Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Коломойцев, Мультипликативные достаточные условия для мультипликаторов Фурье, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 2, 145–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:37:20

УДК 517.5

Ю. С. Коломойцев

Мультипликативные достаточные условия для мультипликаторов Фурье

Получены новые достаточные условия для мультипликаторов Фурье в пространствах Харди $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 1$, и $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Эти условия имеют мультипликативный характер и даются в терминах совместного поведения “норм” функций в $L_q(\mathbb{R}^n)$ и пространствах Бесова $B_{r,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$.

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: мультипликаторы Фурье, пространства Харди, пространства Бесова, алгебра Винера.

DOI: 10.4213/im8078

§ 1. Введение

С. Г. Михлин в 1956 г. получил [1] следующий известный результат о мультипликаторах Фурье.

ТЕОРЕМА А. Если для ограниченной функции m выполняется неравенство

$$|D^\nu m(\xi)| \leq C |\xi|^{-|\nu|_1}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

для всех $|\nu|_1 \leq [n/2] + 1$ (где $[\cdot]$ – целая часть числа), то функция m является мультипликатором Фурье в $L_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $1 < p < \infty$.

Позже Л. Хёрмандер [2] показал, что данный результат останется верным, если для функции m потребовать более слабое условие вида

$$\left(R^{-n} \int_{R < |\xi| < 2R} |D^\nu m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq C R^{-|\nu|_1}, \quad 0 < R < \infty, \quad (1)$$

которое также должно выполняться для всех $|\nu|_1 \leq [n/2] + 1$.

Эти результаты усиливали и обобщали многие известные математики. Укажем здесь лишь некоторые работы, имеющие отношение к настоящей статье, а именно [3]–[11]. В частности, в [3], [4], [6], [11] было показано, что в (1) вместо частных производных целого порядка можно брать дробные степени оператора Бесселя, а вместо L_2 -нормы – L_q -норму для $1 < q < \infty$. При этом в зависимости от q возрастает или убывает количество производных, для которых данное условие следует проверять. Отметим также, что в [5] и [6] был получен аналог результата Л. Хёрмандера в вещественных пространствах Харди $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 1$.

Дальнейшие усиления достаточных условий С. Г. Михлина и Л. Хёрмандера связаны с пространствами Бесова $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [4], [9]–[11]).

Пусть φ – некоторая гладкая функция, имеющая компактный носитель и образующая разбиение единицы (см. далее (7)). В работах [4] и [11] было показано, что функция m является мультипликатором Фурье в $L_p(\mathbb{R}^n)$ при любом $1 < p < \infty$, если

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \varphi\|_{B_{2,\lambda}^s} < \infty, \quad (2)$$

где $s > n/2$ и $\lambda = 1$. Более того, в [10] и [11] был рассмотрен предельный случай данного утверждения, т. е. $s = n/2$, однако при дополнительных ограничениях, налагаемых на функцию m , или при некотором другом определении нормы в $B_{2,1}^{n/2}(\mathbb{R}^n)$.

Для мультипликаторов в пространствах $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 1$, были получены более точные результаты. Так, в работе [9] показано, что функция m является мультипликатором Фурье в $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 1$, если (2) выполняется при $s = n(1/p - 1/2)$ и $\lambda = p$ (см. также [12] для случая $p = 1$).

А. Миячи в работах [7] и [8] получил достаточные условия иного типа, учитывающие совместное поведение функции и ее частных производных и, таким образом, позволяющие достаточно эффективно исследовать важные функции-мультипликаторы вида

$$m_{\alpha,\beta}(\xi) = \rho(\xi) |\xi|^{-\beta} e^{i|\xi|^\alpha}. \quad (3)$$

Такие функции имеют тесную связь с задачей Коши для уравнения Шрёдингера и волнового уравнения.

В частности, в [7] был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА В. Пусть $0 < p < 2$, $a, b \geq 0$ и $k = [n(\frac{1}{\min(p,1)} - \frac{1}{2})] + 1$. Предположим, что $m \in W_{2,\text{loc}}^k(\mathbb{R}^n)$, $m(\xi) = 0$ в окрестности нуля и $m(\xi)$ удовлетворяет неравенствам

$$|m(\xi)| \leq C|\xi|^{-b}, \quad \left(R^{-n} \int_{R < |\xi| < 2R} |D^\nu m(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq CR^{-b} R^{(a-1)|\nu|_1} \quad (4)$$

для всех $|\nu|_1 \leq k$ и $R > 0$. Тогда если $b \geq an(1/p - 1/2)$, то m является мультипликатором Фурье в $H_p(\mathbb{R}^n)$. Если $0 < p < 1$, то первое неравенство в (4) можно не учитывать.

Аналогичный результат имеет место и для функций m , имеющих компактный носитель (см. [7, теоремы 1', 1'', 2'']).

Отметим, что подобные достаточные условия для мультипликаторов степенных рядов в аналитических пространствах Харди $H_p(D^n)$, $0 < p \leq 1$, были получены в [13].

В [14] было показано, что если функция m вместо неравенств (4) удовлетворяет более слабому условию

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \varphi\|_{L_2}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \varphi\|_{W_2^k}^\theta < \infty, \quad \theta = \frac{n}{k} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

то она будет мультипликатором в $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 1$, а также и в $H_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq p < 2$, если вместо L_2 -нормы в (5) поставить L_∞ -норму.

Условия вида (5) естественно называть *мультипликативными достаточными условиями*. Отличительная черта таких условий заключается в том, что производные функции m могут вести себя в определенном смысле довольно “плохо”, например иметь экспоненциальный рост на бесконечности или в окрестности нуля. Однако если функция m ведет себя “хорошо” на участках “плохого” поведения своих производных, то при определенных условиях такая функция является мультипликатором Фурье.

Отметим, что для мультипликаторов Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ (или L_∞) достаточные условия в терминах совместного поведения функции и ее производных появились совсем недавно (см., например, работы [15], [16] и обзор [17, § 10]). В частности, в [16] было показано, что если $m \in C(\mathbb{R})$, $\lim m(\xi) = 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, m локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и, дополнительно, при $1 < p, q < \infty$ и $1/p + 1/q > 1$ выполнено

$$m \in L_p(\mathbb{R}), \quad m' \in L_q(\mathbb{R}), \quad (6)$$

то m является мультипликатором Фурье в $L_1(\mathbb{R})$.

В настоящей работе получены новые мультипликативные достаточные условия вида (5), которые сочетают в себе условия вида (2) и (6). В частности, показано, что в (5) вместо нормы в пространствах Соболева W_2^k можно взять норму в пространствах Бесова $B_{r,\infty}^s$, а вместо L_2 -нормы – L_q -норму, при этом установлена точная связь между n, p, q, r и s . Аналогичные результаты получены для мультипликаторов в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Настоящая статья имеет следующую структуру. В § 2 даются необходимые определения и обозначения. В § 3 формулируются основные результаты, а также предложения, показывающие их точность. В § 4 формулируются некоторые следствия и замечания. В § 5 приводятся необходимые свойства пространств Бесова, а также некоторые вспомогательные леммы. В § 6 доказываются результаты статьи.

§ 2. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство элементов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ со скалярным произведением $(x, \xi) = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ и нормой $|x| = (x, x)^{1/2}$. Как обычно, пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ состоит из измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для которых при $0 < p < \infty$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Через $C(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. При $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим

$$C^k(\mathbb{R}^n) = \{f: D^\nu f \in C(\mathbb{R}^n) \quad \forall |\nu|_1 \leq k\}.$$

При этом

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\nu|_1 \leq k} \|D^\nu f\|_\infty.$$

Здесь и далее ν — n -мерный вектор с неотрицательными целыми координатами, $|\nu|_1 = \nu_1 + \dots + \nu_n$ и

$$D^\nu f = \frac{\partial^{|\nu|_1} f}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}}, \quad D^0 f = f.$$

Далее также понадобится следующий класс функций:

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f: f \in C(\mathbb{R}^n), \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}.$$

Мы будем использовать стандартные обозначения для пространства распределений умеренного роста $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и для соответствующего пространства пробных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Вещественные пространства Харди $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, определяют класс умеренных распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{H_p} = \left\| \sup_{t>0} |\varphi_t * f| \right\|_p < \infty,$$

где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0$ и $\varphi_t(x) = t^{-n} \varphi(x/t)$.

Хорошо известно, что если $1 < p < \infty$, то $H_p(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$ с эквивалентными нормами (см. [5]).

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определим стандартным образом:

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi, x)} dx,$$

положим также $\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$. Далее операторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ будем понимать в обобщенном смысле.

Функцию m называют *мультипликатором Фурье* в $H_p(\mathbb{R}^n)$ (будем записывать $m \in \mathcal{M}(H_p)$), если оператор

$$T: \mathcal{F}(Tf)(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi), \quad f \in H_p(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n),$$

можно продолжить до линейного ограниченного оператора на всем $H_p(\mathbb{R}^n)$. При этом

$$\|T\|_{H_p \rightarrow H_p} = \|m\|_{\mathcal{M}(H_p)} = \sup_{\|f\|_{H_p} \leq 1} \|Tf\|_{H_p}.$$

Аналогичным образом определяются мультипликаторы Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ (или L_∞).

Напомним некоторые элементарные свойства мультипликаторов Фурье (см., например, [18, с. 113, 114] или [19, гл. 6]):

- (i) если $1 < p < 2$, то $\mathcal{M}(L_1) \subset \mathcal{M}(L_p) \subset \mathcal{M}(L_2) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) если $1 \leq p \leq \infty$ и $1/p + 1/p' = 1$, то $\mathcal{M}(L_p) = \mathcal{M}(L_{p'})$;
- (iii) если $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(H_p)$, то $m_1 + m_2 \in \mathcal{M}(H_p)$ и $m_1 m_2 \in \mathcal{M}(H_p)$.

Согласно свойству (ii) для исследования мультипликаторов Фурье в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, достаточно рассматривать только случай $1 < p < 2$.

Формулировки основных теорем настоящей работы даны в терминах “норм” функций из пространств Бесова $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ и их однородных аналогов $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Чтобы дать определение этих пространств введем в рассмотрение функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\text{supp } \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$, $\varphi(\xi) > 0$ при $1/2 < |\xi| < 2$ и

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1, \quad \xi \neq 0. \quad (7)$$

Введем также функции φ_k и ψ соотношениями

$$\mathcal{F}\varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi), \quad \mathcal{F}\psi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi).$$

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$. Будем говорить, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит (неоднородному) пространству Бесова $B_{p,q}^s$, если

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \|\psi * f\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{sqk} \|\varphi_k * f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

с обычной модификацией при $q = \infty$, т. е.

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^s} = \|\psi * f\|_p + \sup_{k \geq 1} 2^{sqk} \|\varphi_k * f\|_p.$$

Для того чтобы дать определение однородных пространств Бесова, напомним, что

$$\dot{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (D^\nu \hat{\varphi})(0) = 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}\},$$

а $\dot{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\dot{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что $f \in \dot{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит однородному пространству Бесова $\dot{B}_{p,q}^s$, если

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{sqk} \|\varphi_k * f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

(с обычной модификацией при $q = \infty$).

Мы будем рассматривать также пространства бесселевых (или риссовых) потенциалов $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ (или $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$). Напомним, что оператор $J^s = (I - \Delta)^{s/2}$ (или $I^s = (-\Delta)^{s/2}$) называют потенциалом Бесселя (или потенциалом Рисса). Здесь I – единичный оператор, а Δ – оператор Лапласа.

Пусть $1 < p < \infty$ и $s \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (или $f \in \dot{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n)$) принадлежит пространству H_p^s (или $\dot{H}_p^s$), если

$$\|f\|_{H_p^s} = \|J^s f\|_p < \infty \quad (\text{или } \|f\|_{\dot{H}_p^s} = \|I^s f\|_p < \infty).$$

Отметим, что данные пространства называют еще *лебеговыми* или *лиувиллевыми пространствами*.

Напомним хорошо известную связь между пространствами H_p^s и обычными пространствами Соболева W_p^k (см., например, [22, с. 116]). Пусть $1 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда

$$H_p^k(\mathbb{R}^n) = W_p^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{W_p^k}^* < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{W_p^k}^* = \|f\|_p + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_j^k} \right\|_p$$

– эквивалентная норма в H_p^k и W_p^k . Здесь и далее $W_p^0 = L_p$.

Аналогичная связь имеет место между однородными пространствами $\dot{H}_p^s$ и $\dot{W}_p^k$ (см., например, [22, с. 343]).

Далее всюду через C обозначены положительные константы, зависящие от указанных параметров, а через A – некоторые конечные константы. Полагаем также $\frac{\infty}{\infty} = 1$ и $\frac{0}{0} = 0$.

§ 3. Формулировка основных результатов

Для формулировки основных результатов нам понадобится вспомогательная функция $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\text{supp } \eta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/4 \leq |\xi| \leq 4\}$, $0 \leq \eta(\xi) \leq 1$, для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\eta(\xi) = 1$ при $1/2 \leq |\xi| \leq 2$. Далее будем говорить, что функция m принадлежит локально пространству X , если $m(\delta \cdot) \eta \in X$ для любого $\delta > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p < 1$, $0 < q, r \leq \infty$, $s > n(1/p - 1/2)$ и функция m принадлежит локально пространству $L_q \cap B_{r,\infty}^s$. Предположим, что $q = r = 2$ или

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} < \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{n}{s} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

Если, дополнительно,

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_q}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{B_{r,\infty}^s}^\theta \leq A, \quad (9)$$

то $m \in \mathcal{M}(H_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(H_p)} \leq CA$.

В пространствах $H_1(\mathbb{R}^n)$ и $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, имеет место следующий более слабый аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p < 2$, $0 < q, r \leq \infty$, $s > \sigma > n(1/p - 1/2)$ и ограниченная функция m принадлежит локально пространству $B_{r,\infty}^s$. Предположим, что $1/q = 1/r = 1/p - 1/2$ или

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\sigma}{s}. \quad (10)$$

Если, дополнительно,

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_q}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{B_{r,\infty}^s}^\theta \leq A, \quad (11)$$

то $m \in \mathcal{M}(H_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(H_p)} \leq CA$.

Используя теорему 1, нетрудно проверить, что функция $m_{\alpha,\beta}$ (см. (21) далее) принадлежит пространству $\mathcal{M}(H_p)$, $0 < p < 1$, если $\beta \geq \alpha n(1/p - 1/2)$ (ср. с леммой 5, приведенной ниже). С помощью теоремы 2 аналог данного результата для $1 \leq p < 2$ можно получить только при $\beta > \alpha n(1/p - 1/2)$. Если $\beta = \alpha n(1/p - 1/2)$, то теоремы 2, в отличие от теоремы 1, уже не достаточно.

В следующих двух теоремах мы устраняем такой недостаток, однако для этого нам приходится брать $q = \infty$, если $s > n/2$, и, дополнительно, $r = \infty$, если $s > n(1/p - 1/2)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p < 2$, $0 < r \leq \infty$, $s > n/\min(r, 2)$ и функция m принадлежит локально пространству $L_\infty \cap B_{r,\infty}^s$. Если, дополнительно,

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_\infty}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{B_{r,\infty}^s}^\theta \leq A, \quad \theta = \frac{n}{s} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right), \quad (12)$$

то $m \in \mathcal{M}(H_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(H_p)} \leq CA$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < 2$, $s > n(1/p - 1/2)$ и функция m принадлежит локально пространству $B_{\infty,\infty}^s$. Если, дополнительно,

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_\infty}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{B_{\infty,\infty}^s}^\theta \leq A, \quad \theta = \frac{n}{s} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right), \quad (13)$$

то $m \in \mathcal{M}(L_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(L_p)} \leq CA$.

В следующих двух предложениях показана точность теорем 1–4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $0 < p < 2$, $1 \leq q, r \leq \infty$ и $s > n(1/p - 1/2)$. Если $\theta^* < n(1/p - 1/2)/s$, то найдется функция $m \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_q}^{1-\theta^*} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{B_{r,\infty}^s}^{\theta^*} < \infty, \quad (14)$$

но $m \notin \mathcal{M}(H_p)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $0 < p < 2$, $1 \leq q, r \leq \infty$, $s > n(1/p - 1/2)$ и $\theta = n(1/p - 1/2)/s$. Если

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} > \frac{1}{2} \quad \text{при } 0 < p < 1, \quad (15)$$

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \quad \text{при } 1 \leq p < 2, \quad (16)$$

то найдется функция $m \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_q}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{B_{r,\infty}^s}^\theta < \infty, \quad (17)$$

но $m \notin \mathcal{M}(H_p)$.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий для мультипликаторов Фурье в пространствах $L_1(\mathbb{R}^n)$ (или L_∞). Прежде чем сформулировать следующий результат, рассмотрим класс функций, представимых в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье:

$$W_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} g(x) dx, \|f\|_{W_0} = \|g\|_1 < \infty \right\},$$

который называют *алгеброй Винера* или *кольцом Винера*. Хорошо известно (см., например, [18, с. 113]), что принадлежность функции f пространству $W_0(\mathbb{R}^n)$ делает ее мультипликатором Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, мультипликатором Фурье в $L_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$. Таким образом, следующую теорему можно рассматривать как достаточное условие для мультипликаторов Фурье в $L_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $1 \leq p \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < q, r \leq \infty$, $\sigma < n/q$, $s > n/r$, $s > \sigma$ и $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $q = r = 2$ или

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} > \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{n/2 - \sigma}{s - \sigma}. \quad (18)$$

Если, дополнительно, $f \in \dot{B}_{q,\infty}^\sigma \cap \dot{B}_{r,\infty}^s$, то $f \in W_0(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{W_0} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^\sigma}^{1-\delta} \|f\|_{\dot{B}_{r,\infty}^s}^\delta, \quad \delta = \frac{n/q - \sigma}{s - \sigma + n(1/q - 1/r)}, \quad (19)$$

где C – константа, не зависящая от f .

Как и предыдущие теоремы, данный результат является точным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $1 \leq q, r \leq \infty$, $\sigma, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sigma < n/q$, $s > n/r$ и $s > \sigma$. Если

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} < \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{n/2 - \sigma}{s - \sigma}, \quad (20)$$

то найдется функция $f \in C_0 \cap \dot{B}_{q,\infty}^\sigma \cap \dot{B}_{r,\infty}^s$, но $f \notin W_0(\mathbb{R}^n)$.

§ 4. Некоторые следствия и замечания

Из теорем 1–4, учитывая непрерывное вложение $H_r^s \subset B_{r,\infty}^s$ (см., например, [22, с. 59, 60]), получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 < p < 2$, $1 < r < \infty$, $s > \frac{2n}{\min(r,2)} \left(\frac{1}{\min(p,1)} - \frac{1}{2} \right)$ и функция t принадлежит локально пространству $L_\infty \cap H_r^s$. Если

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_\infty}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{H_r^s}^\theta \leq A,$$

то $t \in \mathcal{M}(H_p)$ и $\|t\|_{\mathcal{M}(H_p)} \leq CA$.

Легко видеть, что следствие 1 является усилением дробного варианта теоремы Хёрмандера (см. [6] и [16]), а также усилением достаточных условий для мультипликаторов из [7].

Для формулировки следующего утверждения напомним определение пространства Зигмунда $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$. Пусть $s = k + \sigma$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $0 < \sigma \leq 1$. Положим

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^k(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\nu|_1 \leq k} \|D^\nu f\|_\infty + \sum_{|\nu|_1 = k} \sup_{h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-\sigma} \|\Delta_h^2 D^\nu f\|_\infty < \infty \right\},$$

где $\Delta_h^2 f$ – вторая разность функции f с шагом h .

Из теорем 1–4, учитывая, что $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = B_{\infty, \infty}^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$ (см., например, [22, с. 118]), получаем следующее усиление теоремы G из работы [8].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 < p < 2$, $s > n(1/p - 1/2)$ и функция m принадлежит локально пространству $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$. Если, дополнительно,

$$\sup_{\delta > 0} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{L_\infty}^{1-\theta} \|m(\delta \cdot) \eta\|_{\mathcal{C}^s}^\theta \leq A, \quad \theta = \frac{n}{s} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right),$$

то $m \in \mathcal{M}(L_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(L_p)} \leq CA$.

Для классов $W_0(\mathbb{R}^n)$ из теоремы 5, используя непрерывное вложение $\dot{H}_r^s \subset \dot{B}_{r, \infty}^s$ (см., например, [19, с. 188]), получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 < q \leq \infty$, $1 < r < \infty$, $s > n/r$ и $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $q = r = 2$ или

$$\left(1 - \frac{n}{2s}\right) \frac{1}{q} + \left(\frac{n}{2s}\right) \frac{1}{r} > \frac{1}{2}.$$

Если, дополнительно, $f \in L_q \cap \dot{H}_r^s$, то $f \in W_0(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{W_0} \leq C \|f\|_{L_q}^{1-\delta} \|f\|_{\dot{H}_r^s}^\delta, \quad \delta = \frac{n/q}{s + n(1/q - 1/r)},$$

где C – константа, не зависящая от f .

Легко видеть, что при $s = n = 1$ мы получаем основной результат работы [16], а при $q = r = 2$ – известную теорему типа Бёрлинга (см. [20] и [21]).

Следствия 1–3 являются точными. Доказательство этого факта аналогично доказательству предложений 1–3.

Из предложения 2 следует, что утверждение теоремы 3 с условием (9) вместо (12) и $q = s = 2$ уже не выполняется. Однако если $p = 1$, то при некотором видоизменении условия (12) L_∞ -норму функции $m(\delta \cdot) \eta$ можно заменить L_2 -нормой. Так, применяя теорему 2.2 из [12], в которой показано, что $m \in \mathcal{M}(H_1)$, если $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(m(2^j \cdot) \eta)\|_1^2 < \infty$, а также используя теорему 5, получаем следующее достаточное условие для мультипликаторов в $H_1(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $s > n/2$. Если

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \|m(2^j \cdot) \eta\|_{L_2}^{1-\frac{n}{2s}} \|m(2^j \cdot) \eta\|_{B_{2,\infty}^{\frac{n}{2s}}}^{\frac{n}{2s}} < \infty,$$

то $m \in \mathcal{M}(H_1)$.

Отметим, что теорема 6, с одной стороны, является усилением теорем 3, 4, поскольку $\|m_{2^j}\|_q \leq C \|m_{2^j}\|_\infty$, с другой стороны, как и теорема 2, уже не годится для полного исследования функций вида (3).

§ 5. Вспомогательные утверждения

Приведем сначала некоторые хорошо известные факты о пространствах Бесова. Мы будем ссылаться, в основном, на монографии [22] и [23]. Необходимую информацию о пространствах Бесова можно найти также в [19], [24] и [25].

Прежде всего дадим одно эквивалентное определение однородных пространств Бесова (см., например, в [22, с. 144]). Далее если f — произвольная функция на $\mathbb{R}^n$ и $h \in \mathbb{R}^n$, то

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta_h^l f(x) = \Delta_h^l (\Delta_h^{l-1} f(x)).$$

ЛЕММА 1. Пусть $0 < p, q \leq \infty$ и $s > n(1/\min(p, 1) - 1)$. Если $l \in \mathbb{N}$ и $l > s$, то величина

$$\|f\|_{B_{p,q}^s}^* = \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \|\Delta_h^l f\|_p^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}$$

является эквивалентной квазинормой в $B_{p,q}^s$ (с обычной модификацией при $q = \infty$, т. е. $\|f\|_{B_{p,\infty}^s}^* = \|f\|_p + \sup_{h \in \mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \|\Delta_h^l f\|_p$).

Мы будем часто использовать следующие вложения для пространств Бесова.

ЛЕММА 2. (i) Пусть $0 < p \leq \infty$, $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$ и $s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$B_{p,q_0}^s \subset B_{p,q_1}^s \quad (\dot{B}_{p,q_0}^s \subset \dot{B}_{p,q_1}^s).$$

(ii) Пусть $0 < p_0 \leq p_1 \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_1 \leq s_0$ и $s_0 - n/p_0 = s_1 - n/p_1$. Тогда

$$B_{p_0,q}^{s_0} \subset B_{p_1,q}^{s_1} \quad (\dot{B}_{p_0,q}^{s_0} \subset \dot{B}_{p_1,q}^{s_1}).$$

(iii) Пусть $0 < p, q_0, q_1 \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$B_{p,q_0}^{s+\varepsilon} \subset B_{p,q_1}^s.$$

Здесь и далее через $\subset$ обозначено непрерывное вложение.

Напомним также хорошо известные вложения для пространств $B_{p,q}^k$, W_p^k , C^k и для их однородных аналогов.

ЛЕММА 3. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} B_{p,1}^k &\subset W_p^k \subset B_{p,\infty}^k & (\dot{B}_{p,1}^k &\subset \dot{W}_p^k \subset \dot{B}_{p,\infty}^k), \\ B_{\infty,1}^k &\subset C^k \subset B_{\infty,\infty}^k & (\dot{B}_{\infty,1}^k &\subset \dot{C}^k \subset \dot{B}_{\infty,\infty}^k). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО лемм 2, 3 см., например, в [22, гл. 2, гл. 5] и [23, гл. 3, гл. 11].

Приведем свойство дилатации для пространств $\dot{B}_{p,q}^s$ (см., например, [22, с. 339]).

ЛЕММА 4. Пусть $0 < p, q \leq \infty$, $\lambda > 0$ и $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{B}_{p,q}^s} \leq C \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s},$$

где C – некоторая положительная константа, не зависящая от f и λ .

Для доказательства точности условий теорем 1–5 нам понадобится известная функция-мультипликатор

$$m_{\alpha,\beta}(\xi) = \rho(\xi) \frac{e^{i|\xi|^\alpha}}{|\xi|^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (21)$$

где $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho(\xi) = 0$ при $|\xi| < 1$ и $\rho(\xi) = 1$ при $|\xi| \geq 2$. Отметим, что функция $m_{\alpha,\beta}$ была предметом специального изучения в работах [26], [5], [7] и [8] (см. также ссылки в [18, гл. IV, п. 7.4]). Доказательство утверждений следующей леммы см., например, в [8, предложение 5.1].

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $m_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}(H_p)$ тогда и только тогда, когда $\beta \geq n(1/p - 1/2)\alpha$;
- (ii) $m_{\alpha,\beta} \in W_0(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\beta > n\alpha/2$.

Заметим, что достаточную часть утверждений леммы 5 можно легко получить из следствий 1, 3.

ЛЕММА 6. Пусть $0 < \alpha < 2$ и $2 < \beta \leq \infty$. Тогда

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\alpha^{\frac{\alpha}{2}(\frac{\beta-2}{\beta-\alpha})} \|f\|_\beta^{\frac{\beta}{2}(\frac{2-\alpha}{\beta-\alpha})}.$$

Данная лемма является простым следствием из неравенства Гёльдера.

§ 6. Доказательство основных результатов

Всюду далее для удобства положим $m_\delta(\xi) = m(\delta\xi)\eta(\xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 основано на следующем достаточном условии для мультипликаторов Фурье в пространстве $H_p(\mathbb{R}^n)$ при $0 < p < 1$ (см. [9, с. 20]).

ЛЕММА 7. Пусть $0 < p < 1$ и $\sigma = n(1/p - 1/2)$. Если

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|m_{2^j}\|_{B_{2,p}^\sigma} \leq A,$$

то $m \in \mathcal{M}(H_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(H_p)} \leq CA$.

Покажем сначала, что $\|m_{2j}\|_2 \leq CA$. Действительно, выберем $q^* < q$ так, чтобы

$$\frac{1-\theta}{q^*} + \frac{\theta}{r} = \frac{1}{2}.$$

Тогда из неравенства Гёльдера и леммы 1, учитывая, что $\text{supp } m_{2j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 4\}$ и $s > n/r$, получаем

$$\|m_{2j}\|_2 \leq \|m_{2j}\|_{q^*}^{1-\theta} \|m_{2j}\|_r^\theta \leq C \|m_{2j}\|_q^{1-\theta} \|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s}^\theta \leq CA.$$

Таким образом, согласно лемме 7 для доказательства теоремы достаточно проверить, что

$$I_j = \int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-\sigma p} \|\Delta_h^l m_{2j}\|_2^p \frac{dh}{|h|^n} \leq CA^p, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (22)$$

где $l > \sigma$. Для этого запишем I_j в виде

$$I_j = \int_{|h| \leq \gamma_j} + \int_{|h| > \gamma_j} = I_j^{(1)} + I_j^{(2)},$$

где $\gamma_j = (\|m_{2j}\|_q \|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s}^{-1})^{1/s}$, и покажем, что

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} I_j^{(i)} \leq CA^p, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Прежде всего заметим, что при $0 < q \leq \infty$ и $2 \leq r \leq \infty$

$$\gamma_j \leq C, \quad (24)$$

где C – константа, зависящая только от q, r, s и n . Действительно, если $q < r$, то, применяя неравенство Гёльдера, а затем вложения $B_{r,\infty}^s \subset B_{r,1}^0 \subset L_r$ (см. лемму 2, (iii) и лемму 3), имеем

$$\|m_{2j}\|_q \leq C \|m_{2j}\|_r \leq C \|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s}.$$

Отсюда сразу следует неравенство (24). Если $q \geq r$, то, учитывая, что $s_1 = s - n(1/r - 1/q) > 0$, и применяя лемму 1 и лемму 2, (ii), имеем

$$\|m_{2j}\|_q \leq C \|m_{2j}\|_{B_{q,1}^{s_1}} \leq C \|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s}.$$

Отсюда также получаем (24).

Перейдем к доказательству неравенств (23).

1) Рассмотрим сначала случай $2 \leq q, r \leq \infty$. Используя неравенство Гёльдера, а также лемму 1, находим

$$\begin{aligned} I_j^{(1)} &\leq C \int_{|h| \leq \gamma_j} |h|^{-\sigma p} \|\Delta_h^l m_{2j}\|_r^p \frac{dh}{|h|^n} \\ &\leq C \int_{|h| \leq \gamma_j} |h|^{(s-\sigma)p} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_t^l m_{2j}\|_r}{|t|^s} \right)^p \frac{dh}{|h|^n} \leq C \gamma_j^{(s-\sigma)p} \|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s}^p = CA^p. \end{aligned} \quad (25)$$

Чтобы оценить интеграл $I_j^{(2)}$, достаточно воспользоваться неравенством Гёльдера и следующим простым соотношением:

$$\|\Delta_h^l m_{2j}\|_q \leq C \|m_{2j}\|_q, \quad 0 < q \leq \infty, \quad (26)$$

где C – константа, зависящая только от l и q :

$$I_j^{(2)} \leq C \|m_{2j}\|_2^p \int_{|h| \geq \gamma_j} \frac{dh}{|h|^{\sigma p + n}} \leq C \|m_{2j}\|_q^p \gamma_j^{-\sigma p} = C A^p. \quad (27)$$

Объединяя (25) и (27), получаем (23) для данных q и r .

2) Теперь рассмотрим случай $0 < q < 2 < r \leq \infty$. Интеграл $I_j^{(1)}$ оценивается так же, как и в (25). Рассмотрим $I_j^{(2)}$. Положим $\alpha = q$, $\beta = r$ в лемме 6 и обозначим $\lambda = \frac{r}{2}(\frac{2-q}{r-q})$. Учитывая, что неравенство $\lambda < \theta$ эквивалентно неравенству (8), а также используя неравенство (26) и лемму 1, находим

$$\begin{aligned} I_j^{(2)} &\leq \int_{|h| \geq \gamma_j} |h|^{-\sigma p} \|\Delta_h^l m_{2j}\|_q^{(1-\lambda)p} \|\Delta_h^l m_{2j}\|_r^{\lambda p} \frac{dh}{|h|^n} \\ &\leq C \|m_{2j}\|_q^{(1-\lambda)p} \int_{|h| \geq \gamma_j} |h|^{(s\lambda - \sigma)p} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_t^l m_{2j}\|_r}{|t|^s} \right)^{\lambda p} \frac{dh}{|h|^n} \\ &\leq C \gamma_j^{(s\lambda - \sigma)p} \|m_{2j}\|_q^{(1-\lambda)p} \|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s}^{\lambda p} = C A^p. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, объединяя (28) и (25), мы также получаем (23).

3) Случай $2 < q \leq \infty$, $0 < r < 2$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из [6, теоремы 4.6, 4.7] следует, что если $1 \leq p < 2$, $\sigma > n(1/p - 1/2)$ и $1/t = 1/p - 1/2$, а функция $m \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\delta > 0} \|m_\delta\|_{H_t^\sigma} \leq A, \quad (29)$$

то $m \in \mathcal{M}(H_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(H_p)} \leq CA$.

Используя вложение $B_{t,1}^\sigma \subset H_t^\sigma$ (см., например, [22, с. 59, 60]), мы получаем, что $m \in \mathcal{M}(H_p)$, если вместо (29) выполнено неравенство

$$\sup_{\delta > 0} \|m_\delta\|_{B_{t,1}^\sigma} \leq A.$$

Таким образом, повторяя приведенное выше доказательство теоремы 1, нетрудно убедиться в справедливости теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 основано на методе комплексной интерполяции (см., например, [6, с. 151, 152] или [22, с. 86–90]).

Выберем $0 < p_0 < 1$ так, чтобы $s > n(1/p_0 - 1/2)$, и определим число $\gamma \in (0, 1)$ из равенства

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{2}.$$

Положим

$$m(\xi, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|m_{2^j}\|_{\infty}^{\frac{\gamma-z}{1-\gamma}} m(\xi) \eta(2^{-j}\xi), \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1.$$

Проверим, что

$$\|m(\cdot, 1 + iy)\|_{\mathcal{M}(L_2)} \leq C, \quad (30)$$

$$\|m(\cdot, iy)\|_{\mathcal{M}(H_{p_0})} \leq CA^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (31)$$

Неравенство (30) вытекает из следующей простой оценки:

$$|m(\xi, 1 + iy)| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi_{\{2^{j-2} \leq |\xi| \leq 2^{j+2}\}}(\xi) \leq C$$

(где χ_E – характеристическая функция множества E), и того, что $L_{\infty} = \mathcal{M}(L_2)$.

Докажем неравенство (31). Для этого мы воспользуемся теоремой 1. Заметим, что при p_0 , достаточно близком к 1, условие (8) в теореме 1 будет выполнено.

Запишем функцию $m(\xi, iy)$ в следующем виде:

$$m(\xi, iy) = \sum_{l=-3}^3 m^{(l)}(\xi, iy),$$

где

$$m^{(l)}(\xi, iy) = \sum_{k \equiv l \pmod{7}} \|m_{2^k}\|_{\infty}^{\frac{\gamma-iy}{1-\gamma}} m(\xi) \eta(2^{-k}\xi),$$

и проверим, что

$$\|m^{(l)}(\cdot, iy)\|_{\mathcal{M}(H_{p_0})} \leq CA^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad l = -3, \dots, 3. \quad (32)$$

Тогда, используя элементарные свойства мультипликаторов Фурье, мы, очевидно, будем иметь (31).

Заметим, что при фиксированных $l \in [-3, 3]$ и $j \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$m_{2^j}^{(l)}(\xi, iy) = \|m_{2^k}\|_{\infty}^{\frac{\gamma-iy}{1-\gamma}} m(2^{k-l}\xi) \eta(2^{-l}\xi) \eta(\xi), \quad k = j + l.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_j^{(l)} &:= \|m_{2^j}^{(l)}(\cdot, iy)\|_{\infty}^{1-\theta_0} \|m_{2^j}^{(l)}(\cdot, iy)\|_{B_{r,\infty}^s}^{\theta_0} \\ &\leq C \|m_{2^k}\|_{\infty}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}+1-\theta_0} \|m_{2^k} \eta(2^{\cdot})\|_{B_{r,\infty}^s}^{\theta_0} \leq C \|m_{2^k}\|_{\infty}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}+1-\theta_0} \|m_{2^k}\|_{B_{r,\infty}^s}^{\theta_0}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\theta_0 = n(1/p_0 - 1/2)/s$ и $k = j + l$. В последних двух неравенствах в (33) мы воспользовались леммой 1 и достаточным условием для поточечных мультипликаторов в пространствах Бесова (см., например, [22, с. 204]).

Продолжая оценивать (33), используя при этом соотношение (12) и учитывая, что $\theta_0 - \frac{\gamma}{1-\gamma}\theta = \theta$, находим

$$S_j^{(l)} \leq CA^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \|m_{2^{j+l}}\|_{\infty}^{1-\theta_0+\frac{\gamma}{1-\gamma}\theta_0} \|m_{2^{j+l}}\|_{B_{r,\infty}^s}^{\theta_0-\frac{\gamma}{1-\gamma}\theta} \leq CA^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Из последнего неравенства и теоремы 1 мы сразу получаем (32) и, следовательно, (31).

Таким образом, используя [6, теорема 3.4] и неравенства (30) и (31), получаем, что $m = m(\cdot, \gamma) \in \mathcal{M}(H_p)$ и $\|m\|_{\mathcal{M}(H_p)} \leq CA$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Снова воспользуемся методом комплексной интерполяции.

Возьмем $1 < p_0 < 2$ и $s_0 > n/2$ так, чтобы $s > s_0(1 - \gamma)$, где число $\gamma \in (0, 1)$ определяется из равенства

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \gamma}{p_0} + \frac{\gamma}{2}.$$

Введем функцию

$$m(\xi, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|m_{2j}\|_{\infty}^{\frac{\gamma-z}{1-\gamma}} \psi(2^{-j}\xi) (J_{\lambda_j}^{(z-\gamma)s_0} m_{2j})(2^{-j}\xi), \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1,$$

где:

- 1) $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/8 < |\xi| < 8\}$ и $\psi(\xi) = 1$, если $\xi \in \operatorname{supp} \eta$;
- 2) $J_{\lambda}^z f(\xi) = (J^z \tau_{\lambda} f)(\xi/\lambda)$, где $\tau_{\lambda} f = f(\lambda \cdot)$;
- 3) $\lambda_j = (\|m_{2j}\|_{\infty} \|m_{2j}\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^s}^{-1})^{1/s}$.

В силу интерполяционной теоремы 4.1 из [27, с. 231] для доказательства теоремы достаточно проверить, что

$$\|m(\cdot, 1 + iy)\|_{\mathcal{M}(L_2)} \leq C(1 + |y|)^{n+1}, \quad (34)$$

$$\|m(\cdot, iy)\|_{\mathcal{M}(L_{p_0})} \leq C(1 + |y|)^{n+1} A^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (35)$$

Докажем сначала (34). Для этого воспользуемся тем фактом, что функция

$$g_y(\xi) = (1 + |\xi|)^{-\varepsilon + iy}$$

при любых $\varepsilon > 0$ и $y \in \mathbb{R}$ является мультипликатором Фурье в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|g_y\|_{\mathcal{M}(L_\infty)} \leq C(1 + |y|)^{n+1}, \quad (36)$$

где C – константа, не зависящая от y (см., например, [6, лемма 4.2]).

Имеем

$$\begin{aligned} |m(\xi, 1 + iy)| &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(2^{-k}\xi) \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|m_{2j}\|_{\infty}^{\frac{\gamma-z}{1-\gamma}} \|J_{\lambda_j}^{(1-\gamma)s_0 + iys_0} m_{2j}\|_{\infty} \\ &\leq C(1 + |y|)^{n+1} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|m_{2j}\|_{\infty}^{-1} \|J_{\lambda_j}^{(1-\gamma)s_0 + \varepsilon} m_{2j}\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (37)$$

где ε – положительное число такое, что $s = (1 - \gamma)s_0 + 2\varepsilon$.

Далее, используя лемму 3 и лемму 2, (iii), свойство лифтинга для оператора J^s (см., например, [22, с. 76]) и лемму 4, последовательно находим

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda_j}^{(1-\gamma)s_0 + \varepsilon} m_{2j}\|_{\infty} &= \|J^{(1-\gamma)s_0 + \varepsilon} \tau_{\lambda_j} m_{2j}\|_{\infty} \\ &\leq C \|J^{(1-\gamma)s_0 + \varepsilon} \tau_{\lambda_j} m_{2j}\|_{B_{\infty, 1}^0} \leq C \|J^{(1-\gamma)s_0 + \varepsilon} \tau_{\lambda_j} m_{2j}\|_{B_{\infty, \infty}^\varepsilon} \\ &\leq C \|\tau_{\lambda_j} m_{2j}\|_{B_{\infty, \infty}^s} \leq C \{\|\tau_{\lambda_j} m_{2j}\|_{\infty} + \|\tau_{\lambda_j} m_{2j}\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^s}\} \\ &\leq C \{\|m_{2j}\|_{\infty} + \lambda_j^s \|m_{2j}\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^s}\} = C \|m_{2j}\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, объединяя неравенства (37) и (38) и учитывая при этом, что $L_\infty = \mathcal{M}(L_2)$, мы сразу получаем (34).

Теперь докажем неравенство (35). По аналогии с доказательством теоремы 3 запишем функцию $m(\xi, iy)$ в следующем виде:

$$m(\xi, iy) = \sum_{l=-5}^5 m^{(l)}(\xi, iy),$$

где

$$m^{(l)}(\xi, iy) = \sum_{k \equiv l \pmod{11}} \|m_{2^k}\|_\infty^{\frac{\gamma-iy}{1-\gamma}} \psi(2^{-k}\xi) (J_{\lambda_k}^{(iy-\gamma)s_0} m_{2^k})(2^{-k}\xi),$$

и проверим, что

$$\|m^{(l)}(\cdot, iy)\|_{\mathcal{M}(H_{p_0})} \leq C(1+|y|)^{n+1} A^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad l = -5, \dots, 5. \quad (39)$$

Фиксируя $j \in \mathbb{Z}$ и $l \in [-5, 5]$, получаем

$$m_{2^j}^{(l)}(\xi, iy) = \|m_{2^k}\|_\infty^{\frac{\gamma-iy}{1-\gamma}} \psi(2^{-l}\xi) \eta(\xi) (J_{\lambda_k}^{(iy-\gamma)s_0} m_{2^k})(2^{-l}\xi), \quad k = j + l.$$

Отсюда, используя [19, теорема 6.3.2], лемму 1, теорему о поточечных мультипликаторах (см., например, [22, с. 204]) и (36), последовательно находим

$$\begin{aligned} S_j^{(l)} &:= \|m_{2^j}^{(l)}(\cdot, iy)\|_\infty^{1-\theta_0} \|m_{2^j}^{(l)}(\cdot, iy)\|_{B_{\infty,\infty}^{s_0}}^{\theta_0} \\ &\leq C \|m_{2^k}\|_\infty^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \|J_{\lambda_k}^{(iy-\gamma)s_0} m_{2^k}\|_\infty^{1-\theta_0} \|\psi \eta(2^l \cdot) J_{\lambda_k}^{(iy-\gamma)s_0} m_{2^k}\|_{B_{\infty,\infty}^{s_0}}^{\theta_0} \\ &\leq C \|m_{2^k}\|_\infty^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \|J_{\lambda_k}^{(iy-\gamma)s_0} m_{2^k}\|_\infty^{1-\theta_0} \|J_{\lambda_k}^{(iy-\gamma)s_0} m_{2^k}\|_{B_{\infty,\infty}^{s_0}}^{\theta_0} \\ &\leq C(1+|y|)^{n+1} \|m_{2^k}\|_\infty^{\frac{\gamma}{1-\gamma}+1-\theta_0} \|J_{\lambda_k}^{-\gamma s_0} m_{2^k}\|_{B_{\infty,\infty}^{s_0}}^{\theta_0}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\theta_0 = n(1/p_0 - 1/2)/s_0$ и $k = j + l$.

Рассмотрим последний множитель в последнем неравенстве из (40). Используя лемму 4, а также (36), получаем

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda_k}^{-\gamma s_0} m_{2^k}\|_{B_{\infty,\infty}^{s_0}} &\leq C \{ \|J^{-\gamma s_0} \tau_{\lambda_k} m_{2^k}\|_\infty + \|J^{-\gamma s_0} \tau_{\lambda_k} m_{2^k}(\lambda_k^{-1} \cdot)\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{s_0}} \} \\ &\leq C \{ \|m_{2^k}\|_\infty + \lambda_k^{-s_0} \|J^{-\gamma s_0} \tau_{\lambda_k} m_{2^k}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{s_0}} \}. \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что функция

$$\mu(\xi) = \frac{|\xi|^{s_0-s}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\gamma s_0}{2}}}$$

является мультипликатором Фурье в пространстве $\dot{B}_{\infty,\infty}^{s_0}$ (см., например, [22, с. 342]). Используя этот факт, свойство лифтинга для оператора I^{s-s_0} (см., например, [22, с. 343]) и лемму 4, находим

$$\begin{aligned} \|J^{-\gamma s_0} \tau_{\lambda_k} m_{2^k}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{s_0}} &\leq C \|I^{s-s_0} \tau_{\lambda_k} m_{2^k}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{s_0}} \\ &\leq C \|\tau_{\lambda_k} m_{2^k}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^s} \leq C \lambda_k^s \|m_{2^k}\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^s}. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, объединяя (40)–(42) и учитывая при этом непрерывное вложение $B_{\infty,\infty}^s \subset L_\infty$ (см. лемму 3), имеем

$$S_j^{(l)} \leq (1 + |y|)^{n+1} \|m_{2^j+l}\|_\infty^{\frac{\gamma}{1-\gamma}+1-\theta_0 \frac{s_0}{s}} \|m_{2^j+l}\|_{B_{\infty,\infty}^s}^{\theta_0 \frac{s_0}{s}}. \quad (43)$$

Остается воспользоваться неравенством (13), применяя которое к (43), мы сразу получаем (39) и, следовательно, (35). Завершается доказательство с помощью указанной выше интерполяционной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Хорошо известно (см., например, [10], [4] или [23, с. 119]), что если $f \in C_0 \cap \dot{B}_{2,1}^{n/2}$, то $f \in W_0(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{W_0} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{2,1}^{n/2}}, \quad (44)$$

где C – константа, не зависящая от f .

Таким образом, для того чтобы доказать принадлежность функции f классу $W_0(\mathbb{R}^n)$, достаточно проверить, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}k} \|\varphi_k * f\|_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} + \sum_{k=-\infty}^{-1} = S_1 + S_2 < \infty.$$

1) Рассмотрим сначала случай $0 < q, r \leq 2$. Пусть $s_1 = s - n(1/r - 1/2)$. Используя вложение $\dot{B}_{r,\infty}^s \subset \dot{B}_{2,\infty}^{s_1}$ (см. лемму 2, (ii)), находим

$$S_1 \leq \sup_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} 2^{s_1 j} \|\varphi_j * f\|_2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{2}-s_1)k} \leq \|f\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{s_1}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{r}-s)k} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{r,\infty}^s}. \quad (45)$$

Аналогично, используя вложение $\dot{B}_{q,\infty}^\sigma \subset \dot{B}_{2,\infty}^{\sigma_1}$, где $\sigma_1 = \sigma - n(1/q - 1/2)$, получаем

$$S_2 \leq C \|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^\sigma}. \quad (46)$$

Объединяя (45) и (46), имеем

$$\|f\|_{W_0} \leq C \{\|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^\sigma} + \|f\|_{\dot{B}_{r,\infty}^s}\}. \quad (47)$$

Чтобы получить неравенство (19), мы применяем к (47) стандартный переход к мультипликативным неравенствам с помощью функции $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ и леммы 4 (см., например, [24, с. 311]).

2) Рассмотрим теперь случай $0 < q < 2 < r \leq \infty$. Сумма S_2 оценивается так же, как в (46).

Оценим сумму S_1 . Обозначим $\lambda = \frac{r(2-q)}{2(r-q)}$. Применяя лемму 6 при $\alpha = q$ и $\beta = r$, находим

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}k} \|\varphi_k * f\|_q^{1-\lambda} \|\varphi_k * f\|_r^\lambda \\ &\leq \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\sigma j} \|\varphi_j * f\|_q \right)^{1-\lambda} \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{s j} \|\varphi_j * f\|_r \right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(\frac{n}{2}-(1-\lambda)\sigma-\lambda s)k} \\ &= \|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^\sigma}^{1-\lambda} \|f\|_{\dot{B}_{r,\infty}^s}^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{qr(s-\sigma)}{r-q}(\frac{1}{2}-(1-\theta)\frac{1}{q}-\theta\frac{1}{r})k} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^\sigma}^{1-\lambda} \|f\|_{\dot{B}_{r,\infty}^s}^\lambda. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, из (44), объединяя (46) и (48), имеем

$$\|f\|_{W_0} \leq C \{ \|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^\sigma} + \|f\|_{\dot{B}_{q,\infty}^\sigma}^{1-\lambda} \|f\|_{\dot{B}_{r,\infty}^s}^\lambda \}.$$

Остается только сделать переход к мультипликативному неравенству.

3) Случай $2 < q \leq \infty$, $0 < r < 2$ доказывается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. В качестве функции, удовлетворяющей условиям предложения, возьмем $m = m_{\alpha,\beta}$ из (21), где числа α и β мы выбираем так, чтобы $\beta \geq s\theta^*\alpha$, но $\beta < \alpha n(1/p - 1/2)$. В этом случае в силу леммы 5, (i) имеем $m \notin \mathcal{M}(H_p)$. Таким образом, для доказательства предложения достаточно проверить, что для функции m выполнено (14).

Проводя простые вычисления, получаем

$$\|m_{2j}\|_q \leq C \cdot 2^{-(\beta + \frac{n}{q})j} \leq C \cdot 2^{-\beta j}. \quad (49)$$

Далее, используя мультипликативное неравенство (см., например, [23, с. 111])

$$\|f\|_{B_{r,\infty}^{\lambda k}} \leq C \|f\|_{B_{r,\infty}^0}^{1-\lambda} \|f\|_{B_{r,\infty}^k}^\lambda, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (50)$$

где C – положительная константа, не зависящая от функции f , и лемму 3, находим

$$\|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s} \leq C \|m_{2j}\|_r^{1-\frac{s}{k}} \|m_{2j}\|_{W_r^k}^{\frac{s}{k}} \leq C \cdot 2^{-(\beta + \frac{n}{r} - s\alpha)j} \leq C \cdot 2^{-(\beta - s\alpha)j}. \quad (51)$$

Таким образом, объединяя (49) и (51), имеем

$$\|m_{2j}\|_{L_q}^{1-\theta^*} \|m_{2j}\|_{B_{r,\infty}^s}^{\theta^*} \leq C \cdot 2^{-(\beta - \theta^* s\alpha)j} \leq C,$$

откуда сразу следует (14). Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. 1) Рассмотрим случай $0 < p \leq 1$.

Пусть $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \psi \in \{|\xi| \leq 1\}$ и $\psi(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq 1/2$. Положим

$$m(\xi) = \sum_{j=N_\varepsilon}^{\infty} 2^{-n(\frac{1}{p}-1)k_j} \psi(2^{k_j}(\xi - 2^{\varepsilon k_j} e_1)),$$

где $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\{k_j\} \subset \mathbb{N}$ – произвольная лакунарная последовательность такая, что $\inf_j \frac{k_j+1}{k_j} \geq 10$, а N_ε выбрано так, чтобы существовало единственное j такое, что при некотором заданном $\varepsilon > 0$ и любом $\delta > 0$

$$\left\{ \frac{\delta}{4} \leq |\xi| \leq 4\delta \right\} \cap \{|\xi - 2^{\varepsilon k_j}| \leq 2^{-k_j}\} \neq \emptyset.$$

Тогда очевидно, что

$$m(\delta\xi)\eta(\xi) = 2^{-n(\frac{1}{p}-1)k_j} \psi(2^{k_j}\delta\xi - 2^{(\varepsilon+1)k_j} e_1)\eta(\xi),$$

где j такое, что $2^{\varepsilon k_j} \asymp \delta$.

Используя неравенство (50) и лемму 3, нетрудно проверить, что

$$\|m_\delta\|_q^{1-\theta} \|m_\delta\|_{B_{r,\infty}^\theta}^\theta \leq C(2^{((1+\varepsilon)(s\theta-(1-\theta)\frac{n}{q}-\theta\frac{n}{r})-n(\frac{1}{p}-1))k_j} + 1), \quad (52)$$

где C – положительная константа, не зависящая от δ и k_j . Если

$$(1+\varepsilon)\left(\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r}\right) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right),$$

то правая часть неравенства (52) будет конечна. Таким образом, при соответствующем выборе параметра ε , существование которого гарантируется неравенствами (15) и (16), мы получим (17).

Покажем, что

$$m \notin \mathcal{M}(H_p). \quad (53)$$

Для этого воспользуемся схемой доказательства теоремы 5, b из [9].

Введем функции

$$g(\xi) = \sum_{j=N_\varepsilon}^{\infty} j^{-\frac{1}{p}} \psi(\xi - 2^{\varepsilon k_j} \xi),$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(mg)(x) = \sum_{j=N_\varepsilon}^{\infty} j^{-\frac{1}{p}} 2^{-\frac{nk_j}{p}} \mathcal{F}^{-1} \psi\left(\frac{x}{2^{k_j}}\right) e^{i \cdot 2^{\varepsilon k_j} x_1}.$$

Заметим, что $\mathcal{F}^{-1}g \in H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 1$. Этот факт легко следует из работы [9, с. 14]. Таким образом, показав, что $f \notin H_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p \leq 1$, мы получим (53). Достаточно проверить, что $f \notin L_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [8, теорема 3.4]).

Выбирая l достаточно большим, представим функцию f в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{j<l} + \sum_{j=l} + \sum_{j>l} = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x).$$

Учитывая, что $\mathcal{F}^{-1}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, получаем

$$\int_{2^{k_l} < |x| \leq 2^{k_l+1}} |f_2(x)|^p dx = \frac{1}{l} \int_{1 < |x| \leq 2} |\mathcal{F}^{-1}\psi(x)|^p = \frac{C}{l}. \quad (54)$$

Далее, поскольку

$$|f_3(x)| \leq C \sum_{j>l} j^{-\frac{1}{p}} 2^{-\frac{nk_j}{p}} \leq Cl^{-\frac{1}{p}} 2^{-\frac{nk_{l+1}}{p}},$$

имеем

$$\int_{2^{k_l} < |x| \leq 2^{k_l+1}} |f_3(x)|^p dx \leq \frac{C}{l \cdot 2^{n(k_{l+1}-k_l)}}. \quad (55)$$

Рассмотрим f_1 . Пусть $r > n/p$ и $2^{k_l} \leq |x| \leq 2^{k_l+1}$. Поскольку $|\mathcal{F}^{-1}\psi(x)| \leq C|x|^{-r}$ при $|x| > 1$, то

$$|f_1(x)| \leq C \sum_{j<l} j^{-\frac{1}{p}} 2^{-\frac{nk_j}{p} + r(k_j - k_l)} \leq Cl^{-\frac{1}{p}} 2^{-\frac{nk_{l-1}}{p} + r(k_{l-1} - k_l)}$$

и, следовательно,

$$\int_{2^{k_l} < |x| \leq 2^{k_l+1}} |f_1(x)|^p dx \leq \frac{C}{l \cdot 2^{(rp-n)(k_l-k_{l-1})}}. \quad (56)$$

Таким образом, из (55) и (56), учитывая, что $k_{l+1} - k_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$, имеем

$$\int_{2^{k_l} < |x| \leq 2^{k_l+1}} |f_1(x)|^p + |f_3(x)|^p dx = o\left(\frac{1}{l}\right), \quad l \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Объединяя (55) и (57), получаем, что для достаточно больших l

$$\int_{2^{k_l} < |x| \leq 2^{k_l+1}} |f(x)|^p dx \geq \frac{C}{l}.$$

Из последнего неравенства сразу следует, что $f \notin L_p(\mathbb{R}^n)$.

2) Теперь рассмотрим случай $1 < p < 2$. Положим

$$m(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i \cdot 2^j x_1} \psi(\xi - 2^j e_1).$$

Известно (см. [22, с. 182]), что

$$m \notin \bigcup_{1 < p < \infty, p \neq 2} \mathcal{M}(L_p).$$

Выполняя простые вычисления, используя при этом (50) и лемму 3, находим, что

$$\|m_\delta\|_q^{1-\theta} \|m_\delta\|_{B_{r,\infty}^s}^\theta \leq C(\delta^{(s\theta - (1-\theta)\frac{n}{q} - \theta\frac{n}{r})} + 1),$$

где C – положительная константа, не зависящая от δ . Таким образом, поскольку $m_\delta \equiv 0$ при $\delta < 1/4$, для m выполняется неравенство (17) при условии (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. По аналогии с доказательством предложения 1 рассмотрим функцию $f = m_{\alpha,\beta}$ (см. (21)).

Используя вложения из леммы 3, нетрудно проверить, что $f \in \dot{B}_{q,\infty}^\sigma \cap \dot{B}_{r,\infty}^s$, если

$$\beta - \sigma(\alpha - 1) > \frac{n}{q}, \quad \beta - s(\alpha - 1) > \frac{n}{r}. \quad (58)$$

Пусть ε' и ε'' – некоторые достаточно малые положительные числа. Положим

$$\alpha = \frac{s - \frac{n}{r} + \frac{n}{q} - \sigma + \varepsilon' - \varepsilon''}{s - \sigma}, \quad \beta = \frac{n(\frac{s}{q} - \frac{\sigma}{r}) + \varepsilon' s - \varepsilon'' s}{s - \sigma}.$$

Варьируя соответствующим образом ε' и ε'' , можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства (58) и $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq 1$.

Далее, из (20) и (58) имеем

$$\frac{\alpha n}{2} > \beta - ((1 - \theta)\varepsilon' + \theta\varepsilon'').$$

Таким образом, мы можем выбрать α и β так, чтобы $\frac{\alpha n}{2} > \beta$. В этом случае в силу леммы 5, (ii) имеем $f \notin W_0(\mathbb{R}^n)$. Предложение доказано.

Список литературы

1. С. Г. Михлин, “О мультипликаторах интегралов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **109**:4 (1956), 701–703.
2. L. Hörmander, “Estimates for translation invariant operators in L^p spaces”, *Acta Math.*, **104**:1–2 (1960), 93–140.
3. W. Littman, “Multipliers in L^p and interpolation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 764–766.
4. J. Peetre, “Applications de la théorie des espaces d’interpolation dans l’analyse harmonique”, *Ricerche Mat.*, **15** (1966), 3–36.
5. Ch. Fefferman, E. M. Stein, “ H^p spaces of several variables”, *Acta Math.*, **129**:3–4 (1972), 137–193.
6. A. P. Calderón, A. Torchinsky, “Parabolic maximal functions associated with a distribution. II”, *Advances in Math.*, **24**:2 (1977), 101–171.
7. A. Miyachi, “On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$ ”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **27**:1 (1980), 157–179.
8. A. Miyachi, “On some singular Fourier multipliers”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **28**:2 (1981), 267–315.
9. A. Baernstein II, E. T. Sawyer, “Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$ ”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **53**, № 318, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1985.
10. О. В. Бесов, “К теореме Хермандера о мультипликаторах Фурье”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*. ч. 11, Тр. МИАН СССР, **173**, Наука, М., 1986, 3–13; англ. пер.: O. V. Besov, “On Hörmander’s theorem on Fourier multipliers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **173** (1987), 1–12.
11. П. И. Лизоркин, “Предельные случаи теорем о $\mathcal{F}L_p$ -мультипликаторах”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*. ч. 11, Тр. МИАН СССР, **173**, Наука, М., 1986, 164–180; англ. пер.: P. I. Lizorkin, “Limiting cases of theorems on $\mathcal{F}L_p$ -multipliers”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **173** (1987), 1–12.
12. C. W. Onneweer, T. S. Quek, “On $H^p(\mathbb{R}^n)$ -multipliers of mixed-norm type”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **121**:2 (1994), 543–552.
13. Р. М. Тригуб, “Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 145–160; англ. пер.: R. M. Trigub, “Multipliers in the Hardy spaces $H_p(D^m)$ with $p \in (0, 1]$ and approximation properties of summability methods for power series”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 621–638.
14. Ю. С. Коломойцев, “Обобщение одного достаточного условия для мультипликаторов Фурье”, *Укр. матем. журн.*, **64**:10 (2012), 1373–1380; англ. пер.: Yu. S. Kolomoitsev, “Generalization of one sufficient condition for Fourier multipliers”, *Ukrainian Math. J.*, **64**:10 (2013), 1562–1571.
15. Е. Liflyand, R. Trigub, “Conditions for the absolute convergence of Fourier integrals”, *J. Approx. Theory*, **163**:4 (2011), 438–459.
16. Е. Liflyand, “On absolute convergence of Fourier integrals”, *Real Anal. Exchange*, **36**:2 (2010), 353–360.
17. Е. Liflyand, S. Samko, R. Trigub, “The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview”, *Anal. Math. Phys.*, **2**:1 (2012), 1–68.
18. И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

19. Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
20. A. Beurling, “Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle”, *Proc. IX Congrès de Math. Scand.*, Helsingfors, 1938, 345–366.
21. J. Löfström, “Besov spaces in theory of approximation”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **85** (1970), 93–184.
22. Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: H. Triebel, *Theory of function spaces*, Monogr. Math., **78**, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1983.
23. J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Duke Univ. Press, Durham, NC, 1976.
24. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol’skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
25. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il’in, S. M. Nikol’skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, v. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
26. S. Wainger, “Special trigonometric series in k -dimensions”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **59**, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1965.
27. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ КОЛОМОЙЦЕВ

(YURIY S. KOLOMOITSEV)

Институт прикладной математики и механики

НАН Украины, г. Донецк

E-mail: kolomusi@mail.ru

Поступило в редакцию

30.11.2012