 - \lambda)/(p - 1) > 0$, поэтому можно утверждать, что

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq \frac{\alpha_4}{\varkappa} \int_{r_1}^{r_2} \left(1 - \left(\frac{\xi}{r_2} \right)^{\varkappa} \right) \xi^{1/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \\ & \leq \frac{\alpha_4}{\varkappa} \int_{r_1}^{r_2} \xi^{1/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим через k максимальное натуральное число такое, для которого $\tau^k r_1 \leq r_2$. Положим $t_i = \tau^{-i} r_2$, $i = 0, \dots, k$, и $t_{k+1} = r_1$.

Для всякого $i \in \{1, \dots, k\}$ найдется $\xi_i \in (t_{i+1}, t_{i-1})$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \xi^{1/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi & \leq (t_{i-1} - t_{i+1}) \xi_i^{1/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_i) M(\xi_i; u) \\ & \leq \tau^{p/(p-1)} t_i^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_i) M(\xi_i; u). \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.2 получим

$$M(t_{i-1}; u) - M(t_i; u) \geq \alpha_2 t_i^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_i) M(\xi_i; u), \quad (3.6)$$

где $\alpha_2 > 0$ – константа из формулы (3.3). Тем самым имеем

$$M(t_{i-1}; u) - M(t_i; u) \geq \alpha_5 \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \xi^{1/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi,$$

где $\alpha_5 = \tau^{-p/(p-1)} \alpha_2$. Суммируя последнее неравенство по всем $i = 1, \dots, k$, получим

$$M(r_2; u) - M(t_k; u) \geq \alpha_5 \int_{r_1}^{r_2} \xi^{1/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi.$$

Последняя оценка ввиду (3.5) и того факта, что $M(r_1; u) \leq M(t_k; u)$, немедленно влечет оценку (3.4).

Пусть теперь $p \geq 2$. Несложно увидеть, что

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \frac{1}{t^{(1+a)/(p-1)}} \left(\int_{r_1}^{t_{i-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt, \end{aligned}$$

где $t_i, i = 0, \dots, k+1$, – вещественные числа, определенные выше, откуда в силу того, что

$$\begin{aligned} & \left(\int_{r_1}^{t_{i-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ & \leq \left(\sum_{j=i}^k \int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ & \leq \sum_{j=i}^k \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

следует соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^k \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \frac{1}{t^{(1+a)/(p-1)}} \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \frac{1}{t^{(1+a)/(p-1)}} \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq 2 \sum_{j=1}^k \int_{t_{j+1}}^{r_2} \frac{1}{t^{(1+a)/(p-1)}} \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt, \end{aligned}$$

объединяя которое с очевидным неравенством

$$\int_{t_{j+1}}^{r_2} \frac{dt}{t^{(1+a)/(p-1)}} = - \frac{(p-1)t^{-(a-p+2)/(p-1)}}{a-p+2} \Big|_{t_{j+1}}^{r_2} \leq \frac{(p-1)t_{j+1}^{-(a-p+2)/(p-1)}}{a-p+2},$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq \frac{2(p-1)}{a-p+2} \sum_{j=1}^k t_{j+1}^{-(a-p+2)/(p-1)} \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ существует $\xi_j \in (t_{j+1}, t_{j-1})$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi & \leq (t_{j-1} - t_{j+1}) \xi_j^{1+a} \Lambda(\xi_j) M^{p-1}(\xi_j; u) \\ & \leq \tau^{2+a} t_j^{2+a} \Lambda(\xi_j) M^{p-1}(\xi_j; u). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, используя лемму 3.2, получим

$$\begin{aligned} M(t_{j-1}; u) - M(t_j; u) & \geq \alpha_2 t_j^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_j) M(\xi_j; u) \\ & \geq \frac{\alpha_2 t_j^{-(a-p+2)/(p-1)}}{\tau^{(2+a)/(p-1)}} \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

для всех $j \in \{1, \dots, k\}$, где $\alpha_2 > 0$ – константа из формулы (3.3), откуда согласно (3.7) находим

$$M(r_2; u) - M(t_k; u) \geq \alpha_6 \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_1}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt,$$

где $\alpha_6 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая только от $n, p, a, \alpha, \nu, \delta, \theta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

Наконец, объединяя последнюю оценку с неравенством $M(r_1; u) \leq M(t_k; u)$, завершаем доказательство.

ЛЕММА 3.4. *Предположим, что $0 < \alpha < 1$, $R_0 < r_1 < r_2 < R_1$, при этом $\alpha M(r_2; u) \leq M(r_1 + 0; u)$ и $\tau r_1 \leq r_2$. Тогда*

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq \alpha_7 r_2^{-(a-p+2)/(p-1)} \left(\int_{r_1}^{r_2} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}, \quad (3.10)$$

где постоянная $\alpha_7 > 0$ зависит только от $n, p, a, \alpha, \nu, \delta, \theta, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $1 < p < 2$. Возьмем $\lambda \in (0, \infty)$ такое, что $a - p + 2 - \lambda > 0$. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi &\leq \left(\int_{r_1}^{r_2} \xi^{(\lambda+p-2)/(2-p)} d\xi \right)^{2-p} \\ &\quad \times \left(\int_{r_1}^{r_2} \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \right)^{p-1}, \end{aligned}$$

откуда ввиду того, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \xi^{(\lambda+p-2)/(2-p)} d\xi \leq \frac{(2-p)r_2^{\lambda/(2-p)}}{\lambda},$$

следует оценка

$$\begin{aligned} r_2^{-(a-p+2-\lambda)/(p-1)} \int_{r_1}^{r_2} \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \\ \geq \alpha_8 r_2^{-(a-p+2)/(p-1)} \left(\int_{r_1}^{r_2} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

где постоянная $\alpha_8 > 0$ зависит только от p, λ .

Как и в доказательстве леммы 3.3, обозначим через k максимальное натуральное число такое, что $\tau^k r_1 \leq r_2$. Положим также $t_i = \tau^{-i} r_2$, $i = 0, \dots, k$, и $t_{k+1} = r_1$. Для всякого $i \in \{1, \dots, k\}$ существует $\xi_i \in (t_{i+1}, t_{i-1})$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \\ \leq (t_{i-1} - t_{i+1}) \xi_i^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_i) M(\xi_i; u) \\ \leq \tau^{(2+a-\lambda)/(p-1)} t_i^{(2+a-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_i) M(\xi_i; u). \end{aligned}$$

Тем самым, получим

$$\begin{aligned}
 & r_2^{-(a-p+2-\lambda)/(p-1)} \int_{r_1}^{r_2} \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \\
 & \leq \sum_{i=1}^k r_2^{-(a-p+2-\lambda)/(p-1)} \int_{t_{i+1}}^{t_{i-1}} \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi \\
 & \leq \tau^{(2+a-\lambda)/(p-1)} \sum_{i=1}^k r_2^{-(a-p+2-\lambda)/(p-1)} t_i^{(2+a-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_i) M(\xi_i; u) \\
 & \leq \tau^{(2+a-\lambda)/(p-1)} \sum_{i=1}^k t_i^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_i) M(\xi_i; u).
 \end{aligned}$$

В силу леммы 3.2 для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ снова будет справедливо неравенство (3.6), поэтому можно утверждать, что

$$\begin{aligned}
 M(r_2; u) - M(t_k; u) & \geq \alpha_2 \tau^{-(2+a-\lambda)/(p-1)} r_2^{-(a-p+2-\lambda)/(p-1)} \\
 & \quad \times \int_{r_1}^{r_2} \xi^{(a-p+3-\lambda)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi) M(\xi; u) d\xi,
 \end{aligned}$$

где $\alpha_2 > 0$ – константа из формулы (3.3). Последняя оценка согласно (3.11) и тому факту, что $M(r_1; u) \leq M(t_k; u)$, влечет оценку (3.10).

Пусть теперь $p \geq 2$; тогда

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{r_1}^{r_2} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} & \leq \left(\sum_{j=1}^k \int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\
 & \leq \sum_{j=1}^k \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $t_j, j = 0, \dots, k+1$, – вещественные числа, определенные выше.

Для каждого $j \in \{1, \dots, k\}$ существует $\xi_j \in (t_{j+1}, t_{j-1})$ такое, что выполнено соотношение (3.8), а значит, в соответствии с леммой 3.2 – и соотношение (3.9). Суммируя (3.9) по всем $j \in \{1, \dots, k\}$, находим

$$\begin{aligned}
 & M(r_2; u) - M(t_k; u) \\
 & \geq \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_2 t_j^{-(a-p+2)/(p-1)}}{\tau^{(2+a)/(p-1)}} \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\
 & \geq \frac{\alpha_2 r_2^{-(a-p+2)/(p-1)}}{\tau^{(2+a)/(p-1)}} \sum_{j=1}^k \left(\int_{t_{j+1}}^{t_{j-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)},
 \end{aligned}$$

откуда ввиду (3.12) имеем

$$M(r_2; u) - M(t_k; u) \geq \frac{\alpha_2 r_2^{-(a-p+2)/(p-1)}}{\tau^{(2+a)/(p-1)}} \left(\int_{r_1}^{r_2} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}.$$

Таким образом, для завершения доказательства остается воспользоваться неравенством $M(r_1; u) \leq M(t_k; u)$. Лемма доказана.

Далее всюду в этом параграфе будем считать, что

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \tau}, \quad \alpha = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2^{p/(p-1)}}, \frac{(a - p + 2)(\tau - 1)}{(p - 1)4^{(p+1)/(p-1)+1}\tau} \right\}.$$

Положим также

$$\gamma = (\min\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\})^{p-1},$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_2 \alpha, & \gamma_2 &= \frac{\alpha_1 \tau^{-(1+a)/(p-1)}}{2^{1/(p-1)}}, & \gamma_3 &= \frac{\alpha_7 (a - p + 2)}{2^{p/(p-1)} (p - 1)}, \\ \gamma_4 &= \frac{\varepsilon}{2^{p/(p-1)} \alpha}, & \gamma_5 &= \frac{\alpha_3}{2^{p/(p-1)}}, \end{aligned}$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_7$ – постоянные в леммах 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, соответствующие определенному выше значению α .

ЛЕММА 3.5. Пусть $R_0 < r_1 < r_0 < R_1$ – некоторые вещественные числа такие, что $\tau r_1 \leq r_0$, $M(r_1; u) \leq \alpha M(r_0; u) \leq M(r_1 + 0; u)$ и

$$M(r_1; u) \geq \int_{R_0}^{r_1} \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt. \quad (3.13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) &\geq \frac{(\tau - 1) r_1^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{p/(p-1)} \tau \alpha} \\ &\quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $r_* = \max\{R_0, r_1/\tau\}$. Несложно увидеть, что имеет место хотя бы одно из следующих двух соотношений:

$$\int_{r_*}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi, \quad (3.15)$$

$$\int_{R_0}^{r_*} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi. \quad (3.16)$$

Пусть справедливо (3.15). Найдется $\xi_* \in (r_*, r_1)$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{r_*}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi &\leq (r_1 - r_*) \xi_*^{1+a} \Lambda(\xi_*) M^{p-1}(\xi_*; u) \\ &\leq r_1^{2+a} \Lambda(\xi_*) M^{p-1}(\xi_*; u). \end{aligned}$$

С другой стороны, используя лемму 3.2, получим

$$M(\tau r_1; u) - M(r_1; u) \geq \alpha_2 r_1^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_*) M(\xi_*; u),$$

где $\alpha_2 > 0$ – константа из формулы (3.3), поэтому

$$M(\tau r_1; u) - M(r_1; u) \geq \alpha_2 r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} \left(\int_{r_*}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}.$$

Тем самым, учитывая (3.15), а также неравенство $M(r_0; u) \geq M(\tau r_1; u)$, приходим к выводу, что

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\alpha_2 r_1^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{1/(p-1)}} \left(\int_{R_0}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)},$$

откуда немедленно следует (3.14).

Предположим теперь, что (3.15) не выполнено. Тогда $r_* = r_1/\tau > R_0$ и при этом имеет место (3.16). Условие (3.13) влечет за собой оценку

$$\begin{aligned} M(r_1; u) &\geq \int_{r_*}^{r_1} \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^{r_*} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ &\geq (r_1 - r_*) r_1^{-(1+a)/(p-1)} \left(\gamma \int_{R_0}^{r_*} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} \left(\gamma \int_{R_0}^{r_*} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}, \end{aligned}$$

которая согласно (3.16) и тому факту, что

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) M(r_1; u) \geq \frac{1}{2\alpha} M(r_1; u), \quad (3.17)$$

позволяет завершить доказательство.

ЛЕММА 3.6. Пусть $R_0 < r_1 < r_0 < R_1$ – некоторые вещественные числа такие, что $M(r_1; u) \leq \alpha M(r_0; u) \leq M(r_1 + 0; u)$, $\tau r_1 \geq r_0$, и при этом

$$M(r; u) \geq \int_{R_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt$$

для всех $r \in (R_0, r_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) &\geq \frac{p-1}{a-p+2} (r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)}) \\ &\quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через N минимальное натуральное число такое, что $\alpha^N M(r_1; u) \leq M(R_0 + 0; u)$. Доказательство будем вести индукцией по N .

Рассмотрим случай $N = 1$. Очевидно, будет выполнено по крайней мере одно из следующих двух неравенств:

$$\int_{r_1}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi, \quad (3.19)$$

$$\int_{R_0}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi. \quad (3.20)$$

Пусть справедливо (3.19). Найдется $\xi_* \in (r_1, r_0)$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi &\leq (r_0 - r_1) \xi_*^{1+a} \Lambda(\xi_*) M^{p-1}(\xi_*; u) \\ &\leq \tau^{1+a} (r_0 - r_1) r_1^{1+a} \Lambda(\xi_*) M^{p-1}(\xi_*; u), \end{aligned}$$

откуда ввиду соотношения

$$(r_0 - r_1) r_1^{-(1+a)/(p-1)} \geq \frac{p-1}{a-p+2} (r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)}) \quad (3.21)$$

получим

$$\begin{aligned} (r_0 - r_1)^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_*) M(\xi_*; u) \\ \geq \frac{\tau^{-(1+a)/(p-1)} (p-1)}{a-p+2} (r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)}) \\ \times \left(\int_{r_1}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Поскольку согласно лемме 3.1

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \alpha_1 (r_0 - r_1)^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_*) M(\xi_*; u),$$

где $\alpha_1 > 0$ – константа из формулы (3.2), оценка (3.22) позволяет утверждать, что

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) \\ \geq \frac{\alpha_1 \tau^{-(1+a)/(p-1)} (p-1)}{a-p+2} (r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)}) \\ \times \left(\int_{r_1}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Объединяя последнее неравенство и (3.19), получим

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) \\ \geq \frac{\alpha_1 \tau^{-(1+a)/(p-1)} (p-1)}{2^{1/(p-1)} (a-p+2)} (r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)}) \\ \times \left(\int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}, \end{aligned}$$

откуда, в свою очередь, вытекает (3.18).

Предположим теперь, что выполнено неравенство (3.20). Если $\tau R_0 \geq r_1$, то $\Lambda = 0$ на отрезке $[R_0, r_1]$ в соответствии с условиями теоремы 2.3, поэтому левая часть (3.20), а значит, и правая часть (3.18) равны нулю, поэтому соотношение (3.18) тривиально. Таким образом, можно считать, что $\tau R_0 < r_1$. Применяя лемму 3.4, получим

$$\begin{aligned} M(r_1; u) - M(R_0 + 0; u) \\ \geq \alpha_7 r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} \left(\int_{R_0}^{r_1} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\alpha_7 > 0$ – константа из формулы (3.10). Поскольку $M(r_1; u) \leq \alpha M(r_0; u)$, справедливо неравенство (3.17), объединяя которое с (3.20) и (3.23), находим

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\alpha_7 r_1^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{p/(p-1)} \alpha} \left(\int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)},$$

что также влечет оценку (3.18).

Докажем, что если утверждение леммы верно для всех $N \leq N_0$, где N_0 – натуральное число, то оно верно и для $N = N_0 + 1$.

Построим конечную последовательность вещественных чисел $\{r_i\}_{i=0}^l$ следующим образом. Первые два числа r_0 и r_1 определены в условиях леммы. Допустим, что r_i уже известно. Если $r_i = R_0$, то возьмем $l = i$ и остановим процесс. В противном случае положим

$$r_{i+1} = \inf \{ \xi \in (R_0, r_i) : M(\xi; u) \geq \alpha M(r_i; u) \}. \quad (3.24)$$

В соответствии с (3.1) имеем $\{ \xi \in (R_0, r_i) : M(\xi; u) \geq \alpha M(r_i; u) \} \neq \emptyset$ для любого $i \in \{1, \dots, l-1\}$, поэтому правая часть соотношения (3.24) определена корректно. Несложно также увидеть, что $2 \leq l \leq N+1$ и $r_{i+1} < r_i$ для всех $i \in \{0, \dots, l-1\}$. По построению последовательности $\{r_i\}_{i=0}^l$ получим

$$\begin{aligned} M(r_{i+1} + 0; u) &\geq \alpha M(r_i; u), & i = 0, \dots, l-1, \\ M(r_{i+1}; u) &\leq \alpha M(r_i; u), & i = 0, \dots, l-2. \end{aligned}$$

Как было показано ранее, соотношение (3.19) влечет за собой (3.18). Тем самым достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда (3.19) не имеет места, а это означает, что справедливо (3.20).

Возьмем максимальное натуральное число $k \in \{1, \dots, l-1\}$ такое, что

$$\begin{aligned} \tau r_i &\geq r_{i-1}, & r_{i-1} - r_i &\leq \varepsilon^{i-1} (r_0 - r_1), \\ \int_{R_0}^{r_i} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi &\geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_{i-1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \end{aligned}$$

для любого $i \in \{1, \dots, k\}$.

Можно убедиться в том, что будет справедливо хотя бы одно из следующих четырех утверждений:

1) $\tau r_{k+1} < r_k$ и

$$\int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi; \quad (3.25)$$

2) $\tau r_{k+1} \geq r_k$ и $r_k - r_{k+1} > \varepsilon^k (r_0 - r_1)$;

3) $r_k - r_{k+1} \leq \varepsilon^k (r_0 - r_1)$ и при этом выполнено условие (3.25);

4) $\tau r_{k+1} < r_k$ и

$$\int_{R_0}^{r_{k+1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi.$$

Если справедливо утверждение 1), то согласно лемме 3.4

$$M(r_k; u) - M(r_{k+1} + 0; u) \geq \alpha_7 r_k^{-(a-p+2)/(p-1)} \left(\int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)},$$

где $\alpha_7 > 0$ – константа из формулы (3.10), откуда ввиду того, что

$$\int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2^{k+1}} \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi, \quad (3.26)$$

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \frac{1}{2\alpha^k} M(r_k; u), \quad (3.27)$$

получим

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\alpha_7 r_1^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{(k+1)/(p-1)+1} \alpha^k} \left(\int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}.$$

Последняя оценка немедленно влечет за собой (3.18).

Пусть теперь справедливо утверждение 2). Можно считать без ограничения общности, что $r_{k+1} > R_0$. В противном случае в силу неравенства $\tau r_{k+1} \geq r_k$ функция Λ равна нулю на промежутке (R_0, r_k) , а следовательно, и на (R_0, r_0) , поэтому оценка (3.18) тривиальна. По предположению индукции

$$M(r_k; u) - M(r_{k+1}; u) \geq \frac{p-1}{a-p+2} (r_{k+1}^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_k^{-(a-p+2)/(p-1)}) \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)},$$

откуда согласно (3.27) и тому обстоятельству, что

$$\frac{p-1}{a-p+2} (r_{k+1}^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_k^{-(a-p+2)/(p-1)}) \geq (r_k - r_{k+1}) r_k^{-(1+a)/(p-1)},$$

$$\int_{R_0}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \geq \frac{1}{2^k} \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi,$$

получим

$$M(r_0; u) - M(r_1; u) \geq \frac{(r_k - r_{k+1}) r_k^{-(1+a)/(p-1)}}{2^{k/(p-1)+1} \alpha^k} \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \geq \frac{\varepsilon^k (r_0 - r_1) r_1^{-(1+a)/(p-1)}}{2^{k/(p-1)+1} \alpha^k} \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}.$$

Объединяя последнее неравенство и (3.21), снова приходим к (3.18).

Предположим, далее, что справедливо утверждение 3); тогда

$$r_0 - r_{k+1} = \sum_{i=0}^k (r_i - r_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^k \varepsilon^i (r_0 - r_1) \leq \frac{r_0 - r_1}{1 - \varepsilon}.$$

Тем самым получим

$$r_{k+1} \geq r_0 - \frac{r_0 - r_1}{1 - \varepsilon} = \frac{r_1 - \varepsilon r_0}{1 - \varepsilon} \geq \frac{(1 - \varepsilon \tau) r_1}{1 - \varepsilon} = \frac{r_1}{\tau}.$$

Существует $\xi \in (r_{k+1}, r_k)$ такое, что

$$\begin{aligned} \int_{r_{k+1}}^{r_k} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi &\leq (r_k - r_{k+1}) \xi_*^{1+a} \Lambda(\xi_*) M^{p-1}(\xi_*; u) \\ &\leq \varepsilon^k (r_0 - r_1) \xi_*^{1+a} \Lambda(\xi_*) M^{p-1}(\xi_*; u), \end{aligned}$$

откуда ввиду (3.26) следует оценка

$$\begin{aligned} (r_0 - r_1) \xi_*^{1+a} \Lambda(\xi_*) M^{p-1}(\xi_*; u) &\geq \frac{1}{2^{k+1} \varepsilon^k} \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi, \end{aligned}$$

которая, в свою очередь, влечет за собой неравенство

$$\begin{aligned} (r_0 - r_1)^{1/(p-1)} \xi_*^{(1+a)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_*) M(\xi_*; u) \\ \geq \frac{1}{2^{1/(p-1)}} \left(\int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Умножая последнее выражение на (3.21), находим

$$\begin{aligned} (r_0 - r_1)^{p/(p-1)} \left(\frac{\xi_*}{r_1} \right)^{(1+a)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_*) M(\xi_*; u) \\ \geq \frac{p-1}{2^{1/(p-1)}(a-p+2)} \left(r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)} \right) \\ \times \left(\int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

В то же время согласно лемме 3.1 имеем

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) &\geq \alpha_1 (r_0 - r_1)^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_*) M(\xi_*; u) \\ &\geq \alpha_1 (r_0 - r_1)^{p/(p-1)} \left(\frac{\xi_*}{r_1} \right)^{(1+a)/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(\xi_*) M(\xi_*; u), \end{aligned}$$

где $\alpha_1 > 0$ – константа из формулы (3.2), поэтому

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) &\geq \frac{\alpha_1(p-1)}{2^{1/(p-1)}(a-p+2)} \left(r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)} \right) \\ &\times \left(\int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}, \end{aligned}$$

что также влечет оценку (3.18).

Пусть, наконец, справедливо утверждение 4). Можно считать без ограничения общности, что $r_{k+1} > R_0$. В противном случае оценка (3.18) тривиальна, поскольку ее правая часть равна нулю.

Из леммы 3.5 следует, что

$$\begin{aligned} M(r_k; u) - M(r_{k+1}; u) &\geq \frac{(\tau - 1)r_{k+1}^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{p/(p-1)}\tau^\alpha} \\ &\quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_{k+1}} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ &\geq \frac{(\tau - 1)r_1^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{(p+k+1)/(p-1)}\tau^\alpha} \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая (3.27), получим

$$\begin{aligned} M(r_0; u) - M(r_1; u) &\geq \frac{(\tau - 1)r_1^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{p/(p-1)+1}\tau(2^{1/(p-1)}\alpha)^{k+1}} \\ &\quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ &\geq \frac{p-1}{a-p+2} (r_1^{-(a-p+2)/(p-1)} - r_0^{-(a-p+2)/(p-1)}) \\ &\quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Обозначим через N наименьшее натуральное число такое, что $M(R_0 + 0; u) \geq \alpha^N M(r; u)$. Доказательство будем вести индукцией по N .

Допустим, что $N = 1$. Если $\tau R_0 < r$, то неравенство (2.6) следует из леммы 3.3, а если $\tau R_0 \geq r$, то оно тривиально, поскольку в этом случае $\Lambda = 0$ на промежутке $[R_0, r)$.

Предположим теперь, что утверждение теоремы верно для всех $N \leq N_0$, где N_0 – некоторое натуральное число. Докажем, что оно верно и для $N = N_0 + 1$. Пусть

$$r_0 = \inf \{ \xi \in (R_0, r) : M(\xi; u) \geq \alpha M(r; u) \}.$$

Поскольку $N = N_0 + 1 \geq 2$, будем иметь $R_0 < r_0 < r$. Очевидно также, что $M(r_0; u) \leq \alpha M(r; u) \leq M(r_0 + 0; u)$.

По предположению индукции

$$M(r_0; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \int_{R_0}^{r_0} \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt. \quad (3.28)$$

Покажем, что одновременно с этим будет справедлива оценка

$$M(r; u) - M(r_0; u) \geq \int_{r_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt. \quad (3.29)$$

В самом деле, несложно увидеть, что

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \leq \int_{r_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^r \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & = \frac{p-1}{a-p+2} \left(r_0^{-(a-p+2)/(p-1)} - r^{-(a-p+2)/(p-1)} \right) \\ & \quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^r \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Тем самым если $r \leq \tau r_0$, то (3.29) следует из леммы 3.6. В свою очередь, в случае $r > \tau r_0$ леммы 3.3, 3.5 влекут неравенства

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(r_0; u) & \geq \alpha_3 \int_{r_0}^r \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{r_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ & \geq 2^{p/(p-1)} \int_{r_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{r_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt, \\ M(r; u) - M(r_0; u) & \geq \frac{(\tau-1)r_0^{-(a-p+2)/(p-1)}}{2^{p/(p-1)}\tau\alpha} \\ & \quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ & \geq \frac{2^{p/(p-1)}(p-1)}{a-p+2} \left(r_0^{-(a-p+2)/(p-1)} - r^{-(a-p+2)/(p-1)} \right) \\ & \quad \times \left(\gamma \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} \\ & = 2^{p/(p-1)} \int_{r_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^{r_0} \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt, \end{aligned}$$

складывая которые, снова получим (3.29).

Наконец, суммируя (3.28) и (3.29), завершаем доказательство.

§ 4. Доказательство лемм 3.1, 3.2

Как и ранее, будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2.3. Пусть также τ – вещественное число, определенное в § 3. Тогда найдется вещественное число η такое, что $1 < \eta \leq \nu$, $\delta\eta < 1$, $1 + \delta\eta < \tau$ и $\tau/(1 - \delta\eta) < \theta/(1 - \delta)$. Очевидно, η будет зависеть от δ , θ , τ , в то время как τ зависит только от δ , θ . Обозначим $\zeta = \min\{\theta/\tau, \tau/(1 + \delta\eta)\}$.

Нам потребуются следующие леммы 4.1, 4.2, доказанные в работе [13, леммы 3.1, 3.4].

ЛЕММА 4.1. *Существует симметрическая $(n \times n)$ -матрица $\|a_{ij}\|$ с измеримыми коэффициентами такая, что функция $A = (A_1, \dots, A_n)$ из левой части*

соотношения (1.1) может быть записана в виде

$$A_i(x, \xi) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, \xi) |\xi|^{p-2} \xi_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

для почти всех $x \in \Omega_{R_0, R_1}$ и всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. При этом будем иметь

$$\lambda_1 |\zeta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \xi) \zeta_i \zeta_j \leq \lambda_2 |\zeta|^2 \quad (4.1)$$

для почти всех $x \in \Omega_{R_0, R_1}$ и всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, где постоянные $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ зависят только от C_1, C_2 .

Пусть

$$q(x, \xi) = \left(\sum_{i,j=1}^n q_{ij}(x) \xi_i \xi_j \right)^{(p-2)/2},$$

где

$$q_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x, Du), & x \in \Omega_{R_0, R_1}, \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \delta_{ij} / 2, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_{R_0, R_1}, \end{cases}$$

δ_{ij} – символ Кронекера. Положим

$$Q_i(x, \xi) = h(x) q(x, \xi) \sum_{j=1}^n q_{ij}(x) \xi_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.2)$$

где $h(x) = |Du|^{p-2} / q(x, Du)$ для всех $x \in \Omega_{R_0, R_1}$ таких, что $Du(x) \neq 0$ и $h(x) = (\lambda_1^{(2-p)/2} + \lambda_2^{(2-p)/2}) / 2$ для всех остальных $x \in \mathbb{R}^n$. В случае $\xi = 0$ будем считать, что правая часть (4.2) равна нулю.

Соотношение (4.1) влечет за собой оценки

$$\min\{\lambda_1^{(2-p)/2}, \lambda_2^{(2-p)/2}\} \leq h(x) \leq \max\{\lambda_1^{(2-p)/2}, \lambda_2^{(2-p)/2}\}, \quad (4.3)$$

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n q_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 |\xi|^2 \quad (4.4)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Несложно убедиться в том, что

$$(Q(x, \xi) - Q(x, \zeta))(\xi - \zeta) > 0$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и всех $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\xi \neq \zeta$, где $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$.

Говорим, что функция $v \in W_p^1(\omega_1 \cap \omega_2)$ удовлетворяет условию

$$v|_{\omega_2 \cap \partial \omega_1} = 0,$$

где ω_1 и ω_2 – открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, если $\varphi v \in \dot{W}_p^1(\omega_1 \cap \omega_2)$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\omega_2)$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $v \in W_p^1(\omega_1 \cap \omega_2)$ – решение задачи

$$\operatorname{div} Q(x, Dv) \geq 0 \quad \text{в } \omega_1 \cap \omega_2, \quad v|_{\omega_2 \cap \partial\omega_1} = 0,$$

где ω_1 и ω_2 – открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\omega_0 = \{x \in \omega_1 \cap \omega_2 : v(x) > 0\}$ и

$$v_0(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \omega_0, \\ 0, & x \in \omega_2 \setminus \omega_0. \end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{div} Q(x, Dv_0) \geq 0 \quad \text{в } \omega_2.$$

Продолжим функцию $u \geq 0$, являющуюся решением задачи (1.1), (1.2), на все множество B_{R_0, R_1} , полагая $u = 0$ на $B_{R_0, R_1} \setminus \Omega$. Согласно леммам 4.1, 4.2 получим

$$\operatorname{div} Q(x, Du) \geq 0 \quad \text{в } B_{R_0, R_1}.$$

ЛЕММА 4.3. Пусть $B_{\eta t}^{x_0} \subset B_{R_0, R_1}$ для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и вещественного числа $t > 0$. Тогда

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^{x_0}} u \geq \lambda_3 t^{(p-n)/(p-1)} (\operatorname{cap}(\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega, B_{\eta t}^{x_0}))^{1/(p-1)} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u, \quad (4.5)$$

где постоянная $\lambda_3 > 0$ зависит только от n, p, η, C_1, C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}(\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega, B_{\eta t}^{x_0}) &> 0, \\ \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u &> 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В противном случае оценка (4.5) тривиальна.

Рассмотрим решение задачи

$$\operatorname{div} Q(x, Dv) = 0 \quad \text{в } B_{\eta t}^{x_0} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega), \quad v|_{\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega} = 0, \quad v|_{S_{\eta t}^{x_0}} = \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u.$$

Известно, что такое решение существует, более того, можно утверждать, что $v \in C(\overline{B_{\eta t}^{x_0}} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega))$ [1].

Из принципа максимума следует, что $v \geq u$ почти всюду в $B_{\eta t}^{x_0}$, поэтому

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^{x_0}} u \geq \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^{x_0}} v,$$

откуда ввиду того обстоятельства, что

$$\max_{S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} v = \operatorname{ess\,sup}_{B_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} v \geq \operatorname{ess\,sup}_{B_t^{x_0}} v,$$

находим

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^{x_0}} u \geq \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - \max_{S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} v. \quad (4.7)$$

Положим

$$w = \frac{\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - v}{\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u}.$$

Несложно увидеть, что

$$\operatorname{div} Q(x, Dw) = 0 \quad \text{в } B_{\eta t}^{x_0} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega), \quad w|_{\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega} = 1, \quad w|_{S_{\eta t}^{x_0}} = 0. \quad (4.8)$$

Согласно вариационному принципу имеем

$$\int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, Dw) Dw \, dx = \inf_{\varphi} \int_{B_{\eta t}^{x_0}} h(x) q^{p/(p-2)}(x, D\varphi) \, dx,$$

где строгая нижняя грань в правой части берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(B_{\eta t})$ таким, что $\varphi \equiv 1$ в окрестности $\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega$. Тем самым согласно оценкам (4.3) и (4.4) можно утверждать, что

$$\int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, Dw) Dw \, dx \geq \lambda_4 \operatorname{cap}(\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega, B_{\eta t}^{x_0}), \quad (4.9)$$

где постоянная $\lambda_4 > 0$ зависит только от p, C_1, C_2 .

Из неравенства (4.7) вытекает, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^{x_0}} u \geq \min_{S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} w \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u. \quad (4.10)$$

Заметим, что ввиду принципа максимума w является неотрицательной функцией в шаре $B_{\eta t}^{x_0}$. В то же время существуют вещественное число $r > 0$, зависящее только от η, t , и натуральное число N , зависящее только от n, η , такие, что для любых двух точек $x, y \in S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}$ найдется конечная последовательность шаров $B_r^{z_i} \subset B_{\eta t}^{x_0} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega)$, $i = 0, \dots, l$, удовлетворяющая следующим свойствам: $l \leq N$, $z_1 = x$, $z_l = y$ и $B_{r/2}^{z_{i-1}} \cap B_{r/2}^{z_i} \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, l$.

Согласно неравенству Харнака [14] имеем

$$\inf_{B_{r/2}^{z_i}} w \geq \kappa \sup_{B_{r/2}^{z_i}} w, \quad i = 0, \dots, l, \quad (4.11)$$

где постоянная $\kappa > 0$ зависит только от n, p, C_1, C_2 , поэтому, взяв $x, y \in S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}$ так, чтобы в точке x достигался минимум функции w на множестве $S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}$, а в точке y — максимум, получим

$$\min_{S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} w \geq \lambda_5 \max_{S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} w$$

для некоторой константы $\lambda_5 > 0$, зависящей только от n, p, η, C_1, C_2 . Таким образом, учитывая (4.10), получим

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^{x_0}} u \geq \lambda_5 \max_{S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} w \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^{x_0}} u. \quad (4.12)$$

Оценим снизу величину

$$W = \max_{S_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}} w,$$

стоящую в правой части (4.12). Несложно увидеть, что $0 < W < 1$. В противном случае ввиду строгого принципа максимума функция w была бы постоянной на множестве $B_{\eta t}^{x_0} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega)$, что противоречит формуле (4.6).

Обозначим $\omega = \{x \in B_{\eta t}^{x_0} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega) : w(x) < W\}$ и $\tilde{w}(x) = \min\{1, w(x)/W\}$. Поскольку w – непрерывная функция на $\overline{B_{\eta t}^{x_0}} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega)$, равная нулю на сфере $S_{\eta t}^{x_0}$, множество ω является открытым, а $B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega$ – компактным. Имеем

$$\operatorname{div} Q(x, D\tilde{w}) = 0 \quad \text{в } \omega, \quad \tilde{w}|_{B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega} = 1, \quad \tilde{w}|_{S_{\eta t}^{x_0}} = 0,$$

откуда согласно вариационному принципу следует, что

$$\int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} \, dx = \inf_{\varphi} \int_{B_{\eta t}^{x_0}} h(x) q^{p/(p-2)}(x, D\varphi) \, dx,$$

где строгая нижняя грань в правой части берется по всем $\varphi \in C_0^\infty(B_{\eta t}^{x_0})$ таким, что $\varphi \equiv 1$ в окрестности $B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega$. Тем самым, ввиду (4.3) и (4.4) получим

$$\int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} \, dx \leq \lambda_6 \operatorname{cap}(B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega, B_{\eta t}^{x_0}), \quad (4.13)$$

где постоянная $\lambda_6 > 0$ зависит только от p, C_1, C_2 .

Поскольку $D\tilde{w} = Dw/W$ почти всюду на ω и $D\tilde{w} = 0$ почти всюду на $B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega$, то выполнено равенство

$$\int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} \, dx = \frac{1}{W^{p-1}} \int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, Dw) Dw \, dx.$$

В то же время $\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega \subset B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega$, поэтому $\tilde{w} - w \in \dot{W}_p^1(B_{\eta t}^{x_0} \setminus (\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega))$, и, принимая во внимание (4.8), получим

$$\int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, Dw) D\tilde{w} \, dx = \int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, Dw) Dw \, dx.$$

Таким образом,

$$\int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} \, dx = \frac{1}{W^{p-1}} \int_{B_{\eta t}^{x_0}} Q(x, Dw) Dw \, dx,$$

откуда в силу (4.9) и (4.13) находим

$$W^{p-1} \geq \frac{\lambda_4 \operatorname{cap}(\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega, B_{\eta t}^{x_0})}{\lambda_6 \operatorname{cap}(B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega, B_{\eta t}^{x_0})}. \quad (4.14)$$

Согласно строгому принципу максимума имеем $B_{\eta t}^{x_0} \setminus \overline{B_{\sqrt{\eta t}}^{x_0}} \subset \omega$, или, другими словами, $B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega \subset \overline{B_{\sqrt{\eta t}}^{x_0}}$, поэтому

$$\operatorname{cap}(B_{\eta t}^{x_0} \setminus \omega, B_{\eta t}^{x_0}) \leq \operatorname{cap}(\overline{B_{\sqrt{\eta t}}^{x_0}}, B_{\eta t}^{x_0})$$

и неравенство (4.14) позволяет утверждать, что

$$W^{p-1} \geq \frac{\lambda_4 \operatorname{cap}(\overline{B_t^{x_0}} \setminus \Omega, B_{\eta t}^{x_0})}{\lambda_6 \operatorname{cap}(\overline{B_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}}, B_{\eta t}^{x_0})}. \quad (4.15)$$

Поскольку $\operatorname{cap}(\overline{B_{\sqrt{\eta}t}^{x_0}}, B_{\eta t}^{x_0}) = \lambda_7 t^{n-p}$, где $\lambda_7 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая только от n, p, η , то для завершения доказательства остается объединить соотношения (4.12) и (4.15).

ЛЕММА 4.4. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $R_0/(1 - \delta\eta) < r_1 < r_2 < R_1$ – некоторые вещественные числа такие, что $r_2 \leq \tau r_1$ и $M(r_1; u) \leq \alpha M(r_2; u) \leq M(r_1 + 0; u)$. Тогда

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq \lambda_8 (r_2 - r_1)^{p/(p-1)} \lambda^{p/(p-1)} M(r_2; u), \quad (4.16)$$

где

$$\lambda = \inf_{x \in \Omega_{r_1, \zeta r_1} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu(x; \delta, \eta), \quad (4.17)$$

а постоянная $\lambda_8 > 0$ зависит только от $n, p, \alpha, \eta, \zeta, \tau, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого $x \in \Omega$, удовлетворяющего условию

$$r_1 \leq |x| \leq \min \left\{ \zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2} \right\}, \quad (4.18)$$

найдется $t \in (0, \delta|x|)$ такое, что

$$(t^{1-n} \operatorname{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \Omega, B_{\eta t}^x))^{1/(p-1)} \geq \frac{\lambda}{2}. \quad (4.19)$$

Предположим, что для некоторых $x \in \Omega$ и $t \in (0, \delta|x|)$ выполнены соотношения (4.18), (4.19) и при этом

$$t \geq \frac{r_2 - r_1}{2\eta}.$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$(t^{p-n} \operatorname{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \Omega, B_{\eta t}^x))^{1/(p-1)} \geq \frac{\lambda(r_2 - r_1)}{4\eta}. \quad (4.20)$$

Поскольку $\operatorname{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \Omega, B_{\eta t}^x) \leq \operatorname{cap}(\overline{B_t^x}, B_{\eta t}^x) = \lambda_9 t^{n-p}$, где постоянная $\lambda_9 > 0$ зависит только от n, p, η , формула (4.20) влечет оценку

$$4\eta\lambda_9^{1/(p-1)} \geq (r_2 - r_1)\lambda,$$

или, другими словами,

$$1 \geq \left(\frac{1}{4\eta\lambda_9^{1/(p-1)}} \right)^{p/(p-1)} (r_2 - r_1)^{p/(p-1)} \lambda^{p/(p-1)}.$$

В то же время согласно условиям леммы

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq (1 - \alpha)M(r_2; u). \quad (4.21)$$

Таким образом, перемножая два последних неравенства, мы немедленно получим (4.16).

Пусть теперь для любых $x \in \Omega$ и $t \in (0, \delta|x|)$ из (4.18), (4.19) следует, что

$$t < \frac{r_2 - r_1}{2\eta}. \quad (4.22)$$

Обозначим через I множество вещественных чисел $r \in [r_1, r_2]$, для которых

$$M(r; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\alpha\lambda_3}{2\eta}(r - r_1)\lambda M(r_2; u), \quad (4.23)$$

где λ_3 – постоянная из леммы 4.3.

Множество I не пусто, так как $r_1 \in I$. Положим $r_* = \sup I$. Учитывая равенство (3.1), имеем

$$M(r_*; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\alpha\lambda_3}{2\eta}(r_* - r_1)\lambda M(r_2; u). \quad (4.24)$$

Покажем, что

$$r_* \geq \min\left\{\zeta r_1, \frac{r_1 + r_2}{2}\right\}. \quad (4.25)$$

В самом деле, пусть (4.25) не выполнено. Тогда для всех $x \in S_{r_*}$ и $t \in (0, \delta|x|)$ формула (4.22) влечет включение $B_{\eta t}^x \subset B_{R_0, r_2}$. Существует $x \in S_{r_*}$ такое, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_t^x} u \geq M(r_*; u) \quad (4.26)$$

для любого $t \in (0, \infty)$, удовлетворяющего условию $B_t^x \subset B_{R_0, R_1}$. При этом, очевидно, найдется $t \in (0, \delta|x|)$, для которого справедливо (4.19), а значит, и (4.22). Принимая во внимание (4.26) и неравенство

$$M(r_* + \eta t; u) = \operatorname{ess\,sup}_{B_{R_0, r_* + \eta t}} u \geq \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^x} u,$$

получим

$$M(r_* + \eta t; u) - M(r_*; u) \geq \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^x} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^x} u. \quad (4.27)$$

Согласно лемме 4.3 справедлива оценка

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^x} u - \operatorname{ess\,sup}_{B_t^x} u \geq \lambda_3 t^{(p-n)/(p-1)} (\operatorname{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \Omega, B_{\eta t}^x))^{1/(p-1)} \operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^x} u,$$

откуда ввиду (4.19), (4.27) и того обстоятельства, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_{\eta t}^x} u \geq M(r_*; u),$$

получим

$$M(r_* + \eta t; u) - M(r_*; u) \geq \frac{\lambda_3}{2} t \lambda M(r_*; u). \quad (4.28)$$

Заметим, что

$$M(r_*; u) \geq M(r_1 + 0; u). \quad (4.29)$$

В самом деле, если $M(r_1 + 0; u) = M(r_1; u)$, то (4.29) вытекает из того обстоятельства, что $r_* \geq r_1$. В свою очередь, если $M(r_1 + 0; u) > M(r_1; u)$, то существует $r \in (r_1, r_2)$, для которого выполнено (4.23), поэтому $r_* > r_1$, и мы снова получим (4.29).

Принимая во внимание (4.28), (4.29) и условие $M(r_1 + 0; u) \geq \alpha M(r_2; u)$, приходим к выводу, что

$$M(r_* + \eta t; u) - M(r_*; u) \geq \frac{\alpha \lambda_3}{2} t \lambda M(r_2; u).$$

Складывая последнее выражение и (4.24), находим

$$M(r_* + \eta t; u) - M(r_*; u) \geq \frac{\alpha \lambda_3}{2\eta} (r_* + \eta t - r_1) \lambda M(r_2; u), \quad (4.30)$$

что противоречит определению вещественного числа r_* .

Тем самым справедливость (4.25) доказана, поэтому можно утверждать, что

$$r_* - r_1 \geq \min \left\{ (\zeta - 1)r_1, \frac{r_2 - r_1}{2} \right\},$$

откуда ввиду условия $\tau r_1 \geq r_2$ следует соотношение

$$r_* - r_1 \geq \min \left\{ \frac{(\zeta - 1)r_2}{\tau}, \frac{r_2 - r_1}{2} \right\} \geq \min \left\{ \frac{\zeta - 1}{\tau}, \frac{1}{2} \right\} (r_2 - r_1),$$

объединяя которое с (4.24) и неравенством $M(r_2; u) \geq M(r_*; u)$, получим

$$M(r_2; u) - M(r_1; u) \geq \lambda_{10} (r_2 - r_1) \lambda M(r_2; u), \quad (4.31)$$

где постоянная $\lambda_{10} > 0$ зависит только от $n, p, \alpha, \eta, \zeta, \tau, C_1, C_2$.

Поскольку $M(r_2; u) > 0$, формула (4.31) позволяет заключить, что

$$1 \geq \lambda_{10} (r_2 - r_1) \lambda.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$1 \geq \lambda_{10}^{1/(p-1)} (r_2 - r_1)^{1/(p-1)} \lambda^{1/(p-1)},$$

умножая которую на (4.31), завершаем доказательство.

ЛЕММА 4.5. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $R_0/(1 - \delta\eta) < r_1 < R_1/\tau$ — некоторые вещественные числа такие, что $\alpha M(\tau r_1; u) \leq M(r_1 + 0; u)$. Тогда

$$M(\tau r_1; u) - M(r_1; u) \geq \lambda_{11} r_1^{p/(p-1)} \lambda^{p/(p-1)} M(\tau r_1; u),$$

где λ определено с помощью (4.17), а постоянная $\lambda_{11} > 0$ зависит только от $n, p, \alpha, \eta, \zeta, C_1, C_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через I множество всех $r \in [r_1, \tau r_1]$ таких, что

$$M(r; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\alpha \lambda_3}{2\eta} (r - r_1) \lambda M(\tau r_1; u),$$

где λ_3 – постоянная из леммы 4.3. Очевидно, $I \neq \emptyset$, и при этом $r_* = \sup I$ удовлетворяет неравенству

$$M(r_*; u) - M(r_1; u) \geq \frac{\alpha \lambda_3}{2\eta} (r_* - r_1) \lambda M(\tau r_1; u). \quad (4.32)$$

Покажем, что

$$r_* \geq \zeta r_1. \quad (4.33)$$

В самом деле, если $r_* < \zeta r_1$, то $B_{\delta\eta|x|}^x \subset B_{R_0, \tau r_1}$ для всех $x \in S_{r_*}$. Найдется $x \in S_{r_*}$ такое, что для любого $t \in (0, \delta|x|)$ имеет место (4.26). Взяв, далее, вещественное число $t \in (0, \delta|x|)$, для которого выполнено (4.19), и повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве (4.30), получим

$$M(r_* + \eta t; u) - M(r_*; u) \geq \frac{\alpha \lambda_3}{2\eta} (r_* + \eta t - r_1) \lambda M(\tau r_1; u),$$

что противоречит определению r_* . Таким образом, справедливость (4.33) установлена.

Соотношения (4.32) и (4.33) влекут оценку

$$M(r_*; u) - M(r_1; u) \geq \lambda_{12} r_1 \lambda M(\tau r_1; u), \quad (4.34)$$

где постоянная $\lambda_{12} > 0$ зависит только от $n, p, \alpha, \eta, \zeta, C_1, C_2$, откуда ввиду того, что

$$M(\tau r_1; u) \geq M(r_*; u) > 0, \quad (4.35)$$

имеем $1 \geq \lambda_{12} r_1 \lambda$, или, другими словами,

$$1 \geq \lambda_{12}^{1/(p-1)} r_1^{1/(p-1)} \lambda^{1/(p-1)}.$$

Перемножая последнее выражение и (4.34), находим

$$M(r_*; u) - M(r_1; u) \geq \lambda_{12}^{p/(p-1)} r_1^{p/(p-1)} \lambda^{p/(p-1)} M(\tau r_1; u). \quad (4.36)$$

Наконец, объединяя (4.35) и (4.36), завершаем доказательство.

ЛЕММА 4.6. Пусть $R_0 < r_4 < r_3 < r_2 < r_1 < R_1$, $0 < k_1 < 1$ и $0 < k_2 < 1$ – некоторые вещественные числа такие, что $r_2 \leq k_1 r_1$ и $k_2 r_1 \leq r_4 \leq k_1 r_3$. Тогда

$$M(r_1; u) - M(r_2; u) \geq \lambda_{13} r_1^{(p-n)/(p-1)} (\text{cap}(\overline{B_{r_3, r_2}} \setminus \Omega, B_{r_4, r_1}))^{1/(p-1)} M(r_1; u),$$

где постоянная $\lambda_{13} > 0$ зависит только от n, p, k_1, k_2, C_1, C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \overline{B_{r_3, r_2}} \setminus \Omega : x_n \geq 0\}$ и $K_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \overline{B_{r_3, r_2}} \setminus \Omega : x_n \leq 0\}$. Ввиду неравенства (1.3) лемма будет доказана, если нам удастся показать, что

$$M(r_1; u) - M(r_2; u) \geq \lambda_{14} r_1^{(p-n)/(p-1)} (\text{cap}(K_1, B_{r_4, r_1}))^{1/(p-1)} M(r_1; u), \quad (4.37)$$

$$M(r_1; u) - M(r_2; u) \geq \lambda_{14} r_1^{(p-n)/(p-1)} (\text{cap}(K_2, B_{r_4, r_1}))^{1/(p-1)} M(r_1; u), \quad (4.38)$$

где постоянная $\lambda_{14} > 0$ зависит только от n, p, k_1, k_2, C_1, C_2 .

Установим справедливость (4.37). Оценка (4.38) доказывается аналогично. Будем считать, что

$$\text{cap}(K_1, B_{r_4, r_1}) > 0. \quad (4.39)$$

В противном случае (4.37) тривиально. Имеем

$$\text{ess sup}_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} u = M(\sqrt{k_1}r_1; u) \geq M(r_2; u), \quad (4.40)$$

где ограничение функции u на множество $\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}$ понимается в смысле следа, а существенная точная верхняя грань берется по $(n-1)$ -мерной мере Лебега на множестве $\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}$.

Рассмотрим решение задачи

$$\text{div } Q(x, Dv) = 0 \quad \text{в } B_{r_4, r_1} \setminus K_1, \quad v|_{K_1} = 0, \quad v|_{\partial B_{r_4, r_1}} = M(r_1; u).$$

Такое решение v существует, причем $v \in C(\overline{B_{r_4, r_1}} \setminus K_1)$ [1].

Из принципа максимума следует, что $v \geq u$ почти всюду в B_{r_4, r_1} , поэтому

$$M(r_1; u) - \text{ess sup}_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} u \geq M(r_1; u) - \max_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} v,$$

откуда согласно (4.40) получим

$$M(r_1; u) - M(r_2; u) \geq M(r_1; u) - \max_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} v. \quad (4.41)$$

Обозначим

$$w = \frac{M(r_1; u) - v}{M(r_1; u)}.$$

Несложно увидеть, что

$$\text{div } Q(x, Dw) = 0 \quad \text{в } B_{r_4, r_1} \setminus K_1, \quad w|_{K_1} = 1, \quad w|_{\partial B_{r_4, r_1}} = 0. \quad (4.42)$$

Согласно вариационному принципу имеем

$$\int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, Dw) Dw \, dx = \inf_{\varphi} \int_{B_{r_4, r_1}} h(x) q^{p/(p-2)}(x, D\varphi) \, dx,$$

где строгая нижняя грань в правой части берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(B_{r_4, r_1})$ таким, что $\varphi \equiv 1$ в окрестности K_1 . Тем самым, учитывая соотношения (4.3) и (4.4), находим

$$\int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, Dw) Dw \, dx \geq \lambda_{15} \text{cap}(K_1, B_{r_4, r_1}), \quad (4.43)$$

где постоянная $\lambda_{15} > 0$ зависит только от p, C_1, C_2 .

Неравенство (4.41) позволяет заключить, что

$$M(r_1; u) - M(r_2; u) \geq M(r_1; u) \min_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} w. \quad (4.44)$$

В силу принципа максимума w – неотрицательная функция на B_{r_4, r_1} . В то же время найдутся вещественное число $r > 0$, зависящее только от r_1, r_3, k_1 , и натуральное число N , зависящее только от n, k_1 , такие, что для любых двух точек $x, y \in \partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}$ существует конечная последовательность шаров $B_r^{z_i} \subset B_{r_4, r_1} \setminus K_1, i = 0, \dots, l$, удовлетворяющая следующим свойствам: $l \leq N, z_1 = x, z_l = y$ и $B_{r/2}^{z_{i-1}} \cap B_{r/2}^{z_i} \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, l$.

Из неравенства Харнака [14] следует, что будут справедливы оценки (4.11). Таким образом, взяв $x, y \in \partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}$ так, чтобы в точке x достигался минимум функции w на множестве $\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}$, а в точке y – максимум, получим

$$\min_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} w \geq \lambda_{16} \max_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} w,$$

где постоянная $\lambda_{16} > 0$ зависит только от n, p, k_1, C_1, C_2 , поэтому из неравенства (4.44) имеем

$$M(r_1; u) - M(r_2; u) \geq \lambda_{16} M(r_1; u) \max_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} w. \quad (4.45)$$

Оценим величину

$$W = \max_{\partial B_{\sqrt{k_1}r_3, \sqrt{k_1}r_1}} w,$$

стоящую в правой части (4.45). Очевидно, $0 < W < 1$. В противном случае ввиду строгого принципа максимума функция w была бы постоянной на множестве $B_{r_4, r_1} \setminus K_1$, что противоречит формуле (4.39).

Обозначим $\omega = \{x \in B_{r_4, r_1} \setminus K_1 : w(x) < W\}$ и $\tilde{w}(x) = \min\{1, w(x)/W\}$. Поскольку w – непрерывная функция на $\overline{B_{r_4, r_1}} \setminus K_1$, равная нулю на $\partial B_{r_4, r_1}$, множество ω является открытым, а $B_{r_4, r_1} \setminus \omega$ – компактным. Имеем

$$\operatorname{div} Q(x, D\tilde{w}) = 0 \quad \text{в } \omega, \quad \tilde{w}|_{B_{r_4, r_1} \setminus \omega} = 1, \quad \tilde{w}|_{\partial B_{r_4, r_1}} = 0,$$

откуда, применяя вариационный принцип, получим

$$\int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} dx = \inf_{\varphi} \int_{B_{r_4, r_1}} h(x) q^{p/(p-2)}(x, D\varphi) dx,$$

где строгая нижняя грань в правой части берется по всем $\varphi \in C_0^\infty(B_{r_4, r_1})$ таким, что $\varphi \equiv 1$ в окрестности $B_{r_4, r_1} \setminus \omega$. Тем самым, соотношения (4.3) и (4.4) влекут неравенство

$$\int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} dx \leq \lambda_{17} \operatorname{cap}(B_{r_4, r_1} \setminus \omega, B_{r_4, r_1}), \quad (4.46)$$

где постоянная $\lambda_{17} > 0$ зависит только от p, C_1, C_2 .

Поскольку $D\tilde{w} = Dw/W$ на ω и $D\tilde{w} = 0$ на $B_{r_4, r_1} \setminus \omega$, справедливо соотношение

$$\int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} dx = \frac{1}{W^{p-1}} \int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, Dw) Dw dx.$$

Несложно увидеть, что $K_1 \subset B_{r_4, r_1} \setminus \omega$. Таким образом, $\tilde{w} - w \in \mathring{W}_p^1(B_{r_4, r_1} \setminus K_1)$, и, принимая во внимание (4.42), получим

$$\int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, Dw) D\tilde{w} dx = \int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, Dw) Dw dx,$$

поэтому

$$\int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, D\tilde{w}) D\tilde{w} dx = \frac{1}{W^{p-1}} \int_{B_{r_4, r_1}} Q(x, Dw) Dw dx,$$

откуда в силу (4.43) и (4.46) находим

$$W^{p-1} \geq \frac{\lambda_{15} \operatorname{cap}(K_1, B_{r_4, r_1})}{\lambda_{17} \operatorname{cap}(B_{r_4, r_1} \setminus \omega, B_{r_4, r_1})}. \quad (4.47)$$

Согласно строгому принципу максимума имеем $B_{r_4, r_1} \setminus \overline{B_{\sqrt{k_1 r_3}, \sqrt{k_1 r_1}}} \subset \omega$. Тем самым, $B_{r_4, r_1} \setminus \omega \subset \overline{B_{\sqrt{k_1 r_3}, \sqrt{k_1 r_1}}}$, и (4.47) позволяет утверждать, что

$$W^{p-1} \geq \frac{\lambda_{15} \operatorname{cap}(K_1, B_{r_4, r_1})}{\lambda_{17} \operatorname{cap}(\overline{B_{\sqrt{k_1 r_3}, \sqrt{k_1 r_1}}}, B_{r_4, r_1})}.$$

Объединяя последнюю оценку с формулой (4.45) и неравенством

$$\operatorname{cap}(\overline{B_{\sqrt{k_1 r_3}, \sqrt{k_1 r_1}}}, B_{r_4, r_1}) \leq \lambda_{18} r_1^{n-p},$$

где постоянная $\lambda_{18} > 0$ зависит только от n, p, k_1, k_2 , получим (4.37). Лемма полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Пусть $r \in [r_1/\tau, r_2] \cap (R_0, R_1)$. Можно предполагать, что $R_0/(1 - \delta\eta) < r_1$. В противном случае ввиду условия $r_2 \leq \tau r_1$ будем иметь $r \leq R_0\tau/(1 - \delta\eta) \leq R_0\theta/(1 - \delta)$, поэтому $\Lambda(r) = 0$ и соотношение (3.2) тривиально.

Согласно (2.7) должно быть выполнено хотя бы одно из двух неравенств:

$$\frac{1}{2} \Lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu^p(x; \delta, \nu), \quad (4.48)$$

$$\frac{1}{2} \Lambda(r) \leq r^{-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}). \quad (4.49)$$

Допустим сначала, что выполнено (4.48). Из определения вещественных чисел τ и ζ следует, что $\Omega_{r_1, \zeta r_1} \subset \Omega_{r/\theta, r\theta}$. Тем самым получим

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \Omega_{r_1, \zeta r_1} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu(x; \delta, \eta) &\geq \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu(x; \delta, \eta) \\ &\geq \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu(x; \delta, \nu), \end{aligned} \quad (4.50)$$

откуда, применяя лемму 4.4, получим (3.2).

Предположим теперь, что выполнено (4.49). Имеем

$$\operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \leq \operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}}, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) = \lambda_{19} r^{n-p},$$

где постоянная $\lambda_{19} > 0$ зависит только от $n, p, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, поэтому формула (4.49) позволяет утверждать, что

$$1 \geq (2\tau^{2p}\lambda_{19})^{-1/(p-1)}(r_2 - r_1)^{p/(p-1)}\Lambda^{1/(p-1)}(r). \quad (4.51)$$

С другой стороны, по условиям леммы имеем $M(r_1; u) \leq \alpha M(r_2; u)$. Таким образом, справедливо неравенство (4.21), умножая которое на (4.51), завершаем доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Пусть $r \in [r_1/\tau, \tau r_1] \cap (R_0, R_1)$. Как и в доказательстве леммы 3.1, можно предполагать, что $R_0/(1 - \delta\eta) < r_1$. В противном случае $\Lambda(r) = 0$ и соотношение (3.3) очевидно. По этой же причине можно считать, что $R_0 < \sigma_4 r$.

Ввиду (2.7) имеет место хотя бы одно из двух соотношений (4.48), (4.49). Если выполнено (4.48), то, используя оценку (4.50) и лемму 4.5, немедленно получим (3.3).

Допустим, что справедливо (4.49). Взяв $r_* = \max\{r_1, \sigma_2 r\}$, получим

$$\text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r_*}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, \tau r_1}) \geq \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, \tau r_1}).$$

В то же время несложно показать [15, § 9.1], что

$$\text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, \tau r_1}) \geq \lambda_{20} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1})$$

для некоторой постоянной $\lambda_{20} > 0$, зависящей только от $n, p, \tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, поэтому

$$\text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r_*}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, \tau r_1}) \geq \lambda_{20} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}),$$

откуда, принимая во внимание (4.49), находим

$$r^{-n} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r_*}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, \tau r_1}) \geq \frac{\lambda_{20}}{2} \Lambda(r). \quad (4.52)$$

Из леммы 4.6 вытекает оценка

$$M(\tau r_1; u) - M(r_*; u) \geq \lambda_{21} r_1^{(p-n)/(p-1)} (\text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r_*}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, \tau r_1}))^{1/(p-1)} M(\tau r_1; u),$$

где постоянная $\lambda_{21} > 0$ зависит только от $n, p, \tau, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, объединяя которую с формулой (4.52) и условием $r \geq r_1/\tau$, получим

$$M(\tau r_1; u) - M(r_*; u) \geq \lambda_{21} \left(\frac{\lambda_{20}}{2\tau^n} \right)^{1/(p-1)} r_1^{p/(p-1)} \Lambda^{1/(p-1)}(r) M(\tau r_1; u).$$

Последнее неравенство влечет оценку (3.3), поскольку $M(r_*; u) \geq M(r_1; u)$ и $M(\tau r_1; u) \geq M(r; u)$. Лемма полностью доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2.2

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что выполнены предпосылки теоремы 2.2. Для любого открытого непустого множества $\omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Lambda_{\min}(\omega) = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\omega)} \frac{\int_\omega |D\varphi|^p dx}{\int_\omega |\varphi|^p dx}.$$

Другими словами, $\Lambda_{\min}(\omega)$ является наименьшим собственным значением спектральной задачи

$$\operatorname{div}(|Dv|^{p-2}Dv) = -\lambda|v|^{p-2}v \quad \text{в } \omega, \quad v|_{\partial\omega} = 0.$$

ЛЕММА 5.1. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и при этом $r > 0$ и $\nu > 1$ – некоторые вещественные числа. Тогда найдутся постоянные $\varkappa_1 > 0$ и $\varkappa_2 > 0$, зависящие только от n, p, ν и такие, что для всякого компакта $K \subset B_{\nu r}^{x_0}$ условие

$$r^{p-n} \operatorname{cap}(K, B_{\nu r}^{x_0}) \leq \varkappa_1 \quad (5.1)$$

влечет за собой неравенство

$$\Lambda_{\min}(B_r^{x_0}) \geq \varkappa_2 \Lambda_{\min}(B_r^{x_0} \setminus K).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = 0$ и $r = 1$. Если это не так, то сдвинем начало координат и воспользуемся преобразованием подобия.

Предположим, что K – компактное подмножество открытого шара B_ν . Поскольку $\Lambda_{\min}(B_1)$ представляет собой положительную величину, зависящую только от n, p , для доказательства леммы достаточно установить, что условие (5.1), которое в случае $x_0 = 0$ и $r = 1$ принимает вид

$$\operatorname{cap}(K, B_\nu) \leq \varkappa_1, \quad (5.2)$$

гарантирует, что $\Lambda_{\min}(B_1 \setminus K)$ не превосходит некоторой константы, зависящей только от n, p, ν .

Рассмотрим функцию $\psi \in W_p^1(B_\nu) \cap L_\infty(B_\nu)$, являющуюся решением задачи

$$\operatorname{div}(|D\psi|^{p-2}D\psi) = 0 \quad \text{в } B_\nu \setminus K, \quad \psi|_K = 0, \quad \psi|_{S_\nu} = 1.$$

Из строгого принципа максимума вытекает, что $0 < \psi < 1$ почти всюду в $B_\nu \setminus K$. Имеем также

$$\operatorname{cap}(K, B_\nu) = \int_{B_\nu} |D\psi|^p dx. \quad (5.3)$$

Обозначим $v(x) = 1 - |x|^2$. Несложно увидеть, что

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |D(v\psi)|^p dx &= \int_{B_1} |\psi Dv + v D\psi|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{B_1} |\psi|^p |Dv|^p dx + 2^p \int_{B_1} |v|^p |D\psi|^p dx. \end{aligned}$$

Объединяя последнюю оценку с неравенствами $\|v\|_{L_\infty(B_1)} \leq 1$ и $\|\psi\|_{L_\infty(B_1)} \leq 1$, получим

$$\int_{B_1} |D(v\psi)|^p dx \leq 2^p \int_{B_1} |Dv|^p dx + 2^p \int_{B_1} |D\psi|^p dx. \quad (5.4)$$

Пусть постоянная $\varkappa_1 > 0$ удовлетворяет условию

$$\varkappa_1 \leq \int_{B_1} |Dv|^p dx;$$

тогда формулы (5.2)–(5.4) позволят нам утверждать, что

$$\int_{B_1} |D(v\psi)|^p dx \leq 2^{p+1} \int_{B_1} |Dv|^p dx. \quad (5.5)$$

Имеем, далее,

$$\int_{B_1} |v\psi|^p dx = \int_{B_1} |v - v(1 - \psi)|^p dx \geq \frac{1}{2^p} \int_{B_1} |v|^p dx - \int_{B_1} |v(1 - \psi)|^p dx. \quad (5.6)$$

Из неравенства Фридрихса следует, что

$$\int_{B_1} |v(1 - \psi)|^p dx \leq \int_{B_1} |1 - \psi|^p dx \leq \kappa_3 \int_{B_\nu} |D\psi|^p dx,$$

где постоянная $\kappa_3 > 0$ зависит только от n, p, ν . Тем самым, если мы потребуем, чтобы постоянная $\kappa_1 > 0$ удовлетворяла соотношению

$$\kappa_1 \leq \frac{1}{2^{p+1}\kappa_3} \int_{B_1} |v|^p dx,$$

то согласно формулам (5.2), (5.3) и (5.6) получим

$$\int_{B_1} |v\psi|^p dx \geq \frac{1}{2^{p+1}} \int_{B_1} |v|^p dx. \quad (5.7)$$

Из определения величины $\Lambda_{\min}(B_1 \setminus K)$ вытекает, что

$$\Lambda_{\min}(B_1 \setminus K) \leq \frac{\int_{B_1} |D(v\psi)|^p dx}{\int_{B_1} |v\psi|^p dx},$$

откуда ввиду соотношений (5.5) и (5.7) получим следующее неравенство:

$$\Lambda_{\min}(B_1 \setminus K) \leq \frac{4^{p+1} \int_{B_1} |Dv|^p dx}{\int_{B_1} |v|^p dx}.$$

Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^n$ – непустое открытое множество, а $\nu > 1$ – некоторое вещественное число. Для всякого $x \in \omega$ обозначим

$$\tilde{\mu}(x) = \sup_{t \in (0, \infty)} (t^{1-n} \text{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \omega, B_{\nu t}^x))^{1/(p-1)}.$$

Тогда

$$\Lambda_{\min}(\omega) \leq \kappa_4 \inf_{x \in \omega} \tilde{\mu}^p(x), \quad (5.8)$$

где постоянная $\kappa_4 > 0$ зависит только от n, p, ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.1 найдутся постоянные $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 > 0$, зависящие только от n, p, ν , такие, что для всех $x \in \omega$ и $t \in (0, \infty)$ условие

$$t^{p-n} \text{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \omega, B_{\nu t}^x) \leq \kappa_1 \quad (5.9)$$

влечет за собой неравенство

$$\Lambda_{\min}(B_t^x) \geq \varkappa_2 \Lambda_{\min}(B_t^x \cap \omega). \quad (5.10)$$

Поскольку $\Lambda_{\min}(B_t^x \cap \omega) \geq \Lambda_{\min}(\omega)$ ввиду того, что $\Lambda_{\min}$ – монотонная функция множества, и при этом $\Lambda_{\min}(B_t^x) = \varkappa_5 t^{-p}$, где постоянная $\varkappa_5 > 0$ зависит только от n, p , то из неравенства (5.10) немедленно следует, что

$$\varkappa_6 t^{-p} \geq \Lambda_{\min}(\omega), \quad (5.11)$$

где $\varkappa_6 = \varkappa_5 / \varkappa_2$. Таким образом, если существует $x \in \omega$ такое, что (5.9) выполнено для всех $t \in (0, \infty)$, то $\Lambda_{\min}(\omega) = 0$ и формула (5.8) очевидна.

Пусть теперь для любого $x \in \omega$ найдется $t \in (0, \infty)$, удовлетворяющее соотношению

$$t^{p-n} \operatorname{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \omega, B_{\nu t}^x) > \varkappa_1. \quad (5.12)$$

Для каждого $x \in \omega$ через t_x обозначим точную нижнюю грань множества всех t , для которых справедливо (5.12). Поскольку ω – открытое множество, то $t_x > 0$ для любого $x \in \omega$. Очевидно также, что если $t \in (0, t_x)$, то (5.12) не имеет места, поэтому справедливо неравенство (5.9), из которого вытекает (5.11). Переходя в (5.11) к пределу при $t \rightarrow t_x - 0$, получим

$$\varkappa_6 t_x^{-p} \geq \Lambda_{\min}(\omega) \quad (5.13)$$

для любого $x \in \omega$.

В то же время для всякого $x \in \omega$ найдется последовательность $t_i \in (t_x, \infty)$, $i = 1, 2, \dots$, такая, что $t_i \rightarrow t_x$ при $i \rightarrow \infty$ и

$$t_i^{p-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{t_i}^x} \setminus \omega, B_{\nu t_i}^x) > \varkappa_1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тем самым имеем

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} t_i^{1-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{t_i}^x} \setminus \omega, B_{\nu t_i}^x) \geq \frac{\varkappa_1}{t_x^{p-1}},$$

откуда, в свою очередь, будем иметь

$$\tilde{\mu}(x) \geq \frac{\varkappa_1^{1/(p-1)}}{t_x}$$

для любого $x \in \omega$. Объединяя последнюю оценку с формулой (5.13), приходим к заключению, что

$$\Lambda_{\min}(\omega) \leq \varkappa_1^{-p/(p-1)} \varkappa_6 \tilde{\mu}^p(x)$$

для любого $x \in \omega$. Доказательство полностью завершено.

ЛЕММА 5.3. Пусть $\varepsilon > 0$, $\theta > 1$, $\delta > 1$, $\nu > 1$ и $r > 0$ – некоторые вещественные числа, причем $\Omega_{r/\theta, r\theta} \neq \emptyset$ и для всякого $x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}$ существует $t \in (0, \delta|x|)$ такое, что

$$t^{p-n} \operatorname{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \Omega, B_{\nu t}^x) \geq \varepsilon. \quad (5.14)$$

Тогда

$$\inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \leq \varkappa_7 \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}} \mu^p(x; \delta, \nu), \quad (5.15)$$

где постоянная $\varkappa_7 > 0$ зависит только от $n, p, \varepsilon, \theta, \delta, \nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\tilde{\mu}(x) \leq \varkappa_8 \mu(x; \delta, \nu) \quad (5.16)$$

для любого $x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}$, где

$$\tilde{\mu}(x) = \sup_{t \in (0, \infty)} (t^{1-n} \text{cap}(\overline{B_t^x} \setminus \Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}, B_{\nu t}^x))^{1/(p-1)},$$

а постоянная $\varkappa_8 > 0$ зависит только от $n, p, \varepsilon, \theta, \delta, \nu$.

Пусть $x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}$. Возьмем $\xi \in (0, \infty)$, удовлетворяющее неравенству

$$(\xi^{1-n} \text{cap}(\overline{B_\xi^x} \setminus \Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}, B_{\nu\xi}^x))^{1/(p-1)} \geq \frac{1}{2} \tilde{\mu}(x). \quad (5.17)$$

Существует, очевидно, $\delta_0 \in (0, \delta)$, зависящее только от θ, δ и такое, что шар $\overline{B_{\delta_0|x|}^x}$ целиком лежит в $B_{r/\theta^2, r\theta^2}$. Предположим сначала, что $\xi \in (0, \delta_0|x|)$. Тогда $\overline{B_\xi^x} \setminus \Omega_{r/\theta^2, r\theta^2} = \overline{B_\xi^x} \setminus \Omega$, поэтому согласно (5.17) имеем

$$\mu(x; \delta, \nu) \geq \frac{1}{2} \tilde{\mu}(x),$$

откуда немедленно следует (5.16).

Рассмотрим теперь случай $\xi \geq \delta_0|x|$. Несложно увидеть, что

$$\xi^{1-n} \text{cap}(\overline{B_\xi^x} \setminus \Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}, B_{\nu\xi}^x) \leq \xi^{1-n} \text{cap}(\overline{B_\xi^x}, B_{\nu\xi}^x) = \varkappa_9 \xi^{1-p},$$

где постоянная $\varkappa_9 > 0$ зависит только от n, p, ν . Последнее соотношение и неравенство (5.17) влекут оценку

$$\tilde{\mu}(x) \leq \frac{\varkappa_{10}}{\xi} \leq \frac{\varkappa_{10}}{\delta_0|x|},$$

где $\varkappa_{10} = 2\varkappa_9^{1/(p-1)}$. В то же время ввиду условия (5.14) имеем

$$\mu(x; \delta, \nu) \geq \frac{\varepsilon^{1/(p-1)}}{\delta|x|}.$$

Таким образом, можно утверждать, что

$$\tilde{\mu}(x) \leq \frac{\delta \varkappa_{10} \mu(x; \delta, \nu)}{\delta_0 \varepsilon^{1/(p-1)}},$$

и мы снова приходим к (5.16). Применяя лемму 5.2, получим

$$\Lambda_{\min}(\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}) \leq \varkappa_4 \inf_{x \in \Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}} \tilde{\mu}^p(x),$$

где постоянная $\varkappa_4 > 0$ зависит только от n, p, ν , откуда ввиду (5.16) следует, что

$$\Lambda_{\min}(\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}) \leq \varkappa_4 \varkappa_8^p \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}} \mu^p(x; \delta, \nu). \quad (5.18)$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2})$ – некоторая функция, не равная тождественно нулю. Продолжим φ на все пространство $\mathbb{R}^n$, полагая $\varphi = 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}$. Для любого вещественного числа $t \in (r/\theta^2, r\theta^2)$ такого, что $S_t \cap \Omega \neq \emptyset$, справедлива оценка

$$\int_{S_t \cap \Omega} |D\varphi|^p dS \geq \int_{S_t \cap \Omega} |\nabla \varphi|^p dS \geq \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \int_{S_t \cap \Omega} |\varphi|^p dS,$$

где, как и прежде, $|D\varphi| = (\sum_{i=1}^n |\partial\varphi/\partial x_i|^2)^{1/2}$ – норма градиента функции φ в $\mathbb{R}^n$, $|\nabla \varphi| = (g^{ij} \nabla_i \varphi \nabla_j \varphi)^{1/2}$, $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$, g_{kj} – метрический тензор на S_t , индуцированный естественной метрикой в $\mathbb{R}^n$, а dS – элемент $(n-1)$ -мерного объема сферы S_t . Тем самым имеем

$$\frac{\int_{\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}} |D\varphi|^p dx}{\int_{\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}} |\varphi|^p dx} = \frac{\int_{r/\theta^2}^{r\theta^2} \int_{S_t} |D\varphi|^p dS dt}{\int_{r/\theta^2}^{r\theta^2} \int_{S_t} |\varphi|^p dS dt} \geq \frac{\int_I \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \int_{S_t} |\varphi|^p dS dt}{\int_I \int_{S_t} |\varphi|^p dS dt},$$

где $I = \{t \in (r/\theta^2, r\theta^2) : S_t \cap \Omega \neq \emptyset\}$, откуда вытекает, что

$$\frac{\int_{\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}} |D\varphi|^p dx}{\int_{\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}} |\varphi|^p dx} \geq \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega).$$

Минимизируя левую часть последнего выражения по всем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2})$, не равным тождественно нулю, находим

$$\Lambda_{\min}(\Omega_{r/\theta^2, r\theta^2}) \geq \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega).$$

Объединяя полученное неравенство и (5.18), завершаем доказательство.

ЛЕММА 5.4. Пусть $\varepsilon > 0$, $\theta > 1$, $\delta > 1$, $\nu > 1$ и $r > 0$ – вещественные числа такие, что

$$\xi^{p-n} \text{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{\nu\xi}^y) \leq \varepsilon \quad (5.19)$$

для некоторого $y \in \overline{B_{r/\theta, r\theta}} \cap \Omega$, где $\xi = |y| \min\{(\theta-1)/\theta, \delta\}/2$. Тогда

$$(\kappa_{11} - \kappa_{12}\varepsilon) \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \leq r^{-n} \text{cap}(\overline{B_{r/\theta^2, |y|}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}), \quad (5.20)$$

где постоянные $\kappa_{11} > 0$, $\kappa_{12} > 0$ зависят только от $n, p, \theta, \delta, \nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K_1 = \overline{B_{r/\theta^2, |y|}} \setminus (\Omega \cup B_\xi^y)$ и $K_2 = \overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega$. Рассмотрим решения следующих краевых задач:

$$\begin{aligned} \text{div}(|Dw_1|^{p-2} Dw_1) &= 0 & \text{в } B_{r/\theta^3, r\theta^2} \setminus K_1, & & w_1|_{K_1} &= 1, & & w_1|_{\partial B_{r/\theta^3, r\theta^2}} &= 0; \\ \text{div}(|Dw_2|^{p-2} Dw_2) &= 0 & \text{в } B_{r/\theta^3, r\theta^2} \setminus K_2, & & w_2|_{K_2} &= 1, & & w_2|_{\partial B_{r/\theta^3, r\theta^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Из принципа максимума следует, что w_1 и w_2 – неотрицательные не превосходящие единицы функции почти всюду на множестве $B_{r/\theta^3, r\theta^2}$. Положим

$$w = (1 - w_1)(1 - w_2).$$

Поскольку $\overline{B_{r/\theta^2, |y|}} \setminus \Omega = K_1 \cup K_2$, то $w = 0$ на $\overline{B_{r/\theta^2, |y|}} \setminus \Omega$. В частности, найдется последовательность функций $\varphi_i \in C^\infty(B_{r/\theta^3, r\theta^2})$, $i = 1, 2, \dots$, равных нулю в окрестности $\overline{B_{r/\theta^2, |y|}} \setminus \Omega$ и таких, что $\|w - \varphi_i\|_{W_2^1(B_{r/\theta^2, |y|})} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Обозначим $I = \{t \in (r/\theta^2, |y|) : S_t \cap \Omega \neq \emptyset\}$. Поскольку $y \in \Omega$, то $I \neq \emptyset$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |D\varphi_i|^p dx &= \int_{r/\theta^2}^{|y|} \int_{S_t} |D\varphi_i|^p dS dt \\ &\geq \int_I \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \int_{S_t} |\varphi_i|^p dS dt, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |D\varphi_i|^p dx &\geq \inf_{t \in I} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |\varphi_i|^p dx \\ &\geq \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |\varphi_i|^p dx, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

откуда предельным переходом при $i \rightarrow \infty$ получим

$$\int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |Dw|^p dx \geq \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |w|^p dx. \quad (5.21)$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |w|^p dx &= \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |1 - w_1 - (1 - w_1)w_2|^p dx \\ &\geq \frac{1}{2^p} \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |1 - w_1|^p dx - \int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |(1 - w_1)w_2|^p dx. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Оценим первое слагаемое в правой части формулы (5.22). Рассмотрим преобразование координат $x' = x'(x)$, состоящее из поворота и гомотетии и переводящее y в единичный орт $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Не представляет труда убедиться в том, что

$$\int_{B_{r'/\theta^2, |y|}} |1 - w_1|^p dx \geq |y|^n \int_{B_{r'/\theta^2, 1}} |1 - \tilde{w}_1|^p dx', \quad (5.23)$$

где $\tilde{w}_1(x') = w_1(x(x'))$, $x = x(x')$ — преобразование, обратное к $x' = x'(x)$, а $r' = r/|y|$. Функция $\tilde{w}_1$ является решением задачи

$$\operatorname{div}(|D\tilde{w}_1|^{p-2} D\tilde{w}_1) = 0 \quad \text{в } B_{r'/\theta^3, r'\theta^2} \setminus K'_1, \quad \tilde{w}_1|_{K'_1} = 1, \quad \tilde{w}_1|_{\partial B_{r'/\theta^3, r'\theta^2}} = 0,$$

где K'_1 — образ компакта K_1 при отображении $x' = x'(x)$. Рассмотрим также функцию $\hat{w}_1$ такую, что

$$\operatorname{div}(|D\hat{w}_1|^{p-2} D\hat{w}_1) = 0 \quad \text{в } B_{1/\theta^4, \theta^3} \setminus \hat{K}_1, \quad \hat{w}_1|_{\hat{K}_1} = 1, \quad \hat{w}_1|_{\partial B_{1/\theta^4, \theta^3}} = 0,$$

где $\hat{K}_1 = \overline{B_{1/\theta^3, 1}} \setminus B_{\xi'}^{e_1}$, $\xi' = \min\{(\theta - 1)/\theta, \delta\}/2$.

В соответствии с принципом максимума имеем $0 \leq \widehat{w}_1 \leq 1$ почти всюду на $B_{1/\theta^4, \theta^3}$. При этом включения $K'_1 \subset \widehat{K}_1$ и $B_{1/\theta^3, \theta^2} \subset B_{1/\theta^4, \theta^3}$ позволяют утверждать, что $\widetilde{w}_1$ не превосходит $\widehat{w}_1$ почти всюду на множестве $B_{r'/\theta^3, r'\theta^2}$, а значит, и на $B_{r'/\theta^2, 1}$, поскольку $B_{r'/\theta^2, 1} \subset B_{r'/\theta^3, r'\theta^2}$. Тем самым формула (5.23) влечет неравенство

$$\int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |1 - w_1|^p dx \geq |y|^n \int_{B_{r'/\theta^2, 1}} |1 - \widehat{w}_1|^p dx',$$

откуда ввиду того, что $B_{\xi'}^{e_1} \cap B_1 \subset B_{r'/\theta^2, 1}$ и $|y| \geq r/\theta$, находим

$$\int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |1 - w_1|^p dx \geq \kappa_{13} \left(\frac{r}{\theta} \right)^n, \quad (5.24)$$

где

$$\kappa_{13} = \int_{B_{\xi'}^{e_1} \cap B_1} |1 - \widehat{w}_1|^p dx'.$$

Согласно строгому принципу максимума имеем $0 < \widehat{w}_1 < 1$ на $B_{\xi'}^{e_1} \cap B_1$, следовательно, $\kappa_{13} > 0$. Несложно увидеть, что величина κ_{13} зависит только от n, p, θ, δ .

Для второго слагаемого в правой части (5.22), применяя неравенство Фридрихса, получим

$$\int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |(1 - w_1)w_2|^p dx \leq \int_{B_{r/\theta^3, r\theta^2}} |w_2|^p dx \leq \kappa_{14} r^p \int_{B_{r/\theta^3, r\theta^2}} |Dw_2|^p dx,$$

где постоянная $\kappa_{14} > 0$ зависит только от n, p, θ . Из определения функции w_2 следует, что

$$\int_{B_{r/\theta^3, r\theta^2}} |Dw_2|^p dx = \text{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}).$$

С другой стороны, можно показать [15, § 9.1], что

$$\text{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}) \leq \kappa_{15} \text{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{\nu\xi}^y),$$

где постоянная $\kappa_{15} > 0$ зависит только от n, p, θ, ν . Таким образом, справедливо соотношение

$$\int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |(1 - w_1)w_2|^p dx \leq \kappa_{16} r^p \text{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{\nu\xi}^y),$$

где $\kappa_{16} = \kappa_{14}\kappa_{15}$, объединяя которое с условием (5.19), получим

$$\int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |(1 - w_1)w_2|^p dx \leq \kappa_{17} r^n \varepsilon,$$

где постоянная $\kappa_{17} > 0$ зависит только от $n, p, \theta, \delta, \nu$. Последняя оценка вместе с формулами (5.22) и (5.24) позволяет утверждать, что

$$\int_{B_{r/\theta^2, |y|}} |w|^p dx \geq r^n (\kappa_{18} - \kappa_{17}\varepsilon),$$

где $\varkappa_{18} = \varkappa_{13}/(2^p \theta^n)$, откуда согласно (5.21) находим

$$\int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |Dw|^p dx \geq r^n (\varkappa_{18} - \varkappa_{17} \varepsilon) \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega). \quad (5.25)$$

В то же время, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |Dw|^p dx &= \int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |(1 - w_2)Dw_1 + (1 - w_1)Dw_2|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |(1 - w_2)Dw_1|^p dx + 2^p \int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |(1 - w_1)Dw_2|^p dx. \end{aligned}$$

Тем самым, принимая во внимание неравенства

$$\begin{aligned} \int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |(1 - w_2)Dw_1|^p dx &\leq \int_{B_{r/\theta^3}, r\theta^2} |Dw_1|^p dx = \text{cap}(K_1, B_{r/\theta^3}, r\theta^2), \\ \int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |(1 - w_1)Dw_2|^p dx &\leq \int_{B_{r/\theta^3}, r\theta^2} |Dw_2|^p dx = \text{cap}(K_2, B_{r/\theta^3}, r\theta^2), \end{aligned}$$

получим

$$\int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |Dw|^p dx \leq 2^p \text{cap}(K_1, B_{r/\theta^3}, r\theta^2) + 2^p \text{cap}(K_2, B_{r/\theta^3}, r\theta^2). \quad (5.26)$$

Заметим, далее, что $K_1 \subset \overline{B_{r/\theta^2}, |y|} \setminus \Omega$ и $K_2 \subset \overline{B_{r/\theta^2}, |y|} \setminus \Omega$, поэтому

$$\begin{aligned} \text{cap}(K_1, B_{r/\theta^3}, r\theta^2) &\leq \text{cap}(\overline{B_{r/\theta^2}, |y|} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3}, r\theta^2), \\ \text{cap}(K_2, B_{r/\theta^3}, r\theta^2) &\leq \text{cap}(\overline{B_{r/\theta^2}, |y|} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3}, r\theta^2) \end{aligned}$$

и (5.26) влечет неравенство

$$\int_{B_{r/\theta^2}, |y|} |Dw|^p dx \leq 2^{p+1} \text{cap}(\overline{B_{r/\theta^2}, |y|} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3}, r\theta^2),$$

объединяя которое с оценкой (5.25), завершаем доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Обозначим $\theta = \zeta^{1/3}$ и $\sigma_i = \theta^{1-i}$, $i = 1, \dots, 4$. Пусть $\nu > 1$ и $0 < \delta < 1$ – некоторые вещественные числа, причем $1/(1 - \delta) < \theta$. Тогда из того, что $\Lambda = 0$ на множестве $[R_0, \zeta R_0] \cap [R_0, R_1]$, будет следовать, что функция Λ обращается в нуль на множестве $([R_0, \theta R_0/(1 - \delta)] \cup [R_0, R_0/\sigma_4]) \cap [R_0, R_1]$. Покажем, что

$$\varkappa_{19} \Lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta} \cap \Omega_{R_0, R_1}} \mu^p(x; \delta, \nu) + r^{-n} \text{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \quad (5.27)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$, где $\varkappa_{19} > 0$ – постоянная, зависящая только от $n, p, \nu, \delta, \theta$. Тогда для завершения доказательства нам останется лишь воспользоваться теоремой 2.4.

Пусть $r \in (R_0, R_1)$. Будем считать, что $S_{r/\theta} \cap \Omega \neq \emptyset$. Если это не так, то $r \leq \theta R_0$ и неравенство (5.27) очевидно, поскольку левая часть (5.27) равна

нулю. Положим $\varepsilon = \varkappa_{11}/(2\varkappa_{12})$, где $\varkappa_{11}$ и $\varkappa_{12}$ – постоянные в формуле (5.20). Возьмем $y \in S_{r/\theta} \cap \Omega$. Если выполнено соотношение (5.19), то согласно лемме 5.4

$$\frac{\varkappa_{11}}{2} \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \leq r^{-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{r/\theta^2, r/\theta}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}),$$

откуда, учитывая (2.1) и неравенство

$$\operatorname{cap}(\overline{B_{r/\theta^2, r/\theta}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}) \leq \operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}),$$

вытекающее из включения $B_{r\sigma_4, r\sigma_1} \subset B_{r/\theta^3, r\theta^2}$, получим (5.27).

Рассмотрим теперь случай, когда (5.19) не имеет места, т. е.

$$\xi^{p-n} \operatorname{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{\nu\xi}^y) > \varepsilon, \quad (5.28)$$

где $\xi = |y| \min\{(\theta - 1)/\theta, \delta\}/2$. Несложно увидеть [15, § 9.1], что

$$\operatorname{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \geq \varkappa_{20} \operatorname{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{\nu\xi}^y),$$

где постоянная $\varkappa_{20} > 0$ зависит только от $n, p, \nu, \delta, \theta$. При этом справедлива оценка

$$\operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \geq \operatorname{cap}(\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}),$$

так как $\overline{B_\xi^y \cap B_{|y|}} \subset \overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}}$. Таким образом, формула (5.28) позволяет утверждать, что

$$r^{-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}) \geq \varkappa_{21} r^{-p} \quad (5.29)$$

для некоторой постоянной $\varkappa_{21} > 0$, зависящей только от $n, p, \nu, \delta, \theta$.

Пусть для всякого $x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}$ существует $t \in (0, \delta|x|)$ такое, что выполнено соотношение (5.14). Тогда, учитывая лемму 5.3 и условие (2.1), будем иметь

$$\Lambda(r) \leq \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \leq \varkappa_7 \inf_{x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}} \mu^p(x; \delta, \nu),$$

где $\varkappa_7 > 0$ – постоянная из (5.15), что влечет неравенство (5.27). В свою очередь, если для некоторого $x \in \Omega_{r/\theta, r\theta}$ соотношение (5.14) не выполнено ни при каком $t \in (0, \delta|x|)$, то по лемме 5.4 получим

$$\frac{\varkappa_{11}}{2} \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \leq r^{-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{r/\theta^2, |x|}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}).$$

В то же время найдется постоянная $\varkappa_{22} > 0$, зависящая только от n, p, θ и такая, что

$$\operatorname{cap}(\overline{B_{r/\theta^2, |x|}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}) \leq \operatorname{cap}(\overline{B_{r/\theta^2, r\theta}} \setminus \Omega, B_{r/\theta^3, r\theta^2}) = \varkappa_{22} r^{n-p},$$

поэтому

$$\inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \leq \varkappa_{23} r^{-p},$$

где $\varkappa_{23} = 2\varkappa_{22}/\varkappa_{11}$, откуда согласно (2.1) и (5.29) находим

$$\Lambda(r) \leq \inf_{t \in (r/\theta^2, r\theta^2), S_t \cap \Omega \neq \emptyset} \lambda_{\min}(S_t \cap \Omega) \leq \varkappa_{24} r^{-n} \operatorname{cap}(\overline{B_{r\sigma_3, r\sigma_2}} \setminus \Omega, B_{r\sigma_4, r\sigma_1}),$$

где $\varkappa_{24} = \varkappa_{23}/\varkappa_{21}$, что также влечет неравенство (5.27). Теорема полностью доказана.

§ 6. Некоторые обобщения

Рассмотрим неравенства вида

$$\operatorname{div} A(x, Du) \geq F(x, u) \quad \text{в } \Omega_{R_0, R_1}, \quad 0 \leq R_0 < R_1 \leq \infty, \quad (6.1)$$

левая часть которых такая же, как в (1.1), а $F: \Omega_{R_0, R_1} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция.

Говорим, что $u \geq 0$ является решением (6.1), если $u \in W_p^1(\Omega_{R_0, r}) \cap L_\infty(\Omega_{R_0, r})$, $A(x, Du) \in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0, r})$ и $F(x, u) \in L_{p/(p-1)}(\Omega_{R_0, r})$ для любого вещественного числа $r \in (R_0, R_1)$ и при этом

$$-\int_{\Omega_{R_0, R_1}} A(x, Du) D\varphi \, dx \geq \int_{\Omega_{R_0, R_1}} F(x, u) \varphi \, dx$$

для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{R_0, R_1})$.

Будем предполагать, что $f: [R_0, R_1) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция такая, что

$$\begin{aligned} f(r, t-0) &= f(r, t), & R_0 < r < R_1, & \quad t > 0, \\ f(r, t_1) &\geq f(r, t_2), & R_0 < r < R_1, & \quad t_1 \geq t_2 > 0, \end{aligned}$$

и при этом

$$F(x, t) \geq \sup_{r \in (|x|/\sigma, \sigma|x|) \cap (R_0, R_1)} f(r, t)$$

для почти всех $x \in \Omega_{R_0, R_1}$ и всех $t \in (0, \infty)$, где $\sigma > 1$ – некоторое вещественное число.

В работе [4] были доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть u – неотрицательное решение задачи (6.1), (1.2), причем $M(\cdot; u)$ – неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) , удовлетворяющая условию (2.2). Тогда для любого вещественного числа $a > p - 2$ существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, C_1, C_2$, такие, что задача Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) &= \alpha f(r, \beta m), \\ m(R_0) &= M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \end{aligned}$$

имеет решение на промежутке $[R_0, R_1)$, удовлетворяющее оценке (2.5) для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 6.2. В предположениях теоремы 6.1 для любого $a > p - 2$ существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, C_1, C_2$ и такие, что

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \int_{R_0}^r \left(\frac{\alpha}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} f(\xi, \beta M(\xi; u)) \, d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \quad (6.2)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

Объединяя теоремы 2.1–2.4 с теоремами 6.1, 6.2, получим следующие результаты.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $a > p - 2$ и $\zeta > 1$ – некоторые вещественные числа, и пусть $\Lambda: [R_0, R_1) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция, причем $\Lambda = 0$ на множестве $[R_0, \zeta R_0] \cap [R_0, R_1)$ и для всех $r \in (R_0, R_1)$ имеет место (2.1). Пусть u – неотрицательное решение задачи (6.1), (1.2) такое, что $M(\cdot; u)$ – монотонно неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) , удовлетворяющая условию (2.2). Тогда найдутся постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, \zeta, C_1, C_2$, такие, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение задачи Коши

$$\frac{1}{r^{1+a}} \frac{d}{dr} \left(r^{1+a} \left| \frac{dm}{dr} \right|^{p-2} \frac{dm}{dr} \right) = \alpha f(r, \beta m) + \gamma \Lambda(r) |m|^{p-2} m, \quad (6.3)$$

$$m(R_0) = M(R_0 + 0; u), \quad m'(R_0) = 0, \quad (6.4)$$

удовлетворяющее оценке (2.5) для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 6.4. В предположениях теоремы 6.3 найдутся постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, \zeta, C_1, C_2$, такие, что

$$M(r; u) - M(R_0 + 0; u) \geq \int_{R_0}^r \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} (\alpha f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \gamma \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u)) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \quad (6.5)$$

для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть $a > p - 2$, $\nu > 1$, $0 < \delta < 1$, $\theta > 1 + \delta$ и $0 < \sigma_4 < \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 \leq 1$ – некоторые вещественные числа, а $\Lambda: [R_0, R_1) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция, причем $\Lambda = 0$ на множестве $([R_0, \theta R_0 / (1 - \delta)] \cup [R_0, R_0 / \sigma_4]) \cap [R_0, R_1)$ и для всех $r \in (R_0, R_1)$ имеет место (2.7). Пусть u – неотрицательное решение задачи (6.1), (1.2) такое, что $M(\cdot; u)$ – монотонно неубывающая функция на интервале (R_0, R_1) и при этом справедливо соотношение (2.2). Тогда найдутся постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, \nu, \delta, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, такие, что на промежутке $[R_0, R_1)$ существует решение задачи Коши (6.3), (6.4), удовлетворяющее оценке (2.5) для всех $r \in (R_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 6.6. В предположениях теоремы 6.5 найдутся постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, зависящие только от $n, p, a, \sigma, \nu, \delta, \theta, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, C_1, C_2$, такие, что для всех $r \in (R_0, R_1)$ имеет место неравенство (6.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.3. Допустим, что теорема 6.4 уже доказана. Обозначим $m_0(r) = M(R_0 + 0; u)$ и

$$m_i(r) = M(R_0 + 0; u) + \int_{R_0}^r \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} (\alpha f(\xi, \beta m_{i-1}(\xi)) + \gamma \Lambda(\xi) m_{i-1}^{p-1}(\xi)) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt$$

для всех $i = 1, 2, \dots$. Согласно теореме 6.4 последовательность измеримых функций $m_i: [R_0, R_1) \rightarrow (0, \infty)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, должна удовлетворять неравенствам $m_{i-1}(r) \leq m_i(r) \leq M(r; u)$ для всех $r \in [R_0, R_1)$, $i = 1, 2, \dots$, поэтому существует измеримая функция $m: [R_0, R_1) \rightarrow (0, \infty)$ такая, что $m_i \rightarrow m$ при $i \rightarrow \infty$ всюду на промежутке $[R_0, R_1)$.

Нетрудно убедиться в том, что будет выполнена оценка (2.5). Применяя, далее, теорему Лебега об ограниченной сходимости, получим

$$m(r) = M(R_0 + 0; u) + \int_{R_0}^r \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} (\alpha f(\xi, \beta m(\xi)) + \gamma \Lambda(\xi) m^{p-1}(\xi)) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt$$

для всех $r \in [R_0, R_1)$, откуда немедленно следуют (6.3) и (6.4). Теорема полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.5 аналогично доказательству теоремы 6.3 с тем отличием, что вместо теоремы 6.4 теперь надо использовать теорему 6.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.4 вытекает из теорем 6.2, 2.2. В самом деле, складывая формулы (6.2) и (2.6), имеем

$$\begin{aligned} M(r; u) - M(R_0 + 0; u) &\geq \frac{1}{2} \int_{R_0}^r \left(\frac{\alpha}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} f(\xi, \beta M(\xi; u)) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{R_0}^r \left(\frac{\gamma}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \\ &\geq \int_{R_0}^r \left(\frac{1}{t^{1+a}} \int_{R_0}^t \xi^{1+a} \left(\frac{\alpha}{2^p} f(\xi, \beta M(\xi; u)) + \frac{\gamma}{2^p} \Lambda(\xi) M^{p-1}(\xi; u) \right) d\xi \right)^{1/(p-1)} dt \end{aligned}$$

для всех $r \in [R_0, R_1)$, что эквивалентно неравенству (6.5) теоремы 6.4, разумеется, с другими, чем в теоремах 6.2, 2.2, значениями постоянных α и γ .

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, из теорем 6.2, 2.4 получим теорему 6.6.

Список литературы

1. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964, 538 с.; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York-London, 1968, xviii+495 pp.
2. V. Ferone, B. Messano, "Comparison results for nonlinear elliptic equations with lower-order terms", *Math. Nachr.*, **252**:1 (2003), 43–50.
3. J. B. Keller, "On solutions of $\Delta u = f(u)$ ", *Comm. Pure Appl. Math.*, **10**:4 (1957), 503–510.
4. A. A. Kon'kov, "Comparison theorems for elliptic inequalities with a non-linearity in the principal part", *J. Math. Anal. Appl.*, **325**:2 (2007), 1013–1041.
5. B. Messano, "Symmetrization results for classes of nonlinear elliptic equations with q -growth in the gradient", *Nonlinear Anal.*, **64**:12 (2006), 2688–2703.

6. R. Osserman, “On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ ”, *Pacific J. Math.*, **7**:4 (1957), 1641–1647.
7. L. Véron, “Comportement asymptotique des solutions d’équations elliptiques semi-linéaires dans $\mathbf{R}^n$ ”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **127**:1 (1981), 25–50.
8. В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, “О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка”, *Матем. сб.*, **135(177)**:3 (1988), 346–360; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, E. M. Landis, “On qualitative properties of solutions of a nonlinear equation of second order”, *Math. USSR-Sb.*, **63**:2 (1989), 337–350.
9. В. Г. Мазья, “О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме”, *Матем. заметки*, **2**:2 (1967), 209–220; англ. пер.: V. G. Maz’ya, “The behavior near the boundary of solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation in divergent form”, *Math. Notes*, **2**:2 (1967), 610–617.
10. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
11. И. И. Привалов, *Субгармонические функции*, ОНТИ НКТП СССР, М.–Л., 1937, 200 с.
12. С. Г. Михлин, *Линейные уравнения с частными производными*, Высшая школа, М., 1977, 431 с.
13. А. А. Коньков, “Поведение решений эллиптических неравенств, нелинейных относительно старших производных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:1 (2007), 17–54; англ. пер.: A. A. Kon’kov, “The behaviour of solutions of elliptic inequalities that are non-linear with respect to the highest derivatives”, *Izv. Math.*, **71**:1 (2007), 15–51.
14. J. Serrin, “Local behaviour of solutions of quasilinear equations”, *Acta Math.*, **111**:1 (1964), 247–302.
15. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985, 416 с.; англ. пер.: V. G. Maz’ja, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985, xix+486 pp.

АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КОНЬКОВ
 (ANDREI A. KONKOV)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: konkov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
 15.11.2012
 22.08.2013