Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Е. В. Юшков, Разрушение решений нелинейных уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 79–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:03:17

УДК 517.957

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Е. В. Юшков

Разрушение решений нелинейных уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова

Рассмотрены два важных в физических приложениях уравнения: Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова. В ограниченных и неограниченных областях для этих уравнений получены достаточные условия разрушения их решений за конечное время. Показано влияние начальных условий на время разрушения, для чего использован метод нелинейной емкости, предложенный С. И. Похожаевым и Э. Л. Митидиери, в сочетании с методом пробных функций, развитым в совместных работах с В. А. Галактионовым. Отметим, что для многих уравнений этого класса результаты по разрушению получены впервые.

Библиография: 32 наименования.

Ключевые слова: уравнение Кадомцева–Петвиашвили, уравнение Захарова–Кузнецова, разрушение решения, метод нелинейной емкости.

DOI: 10.4213/im8072

§ 1. Введение

Хорошо известно, какую роль в приложениях играет уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Недавно для этого уравнения С. И. Похожаевым были получены достаточные условия разрушения решения на конечном промежутке времени (см. [1], [2]). При этом были рассмотрены как классические, так и слабые решения соответствующих начально-краевых задач. Для исследования феномена разрушения использовался оригинальный метод нелинейной емкости, впервые предложенный в работе [3]. Не менее используемыми в физических приложениях являются многомерные обобщения уравнения Кортевега–де Фриза: уравнение Кадомцева–Петвиашвили [4]–[9]

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x = \pm \Delta_y u, \quad \Delta_y \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_{N-1}^2}, \quad N \geq 2, \quad (1.1)$$

и его сильно диссипативный вариант [10]

$$(u_t + uu_x - u_{xxxx})_x = \pm \Delta_y u; \quad (1.2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00376-а) и Программы Президента РФ “Поддержка молодых ученых России” (грант MD-99.2009.1).

уравнение Захарова–Кузнецова [11]–[13]

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + \Delta_y u_x = 0; \quad (1.3)$$

уравнение Хохлова–Заболоцкой–Кузнецова [14]

$$(u_t - uu_x - u_{xx})_x = \Delta_y u; \quad (1.4)$$

уравнение Хохлова–Заболоцкой [15]

$$(u_x - uu_\tau)_\tau = \Delta_y u, \quad \tau = t - x; \quad (1.5)$$

родственное ему уравнение Линия–Рейсснера–Цзяня [16]

$$(u_t + (K_\infty + u)u_x)_x = \Delta_y u \quad (1.6)$$

и, наконец, уравнение Островского [17]

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x = u. \quad (1.7)$$

Этот список, объединенный общей нелинейностью, может быть дополнен родственным уравнением Кадомцева–Петвиашвили–Бенджамена–Бона–Махони [18], [19]

$$(u_t + uu_x \pm u_{xxt})_x = \pm \Delta_y u. \quad (1.8)$$

Заметим, что некоторые результаты о разрушении для уравнения Кадомцева–Петвиашвили в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ были получены в работе [5], где рассматривалось уравнение

$$(u_t + u_{xxx} + u^p u_x)_x = u_{yy} \quad (1.9)$$

при $p \geq 4/3$, причем $p = n/m$, где n четное, m нечетное. Нельзя также не отметить результаты, полученные Дж. Саутом в [7]–[9].

В настоящей работе мы исследуем феномен разрушения для уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова на примере трех начально-краевых задач: в слое $(x, y) \in (0, L) \times \mathbb{R}^{N-1}$, в полупространстве $x > 0$, $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ и во всем пространстве $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ при $t > 0$ и $N \geq 2$. Во всех случаях методом нелинейной емкости удастся получить достаточные условия разрушения и оценки сверху времени разрушения.

В заключение напомним, что в настоящее время существуют три основных метода исследования явления разрушения: энергетический метод Х. А. Левина [20]–[26], метод автомоделных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [27], [28], и, наконец, метод нелинейной емкости С. И. Похожаева и Э. Л. Митидиери [3], [29], [30]. Для последнего наша работа раскрывает новую широкую область применения в теоретической и прикладной физике для ограниченных и неограниченных областей.

§ 2. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили

2.1. Задача в слое $x \in (0, L)$. Рассмотрим сначала следующую начально-краевую задачу:

$$(u_t - uu_x + u_{xxx})_x = \sigma \Delta_y u, \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad L > 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad (2.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=0} = 0, \quad (2.2)$$

где мы ввели обобщенную координату $y = (y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ и оператор Лапласа

$$\Delta_y \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y_{N-1}^2}.$$

Для вывода достаточных условий разрушения гладкого решения начально-краевой задачи (2.1) и (2.2) мы воспользуемся методом пробных функций, развитым в работах [3] и [29]. Предположим, найдется такое $T > 0$, что существует классическое решение $u(x, y, t)$ рассматриваемой задачи в классе

$$\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(4)}([0, L]) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1})).$$

Умножив обе части равенства (2.1) на пробную функцию

$$\psi(x, y) = (L - x)^\lambda \phi(y), \quad \lambda > 4,$$

проинтегрируем его по области $(0, L) \times \mathbb{R}^{N-1}$. Относительно функции $\phi(y)$ пока предположим, что выполнены условия

$$\phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}), \quad \phi \geq 0. \quad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что при интегрировании по частям в силу граничных условий (2.2) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) u_{tx} dx dy &= \lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-1} \phi(y) u_t dx dy, \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) u_{xxxx} dx dy &= \frac{\lambda!}{(\lambda - 4)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-4} \phi(y) u dx dy, \\ -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) (u^2)_{xx} dx dy &= -\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-2} \phi(y) u^2 dx dy, \\ \sigma \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) \Delta_y u dx dy &= \sigma \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \Delta_y \phi(y) u dx dy. \end{aligned}$$

Таким образом, из полученных равенств и уравнения (2.1) вытекает следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = & \frac{\lambda-1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) u^2 dx dy \\ & - \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-4)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-4} \phi(y) u dx dy \\ & + \frac{\sigma}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda \Delta_y \phi(y) u dx dy, \end{aligned} \quad (2.4)$$

в котором мы использовали обозначение

$$J(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \phi(y) u dx dy. \quad (2.5)$$

Из равенства (2.4) можно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} \geq & \frac{\lambda-1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) u^2 dx dy \\ & - \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-4)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-4} \phi(y) u dx dy \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda |\Delta_y \phi(y)| |u| dx dy. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Получим оценку сверху для третьего слагаемого в правой части (2.6). Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda |\Delta_y \phi(y)| |u| dx dy \\ & = \int_0^L (L-x)^{\frac{\lambda+2}{2}} (L-x)^{\frac{\lambda-2}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|}{\phi^{1/2}} \phi^{1/2} |u| dy \\ & \leq \left(\int_0^L (L-x)^{\lambda+2} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\int_0^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (L-x)^{\lambda-2} \phi |u|^2 dx dy \right)^{1/2} \\ & = \frac{L^{(\lambda+3)/2}}{\sqrt{\lambda+3}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy \right)^{1/2} J_1^{1/2}, \\ & \quad J_1 = \int_0^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (L-x)^{\lambda-2} \phi |u|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Воспользуемся неравенством Юнга [31] и получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda |\Delta_y \phi(y)| |u| dx dy \\ & \leq \frac{\lambda-1}{4} J_1 + \frac{4L^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\lambda^2(\lambda-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тогда из неравенства (2.6) вытекает неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{\lambda-1}{4} J_1 - \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-4)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-4} \phi(y) u \, dx \, dy - \frac{4L^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\lambda^2(\lambda-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy. \quad (2.9)$$

Положим $\lambda = 6$, и выражение (2.9) будет иметь вид

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{5}{4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \phi(y) \left(u - \frac{4!}{(L-x)^2} \right)^2 \, dx \, dy - 6! L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy - \frac{L^9}{405} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy. \quad (2.10)$$

Воспользуемся неравенством Йенсена [31] для получения оценки снизу. Справедлива следующая цепочка:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \phi(y) \left(u - \frac{4!}{(L-x)^2} \right) \, dx \, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^2 \phi^{1/2} \left(u - \frac{4!}{(L-x)^2} \right) (L-x)^2 \phi^{1/2} \, dx \, dy \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \phi(y) \left(u - \frac{4!}{(L-x)^2} \right)^2 \, dx \, dy \right|^{1/2} \\ &\quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \phi(y) \, dx \, dy \right|^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, из неравенства (2.9) и оценки снизу (2.11) мы получим обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\frac{dF}{dt} \geq k^2 F^2 - a^2, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 &= 6! L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy + \frac{L^9}{405} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy, \quad k^2 = \frac{25}{4L^5} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy \right|^{-1}, \\ F(t) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \phi(y) \left(u(x, y, t) - \frac{4!}{(L-x)^2} \right) \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким образом, интегрируя (2.12), получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть начальные данные $u_0(x, y)$ удовлетворяют условию

$$F_0 = F(0) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \phi(y) \left(u_0(x, y) - \frac{4!}{(L-x)^2} \right) \, dx \, dy > \frac{a}{k}. \quad (2.14)$$

Тогда классическое решение задачи (2.1), (2.2) не существует глобально во времени. Более того, имеет место оценка снизу

$$F(t) \geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 e^{2akt}}{1 - c_0 e^{2akt}}, \quad c_0 = \frac{kF_0 - a}{kF_0 + a}, \quad (2.15)$$

следовательно,

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2ak} \ln \left(\frac{kF_0 - a}{kF_0 + a} \right), \quad (2.16)$$

где

$$a^2 = 6! L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy + \frac{L^9}{405} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy, \quad k^2 = \frac{25}{4L^5} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \right|^{-1}. \quad (2.17)$$

Естественно, произвол в выборе λ , $\psi(x, y)$ и $\phi(y)$ будет влиять на результат о разрушении решения, так что поиск оптимальной пробной функции, требующий решения вариационной задачи, может существенно улучшить полученные результаты. Однако, как было отмечено С. И. Похожаевым [1], выбор степенной пробной функции даст условия разрушения, достаточно близкие к необходимым.

2.2. Задача в полупространстве $x > 0$. Теперь рассмотрим начально-краевую задачу в полупространстве $x > 0$. Для этого воспользуемся результатом о разрушении решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2) в слое. Прежде всего дадим формулировку рассматриваемой задачи в полупространстве:

$$(u_t - uu_x + u_{xxx})_x = \sigma \Delta_y u, \quad x \in (0, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad \sigma = \pm 1, \quad (2.18)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=0} = 0. \quad (2.19)$$

Предположим, что решение $u(x, y, t)$ задачи (2.18), (2.19) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(4)}([0, +\infty)) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1}))$.

Выберем пробную функцию $\phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ стандартного вида для метода нелинейной емкости [3]:

$$\phi(y) = \phi_0 \left(\frac{|y|^2}{R^2} \right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \\ 0 & \text{при } s \geq 2. \end{cases} \quad (2.20)$$

Сделав замену переменных $y = R\xi$ в обозначениях (2.17), воспользуемся очевидными равенствами

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy = c_1 R^{N-5}, \quad \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy = c_2 R^{N-1}, \quad (2.21)$$

где

$$c_1 = \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi.$$

Положив $L = R$, можно убедиться в том, что

$$k = k_0 R^{-(N+4)/2}, \quad k_0^2 = \frac{25}{4c_2}, \quad (2.22)$$

$$a = a_0 R^{(N+4)/2} \left(1 + \frac{405c_2}{c_1} 6! R^{-4} \right)^{1/2}, \quad a_0^2 = \frac{c_1}{405}.$$

Тогда в силу (2.22) справедливо предельное равенство

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} ak = a_0 k_0 = \frac{1}{18} \sqrt{\frac{5c_1}{c_2}} > 0.$$

Теперь рассмотрим постоянную c_0 , определенную выражением из (2.15). После ряда преобразований мы приходим к равенству

$$F_0 = R^{N+4} b_0,$$

где

$$b_0 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|) ((1-r)^4 u_0(Rr, R\xi) - 4! (1-r)^2 R^{-2}) dr d\xi. \quad (2.23)$$

Следующая цепочка равенств вытекает из выражений (2.22) и (2.23):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{kF_0 - a}{kF_0 + a} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k_0 b_0 R^{-(N+4)/2} R^{N+4} - a_0 R^{(N+4)/2}}{k_0 b_0 R^{-(N+4)/2} R^{N+4} + a_0 R^{(N+4)/2}} = \frac{k_0 b_0 - a_0}{k_0 b_0 + a_0}. \quad (2.24)$$

Пусть выполнено следующее условие:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} b_0 = b_1 < +\infty. \quad (2.25)$$

Тогда из (2.23) вытекает предельное равенство для c_0 :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} c_0(R) := c_\infty = \frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0}. \quad (2.26)$$

Далее будем предполагать, что начальные условия удовлетворяют неравенству

$$b_1 = \lim_{R \rightarrow +\infty} b_0(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|) (1-r)^4 u_0(Rr, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}. \quad (2.27)$$

Теперь воспользуемся тем, что

$$\frac{a}{k} = \frac{a_0}{k_0} R^{N+4} \left(1 + \frac{405c_2 6!}{c_1} R^{-4} \right)^{1/2}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^4 \phi(y) \left(u(x, y, t) - \frac{4!}{(L-x)^2} \right) dy dx \\ &= R^{N+4} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|) ((1-r)^4 u(Rr, R\xi, t) - 4! (1-r)^2 R^{-2}) dr d\xi, \end{aligned} \quad (2.29)$$

положив по определению

$$F_\infty(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|) (1-r)^4 u(Rr, R\xi, t) dr d\xi \quad (2.30)$$

и устремив R к $+\infty$ при $L = R$ в неравенстве (2.15). Из (2.22)–(2.30) получим следующий результат:

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad c_\infty = \frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0}. \quad (2.31)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что функция*

$$F_\infty(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|)(1-r)^4 u(Rr, R\xi, t) dr d\xi \quad (2.32)$$

в начальный момент времени удовлетворяет неравенству

$$b_1 = F_\infty(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|)(1-r)^4 u_0(Rr, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}. \quad (2.33)$$

Тогда классическое решение задачи (2.18), (2.19) не существует глобально во времени. Более того, имеет место неравенство (2.31), из которого следует, что

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F_\infty(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2a_0k_0} \ln \left(\frac{k_0b_1 - a_0}{k_0b_1 + a_0} \right), \quad (2.34)$$

где

$$k_0 = \frac{5}{2\sqrt{c_2}}, \quad a_0 = \frac{\sqrt{c_1}}{9\sqrt{5}},$$

$$c_1 = \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi.$$

Заметим, что результат может быть усилен решением соответствующей вариационной задачи с целью поиска оптимальной функции $\phi(y)$.

2.3. Задача во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. Здесь мы воспользуемся методом расширяющегося промежутка, другими словами, рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$(u_t - uu_x + u_{xxx})_x = \sigma \Delta_y u, \quad t > 0, \quad x \in (-L, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad (2.35)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad L > 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} -4L^2 u'(-L, y, t) + 2L^2 (u^2)_x(-L, y, t) + 2Lu^2(-L, y, t) - 4L^2 u_{xxx}(-L, y, t) \\ -4Lu_{xx}(-L, y, t) - 2u_x(-L, y, t) + 2u_x(L, y, t) = f(L, y, t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Под решением задачи (2.35)–(2.37) мы будем подразумевать функцию $u(x, y, t)$ из класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(4)}(-\infty, +\infty) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1}))$. Умножив обе части уравнения (2.35) на пробную функцию

$$\psi(x, y) = (L - x)^2 \phi(y), \quad \phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

мы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L \phi(y) u^2 dx dy \\ + \frac{\sigma}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L - x)^2 \Delta_y \phi(y) u dx dy - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(L, y, t) \phi(y) dy, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$J(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L-x)\phi(y)u \, dx \, dy. \quad (2.39)$$

Заметим, что из (2.38) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} \geqslant \frac{1}{4L} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L-x)\phi(y)u^2 \, dx \, dy - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L-x)^2 |\Delta_y \phi(y)| u| \, dx \, dy \\ - \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(L, y, t) \phi(y) \, dy \right|. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Действуя так же, как в (2.7), можно проверить справедливость следующей цепочки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L-x)^2 |\Delta_y \phi(y)| |u| \, dx \, dy \\ = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (L-x)^{2-1/2} (L-x)^{1/2} \, dx \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|}{\phi^{1/2}} \phi^{1/2} |u| \, dy \\ \leqslant \frac{1}{2} \left(\int_{-L}^L (L-x)^3 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy \right)^{1/2} \\ \times \left(\int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (L-x) \phi |u|^2 \, dy \, dx \right)^{1/2} = L^2 \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy \right)^{1/2} J_1^{1/2}, \\ J_1 = \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (L-x) \phi |u|^2 \, dy \, dx. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Из неравенства Юнга следует, что

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L-x)^2 |\Delta_y \phi(y)| |u| \, dx \, dy \leqslant \frac{1}{8L} J_1 + 2L^5 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy. \quad (2.42)$$

Следовательно, из (2.40) с учетом (2.42) можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} \geqslant \frac{1}{8L} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L-x)\phi(y)u^2 \, dx \, dy - 2L^5 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy \\ - \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(L, y, t) \phi(y) \, dy \right|. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Теперь воспользуемся неравенством Йенсена [31], чтобы получить следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned} J_1 = 2L^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz \int_{-L}^L \frac{L-x}{2L^2} \, dx \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\phi(y)}{\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz} u^2 \, dy \\ \geqslant 2L^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz \left| \int_{-L}^L \frac{L-x}{2L^2} \, dx \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\phi(y)}{\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz} u \, dy \right|^2 \\ = \frac{1}{2L^2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy \right|^{-1} J^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Стало быть, из неравенства (2.43) с учетом (2.44) мы получим

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{1}{16L^3} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \right|^{-1} J^2 - 2L^5 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy - \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(L, y, t) \phi(y) dy \right|, \quad (2.45)$$

Выберем также пробную функцию $\phi(y)$ специальным образом (2.20). Положим $L = R^2$ и после таких же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 2.2, для задачи Коши

$$(u_t - uu_x + u_{xxx})_x = \sigma \Delta_y u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad (2.46)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad L > 0, \quad \sigma = \pm 1, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} -4R^4 u'(-R^2, y, t) + 2R^4 (u^2)_x(-R^2, y, t) + 2R^2 u^2(-R^2, y, t) - 4R^4 u_{xxx}(-R^2, y, t) \\ - 4R^2 u_{xx}(-R^2, y, t) - 2u_x(-R^2, y, t) + 2u_x(R^2, y, t) = f(R^2, y, t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

получим следующий результат о разрушении решения.

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что функция*

$$J_\infty(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u(R^2 r, R\xi, t) dr d\xi \quad (2.49)$$

в начальный момент времени удовлетворяет условиям

$$b_1 = J_\infty(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u_0(R^2 r, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}, \quad (2.50)$$

$$2d^2(R) \geq \left| \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) f(R^2, R\xi, t) d\xi \right|, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-6} d^2(R) = 0. \quad (2.51)$$

Тогда не существует глобального во времени классического решения задачи Коши (2.46)–(2.48). Более того, имеет место оценка снизу

$$J_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad c_\infty = \frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0}, \quad (2.52)$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} J_\infty(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2a_0 k_0} \ln \left(\frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0} \right), \quad (2.53)$$

где

$$k_0 = \frac{1}{4\sqrt{c_2}}, \quad a_0 = \sqrt{2c_1},$$

$$c_1 = \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Можно несколько ослабить условие (2.51), предполагая, что выполнено следующее предельное свойство:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} d^2(R)R^{-6} = d_0^2.$$

Тогда в теореме 2.3 надо заменить a_0 на $(a_0^2 + d_0^2)^{1/2}$.

Теоремы 2.1, 2.2 можно доказать при тех же условиях для уравнения типа Кадомцева–Петвиашвили пятого порядка

$$(u_t - uu_x + u_{xxxx})_x = \sigma \Delta_y u,$$

при этом в аналоге теоремы 2.3 несколько изменится выражение в левой части равенства (2.48).

§ 3. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили–ББМ

Одной из замечательных особенностей метода нелинейной емкости является возможность исследования задач со смешанными производными по времени и пространству. Этот параграф посвящен изучению разрушения решений модельного уравнения типа Кадомцева–Петвиашвили–Бенжамена–Бона–Махони.

3.1. Задача в слое $x \in (0, L)$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$(u_t + u_x - uu_x + \alpha u_{xxt})_x = \sigma \Delta_y u, \quad x \in (0, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad (3.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0, \quad N \geq 2, \quad (3.2)$$

в которой постоянные α, σ могут принимать значения ± 1 . Предполагая существование классического решения задачи (3.1), (3.2)

$$u(x, y, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(3)}([0, L]) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1})),$$

воспользуемся методом нелинейной емкости. Умножив левую и правую части уравнения (3.1) на пробную функцию

$$\psi(x, y) = (L - x)^\lambda \phi(y), \quad \phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}), \quad \phi(y) \geq 0, \quad \lambda > 3,$$

проинтегрируем его по частям, повторяя рассуждения из § 2. Если воспользоваться очевидными равенствами

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) u_{tx} dx dy &= \lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-1} \phi(y) u_t dx dy, \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) u_{xx} dx dy &= \lambda(\lambda - 1) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-2} \phi(y) u dx dy, \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) u_{txxx} dx dy &= \frac{\lambda!}{(\lambda - 3)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-3} \phi(y) u_t dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda \phi(y) \frac{(u^2)_{xx}}{2} dx dy &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) u^2 dx dy, \\ \sigma \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda \phi(y) \Delta_y u dx dy &= \sigma \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda \Delta_y \phi(y) u dx dy, \end{aligned}$$

то можно получить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} + (\lambda-1) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) u dx dy \\ = \frac{\lambda-1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) u^2 dx dy \\ + \frac{\sigma}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda \Delta_y \phi(y) u dx dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-3} \left[(L-x)^2 + \alpha \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-3)!} \right] \phi(y) u(x, y, t) dx dy.$$

Выделяя полный квадрат в (3.3), мы будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\lambda-1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L-x)^{\lambda-2} (u-1)^2 dx dy \\ &\quad - \frac{L^{\lambda-1}}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy + \frac{\sigma}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda \Delta_y \phi(y) u dx dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Теперь сделаем замену $w = u - 1$; тогда (3.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\lambda-1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) w^2 dx dy \\ &\quad - \frac{L^{\lambda-1}}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy + \frac{\sigma}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda \Delta_y \phi(y) w dx dy, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-3} \left[(L-x)^2 + \alpha \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-3)!} \right] \phi(y) w(x, y, t) dx dy.$$

Воспользовавшись неравенством Юнга так же, как в (2.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^\lambda |\Delta_y \phi(y)| |w| dx dy \\ \leq \frac{\lambda-1}{4} J_1 + \frac{4L^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\lambda^2(\lambda-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$J_1 = \int_0^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) w^2 dx dy.$$

Таким образом, (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} \geq & \frac{\lambda-1}{4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} \phi(y) w^2 dx dy \\ & - \frac{L^{\lambda-1}}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy - \frac{4L^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\lambda^2(\lambda-1)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу неравенства Гёльдера [31] для достаточно больших L справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |F| & \leq \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} |w|^2 \phi(y) dx dy \right|^{1/2} \\ & \quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-4} \left[(L-x)^2 + \alpha \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-3)!} \right]^2 \phi(y) dx dy \right|^{1/2} \\ & \leq K^{1/2} J_1^{1/2} \left| \int_{\mathbb{S}} \phi(y) dy \right|^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$K = \frac{L^{\lambda+1}}{\lambda+1} + 2\alpha(\lambda-2)L^{\lambda-1} + \frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2}{\lambda-3} L^{\lambda-3}.$$

Следовательно, из (3.7) и (3.8) мы можем получить следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} \geq & \frac{\lambda-1}{4K} \left| \int_{\mathbb{S}} \phi(y) dy \right|^{-1} F^2 - \frac{L^{\lambda-1}}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \\ & - \frac{4L^{\lambda+3}}{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+3)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Наконец, интегрируем неравенство (3.9) для случая $\lambda = 4$ и

$$a^2 \equiv \frac{L^3}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy + \frac{L^7}{84} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy. \quad (3.10)$$

Выберем пробную функцию $\phi(y)$ стандартным способом (2.20); тогда формула (3.10) имеет вид

$$a^2 = \frac{L^3}{2} c_2 R^{N-1} + \frac{L^7}{84} c_1 R^{N-5}, \quad (3.11)$$

где

$$c_1 = \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi.$$

Таким образом, из (3.9) вытекает следующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{dF}{dt} \geq k^2 F^2 - a^2, \quad (3.12)$$

где

$$k^2 = \frac{15R^{1-N}}{4c_2(L^5 + 20\alpha L^3 + 180L)}, \quad a^2 = \frac{L^3}{2} c_2 R^{N-1} + \frac{L^7}{84} c_1 R^{N-5}.$$

В силу теории обыкновенных дифференциальных неравенств, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что функция $u(x, y, t)$ является классическим решением для некоторого $T > 0$ и начальные условия удовлетворяют строгому неравенству*

$$F_0 = F(0) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)[(L-x)^2 + 6\alpha] \phi(y)(u_0(x, y) - 1) dx dy > \frac{a}{k}. \quad (3.13)$$

Тогда не существует глобального во времени классического решения задачи (3.1), (3.2). Более того, имеет место оценка снизу

$$F(t) \geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 e^{2akt}}{1 - c_0 e^{2akt}}, \quad c_0 = \frac{kF_0 - a}{kF_0 + a}, \quad (3.14)$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2ak} \ln \left(\frac{kF_0 - a}{kF_0 + a} \right), \quad (3.15)$$

где

$$k^2 = \frac{15R^{1-N}}{4c_2(L^5 + 20\alpha L^3 + 180L)}, \quad a^2 = \frac{L^3}{2} c_2 R^{N-1} + \frac{L^7}{84} c_1 R^{N-5}.$$

Заметим, что с теоретической точки зрения результат может быть улучшен нахождением оптимальной пробной функции, однако с практической – полученный нами результат достаточен для первоначальной оценки.

3.2. Задача в полупространстве $x > 0$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, поставленную в полупространстве:

$$(u_t + u_x - uu_x + \alpha u_{xxt})_x = \sigma \Delta_y u, \quad x \in (0, +\infty), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad (3.16)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0, \quad N \geq 2, \quad (3.17)$$

где $\alpha = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$. Предположим, что существует решение $u(x, y, t)$ задачи (3.1), (3.2) из класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(3)}([0, +\infty)) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1})$. Выберем пробную функцию $\phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ того же вида, что и в (2.20), и положим $L = R^2$. Кроме того, определим функции $a^2(R)$ и $k^2(R)$ следующим образом:

$$a^2 = R^{N+9} \frac{c_1}{84} \left(1 + \frac{42c_2}{c_1} R^{-4} \right), \quad k^2 = R^{-N-9} \frac{15}{4c_2} (1 + 20\alpha R^{-4} + 180R^{-8})^{-1}. \quad (3.18)$$

Тогда, следуя схеме доказательства разрушения решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили, можно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что функция*

$$F_\infty(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 (1-r)^3 \phi(y)(u(rR^2, R\xi, t) - 1) dr d\xi \quad (3.19)$$

в начальный момент времени удовлетворяет следующему условию:

$$b_1 = F_\infty(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 (1-r)^3 \phi(y)(u_0(rR^2, R\xi) - 1) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}, \quad (3.20)$$

где $b_1 > 0$. Тогда решение задачи (3.16), (3.17) не существует глобально во времени. Кроме того, имеет место следующее выражение:

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad c_\infty = \frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0}, \quad (3.21)$$

в силу которого справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} J_\infty(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2a_0 k_0} \ln \left(\frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0} \right), \quad (3.22)$$

где

$$a_0^2 = \frac{c_1}{84}, \quad k_0^2 = \frac{15}{4c_2},$$

$$c_1 = \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{0 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi.$$

3.3. Задача во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. Для решения вопроса о разрушении решения во всем пространстве воспользуемся методом расширяющегося промежутка и рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$(u_t + u_x - uu_x + \alpha u_{xxt})_x = \sigma \Delta_y u, \quad x \in (-L, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad (3.23)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \alpha = \pm 1, \quad \sigma = \pm 1, \quad N \geq 2, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & -4L^2 u'(-L, y, t) - 4L^2 u_x(-L, y, t) - 4Lu(-L, y, t) \\ & + 2L^2 (u^2)_x(-L, y, t) + 2Lu^2(-L, y, t) - \alpha 4L^2 u'_{xx}(-L, y, t) \\ & - 4\alpha Lu'_x(-L, y, t) - 2\alpha u'(-L, y, t) + 2\alpha u'(L, y, t) = f(L, y, t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Будем предполагать существование классического решения $u(x, y, t)$ задачи (3.23)–(3.25) в классе $C^{(1)}([0, T]; C^{(3)}(-\infty, +\infty) \otimes C^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1}))$. Умножая левую и правую части выражения (3.23) на пробную функцию вида

$$\psi(x, y) = (L - x)^2 \phi(y), \quad \phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}),$$

мы интегрируем его по частям и получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} + \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) u \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) u^2 \, dx \, dy \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) f(L, y, t) \, dy + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Delta_y \phi(y) (L - x)^2 u \, dx \, dy, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$J(t) \equiv \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (L - x) \phi(y) u \, dx \, dy.$$

Как и для уравнения Кадомцева–Петвиашвили, делаем замену $w = u - 1$ и приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) w^2 \, dy \, dx - L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) f(L, y, t) \, dy + \frac{\sigma}{2} \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Delta_y \phi(y) (L - x)^2 w \, dy \, dx, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} f(L, y, t) = & -4L^2 w'(-L, y, t) - 4L^2 w_x(-L, y, t) - 4L(w(-L, y, t) + 1) \\ & + 4L^2(w + 1)w_x(-L, y, t) + 2L(w + 1)^2(-L, y, t) - 4\alpha L^2 w'_{xx}(-L, y, t) \\ & - 4\alpha L w'_x(-L, y, t) - 2\alpha w'(-L, y, t) + 2\alpha w'(L, y, t). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Отсюда мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} \geq & \frac{1}{16L^3} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \right|^{-1} F^2 - L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \\ & - 2L^5 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy - \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(L, y, t) \phi(y) dy \right|, \end{aligned} \quad (3.29)$$

в котором введена замена

$$F(t) \equiv \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (L - x) \phi(y) w dy dx.$$

Теперь если взять пробную функцию $\phi(y)$ вида (2.20) и положить $L = R^2$, то, действуя по схеме из § 2, можно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.3. *Предположим, что функция*

$$F_\infty(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1 - r) \phi_0(|\xi|) u(R^2 r, R\xi, t) dr d\xi \quad (3.30)$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} b_1 &= F_\infty(0) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1 - r) \phi_0(|\xi|) u_0(R^2 r, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}, \quad b_1 \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$2d^2(R) \geq \left| \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) f_1(R^2, R\xi, t) d\xi \right|, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-6} d^2(R) = 0. \quad (3.32)$$

Тогда не существует глобального во времени решения задачи (3.23)–(3.25). Более того, имеет место оценка снизу

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad c_\infty = \frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0}, \quad (3.33)$$

а следовательно,

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F_\infty(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2a_0 k_0} \ln \left(\frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0} \right), \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{4\sqrt{c_2}}, \quad a_0 = \sqrt{2c_1}, \\ c_1 &= \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Очевидно, что доказанные в этом параграфе теоремы имеют тот же самый вид и для уравнения

$$(u_t - u_x - uu_x - \alpha u_{xxt})_x = \sigma \Delta_y u$$

с заменой $w = u + 1$.

§ 4. Уравнение Линя–Рейсснера–Цзяня

4.1. Задача в слое $x \in (0, L)$ и полупространстве $x > 0$. Разберем еще один физический пример разрушения решения уравнения Линя–Рейсснера–Цзяня, описывающего трансзвуковой поток около плоской пластины с поперечным щелевым вдувом газа. Мы рассмотрим случаи в слое и полупространстве вместе, убирая граничные условия на границе $x = L$. Будем предполагать, что решение $u(x, y, t)$ задачи

$$(u_t + K_\infty u_x - uu_x)_x = \Delta_y u, \quad x \in (0, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad K_\infty \neq 0, \quad (4.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = 0 \quad (4.2)$$

принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}([0, L]) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1}))$, где $L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Действуя строго по схеме, т. е. умножая с обеих сторон уравнение (4.1) на пробную функцию

$$\psi(x, y) = (L - x)^2 \phi(y), \quad \phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}), \quad \phi(y) \geq 0,$$

интегрируем его по частям с учетом (4.2) и получаем

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) u^2 dx dy - K_\infty \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) u dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \Delta_y \phi(y) (L - x)^2 u dx dy, \\ J(t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L - x) u dx dy. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выделяя полный квадрат:

$$\frac{1}{2} u^2 - K_\infty u = \frac{1}{2} (u - K_\infty)^2 - \frac{K_\infty^2}{2},$$

и проводя в уравнении (4.3) замену $w = u - K_\infty$, мы можем выписать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) w^2 dx dy \\ &\quad - \frac{K_\infty^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy - \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \Delta_y \phi(y) (L - x)^2 w dx dy \right|, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$F(t) \equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y)(L-x)w \, dx \, dy.$$

Теперь используем неравенство (2.8), чтобы получить

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^2 \Delta_y \phi(y) w \, dx \, dy \right| \\ & \leq \frac{1}{4L} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y)(L-x)w^2 \, dx \, dy + \frac{L^5}{16} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy, \end{aligned} \quad (4.5)$$

тогда из (4.4) и (4.5) следует оценка

$$\frac{dF}{dt} \geq \frac{1}{4L} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y)(L-x)w^2 \, dx \, dy - \frac{K_\infty^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy - \frac{L^5}{16} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy. \quad (4.6)$$

Наконец, воспользовавшись очевидной цепочкой соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{L^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz \int_0^L \frac{L-x}{L^2/2} \, dx \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\phi(y)}{\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz} w^2 \, dy \\ & \geq \frac{L^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz \left(\int_0^L \frac{L-x}{L^2/2} \, dx \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\phi(y)}{\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) \, dz} w \, dy \right)^2 \\ & = \frac{2}{L^2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy \right|^{-1} F^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

мы можем переписать (4.6) и (4.7) в виде основного дифференциального неравенства

$$\frac{dF}{dt} \geq k^2 F^2 - a^2, \quad (4.8)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2L^3} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy \right|^{-1}, \quad a^2 = \frac{K_\infty^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy + \frac{L^5}{16} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy. \quad (4.9)$$

Таким образом, для задачи в слое, т. е. конечных $L > 0$, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что функция $u(x, y, t)$ является классическим решением задачи (4.1), (4.2) для некоторого $T > 0$, удовлетворяющим в начальный момент времени условию*

$$F_0 = F(0) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)\phi(y)(u_0(x, y) - K_\infty) \, dx \, dy > \frac{a}{k}. \quad (4.10)$$

Тогда не существует глобального во времени решения $u(x, y, t)$, причем имеет место оценка снизу

$$F(t) \geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 e^{2akt}}{1 - c_0 e^{2akt}}, \quad c_0 = \frac{kF_0 - a}{kF_0 + a}, \quad (4.11)$$

а следовательно,

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2ak} \ln \left(\frac{kF_0 - a}{kF_0 + a} \right), \quad (4.12)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2L^3} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \right|^{-1}, \quad a^2 = \frac{K_\infty^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy + \frac{L^5}{16} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy.$$

Чтобы получить достаточные условия разрушения в полупространстве $x > 0$, возьмем пробную функцию $\phi(y)$, как в (2.20), и положим $L = R^2$. Тогда, переходя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ в (4.10)–(4.12), мы получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что функция*

$$F_\infty(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u(R^2 r, R\xi, t) dr d\xi \quad (4.13)$$

в начальный момент времени удовлетворяет условиям

$$b_1 = F_\infty(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u_0(R^2 r, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}, \quad (4.14)$$

где $b_1 \in (0, +\infty)$. Тогда не существует решения задачи (4.1), (4.2), глобального во времени. Кроме того, имеет место неравенство

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad c_\infty = \frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0}, \quad (4.15)$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F_\infty(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2a_0 k_0} \ln \left(\frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0} \right), \quad (4.16)$$

где

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{2c_2}}, \quad a_0 = \frac{\sqrt{c_1}}{4},$$

$$c_1 = \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Использование во всех задачах нулевых граничных условий не является необходимым, а лишь позволяет более компактно представить результаты. Исследование задачи с ненулевыми граничными условиями также можно проводить методом нелинейной емкости, добавив дополнительные слагаемые в правую часть обыкновенного дифференциального неравенства. Кроме того, мы не исследуем в этой работе вопрос локальной разрешимости, который несомненно является важной частью при работе с каждой конкретной задачей. В случае задачи для уравнения Линия–Рейсснера–Цзяня с вопросом локальной разрешимости можно ознакомиться, например, в работе [32].

4.2. Задача во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу в слое:

$$(u_t + K_\infty u_x - uu_x)_x = \Delta_y u, \quad x \in (-L, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad (4.17)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad K_\infty \neq 0, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} -4L^2 u'(-L, y, t) - 4L^2 u_x(-L, y, t) - 4Lu(-L, y, t) \\ + 2L^2 (u^2)_x(-L, y, t) + 2Lu^2(-L, y, t) = f(L, y, t). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Предположим, что существует решение $u(x, y, t)$ в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}(-\infty, +\infty)) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1})$. Применяем метод расширяющегося промежутка. Тогда, в точности следуя схеме из п. 4.1, мы можем получить следующий результат о разрушении.

ТЕОРЕМА 4.4. *Предположим, что функция*

$$F_\infty(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u(R^2 r, R\xi, t) dr d\xi \quad (4.20)$$

в начальный момент времени удовлетворяет условиям

$$b_1 = F_\infty(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u_0(R^2 r, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0} > 0, \quad (4.21)$$

$$2d^2(R) \geq \left| \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) f_1(R^2, R\xi, t) d\xi \right|, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-6} d^2(R) = 0. \quad (4.22)$$

Тогда классическое решение задачи (4.17)–(4.19) не существует глобально во времени и, кроме того, имеет место оценка снизу

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad c_\infty = \frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0}, \quad (4.23)$$

в силу которой справедливо предельное равенство и оценка времени разрушения

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} F_\infty(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2a_0 k_0} \ln \left(\frac{k_0 b_1 - a_0}{k_0 b_1 + a_0} \right), \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{4\sqrt{c_2}}, \quad a_0 = \sqrt{2c_1}, \\ c_1 &= \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi. \end{aligned}$$

Конечно, вопрос об оптимальном результате и точном времени разрушения пока остается открытым.

§ 5. Уравнение Захарова–Кузнецова

Взаимодействие двумерных солитонных решений в физике и распространение электромагнитных волн в плазме часто описываются с помощью уравнения Захарова–Кузнецова, в правой части которого стоит не просто оператор Лапласа, а оператор вида $\partial_x \Delta_y$. Метод нелинейной емкости позволяет получить результат о разрушении для уравнений и такого вида.

5.1. Задача в слое $x \in (0, L)$. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_t - uu_x + u_{xxx} = -\Delta_y u_x, \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad N \geq 2, \quad (5.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0. \quad (5.2)$$

Будем предполагать существование классических решений $u(x, y, t)$ в классе $\mathcal{C}^{(1)}([0, T]; \mathcal{C}^{(3)}([0, L]) \otimes \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1}))$. Умножая обе стороны уравнения (5.1) на пробную функцию

$$\psi(x, y) = (L - x)^\lambda \phi(y), \quad \phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}), \quad \phi(y) \geq 0, \quad \lambda > 3,$$

интегрируем его по частям с учетом граничных условий (5.2). Используя выражения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L - x)^\lambda (u^2)_x dx dy &= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy, \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L - x)^\lambda u_{xxx} dx dy &= \frac{\lambda!}{(\lambda - 3)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L - x)^{\lambda-3} u dx dy, \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L - x)^\lambda \Delta_y u_x dx dy &= \lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-1} \Delta_y \phi(y) u dx dy, \end{aligned}$$

получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy \\ &\quad - \frac{\lambda!}{(\lambda - 3)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L - x)^{\lambda-3} u dx dy \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-1} \Delta_y \phi(y) u dx dy, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^\lambda \phi(y) u dx dy.$$

В силу неравенства Гёльдера справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L - x)^{\lambda-1} |\Delta_y \phi(y)| |u| dx dy$$

$$\begin{aligned}
& \leq \lambda \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy \right|^{1/2} \\
& \quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \frac{|\Delta_y \phi(y)|^2}{\phi(y)} dx dy \right|^{1/2} \\
& \leq \frac{\lambda}{8} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy + 2L^\lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi(y)|^2}{\phi(y)} dy, \\
& \frac{\lambda!}{(\lambda-3)!} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y) (L-x)^{\lambda-3} u dx dy \\
& \leq \frac{\lambda!}{(\lambda-3)!} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy \right|^{1/2} \\
& \quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-5} \phi(y) dx dy \right|^{1/2} \\
& \leq \frac{\lambda}{8} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy + \frac{2L^{\lambda-4} \lambda (\lambda-1)^2 (\lambda-2)^2}{\lambda-4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Подставляя их в уравнение (5.3), мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dt} & \geq \frac{\lambda}{4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy \\
& \quad - \frac{2L^{\lambda-4} \lambda (\lambda-1)^2 (\lambda-2)^2}{\lambda-4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy - 2L^\lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi(y)|^2}{\phi(y)} dy.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Наконец, используя оценку сверху

$$\begin{aligned}
|J|^2 & \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{(\lambda-1)/2} \phi^{1/2} |u| (L-x)^{(\lambda+1)/2} \phi^{1/2} dx dy \\
& \leq \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} \phi(y) u^2 dx dy \right|^{1/2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^{\lambda+1} \phi(y) dx dy \right|^{1/2},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

мы получаем основное дифференциальное неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq k^2 J^2 - a^2, \tag{5.7}$$

в котором

$$\begin{aligned}
k^2 & = \frac{\lambda(\lambda+2)}{4L^{\lambda+2}} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \right|^{-1}, \\
a^2 & = \frac{2L^{\lambda-4} \lambda (\lambda-1)^2 (\lambda-2)^2}{\lambda-4} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy + 2L^\lambda \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi(y)|^2}{\phi(y)} dy.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Для удобства положим $\lambda = 5$; тогда можно сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть начальные условия удовлетворяют неравенству

$$J_0 = J(0) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y)(L-x)^5 u_0(x, y) dx dy > \frac{a}{k}. \quad (5.9)$$

Тогда не существует решения задачи (5.1), (5.2), глобального во времени. Кроме того, имеет место оценка снизу

$$J(t) \geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 e^{2akt}}{1 - c_0 e^{2akt}}, \quad c_0 = \frac{kJ_0 - a}{kJ_0 + a}, \quad (5.10)$$

из которой следует, что

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} J(t) = +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2ak} \ln \left(\frac{kJ_0 - a}{kJ_0 + a} \right), \quad (5.11)$$

где

$$k^2 = \frac{35}{4L^7} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \right|^{-1}, \quad a^2 = 1440L \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy + 2L^5 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi(y)|^2}{\phi(y)} dy.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Поскольку пробная функция $\phi(y)$ принадлежит $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$, везде в этом параграфе мы предполагаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Delta_y \phi(y) dy = 0, \quad \phi \neq 0.$$

5.2. Задача в полупространстве $x > 0$. Как и в случае с уравнением Кадомцева–Петвиашвили, воспользуемся результатом, доказанным в п. 5.1 для слоя:

$$u_t - uu_x + u_{xxx} = -\Delta_y u_x, \quad x \in (0, +\infty), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad N \geq 2, \quad (5.12)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0. \quad (5.13)$$

Предположим, что решение $u(x, y, t)$ задачи (5.12), (5.13) принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(3)}([0, +\infty)) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1}))$. Выберем пробную функцию вида

$$\psi(x, y) = (L - x)^5 \phi(y), \quad \phi(y) = \phi_0 \left(\frac{|y|^2}{R^2} \right),$$

$$\phi_0(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \\ 0 & \text{при } s \geq 2, \end{cases}$$

и сделаем замену переменных $y = R\xi$. Воспользуемся обозначениями

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} dy = c_1 R^{N-5}, \quad \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(z) dz = c_2 R^{N-1}, \quad (5.14)$$

где

$$c_1 = \int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi.$$

Запишем основное дифференциальное неравенство для уравнения Захарова–Кузнецова в слое:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &\geq k^2 J^2 - a^2, \\ k^2 &= \frac{35R^{1-N}}{4c_2 L^7}, \quad a^2 = 1440c_2 L R^{N-1} + 2L^5 c_1 R^{N-5}, \\ J(t) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L \phi(y)(L-x)^5 u_0(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (5.15)$$

В случае $L > 1$ мы можем переписать его в виде

$$\frac{dJ}{dt} \geq k^2 J^2 - L^4 a^2. \quad (5.16)$$

Если положить $L = R^2$, то получим

$$k^2 = \frac{35}{c_2} R^{-13-N}, \quad a^2 = 2c_1 R^{N+13} |1 + 720c_2 c_1^{-1} R^{-12}|,$$

а результат о разрушении может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть начальные данные задачи (5.12), (5.13) удовлетворяют неравенству

$$J_0 = J_\infty(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|)(1-r)^5 u_0(R^2 r, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}. \quad (5.17)$$

Тогда не существует глобального во времени решения задачи Захарова–Кузнецова в полупространстве. Кроме того, имеет место неравенство

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned} c_\infty &= \frac{k_0 J_\infty(0) - a_0}{k_0 J_\infty(0) + a_0}, \quad k_0^2 = \frac{35}{c_2}, \quad a_0^2 = 2c_1, \\ J_\infty(t) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 \phi_0(|\xi|)(1-r)^5 u(R^2 r, R\xi, t) dr d\xi. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Как улучшение результата о разрушении, может быть решена вариационная задача не на получение оптимальной пробной функции, а на поиск при замене $L = R^\beta$ оптимального параметра β .

5.3. Задача в пространстве $\mathbb{R}^N$. Будем решать задачу в пространстве методом расширяющегося промежутка $L \rightarrow \infty$, т. е. рассмотрим следующую задачу в слое:

$$\begin{aligned} u_t - uu_x + u_{xxx} &= -\Delta_y u_x, \quad x \in (-L, L), \quad y \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad N \geq 2, \\ -Lu^2(-L, y, t) + 2L\Delta_y u(-L, y, t) + 2Lu_{xx}(-L, y, t) \\ &\quad + u_x(-L, y, t) - u_x(L, y, t) = f(L, y, t), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (5.20)$$

Предположим, что существует решение $u(x, y, t)$ задачи (5.19), (5.20), принадлежащее классу $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(3)}(-\infty, +\infty) \otimes \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{R}^{N-1}))$. Умножая уравнение Захарова–Кузнецова (1.3) на пробную функцию

$$\psi(x, y) = (L - x)\phi(y) = (L - x)\phi_0\left(\frac{|y|^2}{R^2}\right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \\ 0 & \text{при } s \geq 2, \end{cases}$$

и интегрируя его по частям, мы приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L - x)\phi(y)u \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L \phi(y)u^2 \, dx \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L \Delta_y \phi(y)u \, dx \, dy + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y)f(L, y, t) \, dy. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Так же, как и для задачи в слое, мы можем сделать замену переменных

$$w = u - \frac{\Delta_y \phi}{\phi}, \quad \phi \neq 0,$$

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L - x)\phi(y)w \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L (L - x)\phi(y)u \, dx \, dy.$$

Тогда в силу неравенства

$$\frac{L - x}{L} \leq 1$$

при $x \in [0, L]$ для достаточно больших $L > 1$ и $\alpha > 2$ имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &\geq \frac{1}{2L} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-L}^L \phi(y)w^2 \, dx \, dy \\ &\quad - \frac{L^{1+\alpha}}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi(y)|^2}{\phi} \, dy - \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y)f(L, y, t) \, dy \right|. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Рассуждая стандартным образом (см. (2.41)), мы приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$\frac{dF}{dt} \geq k^2 F^2 - a^2, \quad (5.23)$$

где

$$a^2 = \frac{L^{1+\alpha}}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\Delta_y \phi|^2}{\phi} \, dy + d^2 R^{N-1}, \quad k^{-2} = L^3 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) \, dy = L^3 c_2 R^{N-1},$$

при этом функция $d(R)$ удовлетворяет условию

$$d^2 R^{N-1} \geq \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y)f(L, y, t) \, dy \right|.$$

Теперь, сделав замену $L = R^\beta$ и $y = R\xi$, для всех

$$\beta = \frac{4}{\alpha - 2} > 0$$

мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.5. *Предположим, что для некоторого $\beta > 0$ начальные условия удовлетворяют неравенству*

$$F_\infty(0) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-\beta} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u_0(R^\beta r, R\xi) dr d\xi > \frac{a_0}{k_0}, \quad (5.24)$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-6} d^2(R) = 0, \quad d^2(R) \geq \left| \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) f(R^\beta r, R\xi, t) d\xi \right|. \quad (5.25)$$

Тогда не существует глобального во времени решения задачи для уравнения Захарова–Кузнецова в пространстве $\mathbb{R}^N$ и имеет место следующая оценка снизу:

$$F_\infty(t) \geq \frac{a_0}{k_0} \frac{1 + c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}{1 - c_\infty e^{2a_0 k_0 t}}, \quad (5.26)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{2}}, \quad k_0 = \frac{1}{\sqrt{2c_2}}, \\ c_\infty &= \frac{k_0 F_\infty(0) - a_0}{k_0 F_\infty(0) + a_0}, \quad c_1 = \int_{1 \leq \xi \leq \sqrt{2}} \frac{|\Delta_\xi \phi_0(|\xi|)|^2}{\phi_0(|\xi|)} d\xi, \quad c_2 = \int_{0 \leq \xi \leq \sqrt{2}} \phi_0(|\xi|) d\xi, \\ F_\infty &= \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-2\beta} \int_{|\xi| \leq \sqrt{2}} \int_0^1 (1-r) \phi_0(|\xi|) u(R^\beta r, R\xi, t) dr d\xi. \end{aligned}$$

Еще раз отметим, что при рассмотрении каждой конкретной задачи желательным является, помимо получения ее разрешимости, решение вариационной задачи для нахождения оптимальной пробной функции.

§ 6. Уравнение Островского

В качестве последнего примера возможности изучения феномена разрушения в задачах математической физики методом нелинейной емкости С. И. Похожаева рассмотрим две задачи для уравнения Островского, в частности, описывающего длинные внутренние волны во вращающемся океане.

6.1. Задача на отрезке $[0, L]$. Рассмотрим одномерную начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} (u_t - uu_x + u_{xxx})_x &= u, \quad t > 0, \quad x \in (0, L), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Как обычно, будем предполагать наличие классического решения

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(4)}([0, L])).$$

Умножая уравнение Островского (1.7) на пробную функцию степенного вида

$$\psi(x) = (L - x)^\lambda \geq 0, \quad \lambda > 5,$$

интегрируем его по частям. Тогда для рассматриваемых граничных условий будут иметь место равенства

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_0^L (L-x)^\lambda (u^2)_{xx} dx &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx, \\ \int_0^L (L-x)^\lambda u_{xxxx} dx &= \frac{\lambda!}{(\lambda-4)!} \int_0^L (L-x)^{\lambda-4} u dx, \\ \int_0^L (L-x)^\lambda u_{xt} dx &= \lambda \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} u_t dx,\end{aligned}$$

в силу которых для функции

$$J(t) = \int_0^L (L-x)^{\lambda-1} u dx$$

окажется справедливым следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\frac{dJ(t)}{dt} &= \frac{\lambda-1}{2} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_0^L (L-x)^\lambda u dx - \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-4)!} \int_0^L (L-x)^{\lambda-4} u dx.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Далее, используя неравенство Гёльдера [31], можно получить оценки

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} \int_0^L (L-x)^\lambda |u| dx &\leq \frac{1}{\lambda} \left| \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx \right|^{1/2} \left| \int_0^L (L-x)^{\lambda+2} dx \right|^{1/2} \\ &\leq \frac{\lambda-1}{8} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx + \frac{2L^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\lambda^2(\lambda-1)},\end{aligned}\quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-4)!} \int_0^L (L-x)^{\lambda-4} |u| dx &\leq \frac{(\lambda-1)!}{(\lambda-4)!} \left| \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx \right|^{1/2} \left| \int_0^L (L-x)^{\lambda-6} dx \right|^{1/2} \\ &\leq \frac{\lambda-1}{8} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx + \frac{2L^{\lambda-5}(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2}{\lambda-5},\end{aligned}\quad (6.4)$$

подставив которые в (6.2), мы получаем неравенство

$$\begin{aligned}\frac{dJ(t)}{dt} &\geq \frac{\lambda-1}{4} \int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx \\ &\quad - \left(\frac{2L^{\lambda+3}}{(\lambda+3)\lambda^2(\lambda-1)} + \frac{2L^{\lambda-5}(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2}{\lambda-5} \right).\end{aligned}\quad (6.5)$$

Снова воспользуемся неравенством Гёльдера для получения следующей оценки сверху:

$$J^2 \leq \left(\int_0^L (L-x)^{\lambda-2} u^2 dx \right) \left(\int_0^L (L-x)^\lambda dx \right).\quad (6.6)$$

Тогда, для простоты полагая $\lambda = 6$ и подставляя (6.6) в (6.5), приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству первого порядка

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq k^2 J^2 - a^2,$$

где

$$k^2 = \frac{35}{4L^7}, \quad a^2 = \frac{L^9}{810} + 1440L.$$

Интегрируя это неравенство по времени, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что начальные условия удовлетворяют неравенству*

$$J_0 = J(0) = \int_0^L (L-x)^5 u_0(x) dx > \frac{a}{k}.$$

Тогда не существует глобального во времени решения уравнения Островского в слое (6.1). Более того, имеет место следующее неравенство снизу:

$$\begin{aligned} J(t) &\geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 e^{2akt}}{1 - c_0 e^{2akt}}, \quad c_0 = \frac{kJ_0 - a}{kJ_0 - a}, \\ \lim_{t \uparrow T_\infty} J(t) &= +\infty, \quad t \leq T_\infty \leq -\frac{1}{2ak} \left(\frac{kJ_0 - a}{kJ_0 + a} \right), \\ J(t) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^L (L-x)^5 u(x, y, t) dx dy, \quad k^2 = \frac{35}{4L^7}, \quad a^2 = \frac{L^9}{810} + 1440L. \end{aligned}$$

Более сильный результат может быть получен решением соответствующей вариационной задачи поиска оптимальной пробной функции. Поскольку в нашем случае пробная функция зависит только от x , решение такой вариационной задачи становится, по-видимому, возможным. Чтобы не создавалось впечатления, что метод нелинейной емкости используется только для пробных функций степенного вида, для следующей задачи в неограниченной области мы получим результат с помощью пробной функции другого вида: $\phi(x) = \exp(-x)$.

6.2. Задача на полупрямой $x \in (0, +\infty)$. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения Островского

$$\begin{aligned} (u_t - uu_x + u_{xxx})_x &= u, \quad t > 0, \quad x \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \\ u|_{x=0} &= u_x|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u_{xxx}|_{x=0} = 0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Предположим, что для этой задачи существует классическое решение $u(x, t)$ из класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}^{(4)}([0, +\infty)))$. Для получения результата в неограниченной области рассмотрим задачу на отрезке $[0, L]$, правую границу которого затем устремим к бесконечности: $L \rightarrow \infty$. Условия на правой границе $x = L$ будут определены позднее.

Выберем пробную функцию следующего вида: $\phi(x) = e^{-x}$. Умножая на нее уравнение Островского (1.7) и интегрируя его по частям, получаем

$$\begin{aligned}\int_0^L e^{-x} (u^2)_{xx} dx &= e^{-L} [(u^2)_x + u^2]_{x=L} + \int_0^L e^{-x} u^2 dx, \\ \int_0^L e^{-x} u_{xxxx} dx &= e^{-L} [u_{xxx} + u_{xx} + u_x + u]_{x=L} + \int_0^L e^{-x} u dx, \\ \int_0^L e^{-x} u_{xt} dx &= e^{-L} u_t|_{x=L} + \int_0^L e^{-x} u_t dx.\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dt} \int_0^L e^{-x} u dx = \frac{1}{2} \int_0^L e^{-x} u^2 dx + e^{-L} K(t, L), \quad (6.8)$$

где

$$K(t, L) = \left[\frac{(u^2)_x}{2} + \frac{u^2}{2} - u_{xxx} - u_{xx} - u_x - u - u_t \right]_{x=L}.$$

Предположим, что выполнено следующее граничное условие при $x = L$: функция $|K(t, L)|$ по L растет медленнее, чем экспонента; тогда при $L \rightarrow \infty$ мы приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-x} u dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} u^2 dx. \quad (6.9)$$

Используя неравенство Гёльдера и оценку

$$\left| \int_0^\infty e^{-x} u dx \right|^2 \leq \left(\int_0^\infty e^{-x} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-x} u^2 dx \right), \quad (6.10)$$

подставляя (6.10) в выражение (6.9), мы получаем обыкновенное дифференциальное неравенство

$$\frac{dJ(t)}{dt} \geq k^2 J^2,$$

где

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^\infty e^{-x} \phi(y) u dx dy, \quad k^2 = \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy \right|^{-1},$$

очевидно приводящее к следующему результату о разрушении.

ТЕОРЕМА 6.2. *Предположим, что начальные данные задачи на полупрямой для уравнения Островского удовлетворяют неравенству*

$$\int_0^\infty e^{-x} u_0(x) dx > 0.$$

Тогда не существует глобального во времени решения, причем имеет место следующая оценка снизу:

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - J(0)k^2 t}, \quad \lim_{t \uparrow T_\infty} J(t) = +\infty,$$

где

$$t \leq T_{\infty} \leq \frac{1}{J(0)k^2}, \quad J(t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{\infty} e^{-x} \phi(y) u \, dx \, dy, \quad k^{-2} = 2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \phi(y) dy.$$

В заключение еще раз заметим, что все разобранные задачи имеют приложения в самых разных областях математической физики, и мы не сомневаемся в том, что грамотному исследователю не составит труда изучить по предложенной схеме наличие феномена разрушения для конкретной задачи типа Кортвега–де Фриза. Однако вопрос об оптимальной пробной функции, являющийся, по-видимому, наиболее сложным, пока остается открытым.

Список литературы

1. С. И. Похожаев, “Об отсутствии глобальных решений некоторых начально-краевых задач для уравнения Кортвега–де Фриза”, *Дифференц. уравнения*, **47:4** (2011), 493–498; англ. пер.: S. I. Pokhozhaev, “On the nonexistence of global solutions of some initial-boundary value problems for the Korteweg–de Vries equation”, *Differ. Equ.*, **47:4** (2011), 488–493.
2. С. И. Похожаев, “Об отсутствии глобальных решений уравнения Кортвега–де Фриза”, *Уравнения в частных производных*, СМФН, **39**, РУДН, М., 2011, 141–150; англ. пер.: S. I. Pokhozhaev, “On the absence of global solutions of the Korteweg–de Vries equation”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **190:1** (2013), 147–156.
3. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
4. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, “О стабильности солитонов в средах со слабой дисперсией”, *Докл. АН СССР*, **192** (1970), 753–756; англ. пер.: B. B. Kadomtsev, V. I. Petviashvili, “On the stability of solitary waves in weakly dispersing media”, *Soviet Phys. Dokl.*, **15** (1970), 539–541.
5. Y. Liu, “Blow up and instability of solitary-wave solutions to a generalized Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353:1** (2001), 191–208.
6. Y. Liu, X.-P. Wang, “Nonlinear stability of solitary waves of a generalized Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Comm. Math. Phys.*, **183:2** (1997), 253–266.
7. J.-C. Saut, “Remarks on the generalized Kadomtsev–Petviashvili equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **42:3** (1993), 1011–1026.
8. J.-C. Saut, “Recent results on the generalized Kadomtsev–Petviashvili equations”, *Acta Appl. Math.*, **39:1–3** (1995), 477–487.
9. C. Klein, J.-C. Saut, *Numerical study of blow up and stability of solutions of generalized Kadomtsev–Petviashvili equations*, [arXiv: abs/1010.5510](https://arxiv.org/abs/1010.5510).
10. M. Hadac, *Well-posedness for the Kadomtsev–Petviashvili. II. Equation and generalizations*, [arXiv: abs/math/0611197](https://arxiv.org/abs/math/0611197).
11. V. E. Zakharov, E. A. Kuznetsov, “On three-dimensional solitons”, *Sov. Phys. JETP*, **39** (1974), 285–286.
12. А. В. Фаминский, “Задача Коши для уравнения Захарова–Кузнецова”, *Дифференц. уравнения*, **31:6** (1995), 1070–1081; англ. пер.: A. V. Faminskij, “The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation”, *Differ. Equ.*, **31:6** (1995), 1002–1012.
13. А. В. Фаминский, “О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова–Кузнецова”, *Совр. матем. и ее прил.*, **38** (2006), 135–148.

14. Р. Х. Зейтуниан, “Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны”, *УФН*, **165**:12 (1995), 1403–1456; англ. пер.: R. Kh. Zeytounian, “Nonlinear long waves on water and solitons”, *Physics–Uspekhi*, **38**:12 (1995), 1333–1381.
15. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, М., 1990.
16. С. С. Lin, E. Reissner, H. S. Tsien, “On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid”, *J. Math. Phys.*, **27**:3 (1948), 220–231.
17. L. A. Ostrovsky, “Nonlinear internal waves in a rotating ocean”, *Okeanologia*, **18** (1978), 181–191.
18. M. Chen, “From Boussinesq systems to KP-type equations”, *Can. Appl. Math.*, **15**:4 (2007), 367–373.
19. Y. Mammeri, “Unique continuation property for the KP-BBM-II equation”, *Differential Integral Equations*, **22**:3–4 (2009), 393–399.
20. H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
21. B. Straughan, “Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48** (1975), 381–390.
22. H. A. Levine, G. Todorova, “Blow up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:3 (2003), 793–805.
23. P. Pucci, J. Serrin, “Some new results on global nonexistence for abstract evolution with positive initial energy”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **10**:2 (1997), 241–247.
24. P. Pucci, J. Serrin, “Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy”, *J. Diff. Equations*, **150**:1 (1998), 203–214.
25. В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
26. A. B. Al’shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*, De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **15**, de Gruyter, Berlin, 2011.
27. В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, “Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “Third-order nonlinear dispersive equations: Shocks, rarefaction, and blowup waves”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:10 (2008), 1784–1810.
28. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
29. E. Mitidieri, V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev, “On global solutions and blow-up for Kuramoto–Sivashinsky-type models, and well-posed Burnett equations”, *Nonlinear Anal.*, **70**:8 (2009), 2930–2952.
30. S. I. Pohozaev, “Critical nonlinearities in partial differential equations”, *Milan J. Math.*, **77**:1 (2009), 127–150.
31. L. S. Evans, *Partial differential equations*, Grad. Stud. Math., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

32. С. Н. Глазатов, “О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя–Рейсснера–Цзяня трансзвуковой газовой динамики”, *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 137–140; англ. пер.: S. N. Glazatov, “On solvability of a spatial periodic problem for the Lin–Reissner–Tsien equation of transonic gas dynamics”, *Math. Notes*, **87**:1 (2010), 130–134.

МАКСИМ ОЛЕГОВИЧ КОРПУСОВ

(МАХІМ О. КОРПУСОВ)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова, физический факультет

E-mail: korpusov@gmail.com

Поступило в редакцию

21.11.2012

АЛЕКСЕЙ ГЕОРГИЕВИЧ СВЕШНИКОВ

(АЛЕКСЕИ G. SVESHNIKOV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова, физический факультет

E-mail: agsveshn@math380b.phys.msu.su

ЕГОР ВЛАДИСЛАВОВИЧ ЮШКОВ

(ЕГОР V. YUSHKOV)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова, физический факультет

E-mail: yushkov.msu@mail.ru