Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Карманова, Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно–Каратеодори, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 3, 53–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8083>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:45:56

УДК 514.7+517.518.1

М. Б. Карманова

Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно–Каратеодори

Доказан субриманов аналог формулы площади для липшицевых в субримановом смысле отображений эквирегулярных пространств Карно–Каратеодори. В частности, дано адекватное аналитическое определение субриманова якобиана.

Библиография: 36 наименований.

Ключевые слова: пространство Карно–Каратеодори, дифференцируемость, липшицево отображение, субриманова квазиметрика, формула площади.

DOI: 10.4213/im8083

§ 1. Введение

В классическом математическом анализе известна формула площади [1]

$$\int_U \mathcal{J}(\varphi, x) d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} \chi_U(x) d\mathcal{H}^n(y), \quad (1.1)$$

она доказана для широких классов отображений $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq k$, удовлетворяющих некоторым условиям регулярности. Эти классы включают непрерывно дифференцируемые и липшицевы отображения, отображения классов Соболева, аппроксимативно дифференцируемые отображения, обладающие $\mathcal{N}$ -свойством Лузина (см., например, [2]), и т. д. Формула (1.1) распространена на широкие классы отображений римановых многообразий и метрических пространств [1], [3]–[7]. Во многих доказательствах формулы площади существенно используется аппроксимация отображения φ касательным отображением

$$w \mapsto D\varphi(x)[w].$$

В таких доказательствах активно применяется билипшицева эквивалентность метрик на многообразии и касательном пространстве.

На эквирегулярных пространствах Карно–Каратеодори и, в частности, многообразиях Карно (см. далее определение 2.1) существуют две структуры: риманова и *субриманова*. Кроме того, метрики и квазиметрики, соответствующие

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 8217), Программы Президента РФ “Поддержка молодых ученых и ведущих научных школ России” (грант НШ-2263.2014.1) и РФФИ (грант № 14-01-31063-мола).

этим двум структурам, не являются билипшицево эквивалентными. Следовательно, липшицевы в субримановом смысле (т. е. относительно субримановых (квази)метрик) отображения могут не быть таковыми в римановом смысле, поэтому они могут не быть дифференцируемыми в классическом смысле на множестве ненулевой внешней меры. Для отображений пространств Карно–Каратеодори существует специфическое понятие *субримановой дифференцируемости*, или *hc-дифференцируемости* [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображение $\varphi: U \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$, $U \subset \mathbb{M}$, где $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ – пространства Карно–Каратеодори, *hc-дифференцируемо в точке* $u \in U$, если существует горизонтальный гомоморфизм $L_u: (\mathcal{G}^u \mathbb{M}, d_\infty^u) \rightarrow (\mathcal{G}^{\varphi(u)} \tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d}_\infty^{\varphi(u)})$ локальных групп Карно такой, что

$$d_\infty^{\varphi(u)}(\varphi(w), L_u(w)) = o(d_\infty^u(u, w)), \quad U \cap \mathcal{G}^u \ni w \rightarrow u. \quad (1.2)$$

Гомоморфизм L_u называется *hc-дифференциалом* отображения φ в точке u . Далее гомоморфизм L_u обозначен через $\hat{D}\varphi(u)$.

В частном случае, когда образ и прообраз – группы Карно, понятие *hc-дифференциала* совпадает с понятием *$\mathcal{P}$ -дифференциала*, введенным в [9]. Приведенное здесь определение обобщает классическое определение дифференцируемости, так как локальная группа Карно аппроксимирует пространство Карно–Каратеодори относительно субримановой (квази)метрики (аналогично тому, как касательное пространство аппроксимирует риманово многообразие относительно римановой метрики). Приведем несколько полезных результатов работы [8].

ТЕОРЕМА 1.2. *Липшицевы (в субримановом смысле) отображения многообразий Карно в пространства Карно–Каратеодори hc-дифференцируемы почти всюду.*

ТЕОРЕМА 1.3 [8]. *Пусть $\varphi: \mathbb{M} \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – контактное (т. е. $D\varphi\langle H \rangle \subset \tilde{H}$) отображение класса C^1 (в классическом смысле) многообразия Карно в пространство Карно–Каратеодори. Тогда оно непрерывно hc-дифференцируемо всюду на $\mathbb{M}$ (т. е. его hc-дифференциал $\hat{D}\varphi(u)$ непрерывен по $u \in \mathbb{M}$).*

До недавнего времени задача о формуле площади для липшицевых отображений многообразий Карно была решена только в некоторых частных случаях: для отображений групп Карно [10], [11] (частный случай многообразий Карно) и для классов C^1 -гладких (в классическом смысле) контактных отображений многообразий Карно [12]. В статье [10] автор использует аппроксимацию (относительно субримановой метрики) исходного отображения аналогом касательного, определенным через значения $\mathcal{P}$ -дифференциала. Основной результат работы [10] – следующая

ТЕОРЕМА 1.4 [10, определение 2.20, теорема 3.3]. *Пусть $\varphi: \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ – липшицево относительно субримановых метрик отображение групп Карно. Тогда для каждого $\mathcal{H}^\nu$ -измеримого множества $E \subset \mathbb{G}$ верно*

$$\int_E \mathcal{J}(x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\tilde{\mathbb{G}}} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} \chi_E(y) d\mathcal{H}^\nu(y)$$

(здесь ν – хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$, а меры Хаусдорфа построены по метрике d_{cc}), где якобиан $\mathcal{J}(x)$ имеет вид

$$\mathcal{J}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathcal{H}^\nu(\varphi(B_{cc}(y, t)))}{\mathcal{H}^\nu(B_{cc}(y, t))} \mid y \in B_{cc}(x, t) \right\}. \quad (1.3)$$

Основная идея работы [11] – использование в качестве якобиана локального искажения $\mathcal{H}^\nu$ -меры при отображении $D\varphi$.

ТЕОРЕМА 1.5 [11, определение 10, теорема 4.4]. Пусть $\varphi: \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ – липшицево относительно субримановых метрик отображение групп Карно. Тогда для каждого $\mathcal{H}^\nu$ -измеримого множества $E \subset \mathbb{G}$ верно

$$\int_E \mathcal{J}_\nu(\hat{D}\varphi(x)) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\tilde{\mathbb{G}}} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} \chi_E(y) d\mathcal{H}^\nu(y)$$

(здесь ν – хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$, а меры Хаусдорфа построены по метрике d_{cc}), где якобиан $\mathcal{J}_\nu(\hat{D}\varphi(x))$ определен следующим образом:

$$\mathcal{J}_\nu(\hat{D}\varphi(x)) = \frac{\mathcal{H}^\nu(\hat{D}\varphi(y)[B_{cc}(0, 1)])}{\mathcal{H}^\nu(B_{cc}(0, 1))}. \quad (1.4)$$

Окончательно, в статье [12] субриманова формула площади выведена из римановой. Основной результат изложен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.6 (формула площади для гладких отображений [12]). Пусть $\varphi: \mathbb{M} \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – контактное C^1 -отображение многообразия Карно в пространство Карно–Каратеодори. Тогда справедлива формула площади

$$\int_{\mathbb{M}} f(x) \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\tilde{\mathbb{M}}} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} f(x) d\mathcal{H}^\nu(y).$$

Здесь отображение $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ – произвольное банахово пространство, таково, что произведение $f(x) \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x)$ интегрируемо, а

$$\mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) = \sqrt{\det(\hat{D}\varphi(x)^* \hat{D}\varphi(x))} \quad (1.5)$$

– субриманов якобиан отображения φ в точке x , меры Хаусдорфа построены по квазиметрикам d_2 и $\bar{d}_2$ с множителем ω_ν .

Заметим, что определение (1.5) субриманова якобиана (т. е. его аналитическое выражение через значения h -с-дифференциала) является новым даже для отображений групп Карно.

С одной стороны, так как липшицевы в субримановом смысле отображения могут быть недифференцируемыми в классическом смысле, вывести субриманову формулу площади из римановой для произвольных липшицевых отображений многообразий Карно невозможно. С другой стороны, h -с-дифференциал $\hat{D}\varphi$ отображения $\varphi: \mathbb{M} \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ в произвольной точке x действует на локальных

группах Карно $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ и $\mathcal{G}^{\varphi(u)}\tilde{\mathbb{M}}$, субримановы (квази)метрики на которых в общем случае не эквивалентны (квази)метрикам на многообразиях Карно [13]; таким образом, соотношение

$$d_{\mathbb{M}}(\varphi(w), \varphi(v)) = (1 + o(1))\hat{d}_{\mathcal{G}^{\varphi(u)}}(\hat{D}\varphi(u)[v], \hat{D}\varphi(u)[w]),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $v, w \rightarrow u$, может не выполняться в окрестности точки u .

В настоящей статье представлен новый подход к изучению липшицевых отображений многообразий Карно, основанный только на их h -дифференциальных свойствах и их частичной аппроксимации “касательными” отображениями. Этот подход является новым даже для отображений евклидовых пространств. Его основное отличие от классических подходов состоит в использовании более слабых свойств отображений, в силу этого он применим в более общих сравнительно с отображениями евклидовых пространств ситуациях, в которых такие условия, как, например, возможность аппроксимации отображения касательным, могут не существовать. Если рассмотреть частный случай, когда горизонтальные подрасслоения совпадают с касательными расслоениями в образе и прообразе (иными словами, являются римановыми многообразиями), или другой частный случай отображения евклидовых пространств и применить схему доказательства основного результата, то в итоге получится новое доказательство классической формулы площади для липшицевых (уже в классическом смысле) отображений.

Основной результат настоящей работы составляет следующая формула площади для липшицевых отображений многообразий Карно в пространства Карно–Каратеодори (см. ниже более точное описание всех используемых понятий и предположений, а также теорему 3.10).

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие Карно, $\tilde{\mathbb{M}}$ – пространство Карно–Каратеодори, $D \subset \mathbb{M}$ – измеримое множество, а $\varphi: D \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – липшицево относительно субримановых квазиметрик d_2 и $\tilde{d}_2$ отображение. Тогда справедлива следующая формула площади:

$$\int_D f(x) \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi(D)} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} f(x) d\mathcal{H}^\nu(y). \quad (1.6)$$

Здесь отображение $f: D \rightarrow \mathbb{E}$, где $\mathbb{E}$ – произвольное банахово пространство, таково, что произведение $f(x) \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x)$ интегрируемо, а субриманов якобиан определен так же, как в (1.5). Меры Хаусдорфа построены относительно квазиметрик d_2 и $\tilde{d}_2$ с множителем ω_ν .

Отметим, что хотя доказательство теоремы 1.7 в одном из шагов использует субриманову формулу площади для отображений класса C^1 (в классическом смысле), формула площади (1.6) не следует из C^1 -гладкого случая, и ее доказательство требует существенно новых методов и подходов сравнительно с классической ситуацией вывода формулы площади для липшицевых отображений из формулы площади для C^1 -отображений.

Теорема 1.6 и классическая формула площади для отображений римановых многообразий – частные случаи теоремы 1.7. Отличие от теорем 1.4, 1.5 состоит

в определениях якобианов: в [10], [11] определение якобиана использует меры шаров в метрике Карно–Каратеодори и их образов при отображениях φ и $\widehat{D}\varphi$. Сложность состоит в том, что меры этих образов не всегда вычислимы, так как структура шаров в метрике Карно–Каратеодори в общем случае не известна. В теоремах 1.6, 1.7 используется субриманова квазиметрика. Преимущество этой квазиметрики в том, что структура шаров в ней довольно простая, и такие шары проще исследовать при изучении свойств якобиана и образа. Кроме того, она позволяет нам дать точное аналитическое выражение субриманова якобиана. Это очень важно для таких приложений, как исследование свойств экстремальных поверхностей на неголономных структурах, и других задач.

§ 2. Основные определения

В этом параграфе мы приводим важные определения и факты, используемые в доказательстве основного результата.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [14] (ср. с [15]–[17]). Фиксируем связное риманово C^∞ -гладкое многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N . Многообразие $\mathbb{M}$ называется *эквивариантным пространством Карно–Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ выделена фильтрация подрасслоениями

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \cdots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \cdots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

такая, что для каждой точки $p \in \mathbb{M}$ существует окрестность $U \subset \mathbb{M}$ с набором C^1 -гладких векторных полей $X_1, \dots, X_N$, обладающих следующими свойствами:

- 1) для любой точки $v \in U$ справедливо $H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \text{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\}$, где $\text{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\}$ – подпространство в $T_v\mathbb{M}$ постоянной размерности $\dim H_i$, $i = 1, \dots, M$;
- 2) верно включение $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \dots, M - 1$.

Кроме того, если выполнено условие:

- 3) $H_{j+1} = \text{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $H_0 = \{0\}$, $j = 1, \dots, M - 1$,

то пространство Карно–Каратеодори называется *многообразием Карно*.

Подрасслоение $H\mathbb{M}$ называется *горизонтальным*. Число M называется *глубиной* многообразия $\mathbb{M}$.

В статье для горизонтального подрасслоения применяются обозначения $H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M}$ и $H_v\mathbb{M} = H_1\mathbb{M}(v)$ (см. определение 2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Степень* $\deg X$ поля X – это $\min\{m \mid X \in H_m\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Условие 2) определения 2.1 эквивалентно выполнению в каждой точке $v \in U$ соотношения

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k: \deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v) \quad (2.1)$$

для всех $i, j = 1, \dots, N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Пространства Карно–Каратеодори, описанные в определении 2.1, называются *эквиварикулярными*, так как размерности подрасслоений H_i не зависят от точки. Поскольку в статье рассматриваются только эквиварикулярные пространства Карно–Каратеодори, под термином “пространство Карно–Каратеодори”, если не оговорено специально, будем понимать эквиварикулярное пространство Карно–Каратеодори. Тонкие свойства пространств Карно–Каратеодори и многообразий Карно в условиях, описанных в определении 2.1, исследованы в работах [16], [18]–[21].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. В определении 2.1 векторные поля, образующие фильтрации H_i , не обязательно являются коммутаторами полей $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ порядка $i - 1$, $i = 2, \dots, M$.

Отметим специфику употребляемых в статье понятий. Термин “многообразие Карно” является относительно новым, и в настоящей статье мы различаем термины “многообразие Карно” и “пространство Карно–Каратеодори”. Различие состоит в том, что касательным конусом к многообразию Карно является группа Карно, а к пространству Карно–Каратеодори – нильпотентная градуированная (или просто однородная) группа (т. е. горизонтальное подрасслоение ее алгебры Ли может не порождать всю алгебру Ли) [15]. Таким образом, понятия многообразия Карно и пространства Карно–Каратеодори существенно различны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Здесь и далее, если не оговорено специально, будем предполагать, что наборы базисных полей на пространствах Карно–Каратеодори одни и те же для всех точек. В противном случае можно каждое пространство Карно–Каратеодори представить в виде не более чем счетного объединения окрестностей с точностью до множества нулевой меры и доказать основной результат для отображений пар таких окрестностей.

Свойства пространств Карно–Каратеодори и, в частности, многообразий Карно в условиях определения 2.1 описаны в [14], [16], [18]–[21].

ПРИМЕР 2.7. Группа Карно является примером многообразия Карно.

ПРИМЕР 2.8. Нильпотентная градуированная группа является примером пространства Карно–Каратеодори.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^N y_i X_i(\gamma(t)), \quad t \in [0, 1]; \quad \gamma(0) = x,$$

где $X_1, \dots, X_N$ – векторные поля класса C^1 . Точку $y = \gamma(1)$ будем записывать в виде $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$. Отображение

$$(y_1, \dots, y_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$$

называется *экспоненциальным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Пусть $u \in \mathbb{M}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in B_E(0, r)$, где $B_E(0, r)$ – евклидов шар в $\mathbb{R}^N$. Отображение $\theta_u: B_E(0, r) \rightarrow \mathbb{M}$ задается следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u является C^1 -гладким диффеоморфизмом, если $0 < r \leq r_u$ для некоторого $r_u > 0$. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами*, или *координатами первого рода* (относительно $u \in \mathbb{M}$), точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.11. Здесь и далее будем считать, что рассматриваемая окрестность $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{M}$ такова, что $\theta_u(B_E(0, r_u)) \supset \mathcal{U}$ для всех $u \in \mathcal{U}$.

ТЕОРЕМА 2.12 [16]. *Фиксируем $u \in \mathbb{M}$. Коэффициенты*

$$\bar{c}_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk}(u) \text{ из (2.1),} & \text{если } \deg X_i + \deg X_j = \deg X_k, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $i, j, k = 1, \dots, N$, определяют нильпотентную градуированную алгебру Ли.

Построим алгебру Ли $\mathfrak{g}^u$, полученную в теореме 2.12 как нильпотентную градуированную алгебру Ли векторных полей $\{(\hat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{R}^N$ и такую, что экспоненциальное отображение $(x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp(\sum_{i=1}^N x_i (\hat{X}_i^u)')(0)$ тождественно [22], [23]. Из результатов [24] следует, что значение $(\hat{X}_j^u)'(0)$ совпадает со стандартным базисным вектором $e_j \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, N$. Тогда $[(\theta_u)_* \langle (\hat{X}_i^u)' \rangle](0) = X_i(u)$, $i = 1, \dots, N$. По построению для набора полей $\{(\hat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ справедливы соотношения

$$[(\hat{X}_i^u)', (\hat{X}_j^u)'] = \sum_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(u) (\hat{X}_k^u)', \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

всюду на $\mathbb{R}^N$.

Для всякого N -мерного мультииндекса $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ мы используем следующее стандартное обозначение его *однородной нормы*: $|\mu|_h = \sum_{i=1}^N \mu_i \deg X_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.13. Нильпотентная градуированная (однородная) группа Ли $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$, соответствующая полученной в теореме 2.12 алгебре Ли $\mathfrak{g}^u$, называется *нильпотентным касательным конусом* к $\mathbb{M}$ в точке $u \in \mathbb{M}$. Построим $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ в $\mathbb{R}^N$ как группалгебру [22], т.е. таким образом, что групповая операция определяется по формуле Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа: если

$$x = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\hat{X}_i^u)'\right), \quad y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i (\hat{X}_i^u)'\right),$$

то имеем

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{i=1}^N z_i (\hat{X}_i^u)'\right),$$

где

$$\begin{aligned}
 z_i &= x_i + y_i, & \deg X_i &= 1; \\
 z_i &= x_i + y_i + \sum_{\substack{|e_l + e_j|_h = 2 \\ l < j}} F_{e_l, e_j}^i(u)(x_l y_j - y_l x_j), & \deg X_i &= 2; \\
 z_i &= x_i + y_i + \sum_{\substack{|\mu + \beta|_h = k \\ \mu > 0, \beta > 0}} F_{\mu, \beta}^i(u) x^\mu \cdot y^\beta \\
 &= x_i + y_i + \sum_{\substack{|\mu + e_l + \beta + e_j|_h = k \\ l < j}} G_{\mu, \beta, l, j}^i(u) x^\mu y^\beta (x_l y_j - y_l x_j), & \deg X_i &= k.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Относительно введенной групповой операции векторные поля $(\hat{X}_i^u)'$, $i = 1, \dots, N$, левоинвариантны.

Используя экспоненциальное отображение θ_u , перенесем векторные поля $(\hat{X}_i^u)'$ на $\mathcal{U} \subset \mathbb{M}$:

$$[(\theta_u)_* \langle (\hat{X}_i^u)' \rangle](\theta_u(x)) = D\theta_u(x) \langle (\hat{X}_i^u)'(x) \rangle,$$

и получим поля $\hat{X}_i^u(\theta_u(x)) = [(\theta_u)_* \langle (\hat{X}_i^u)' \rangle](x)$. Напомним, что $\hat{X}_i^u(u) = X_i(u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Группа Ли, ассоциированная с алгеброй полей $\{\hat{X}_i^u\}_{i=1}^N$ в точке $u \in \mathbb{M}$, называется *локальной однородной группой* $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$. Определим ее таким образом, что отображение θ_u является *локальным групповым изоморфизмом* окрестностей единиц групп $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ и $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$.

Каноническая риманова структура на $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$ определяется скалярным произведением в единице $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$, совпадающим со скалярным произведением на $T_u \mathbb{M}$. Каноническая риманова структура на нильпотентном касательном конусе $\mathbb{G}_u \mathbb{M}$ определена так, что локальный групповой изоморфизм θ_u является изометрией.

Здесь и далее будем предполагать, что рассматриваемая окрестность $\mathcal{U}$ такова, что $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}^u \mathbb{M}$ для всех $u \in \mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15. Пусть $u, w \in \mathbb{M}$. Определим *экспоненциальное отображение* $\hat{\theta}_w^u(x_1, \dots, x_N): B_E(0, r) \rightarrow \mathbb{M}$ следующим образом:

$$\hat{\theta}_w^u(x_1, \dots, x_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \hat{X}_i^u\right)(w).$$

Оно является C^1 -гладким диффеоморфизмом, если $0 < r \leq r_{u,w}$ для некоторого $r_{u,w} > 0$.

Здесь и далее будем считать, что рассматриваемая окрестность $\mathcal{U}$ такова, что $\mathcal{U} \subset \hat{\theta}_w^u(B_E(0, r_{u,w}))$ для всех $u, w \in \mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.16. Абсолютно непрерывная в римановом смысле кривая $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}$ называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)} \mathbb{M}$ для почти всех $t \in [0, 1]$ относительно меры Лебега на $[0, 1]$.

Горизонтальная кривая на $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ определяется аналогично: необходимо, чтобы включение $\dot{\gamma}(t) \in \text{span}\{\hat{X}_1^u(\gamma(t)), \dots, \hat{X}_{\dim H_1}^u(\gamma(t))\} = \hat{H}_{\gamma(t)}^u\mathbb{M}$ выполнялось для почти всех $t \in [0, 1]$ относительно меры Лебега на $[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2.17 (см. утверждение для гладких полей в [25], [26] и для полей класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$, в [16]). Любые две точки $\mathbb{M}$ можно соединить горизонтальной кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.18 (см., например, [15]). Пусть $x, y \in \mathbb{M}$. Расстоянием Карно–Каратеодори $d_{cc}(x, y)$ называется величина

$$d_{cc}(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}, \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{M}\},$$

где длина ℓ каждой (горизонтальной) кривой γ вычисляется по значениям риманова тензора на $\mathbb{M}$.

Если $x, y \in \mathcal{G}^u\mathbb{M}$, то расстояние Карно–Каратеодори $d_{cc}^u(x, y)$ имеет вид

$$d_{cc}^u(x, y) = \inf\{\ell^u(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}^u\mathbb{M}, \dot{\gamma}(t) \in \hat{H}_{\gamma(t)}^u\mathbb{M}\},$$

где длина ℓ^u каждой (горизонтальной) кривой γ вычисляется по значениям риманова тензора на $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$.

Обозначим шар с радиусом r в метрике d_{cc} и центром в точке x через $B_{cc}(x, r)$. Обозначим шар с радиусом r в метрике d_{cc}^u и центром в точке x через $B_{cc}^u(x, r)$.

Введем теперь квазиметрику, эквивалентную известной квазиметрике

$$d_\infty(x, u) = \max_{i=1, \dots, N} \{|x_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}$$

(см. [16], [19]), но более удобную для работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.19. Пусть $\mathbb{M}$ – пространство Карно–Каратеодори топологической размерности N и глубины M , и пусть $x = \exp(\sum_{i=1}^N x_i X_i)(w)$. Определим величину

$$d_2(x, w) = \max\left\{\left(\sum_{j=1}^{n_1} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2 \deg X_{n_1+1}}}, \dots, \left(\sum_{j=N-n_M+1}^N |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2 \deg X_N}}\right\},$$

где $n_1 = \dim H_1$ и $n_i = \dim H_i - \dim H_{i-1}$, $i = 2, \dots, M$.

Квазиметрика d_2^u на локальной группе Карно $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ вводится аналогично.

Множество $\{y \in \mathbb{M}: d_2(y, x) < r\}$ называется шаром с радиусом $r > 0$ и центром в точке x и обозначается через $\text{Box}_2(x, r)$. Аналогично, через $\text{Box}_2^u(x, r)$ обозначен шар в квазиметрике d_2^u с радиусом $r > 0$ и центром в точке x .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.20. Прообраз $\text{Box}_2(x, r)$ при отображении θ_x совпадает с множеством

$$\text{Box}_2(0, r) = B_2^{n_1}(x, r) \times B_2^{n_2}(x, r^2) \times \dots \times B_2^{n_M}(x, r^M),$$

где $B_2^{n_i}$ – евклидов шар размерности n_i , $i = 1, \dots, M$.

Множество $\text{Box}_2^u(u, r)$ совпадает с множеством $\text{Box}_2(u, r)$, так как

$$\exp\left(\sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \widehat{X}_i^u\right)(u) = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i X_i\right)(u) \quad (2.4)$$

для любого набора $\{x_i\}_{i=1}^N$ такого, что обе части (2.4) имеют смысл [8].

Квазиметрика d_2 более удобна для исследований, чем квазиметрика d_∞ , потому что для шара в d_∞ асимптотическую форму его сечения плоскостью определить довольно сложно, так как существует несколько разных по форме сечений куба. Однако так как любое сечение (евклидова) шара – шар меньшей размерности, т. е. сечение известно, то и примерная форма сечения декартова произведения шаров определяется единообразно.

Легко видеть [16], [27], [28], что хаусдорфова размерность $\mathbb{M}$ относительно d_2 равна $\sum_{i=1}^M i(\dim H_i - \dim H_{i-1})$, где $\dim H_0 = 0$.

Здесь и далее в статье будем использовать следующие обозначения:

- 1) N ($\tilde{N}$) – топологическая размерность $\mathbb{M}$ ($\tilde{\mathbb{M}}$);
- 2) ν ($\tilde{\nu}$) – хаусдорфова размерность $\mathbb{M}$ ($\tilde{\mathbb{M}}$);
- 3) M ($\tilde{M}$) – глубина $\mathbb{M}$ ($\tilde{\mathbb{M}}$).

Кроме того, будем рассматривать горизонтальные подрасслоения $H = H_1 \subset T\mathbb{M}$ ($\tilde{H} = \tilde{H}_1 \subset T\tilde{\mathbb{M}}$) на $\mathbb{M}$ ($\tilde{\mathbb{M}}$); подпространства $H \subset H_2 \subset \dots \subset H_M = T\mathbb{M}$ ($\tilde{H} \subset \tilde{H}_2 \subset \dots \subset \tilde{H}_{\tilde{M}} = T\tilde{\mathbb{M}}$) размерностей $n = n_1 = \dim H_1 < \dim H_2 < \dots < \dim H_M = N$ ($\tilde{n} = \tilde{n}_1 = \dim \tilde{H}_1 < \dim \tilde{H}_2 < \dots < \dim \tilde{H}_{\tilde{M}} = \tilde{N}$) в каждой точке $x \in \mathbb{M}$ ($\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{M}}$) (см. определение 2.1).

Обозначим через d_2 ($\tilde{d}_2$) квазиметрику на $\mathbb{M}$ ($\tilde{\mathbb{M}}$) и через d_2^u ($\tilde{d}_2^w$) квазиметрику на $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$ ($\mathcal{G}^w\tilde{\mathbb{M}}$).

Предположим, что:

- (i) отображение φ определено на измеримом множестве $D \subset \mathbb{M}$;
- (ii) $\dim H \leq \dim \tilde{H}$;
- (iii) базисные векторные поля в прообразе и образе принадлежат классу C^1 , а отображение φ липшицево относительно d_2 и $\tilde{d}_2$, т. е. соотношение $\tilde{d}_2(\varphi(u), \varphi(v)) \leq L d_2(u, v)$ верно для всех точек $u, v \in D$ и некоторого $L < \infty$.

Кроме того, предположим, что $D \subset \mathcal{U}$, где:

- (iv) $\theta_u(B_E(0, r_u)) \supset \mathcal{U}$ для всех $u \in \mathcal{U}$;
- (v) $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}^u\mathbb{M}$ для всех $u \in \mathcal{U}$;
- (vi) $\tilde{\theta}_w^u(B_E(0, r_{u,w})) \supset \mathcal{U}$ для всех $u, w \in \mathcal{U}$.

§ 3. Основной результат

Напомним, что мы используем далее следующий результат [8]. Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие Карно, $\tilde{\mathbb{M}}$ – пространство Карно–Каратеодори, $D \subset \mathbb{M}$ – измеримое множество и $\varphi: \mathbb{M} \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – липшицево относительно субримановых квазиметрик отображение. Тогда это отображение h -дифференцируемо почти всюду: существует горизонтальный гомоморфизм $L_u: (\mathcal{G}^u\mathbb{M}, d_2^u) \rightarrow (\mathcal{G}^{\varphi(u)}\tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d}_2^{\varphi(u)})$ локальных однородных групп такой, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(w), L_u[w]) = o(d_2(u, w)), \quad D \cap \mathcal{G}^u\mathbb{M} \ni w \rightarrow u.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Горизонтальный гомоморфизм

$$L_u : (\mathcal{G}^u \mathbb{M}, d_2^u) \rightarrow (\mathcal{G}^{\varphi(u)} \tilde{\mathbb{M}}, \tilde{d}_2^{\varphi(u)})$$

называется *hc-дифференциалом*.

ТЕОРЕМА 3.2 [8]. Пусть $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – контактное (т.е. $D\varphi\langle H \rangle \subset \tilde{H}$) отображение класса C^1 (в классическом смысле) многообразия Карно в пространство Карно–Каратеодори. Тогда φ непрерывно hc-дифференцируемо всюду на $\mathbb{M}$ (т.е. его hc-дифференциал $\hat{D}\varphi(u)$ непрерывен по $u \in \mathbb{M}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. С помощью свойств θ_u отображение L_u можно рассматривать и как гомоморфизм локальных однородных групп, и как гомоморфизм их алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 3.4 (локальная аппроксимационная теорема [16], [18], [19]). Если $u, w, v \in \mathcal{U}$, причем $d_2(u, w) = O(\varepsilon)$ и $d_2(u, v) = O(\varepsilon)$, то

$$|d_2(w, v) - d_2^u(w, v)| = o(\varepsilon),$$

где величина $o(1)$ равномерна на $\mathcal{U}$.

Несмотря на то, что квазиметрика в теореме 3.4 отличается от квазиметрики, изученной в [16], [18] и [19], утверждение верно, так как схема доказательства для d_2 та же самая, что и для d_∞ .

Обозначим hc-дифференциал φ в точке u через $\hat{D}\varphi(u)$ и положим $Z = \{u \in \mathbb{M} : \text{rank}(\hat{D}\varphi(u)) < N\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Если существует хотя бы одна такая точка $u \in \mathbb{M}$, что $\text{rank} \hat{D}\varphi(u) = N$, то из пп. (i)–(iii) (см. §2) следует

$$\dim H_i - \dim H_{i-1} \leq \dim \tilde{H}_i - \dim \tilde{H}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, M,$$

где $\dim H_0 = 0$ и $\dim \tilde{H}_0 = 0$. Действительно, достаточно учесть свойство [8]

$$\hat{D}\varphi(u)[X, Y] = [\hat{D}\varphi(u)X, \hat{D}\varphi(u)Y],$$

где X, Y – векторные поля алгебры Ли локальной группы $\mathcal{G}^u \mathbb{M}$, свойства локальных групп Карно [28], и свойство 3) определения 2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Сферическая $\mathcal{H}^\nu$ -мера Хаусдорфа множества $E \subset \varphi(\mathbb{M})$ имеет вид

$$\mathcal{H}^\nu(E) = \omega_\nu \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset E, x_i \in E, r_i \leq \delta \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7 [12]. Субриманов якобиан отображения φ в точке x имеет вид

$$\mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) = \sqrt{\det(\hat{D}\varphi(x)^* \hat{D}\varphi(x))}.$$

ТЕОРЕМА 3.8. Для множества вырождения $Z = \{x \in \mathbb{M} : \text{rank } \widehat{D}\varphi(x) < N\}$ справедливо равенство $\mathcal{H}^\nu(\varphi(Z)) = 0$.

Для доказательства теоремы 3.8 нам понадобится следующее свойство. Введем величину

$$\eta \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^m : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{d_{\mathbb{X}}}(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta, i \in \mathbb{N} \right\} \quad (3.1)$$

и обозначим ее через $\mathcal{H}_\delta^m(A)$. Здесь η – нормирующий множитель в конструкции меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^m$: $\mathcal{H}^m(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^m(A)$, а $B_{d_{\mathbb{X}}}$ – шар в (квази)метрике $d_{\mathbb{X}}$ рассматриваемого пространства $\mathbb{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.8. Доказательство основано на адаптированных для неголономного случая рассуждениях, приведенных в [29].

Заметим, что $\tilde{d}_2^{\varphi(y)}(\varphi(z), \widehat{D}\varphi(y)[z]) = o(d_2(y, z))$. Иными словами, если $y \in Z$, то образ $\text{Box}_2(y, t) = \text{Box}_2^y(y, t)$ – подмножество $o(t)$ -окрестности (относительно $\tilde{d}_2^{\varphi(y)}$) образа $\mathcal{G}^y \mathbb{M} \cap \text{Box}_2^y(y, t)$ при отображении $\widehat{D}\varphi(y)$.

Поскольку в точке y имеем $\text{rank } \widehat{D}\varphi(y) < N$, хаусдорфова размерность (относительно $\tilde{d}_2^{\varphi(y)}$) множества $\widehat{D}\varphi(y)[\mathcal{G}^y \mathbb{M} \cap \text{Box}_2^y(y, t)]$ не превосходит $\nu - 1$. Действительно, в силу свойства 3) определения 2.1 для всякого базисного векторного поля $X_m \in H_j$, $j > 1$, существует представление

$$X_m(v) = \sum_{s=1}^{[j/2]} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} a_{l,s}(v) [X_{k_{l,s}}, Y_{k_{l,s}}](v) + T,$$

где $T \in H_{j-1}$. Из соотношения (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} a_{l,s}(v) [X_{k_{l,s}}, Y_{k_{l,s}}](v) \\ = \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} \sum_{p: \deg X_p \leq j} a_{l,s}(v) c_{k_l^s q_l^s p}(v) X_p(v), \end{aligned}$$

где $s = 1, \dots, [j/2]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{[j/2]} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} a_{l,s}(v) [X_{k_{l,s}}, Y_{k_{l,s}}](v) \\ = \sum_{s=1}^{[j/2]} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} \sum_{p: \deg X_p \leq j} a_{l,s}(v) c_{k_l^s q_l^s p}(v) X_p(v) = X_m(v) - T(v). \end{aligned}$$

Тогда

$$T(v) = - \sum_{s=1}^{[j/2]} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} \sum_{p: \deg X_p < j} a_{l,s}(v) c_{k_l^s q_l^s p}(v) X_p(v),$$

а в сумме

$$\sum_{s=1}^{[j/2]} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} \sum_{p: \deg X_p = j} a_{l,s}(v) c_{k_l^s q_l^s p}(v) X_p(v)$$

единственный ненулевой коэффициент – это коэффициент перед X_m , и он равен единице. Из свойств векторных полей алгебры Ли локальной однородной группы

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{[j/2]} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} a_{l,s}(y) [\hat{X}_{k_{l,s}}^y, \hat{Y}_{k_{l,s}}^y](v) \\ = \sum_{s=1}^{[j/2]} \sum_{l: X_{k_{l,s}} \in H_{j-s}, Y_{k_{l,s}} \in H_s} \sum_{p: \deg X_p = j} a_{l,s}(v) c_{k_l^s q_l^s p}(y) \hat{X}_p^y(v) \end{aligned}$$

и свойства коэффициентов следует, что последняя сумма равна $\hat{X}_m^y(v)$. В силу свойства

$$\hat{D}\varphi(y)[X, Y] = [\hat{D}\varphi(y)X, \hat{D}\varphi(y)Y],$$

где X, Y – векторные поля алгебры Ли локальной группы Карно $\mathcal{G}^y\mathbb{M}$, сумма степеней образов базисных векторных полей при отображении $\hat{D}\varphi(y)$ не может быть больше, чем ν ; кроме того, сумма степеней линейно независимых образов базисных полей равна ν тогда и только тогда, когда $\text{rank } \hat{D}\varphi(y) = N$. Во всех остальных случаях эта сумма не превосходит $\nu - 1$.

Пусть $\tilde{C}_\Delta$ – константа в обобщенном неравенстве треугольника на $\mathcal{G}^{\varphi(y)}\tilde{\mathbb{M}}$ для всех $y \in Z$ (эту константу можно считать одной и той же для всех точек в силу непрерывности структурных констант локальных однородных групп). Положим

$$S = 3\tilde{C}_\Delta^2 + \tilde{C}_\Delta.$$

Для произвольного $0 < \sigma < \infty$ рассмотрим $\varepsilon > 0$ такое, что $2\varepsilon S < 1$, и предположим без ограничения общности, что Z компактно. Кроме того, будем считать, что значения величин $o(1)$ и в определении hc -дифференцируемости (см. далее лемму 3.11), и в локальной аппроксимационной теореме 3.4 не превосходят ε для шаров в квазиметрике d_2 с радиусом $\delta < \delta_0$ в прообразе и для шаров в квазиметрике $\tilde{d}_2$ с радиусом $\tilde{C}_\Delta(\text{Lip}(\varphi) + 1)\delta$ в образе для некоторого $\delta_0 > 0$.

Здесь без ограничения общности предполагается, что $\tilde{C}_\Delta, \text{Lip}(\varphi) \geq 1$.

Фиксируем такое $\delta > 0$ и построим такое покрытие множества Z шарами $\{\text{Box}_2(y_i, t_i)\}_{i \in \mathbb{N}, y_i \in Z, t_i < \delta}$, из определения функции множества $\mathcal{H}_\delta^\nu$ (см. (3.1)), что

$$\omega_\nu \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i^\nu \leq \mathcal{H}^\nu(Z) + \sigma.$$

Фиксируем $i \in \mathbb{N}$ и оценим $\mathcal{H}^\nu(\varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i)))$. Образ $\varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i))$ – подмножество εt_i -окрестности множества $\hat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]$, хаусдорфова размерность которого ν_i не превосходит $\nu - 1$. Рассмотрим семейство шаров

$$\mathcal{B}_i = \{\text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s, 2\varepsilon t_i)\}_{s \in \hat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]}$$

в $\mathcal{G}^{\varphi(y_i)}\tilde{\mathbb{M}}$ с радиусами $2\epsilon t_i$ и центрами на множестве $\widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]$, которое покрывает $\varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i))$. Поскольку h -дифференциал $\widehat{D}\varphi(y_i)$ вырожден, объем пересечения

$$\text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s, 2\epsilon t_i) \cap \widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]$$

не меньше $O((\epsilon t_i)^{\nu_i})$, где величина $O(1)$ строго отделена от нуля на некоторой компактной окрестности (здесь учитываем то, что в силу свойств гомоморфизма локальных групп $\widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]$ является подгруппой в $\mathcal{G}^{\varphi(y_i)}\tilde{\mathbb{M}}$: чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть для произвольных двух точек из $\widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]$ по одной точке из их прообразов в $\mathcal{G}^{y_i}\mathbb{M}$, а затем посчитать их разность относительно операции на группе $\mathcal{G}^{y_i}\mathbb{M}$ и использовать тот факт, что гомоморфизм сохраняет групповую операцию; и учитываем левоинвариантность на $\mathcal{G}^{\varphi(y_i)}\tilde{\mathbb{M}}$, а именно то, что левый сдвиг шара также является шаром, и предполагаем без ограничения общности, что Z – подмножество компактной окрестности). Так как φ локально липшицево и $\widehat{D}\varphi(y_i)$ вырожден, объем

$$\widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]$$

не превосходит $O(t_i^{\nu_i})$ (величина $O(1)$ также равномерна на рассматриваемой компактной окрестности). Здесь число $\nu_i \leq \nu - 1$ зависит от ранга $\widehat{D}\varphi$ в y_i , а именно оно равно сумме степеней всех базисных векторных полей на $\mathcal{G}^u\mathbb{M}$, на которых $\widehat{D}\varphi(y_i)$ невырожден и образы которых независимы.

Рассмотрим дизъюнктный набор шаров

$$\mathcal{C}_i = \{\text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s_1, 2\epsilon t_i), \dots, \text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s_Q, 2\epsilon t_i)\}$$

из семейства $\mathcal{B}_i$ такой, что любой шар из $\mathcal{B}_i$ с центром в точке множества

$$\text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s, 2\epsilon t_i) \cap \widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)] \setminus \bigcup_{j=1}^Q \text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s_j, 2\epsilon t_i)$$

будет пересекаться хотя бы с одним шаром из данного набора. Из этого свойства имеем

$$Q \leq \frac{O(t_i^{\nu_i})}{O((\epsilon t_i)^{\nu_i})} \leq \frac{1}{O(\epsilon^{\nu-1})}.$$

Кроме того, $d_2^{\varphi(y_i)}$ -расстояние от точки из

$$\widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)] \setminus \bigcup_{j=1}^Q \text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s_j, 2\epsilon t_i)$$

до ближайшего шара из $\mathcal{C}_i$ не превосходит ϵt_i . Следовательно, при увеличении радиусов шаров покрытия в $3\tilde{C}_\Delta$ раз точка попадет в один из таких шаров с увеличенным радиусом. Рассмотрим теперь произвольную точку множества $\varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i))$. Тогда $d_2^{\varphi(y_i)}$ -расстояние от нее до хотя бы одной точки из

$$\text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s, 2\epsilon t_i) \cap \widehat{D}\varphi(y_i)[\text{Box}_2^{y_i}(y_i, t_i)]$$

меньше $2\varepsilon t_i$. Следовательно, при увеличении радиусов шаров из набора C_i в S раз набор $\{\text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s_1, 2S\varepsilon t_i), \dots, \text{Box}_2^{\varphi(y_i)}(s_Q, 2S\varepsilon t_i)\}$ покрывает все множество $\varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i))$. Кроме того, все шары из этого набора лежат в

$$\text{Box}_2(\varphi(y_i), \tilde{C}_\Delta(\text{Lip}(\varphi) + 1)\delta)$$

по выбору ε .

Далее, по выбору $\delta > 0$ имеем $|\tilde{d}_2 - \tilde{d}_2^{\varphi(y_i)}| \leq \varepsilon t_i$ на шаре $\text{Box}_2(\varphi(y_i), \tilde{C}_\Delta(\text{Lip}(\varphi) + 1)\delta)$. По локальной аппроксимационной теореме 3.4 для $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_2^{\varphi(y_i)}$ набор шаров $\{\text{Box}_2(s_j, (2S + 1)\varepsilon t_i)\}_{j=1}^Q$ покрывает множество $\varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i))$. Следовательно,

$$\mathcal{H}_{(2S+1)\varepsilon\delta}^\nu(\varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i))) \leq ((2S + 1)\varepsilon t_i)^\nu \frac{1}{O(\varepsilon^{\nu-1})} = O(\varepsilon)t_i^\nu,$$

где величина $O(\cdot)$ равномерна на $\varphi(Z)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(2S+1)\varepsilon\delta}^\nu(\varphi(Z)) &\leq \mathcal{H}_{(2S+1)\varepsilon\delta}^\nu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi(\text{Box}_2(y_i, t_i))\right) \\ &\leq O(\varepsilon) \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i^\nu \leq O(\varepsilon)(\mathcal{H}^\nu(Z) + \sigma). \end{aligned}$$

Здесь величина $O(1)$ равномерна для достаточно малых $\delta > 0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем $\delta \rightarrow 0$, и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.9 (формула площади для гладких отображений [12]). Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие Карно, $\tilde{\mathbb{M}}$ – пространство Карно–Каратеодори, $\mathcal{U} \subset \mathbb{M}$ – открытое множество, а $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – контактное отображение класса $C^1(\mathcal{U})$. Пусть, кроме того, $\dim H \leq \dim \tilde{H}$. Тогда справедлива формула

$$\int_{\mathcal{U}} f(y) \mathcal{J}^{SR}(\varphi, y) d\mathcal{H}^\nu(y) = \int_{\tilde{\mathbb{M}}} \sum_{y: y \in \varphi^{-1}(x)} f(y) d\mathcal{H}^\nu(x),$$

где отображение $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ – произвольное банахово пространство) таково, что произведение $f(y) \mathcal{J}^{SR}(\varphi, y)$ интегрируемо. Здесь меры Хаусдорфа построены относительно квазиметрик d_2 и $\tilde{d}_2$ с нормирующим множителем ω_ν .

Приведем полную формулировку основного результата работы (ср. с теоремой 1.7).

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие Карно, $\tilde{\mathbb{M}}$ – пространство Карно–Каратеодори, причем $\dim H \leq \dim \tilde{H}$ и базисные векторные поля на прообразе и образе принадлежат классу C^1 , $D \subset \mathbb{M}$ – измеримое множество и $\varphi: D \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – липшицево относительно субримановых квазиметрик d_2 и $\tilde{d}_2$ отображение. Справедлива формула площади

$$\int_D f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^* \widehat{D}\varphi(x))} d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi(D)} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} f(x) d\mathcal{H}^\nu(y), \quad (3.2)$$

где матрица $\widehat{D}\varphi(x)^*$ сопряжена с матрицей $\widehat{D}\varphi(x)$, отображение $f: D \rightarrow \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ – произвольное банахово пространство) таково, что произведение $f(x) \times \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^* \widehat{D}\varphi(x))}$ интегрируемо. Здесь меры Хаусдорфа построены по квазиметрикам d_2 и $\tilde{d}_2$ с нормирующим множителем ω_ν .

ЛЕММА 3.11. Пусть $D \subset \mathcal{U} \Subset \mathbb{M}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует множество Σ_ε , $\mathcal{H}^\nu$ -мера которого не превосходит ε , такое, что на $D \setminus \Sigma_\varepsilon$ величина $o(\cdot)$ из соотношения (1.2) равномерна по $u \in D \setminus \Sigma_\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, выберем в D счетное всюду плотное множество точек $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ области определения φ , определим измеримые функции

$$f_{k,n}(x) = \chi_{\text{Box}(x, 1/n)}(y_k) \frac{d_\infty(\varphi(y_k), \widehat{D}\varphi(x)\langle y_k \rangle)}{d_\infty(y_k, x)}$$

и положим $f_n(x) = \sup_k \{f_{k,n}(x)\}$. В силу непрерывности квазиметриков в образе и прообразе значение $f_n(x)$ совпадает со значением

$$\sup_{\text{Box}(x, 1/n)} \frac{d_\infty(\varphi(y), \widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)}{d_\infty(y, x)}.$$

По определению h -дифференцируемости $f_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для почти всех $x \in D$. Далее остается применить теорему Егорова.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Приводимое ниже доказательство является новым и для отображений евклидовых пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.10. Проведем доказательство в пять шагов. На первом шаге формулируется общая идея доказательства. На втором и третьем шагах подбирается удобное для исследований подмножество в прообразе и описываются его свойства и свойства отображения на нем. На четвертом мы применяем формулу площади для контактных отображений класса C^1 и приближаем прообразы шаров при исходном отображении прообразами шаров при “касательном” отображении. На пятом шаге с помощью полученных приближений изучаем меры Хаусдорфа на прообразе и образе и их соотношение и выводим основной результат.

Шаг 1. Без ограничения общности предположим, что $D \subset \mathcal{U}$ (см. пп. (iv)–(vi) из § 2). Из теоремы 3.8 следует, что $\mathcal{H}^\nu(\varphi(Z)) = 0$. Остается доказать формулу площади для множества $A = D \setminus Z$. Снова без ограничения общности предположим, что на измеримом множестве A имеем

$$C_1 d_2(u, v) \leq \tilde{d}_2(\varphi(u), \varphi(v)) \leq C_2 d_2(u, v) \quad (3.3)$$

для некоторых $0 < C_1, C_2 < \infty$, $\text{rank } \widehat{D}\varphi(z) = N$ во всех точках h -дифференцируемости отображения φ и мера множества A конечна (см. доказательства указанных свойств в [1]). Для упрощения рассуждений рассмотрим случай $f \equiv 1$. Заметим, что функция множества

$$\Phi(E) = \int_{\varphi(E \cap A)} d\mathcal{H}^\nu(y),$$

определенная на открытых множествах $E \subset \mathbb{M}$, конечно аддитивна и абсолютно непрерывна в силу липшицевости φ : действительно, легко проверить, что существует такая константа $Q = Q(\varphi) < \infty$, что

$$\mathcal{H}^\nu(\varphi(E \cap A)) \leq Q \mathcal{H}^\nu(E \cap A)$$

для любого E . Следовательно [1], и для измеримого множества A справедливо

$$\Phi(A) = \int_A \Phi'(x) d\mathcal{H}^\nu(x).$$

Наша цель – показать, что

$$\Phi'(y) = \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(y)^* \widehat{D}\varphi(y))}$$

почти всюду.

Шаг 2. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует множество Σ_ε , $\mathcal{H}^\nu$ -мера которого не превосходит ε , такое, что на $A \setminus \Sigma_\varepsilon$ отображение φ непрерывно $\mathfrak{h}$ -с-дифференцируемо, т. е. $\mathfrak{h}$ -с-дифференциал $\widehat{D}\varphi(z)$, $z \in A \setminus \Sigma_\varepsilon$, непрерывен [8, лемма 4.6]. Из определения $\mathfrak{h}$ -с-дифференцируемости следует, что для $w, u \in A$, где по предположению u – точка $\mathfrak{h}$ -с-дифференцируемости φ , выполняется

$$\widetilde{d}_2(\varphi(w), \varphi(u)) = \widetilde{d}_2(\widehat{D}\varphi(u)[w], \varphi(u)) + o(d_2(w, u)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow u$. Предположим без ограничения общности, что величина $o(\cdot)$ равномерна по $u \in A \setminus \Sigma_\varepsilon$ (см. лемму 3.11).

Поскольку мы предполагаем, что $d_2(w, u) \geq \frac{1}{C_2} \widetilde{d}_2(\varphi(w), \varphi(u))$, верно равенство

$$\widetilde{d}_2(\varphi(w), \varphi(u))(1 + o(1)) = \widetilde{d}_2(\widehat{D}\varphi(u)[w], \varphi(u)). \quad (3.4)$$

Здесь величина $o(1)$ равномерна по $u \in A \setminus \Sigma_\varepsilon$.

Шаг 3. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и докажем формулу площади для $A_\varepsilon = A \setminus \Sigma_\varepsilon$. Здесь и далее в доказательстве, чтобы избежать громоздкости обозначений, будем записывать $\varphi(E)$ вместо $\varphi(E \cap A_\varepsilon)$ для $E \subset \mathbb{M}$, $E \not\subset A_\varepsilon$. Фиксируем $\sigma > 0$ и $r > 0$ и рассмотрим такое множество $\Delta_{\sigma r^\nu}$, $\mathcal{H}^\nu(\Delta_{\sigma r^\nu}) < \sigma r^\nu$, что на $A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$ измеримые функции [30]

$$\Psi_m(y) = \frac{m^\nu}{\omega_\nu} \int_{\text{Box}_2(y, 1/m) \cap A_\varepsilon} d\mathcal{H}^\nu(x), \quad m \in \mathbb{N},$$

равномерно сходятся к единице [1].

Предположим без ограничения общности, что $\Delta_{\sigma r^\nu} \subset \Delta_{\sigma t^\nu}$ для $r < t$. Действительно, достаточно для каждого $l \in \mathbb{N}$ построить множество $\widetilde{\Delta}_l$, $\mathcal{H}^\nu$ -мера которого не превосходит $\sigma(\frac{1}{(l)^\nu} - \frac{1}{(l+1)^\nu})$, такое, что функции Ψ_m сходятся на $A_\varepsilon \setminus \widetilde{\Delta}_l$ равномерно к единице. Тогда для $r \in (1/l, 1/(l-1)]$ положим $\Delta_{\sigma r^\nu} = \bigcup_{k=l}^\infty \widetilde{\Delta}_k$; легко видеть, что $\mathcal{H}^\nu$ -мера $\Delta_{\sigma r^\nu}$ не превосходит $\sigma/l^\nu < \sigma r^\nu$. Кроме того, $\Delta_{\sigma r^\nu} \subset \Delta_{\sigma t^\nu}$ для $r < t$. Нам понадобится это свойство в конце доказательства, чтобы при $r, \sigma \rightarrow 0$ не потерять рассмотренные точки.

Рассмотрим достаточно малое $r > 0$, точку плотности $q \in A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$ множества A_ε и открытый шар $\text{Box}_2(q, r)$. Поскольку $\mathcal{H}^\nu(\Delta_{\sigma r^\nu}) \leq \sigma r^\nu$, то $\mathcal{H}^\nu(\varphi(\Delta_{\sigma r^\nu})) \leq Q\sigma r^\nu$ и

$$\mathcal{H}^\nu(\varphi(\text{Box}_2(q, r))) \leq \mathcal{H}^\nu(\varphi(\text{Box}_2(q, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})) + Q\sigma r^\nu.$$

Фиксируем $\tau > 0$ и (для фиксированных σ и r) выберем $\delta \leq \delta_0(\tau, \sigma, r)$, $\delta_0 \in (0, \sigma r)$, такое, что для $\frac{1}{m} \leq \max\{\delta, \frac{\delta}{C_1}\}$, где C_1 – константа из соотношения (3.3), имеем $\Psi_m(y) \geq 1 - \tau$ для $y \in \text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$ (это возможно в силу равномерной сходимости $\Psi_m(y)$ к единице на $A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$).

Для выбранного числа $\delta > 0$ построим покрытие $\{\text{Box}_2(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ образа $\varphi(\text{Box}_2(q, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})$ из определения величины $\mathcal{H}_\delta^\nu$. Из определения множества $\Delta_{\sigma r^\nu}$ следует, что для всякого покрытия шарами $\{\text{Box}_2(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ образа $\varphi(\text{Box}_2(q, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})$ в определении $\mathcal{H}^\nu$ -меры центры x_i – это образы точек $y_i \in \text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$, являющихся точками плотности множества $\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon$. Это происходит в силу сходимости к единице функций $\{\Psi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ при $m \rightarrow \infty$ в точках множества $A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$.

Шаг 4. Каждой точке $y_i = \varphi^{-1}(x_i)$ поставим в соответствие $\mathcal{P}$ -дифференцируемое отображение η_i локальной группы Карно в локальную однородную группу, определенное следующим образом:

$$\mathcal{G}^{y_i} \mathbb{M} \ni w \xrightarrow{\eta_i} \hat{D}\varphi(y_i)[w] \in \mathcal{G}^{\varphi(y_i)} \tilde{\mathbb{M}}.$$

Каждое из этих отображений принадлежит классу C^1 (в классическом смысле) и является контактным (как отображение локальной группы Карно в локальную однородную группу), так как $\eta_i(w) = \theta_{x_i} \circ L \circ \theta_{y_i}^{-1}(w)$. Здесь линейное отображение L определяется матрицей hc-дифференциала $\hat{D}\varphi(y_i)$ в следующем смысле: сначала с помощью отображения $\theta_{y_i}^{-1}$ считаются координаты w относительно y_i ; затем линейное отображение L , матрица которого совпадает с матрицей hc-дифференциала $\hat{D}\varphi$ в базисах $\{\hat{X}_j^{y_i}\}_{j=1}^N$ и $\{\hat{X}_k^{x_i}\}_{k=1}^{\tilde{N}}$, действует на полученную точку пространства $\mathbb{R}^N$; и окончательно θ_{x_i} ставит в соответствие точку на $\mathbb{M}$ этому образу точки из $\mathbb{R}^N$. Напомним, что, так как

$$\hat{D}\varphi(y_i)[X, Y] = [\hat{D}\varphi(y_i)X, \hat{D}\varphi(y_i)Y],$$

где X и Y – векторные поля алгебры Ли локальной группы Карно $\mathcal{G}^{y_i} \mathbb{M}$, матрица hc-дифференциала $\hat{D}\varphi$ в базисах $\{\hat{X}_j^{y_i}\}_{j=1}^N$ и $\{\hat{X}_k^{x_i}\}_{k=1}^{\tilde{N}}$ имеет блочно-диагональную структуру. Кроме того, каждое η_i непрерывно $\mathcal{P}$ -дифференцируемо (см. теорему 3.2 и [9]), и $\hat{D}\eta_i(v) = \hat{D}\varphi(y_i)$ для всех точек v , достаточно близких к y_i . Действительно,

$$d_2^{x_i}(\eta_i(w), \hat{D}\varphi(y_i)[w]) = 0 = o(d_2^{y_i}(v, w)),$$

так как по определению $\eta_i(w) = \hat{D}\varphi(y_i)[w]$. Без ограничения общности можно считать, что соотношение (3.3) с константами C_1 и C_2 справедливо для каждого η_i , $i \in \mathbb{N}$.

Далее, в определении величины $\mathcal{H}_\delta^\nu(\varphi(\text{Box}_2(q, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}))$ каждому слагаемому $\omega_\nu r_i^\nu$ поставим в соответствие шар $\text{Box}_2(x_i, r_i)$, так как $\mathcal{H}^\nu(\eta_i(U) \cap$

$\text{Box}_2(x_i, r_i) = \omega_\nu r_i^\nu$ для $U \supset \eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))$, $i \in \mathbb{N}$. Фиксируем $i \in \mathbb{N}$. По формуле площади для гладких отображений [12, теорема 3.10] для каждого η_i , $i \in \mathbb{N}$, справедливо

$$\omega_\nu r_i^\nu = \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(y_i)^* \widehat{D}\varphi(y_i))} \widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))),$$

так как $\widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{x_i}}(\eta_i(U) \cap \text{Box}_2(x_i, r_i)) = \omega_\nu r_i^\nu$ для $U \supset \eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))$, где через $\widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(\widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{x_i}})$ обозначена $\mathcal{H}^\nu$ -мера в локальной группе Карно $\mathcal{G}^{y_i}\mathbb{M}$ (локальной однородной группе $\mathcal{G}^{x_i}\mathbb{M}$), построенная относительно $d_2^{y_i}$ ($d_2^{x_i}$).

Рассмотрим теперь $\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))$ и $\varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)) \cap A_\varepsilon$. Заметим, что прообраз открытого множества $\text{Box}_2(x_i, r_i)$ при отображении η_i также открыт; кроме того, его граница состоит из конечного числа поверхностей класса C^1 . В силу соотношения (3.4) для $u = y_i$ все точки $\varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)) \cap A_\varepsilon$ содержатся в $o(r_i)$ -окрестности множества $\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))$.

Действительно, это следует из того, что η_i билипшицево на свой образ, и если $w \in \varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)) \cap A_\varepsilon$, то

$$d_2(\varphi(w), x_i) = (1 + o(1))d_2(\eta_i(w), x_i), \quad (3.5)$$

и, следовательно, $\eta_i(w) \in \text{Box}_2(x_i, r_i(1 + o(1)))$. Здесь величина $o(1)$ равномерна по всем $i \in \mathbb{N}$ в силу выбора A_ε .

Кроме того, в силу (3.4) для $u = y_i$ все точки A_ε , лежащие внутри множества $\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))$ и находящиеся на расстоянии до границы $\partial[\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))]$ более чем $o(r_i)$, принадлежат множеству $\varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)) \cap A_\varepsilon$. Действительно, если $w \in \eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i(1 - o(1))))$, то $\widehat{d}_2(\varphi(w), x_i) \leq r$ для подходящих значений $o(1)$ (см. (3.5)). Здесь величина $o(1)$ равномерна по всем $i \in \mathbb{N}$.

Поскольку $y_i \in \text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$, имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}^\nu(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)))(1 + o(1)) \\ & \geq \mathcal{H}^\nu(\varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)) \cap A_\varepsilon) \geq \mathcal{H}^\nu(\eta_i^{-1}[\text{Box}_2(x_i, r_i(1 - o(1))]) \cap A_\varepsilon) \\ & \geq (1 - o(1))\mathcal{H}^\nu(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))) - \tau(1 + o(1))\mathcal{H}^\nu\left(\text{Box}_2\left(y_i, \frac{r_i}{C_1}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r_i \rightarrow 0$ равномерно по всем x_i , $i \in \mathbb{N}$, в силу выбора $\delta > 0$.

Шаг 5. Из теоремы 3.9, равенств $\widehat{D}\eta_i \equiv \widehat{D}\varphi(y_i)$, $i \in \mathbb{N}$, и непрерывности hc-дифференциала $\widehat{D}\varphi$ следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_\nu r_i^\nu &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(y_i)^* \widehat{D}\varphi(y_i))} \widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))) \\ &= \left(\sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(q)^* \widehat{D}\varphi(q))(1 + o(1))} \right) \sum_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Таким образом, сумма $\sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_\nu r_i^\nu$ близка к точной нижней грани тогда и только тогда, когда сумма $\sum_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)))$ также близка к точной нижней грани. Поскольку на $\mathbb{M}$ выполнено $\mathcal{H}^\nu = \widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(1 + o(1))$,

где $o(1) \rightarrow 0$, если точки измеряемого множества стремятся к y_i , $i \in \mathbb{N}$, причем на достаточно малых компактных множествах эта сходимость равномерна по всем $i \in \mathbb{N}$ (достаточно рассмотреть их выражения через римановы меры), то вместо суммы $\sum_{i \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)))$ можно рассматривать сумму $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^\nu(\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)))$. Оценим точную нижнюю грань последней суммы. Поскольку на “шарах”

$$\begin{aligned} \{ \eta^{-1}(\text{Box}_2(x, t)) : x = \varphi(y), y \in \text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}, \\ \eta(w) = \widehat{D}\varphi(y)[w], t < \delta, \eta^{-1}(\text{Box}_2(x, t)) \subset \text{Box}_2(q, r) \} \end{aligned}$$

(здесь отображения η зависят от прообраза точки x : $\eta = \eta_x$) мера $\mathcal{H}^\nu$ удовлетворяет условию удвоения в силу соотношения $\mathcal{H}^\nu = \widehat{\mathcal{H}}^{\nu^{y_i}}(1 + o(1))$ (см. локальную аппроксимационную теорему, например, в [16]), по теореме Витали о покрытиях существует дизъюнктивный набор $\{\eta_i^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$, покрывающий множество $\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$ с точностью до множества нулевой $\mathcal{H}^\nu$ -меры. Для оставшегося множества существует не более чем счетное покрытие “шарами” $\{\eta_j^{-1}(\text{Box}_2(x_j, t_j))\}_{j \in \mathbb{N}}$, сумма $\mathcal{H}^\nu$ -мер которых меньше, чем σr^ν . Действительно, при достаточно малых $r > 0$ в силу непрерывной h -с-дифференцируемости φ существуют такие $t_0 > 0$ и $0 < L_1 \leq L_2 < \infty$, что для всех точек $z \in \text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}$ справедливо вложение

$$\text{Box}_2(z, L_1 t) \subset \eta^{-1}(\text{Box}_2(\varphi(z), t)) \subset \text{Box}_2(z, L_2 t), \quad t \leq t_0,$$

где $\eta(w) = \widehat{D}\varphi(z)[w]$. Далее остается применить непосредственно определение меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^\nu$.

Из (3.4) следует, что

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, \tilde{r}_i) \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_j, \tilde{t}_j) \supset \varphi(\text{Box}_2(q, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}),$$

где $\tilde{r}_i = r_i(1 + o(1))$, $\tilde{t}_j = t_j(1 + o(1))$ и величины $o(1)$ равномерны для всех i, j . Кроме того, если S – сумма $\mathcal{H}^\nu$ -мер прообразов этих шаров при соответствующих отображениях η_i , то она оценивается следующим образом:

$$[\mathcal{H}^\nu(\text{Box}_2(q, r)) + \sigma r^\nu](1 + o(1)) \geq S \geq \mathcal{H}^\nu(\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r_i, t_j \rightarrow 0$ равномерно по $i, j \in \mathbb{N}$. В силу (3.6) имеем

$$\begin{aligned} S(1 + o(1)) &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^\nu(\varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_i, r_i)) \cap A_\varepsilon) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^\nu(\varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_j, t_j)) \cap A_\varepsilon) \geq (1 - o(1) - O(\tau))S, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и величина $O(1)$ ограничена равномерно на A_ε .

Отметим, что сумма $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^\nu(\varphi^{-1}(\text{Box}_2(x_k, r_k)) \cap A_\varepsilon)$ не может быть меньше, чем $\mathcal{H}^\nu(\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})$ для любого покрытия множества $\varphi(\text{Box}_2(q, r) \setminus \Delta_{\sigma r^\nu})$ набором $\{\text{Box}_2(x_k, r_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Следовательно, значение (см. (3.8))

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\nu(\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}) &\leq S \\ &\leq \frac{1}{1 - o(1) - O(\tau)} [\mathcal{H}^\nu(\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}) + O(1)\sigma r^\nu], \end{aligned}$$

где все величины $O(1)$ ограничены равномерно по всем достаточно малым $\delta > 0$ и $r > 0$ и $o(1) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, действительно близко к точной нижней грани.

Поскольку $\tau \rightarrow 0$ и $o(1) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, полагая $\sigma = \sigma(r) \rightarrow 0$ для $r \rightarrow 0$, имеем $\mathcal{H}^\nu(\Delta_{\sigma r^\nu}) = o(r^\nu)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, и для точки плотности q множества A_ε выводим

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^\nu(\varphi(\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon))}{\mathcal{H}^\nu(\varphi(\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon \setminus \Delta_{\sigma r^\nu}))} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S}{\omega_\nu r^\nu} = 1.$$

Следовательно, из (3.6), (3.7) вытекает

$$\Phi'(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^\nu(\varphi(\text{Box}_2(q, r) \cap A_\varepsilon))}{\omega_\nu r^\nu} = \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(q)^* \widehat{D}\varphi(q))}.$$

Поскольку это соотношение справедливо для почти всех $q \in A_\varepsilon$, для каждого A_ε выполняется формула площади. Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ завершает доказательство субримановой формулы площади для множества A . Теорема доказана.

§ 4. Приложения

Рассмотрим теперь общий случай многообразий Карно. Иными словами, на них может существовать не более чем счетное число окрестностей со своими наборами базисных векторных полей, как описано в определении 2.1. Покажем, что следующая формула площади (4.1) справедлива для отображений произвольных многообразий Карно.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ – многообразия Карно, причем $\dim H \leq \dim \tilde{H}$ и базисные векторные поля на прообразе и образе принадлежат классу C^1 , $D \subset \mathbb{M}$ – измеримое множество и $\varphi: D \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$ – липшицево относительно метрик Карно–Каратеодори отображение. Справедлива формула площади

$$\begin{aligned} \int_D f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^* \widehat{D}\varphi(x))} D_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(x) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(x) \\ = \int_{\varphi(D)} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} f(x) \tilde{D}_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(y) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(y), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где отображение $f: D \rightarrow \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ – произвольное банахово пространство) таково, что произведение $f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^* \widehat{D}\varphi(x))}$ интегрируемо. Здесь меры Хаусдорфа $\mathcal{H}_{cc}^\nu$ построены по метрикам Карно–Каратеодори в прообразе и образе с нормирующим множителем ω_ν , меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^\nu$ построены по квазиметрикам d_2 и $\tilde{d}_2$ с нормирующим множителем ω_ν , $D_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu$ – производная меры в прообразе, а $\tilde{D}_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu$ – производная меры в образе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $f \equiv 1$. В силу определения 2.1 существуют не более чем счетные покрытия многообразий $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$ окрестностями с наборами векторных полей, свойства которых описаны в определении 2.1. Из этих покрытий можно построить не более чем счетные разбиения $\mathbb{M}$ и $\tilde{\mathbb{M}}$

борелевскими множествами $\mathbb{M} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$ и $\tilde{\mathbb{M}} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{B}}_j$ и записать формулу площади (3.2) для $\varphi_i: \mathcal{B}_i \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{j_i}$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Фиксируем $i \in \mathbb{N}$ и покажем, что в прообразе существует производная меры $\mathcal{H}^\nu$ по мере $\mathcal{H}_{cc}^\nu$. Напомним, что производная $D_{\mu_1} \mu_2(y)$ меры μ_2 по мере μ_1 в точке y задается формулой

$$D_{\mu_1} \mu_2(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_2(B(y, r))}{\mu_1(B(y, r))}.$$

Здесь предполагается, что для меры μ_1 выполнено условие удвоения (см. [1], [31]). В нашем случае обозначим производную в прообразе через $D_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu$.

В силу Ball–Вох-теоремы [18], [19] меры Хаусдорфа, построенные относительно метрики Карно–Каратеодори d_{cc} (см. определение 2.18) и относительно квазиметрики d_2 (см. определение 2.19), абсолютно непрерывны одна относительно другой и обе они удовлетворяют условию удвоения. Поэтому производная $D_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(x)$ существует почти всюду на $\mathcal{B}_i$ (без ограничения общности можно считать, что мера $\mathcal{H}^\nu$ определена на некоторой окрестности, содержащей $\mathcal{B}_i$, а не только на множестве, где определено отображение, следовательно, эта мера удовлетворяет условию удвоения). Тогда для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_D \mathcal{J}^{SR}(\varphi_i, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_D \mathcal{J}^{SR}(\varphi_i, x) D_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(x) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(x),$$

где меры Хаусдорфа $\mathcal{H}_{cc}^\nu$ построены относительно d_{cc} .

Рассмотрим теперь образ $\varphi(D \cap \mathcal{B}_i) \subset \tilde{\mathcal{B}}_{j_i}$. Заметим, что образ множества вырождения субриманова якобиана имеет $\mathcal{H}^\nu$ -меру нуль, следовательно, в силу Ball–Вох-теоремы его $\mathcal{H}_{cc}^\nu$ -мера также равна нулю. Оставшееся множество $\mathcal{B}_i \setminus Z$ представим в виде не более чем счетного дизъюнктного объединения $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{i,k}$ измеримых множеств, на каждом из которых отображение φ билипшицево на свой образ. Тогда для каждого из множеств $B_{i,k}$ справедлива формула площади, где в правой части подынтегральным выражением является функция, тождественно равная единице. На образе $\varphi(B_{i,k})$ меры $\mathcal{H}^\nu$ и $\mathcal{H}_{cc}^\nu$ абсолютно непрерывны одна относительно другой в силу Ball–Вох-теоремы. Кроме того, они обе счетно-аддитивны и являются мерами Радона, т. е. они конечны на компактных множествах. Следовательно [32], на образе почти всюду существует производная Радона–Никодима. Из Ball–Вох-теоремы вытекает, что эта производная конечна и отделена от нуля. Обозначим ее через $\tilde{D}_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(y)$. Тогда мера любого измеримого множества $\mathcal{H}^\nu$ выражается через меру $\mathcal{H}_{cc}^\nu$, в частности

$$\int_{\varphi(D \cap B_{i,k})} d\mathcal{H}^\nu(y) = \int_{\varphi(D \cap B_{i,k})} \tilde{D}_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(y) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(y).$$

В силу счетной аддитивности интегралов имеем

$$\begin{aligned} \int_D \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) D_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(x) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(x) &= \int_D \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) d\mathcal{H}^\nu(x) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{D \cap B_{i,k}} \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) d\mathcal{H}^\nu(x) + \int_Z \mathcal{J}^{SR}(\varphi, x) d\mathcal{H}^\nu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\varphi(D \cap B_{i,k})} d\mathcal{H}^\nu(y) + \int_{\varphi(Z)} d\mathcal{H}^\nu(y) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\varphi(D \cap B_{i,k})} \tilde{D}_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(y) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(y) + \int_{\varphi(Z)} \tilde{D}_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(y) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(y) \\
 &= \int_{\varphi(D)} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y)} \chi_D(y) \tilde{D}_{\mathcal{H}_{cc}^\nu} \mathcal{H}^\nu(y) d\mathcal{H}_{cc}^\nu(y),
 \end{aligned}$$

и соотношение (4.1) доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Известно, что области определения:

- 1) отображений классов Соболева $W_q^1(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$, $\Omega \subset \mathbb{M}$ (см., например, [8]), определенных на многообразиях Карно,
- 2) отображений класса $BV(\Omega, \tilde{\mathbb{M}})$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, определенных на многообразиях Карно,
- 3) аппроксимативно дифференцируемых отображений, определенных на многообразиях Карно [14],

представимы в виде, описанном в теореме 4.3 (см., соответственно, [8, предложение 6.2] и [33, лемма 4.1]). Следовательно, для них справедлива формула площади (4.2).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие Карно, $\tilde{\mathbb{M}}$ – пространство Карно–Каратеодори, $D \subset \mathbb{M}$ – измеримое множество и $\varphi: D \rightarrow \tilde{\mathbb{M}}$. Предположим, что существует набор измеримых множеств $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такой, что $A_i \subset D$ и $\varphi|_{A_i}$, $i \in \mathbb{N}$, – липшицево относительно субримановых квазиметрик d_2 и $\tilde{d}_2$ отображение, $\mathcal{H}^\nu(D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = 0$. Справедлива формула площади

$$\int_D f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^* \widehat{D}\varphi(x))} d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi(D)} \sum_{x: x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} f(x) d\mathcal{H}^\nu(y), \quad (4.2)$$

где $\widehat{D}\varphi(x)$ – лс-дифференциал отображения $\varphi|_{A_i}$, если $x \in A_i$ и x – точка плотности множества A_i , отображение $f: D \rightarrow \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ – произвольное банахово пространство) таково, что произведение $f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^* \widehat{D}\varphi(x))}$ интегрируемо по Лебегу,

$$\Sigma_\varphi = D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \quad \mathcal{H}^\nu(\Sigma_\varphi) = 0.$$

Здесь меры Хаусдорфа построены по квазиметрикам d_2 и $\tilde{d}_2$ с нормирующим множителем ω_ν . Результат не зависит от разбиения множества D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку на каждом множестве A_i , $i \in \mathbb{N}$, отображение φ липшицево, в силу счетной аддитивности интеграла для набора $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ получаем формулу площади (4.2).

Представим теперь D в виде $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \cup \tilde{\Sigma}_\varphi$, $\mathcal{H}^\nu(\tilde{\Sigma}_\varphi) = 0$. Тогда почти каждая точка множества D принадлежит одному из множеств B_j , $j \in \mathbb{N}$, и является его точкой плотности. Кроме того, почти каждая точка D принадлежит одному из множеств A_i , $i \in \mathbb{N}$, и является его точкой плотности. В силу $\mathcal{N}$ -свойства

отображения φ на каждом из подмножеств одного и другого представления и интегрируемости по Лебегу отображения $f(x)\sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^*\widehat{D}\varphi(x))}$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^*\widehat{D}\varphi(x))} d\mathcal{H}^\nu(x) \\ = \int_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j} f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^*\widehat{D}\varphi(x))} d\mathcal{H}^\nu(x) \\ = \int_D f(x) \sqrt{\det(\widehat{D}\varphi(x)^*\widehat{D}\varphi(x))} d\mathcal{H}^\nu(x). \end{aligned}$$

Далее, если $\Sigma_\varphi \Delta \widetilde{\Sigma}_\varphi \neq \emptyset$, то $\Sigma_\varphi \Delta \widetilde{\Sigma}_\varphi$ лежит в объединении описанных выше представлений, следовательно, эта симметрическая разность представима в виде счетного объединения множеств, на каждом из которых φ липшицево. Поскольку $\mathcal{H}^\nu(\Sigma_\varphi \Delta \widetilde{\Sigma}_\varphi) = 0$, в силу $\mathcal{N}$ -свойства φ множество $\Sigma_\varphi \Delta \widetilde{\Sigma}_\varphi$ не влияет на обе части формулы (4.2). Теорема доказана.

Предварительные результаты настоящей статьи опубликованы в [34].

Отметим, что результаты и методы данной работы применены в исследовании графиков отображений неголономных структур и описании классов минимальных поверхностей на группах Карно [35], [36].

Автор выражает благодарность профессору С. К. Водопьянову за плодотворные обсуждения работы, которые привели к новым идеям.

Список литературы

1. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: Н. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
2. P. Hajlasz, “Sobolev mappings, co-area formula and related topics”, *Proceedings on analysis and geometry* (Novosibirsk, 1999), Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000, 227–254.
3. B. Kirchheim, “Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **121**:1 (1994), 113–123.
4. L. Ambrosio, B. Kirchheim, “Rectifiable sets in metric and Banach spaces”, *Math. Ann.*, **318**:3 (2000), 527–555.
5. М. Б. Карманова, “Метрическая дифференцируемость отображений и геометрическая теория меры”, *Докл. РАН*, **401**:4 (2005), 443–447; англ. пер.: М. В. Karmanova, “Metric differentiability of mappings and geometric measure theory”, *Dokl. Math.*, **71**:2 (2005), 224–227.
6. M. Karmanova, “Geometric measure theory formulas on rectifiable metric spaces”, *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 103–136.
7. М. Б. Карманова, “Формулы площади и коплощади для отображений классов Соболева со значениями в метрическом пространстве”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:4 (2007), 778–788; англ. пер.: М. В. Karmanova, “Area and coarea formulas for the mappings of Sobolev classes with values in a metric space”, *Siberian Math. J.*, **48**:4 (2007), 621–628.
8. S. Vodopyanov, “Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings”, *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 247–301.

9. P. Pansu, “Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un”, *Ann. Math.* (2), **129**:1 (1989), 1–60.
10. S.D. Pauls, “A notion of rectifiability modeled on Carnot groups”, *Indiana Univ. Math. J.*, **53**:1 (2004), 49–81.
11. V. Magnani, “Differentiability and area formula on stratified Lie groups”, *Houston J. Math.*, **27**:2 (2001), 297–323.
12. M. Karmanova, S. Vodopyanov, “An area formula for contact C^1 -mappings of Carnot manifolds”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**:1–3 (2010), 317–329.
13. А. Н. Варченко, “О препятствиях к локальной эквивалентности распределений”, *Матем. заметки*, **29**:6 (1981), 939–947; англ. пер.: A. N. Varchenko, “Obstructions to local equivalence of distributions”, *Math. Notes*, **29**:6 (1981), 479–484.
14. S.G. Basalaev, S.K. Vodopyanov, “Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces”, *Eurasian Math. J.*, **4**:2 (2013), 10–48.
15. M. Gromov, “Carnot–Carathéodory spaces seen from within”, *Sub-Riemannian geometry*, Progr. Math., **144**, Birkhäuser, Basel, 1996, 79–318.
16. M. Karmanova, S. Vodopyanov, “Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas”, *Analysis and mathematical physics*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2009, 233–335.
17. A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, “Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties”, *Acta Math.*, **155**:1–2 (1985), 103–147.
18. М. Б. Карманова, “Новый подход к исследованию геометрии пространств Карно–Каратеодори”, *Докл. РАН*, **434**:3 (2010), 309–314; англ. пер.: M. B. Karmanova, “A new approach to investigation of Carnot–Carathéodory geometry”, *Dokl. Math.*, **82**:2 (2010), 746–750.
19. M. Karmanova, S. Vodopyanov, “On local approximation theorem on equiregular Carnot–Carathéodory spaces”, *Geometric control theory and sub-Riemannian geometry*, Springer INdAM Ser., **5**, Springer-Verlag, Berlin, 2014, 241–262.
20. С. К. Водопьянов, М. Б. Карманова, “Локальная аппроксимационная теорема на многообразиях Карно в условиях минимальной гладкости”, *Докл. РАН*, **427**:6 (2009), 731–736; англ. пер.: S. K. Vodopyanov, M. B. Karmanova, “A local approximation theorem on Carnot manifolds under minimal smoothness conditions”, *Dokl. Math.*, **80**:1 (2009), 585–589.
21. М. Б. Карманова, “Тонкие свойства базисных векторных полей на пространствах Карно–Каратеодори в условиях минимальной гладкости”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:1 (2014) (в печати); англ. пер.: M. B. Karmanova, “Fine properties of basis vector fields under minimal assumptions on smoothness”, *Siberian Math. J.*, **55**:1 (2014) (to appear).
22. М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982.
23. A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2007.
24. G.B. Folland, E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Math. Notes, **28**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.
25. П. К. Рашевский, “О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией”, *Уч. зап. Моск. гос.пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат.*, **3**:2 (1938), 83–94.
26. W.-L. Chow, “Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung”, *Math. Ann.*, **117**:1 (1939), 98–105.
27. J. Mitchell, “On Carnot–Carathéodory metrics”, *J. Differential Geom.*, **21**:1 (1985), 35–45.

28. С. К. Водопьянов, М. Б. Карманова, “Локальная геометрия многообразий Карно в условиях минимальной гладкости”, *Докл. РАН*, **413**:3 (2007), 305–311; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, M. B. Karmanova, “Local geometry of Carnot manifolds under minimal smoothness”, *Dokl. Math.*, **75**:2 (2007), 240–246.
29. С. К. Водопьянов, *Интегрирование по Лебегу*, <http://math.nsc.ru/~matanalyse/Lebesgue.pdf>.
30. M. Karmanova, “Rectifiable sets and coarea formula for metric-valued mappings”, *J. Funct. Anal.*, **254**:5 (2008), 1410–1447.
31. M. Guzmán, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$* , Lecture Notes in Math., **481**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
32. L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
33. С. К. Водопьянов, Д. В. Исангулова, “Дифференцируемость отображений пространств Карно–Каратеодори в топологии Соболева и BV -топологии”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:1 (2007), 46–67; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, D. V. Isangulova, “Differentiability of the mappings of Carnot–Carathéodory spaces in the Sobolev and BV -topologies”, *Siberian Math. J.*, **48**:1 (2007), 37–55.
34. М. Б. Карманова, “Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно–Каратеодори”, *Докл. РАН*, **423**:5 (2008), 603–608; англ. пер.: M. B. Karmanova, “An area formula for Lipschitz mappings of Carnot–Carathéodory spaces”, *Dokl. Math.*, **78**:3 (2008), 901–906.
35. М. Б. Карманова, “Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно”, *Докл. РАН*, **445**:3 (2012), 259–264; англ. пер.: M. B. Karmanova, “Graphs of Lipschitz functions and minimal surfaces on Carnot groups”, *Dokl. Math.*, **86**:1 (2012), 500–505.
36. М. Б. Карманова, “Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:4 (2012), 839–861; англ. пер.: M. B. Karmanova, “The graphs of Lipschitz functions and minimal surfaces on Carnot groups”, *Sib. Math. J.*, **53**:4 (2012), 672–690.

МАРИЯ БОРИСОВНА КАРМАНОВА
(MARIA B. KARMANOVA)

Поступило в редакцию
19.12.2012

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск;
Новосибирский государственный университет
E-mail: maryka@math.nsc.ru; maryka84@gmail.com