Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Я. Казарновский, Действие комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях и экспоненциальные тропические многообразия, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2014, том 78, выпуск 5, 53–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:23:16

УДК 512.7+514.172.4

Б. Я. Казарновский

Действие комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях и экспоненциальные тропические многообразия

Рассматриваются экспоненциальные тропические многообразия, являющиеся аналогами алгебраических тропических многообразий при переходе от алгебраических многообразий к многообразиям, заданным как нулевые множества систем экспоненциальных сумм. Приведена конструкция возникновения экспоненциальных тропических многообразий в результате действия комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях и доказано, что любое экспоненциальное тропическое многообразие может быть получено таким способом. Одно из применений конструкции – вывод критерия обращения в нуль значения смешанного оператора Монжа–Ампера. Этот критерий является аналогом и обобщением критерия обращения в нуль смешанного объема выпуклых тел.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: кусочно линейная функция, оператор Монжа–Ампера, экспоненциальное тропическое многообразие.

DOI: 10.4213/im8088

§ 1. Введение

В тропической алгебраической геометрии рассматриваются кусочно линейные геометрические объекты в пространстве $\mathbb{R}^n$, называемые *тропическими многообразиями*. Любому алгебраическому многообразию в комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ сопоставляется тропическое многообразие, называемое его *тропикализацией*. Тропикализацией гиперповерхности является ее многогранник Ньютона. Тропические многообразия образуют кольцо. Подкольцо однородных тропических многообразий (см. п. 4.2) изоморфно *кольцу условий* (вариант конструкции кольца Чжоу [1]) комплексного тора, а тропикализация является образом многообразия в кольце условий. Для подмногообразий X, Y комплексного тора верно, что для общего сдвига g произведение тропикализаций является тропикализацией пересечения $X \cap gY$. Поэтому полная информация о тропикализациях, как правило, дает ответы на вопросы исчислительной алгебраической геометрии и предоставляет естественные объяснения этих ответов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант НШ-8462.2012.1).

При переходе от полиномов к экспоненциальным суммам и от алгебраических многообразий к множествам корней систем экспоненциальных сумм в пространстве $\mathbb{C}^n$ иногда удается сохранить некоторые алгебро-геометрические вычисления с многогранниками Ньютона (см., например, [2]). При этом оказывается полезным рассматривать аналоги тропических многообразий в комплексном векторном пространстве. Мы называем их *экспоненциальными тропическими многообразиями* (ETV), они образуют кольцо. Алгебраические тропические многообразия в пространстве $\mathbb{R}^n$ образуют подкольцо кольца ETV. Показано, что кольцо ETV так же, как кольцо тропических многообразий, порождено сдвигами некоторых специальных многообразий, соответствующих выпуклым многогранникам (теоремы 2.2, 4.2).

Кроме того, оказывается, что множество ETV совпадает с множеством результатов действия смешанного комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях в пространстве $\mathbb{C}^n$ (утверждение высказано в [3] как гипотеза). Эта связь позволяет применять ETV для вывода некоторых свойств оператора Монжа–Ампера. Одно из применений – вывод критерия обращения в нуль значения смешанного оператора Монжа–Ампера на выпуклых кусочно линейных функциях. Этот критерий является аналогом и обобщением критерия обращения в нуль смешанного объема выпуклых многогранников.

Существует еще одна, кроме описанной выше, связь между кольцом тропических многообразий и кольцом ETV. Кольцо ETV является факторкольцом кольца тропических многообразий в овеществлении пространства $\mathbb{C}^n$. Отображение проекции Π строится явно и позволяет сводить утверждения о ETV к соответствующим утверждениям о тропических многообразиях.

В § 2 приведены определение и детальные формулировки всех используемых в § 3 свойств ETV. В § 3 доказано, что все ETV возникают как суммы значений смешанного комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях, и приведен вывод критерия обращения в нуль для действия оператора Монжа–Ампера. В § 4 приведено построение отображения Π и показано, что утверждения из § 2 являются следствиями соответствующих утверждений о тропических многообразиях.

Автор выражает благодарность А. Хованскому за многочисленные полезные обсуждения. Вывод критерия обращения в нуль значения оператора Монжа–Ампера, приведенный в п. 3.2, является модификацией неопубликованного доказательства А. Хованского теоремы об обращении в нуль смешанного объема выпуклых тел. Кроме того, автор благодарен рецензенту за замечания, приведшие к повышению адекватности изложения и качества текста.

§ 2. Определение и свойства ETV

2.1. Определение ETV. Пусть X – конечное множество выпуклых замкнутых (не обязательно ограниченных) k -мерных многогранников в вещественном векторном пространстве E . Назовем X *k -мерным полиэдральным множеством*, если пересечение любых двух многогранников или пусто, или является их общей гранью. Любая грань любого из многогранников называется

клеткой. Если не оговорено обратное, $2n$ -мерное пространство E предполагается равным овеществлению комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$. Также мы отождествляем двойственное пространство E^* с овеществлением комплексного двойственного $\mathbb{C}^n$ пространства $(\mathbb{C}^n)^*$, используя спаривание $(z, z^*) = \operatorname{Re}\langle z, z^* \rangle$. Назовем *комплексной цепью степени m* нечетную функцию

$$\Delta \mapsto X_\Delta \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^m (\mathbb{C}^n)^*$$

на множестве k -мерных клеток (т. е. функцию, значение которой меняет знак при смене ориентации клетки) со значениями в поливекторах степени m . Полиэдральное множество с заданной комплексной цепью называем *оснащенным*. Нечетную форму X_Δ (т. е. форму со знаком, зависящим от ориентации клетки) называем *оснащением* клетки Δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Объединение k -мерных клеток $\Delta \in X$ с ненулевыми оснащениями обозначим $\operatorname{supp} X$ и назовем *носителем оснащенного полиэдрального множества*. Оснащенные k -мерные полиэдральные множества X, Y с общим носителем назовем *эквивалентными*, если $X_\Delta = Y_\Theta$ на любом k -мерном пересечении k -мерных клеток $\Delta \in X$ и $\Theta \in Y$.

Полиэдральное множество, состоящее из всех $(k - 1)$ -мерных клеток оснащенного k -мерного полиэдрального множества X , обозначим ∂X и определим его оснащение следующим образом:

$$(\partial X)_\Lambda = \sum_{\Delta \supset \Lambda, \dim \Delta = k} X_\Delta, \quad (2.1)$$

где ориентации Δ и Λ согласуются, как ориентации многогранника и его грани старшей размерности (если ориентации клеток Δ и Λ согласованы, то ограничение $X_\Delta|_\Lambda$ задает оснащение клетки Λ). Оснащенное полиэдральное множество ∂X называется *границей X* . Полиэдральное множество X называется *замкнутым*, если $\operatorname{supp} \partial X = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Оснащенное полиэдральное множество ∂X замкнуто.*

Пусть E_Δ – вещественное подпространство пространства $\mathbb{C}^n$, порожденное разностями точек клетки Δ , и $\mathbb{C}_\Delta$ – максимальное содержащееся в E_Δ комплексное подпространство пространства $\mathbb{C}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $k \geq n$ и X – замкнутое оснащенное полиэдральное множество размерности k с оснащением степени $2n - k$. Назовем X *экспоненциальным тропическим полиэдральным множеством* (ETP), если ограничение $X_{\Delta, \mathbb{R}}$ формы X_Δ на пространство E_Δ вещественно, т. е. если $X_{\Delta, \mathbb{R}} \in \bigwedge_{\mathbb{R}}^{2n-k} E_\Delta^*$, где E_Δ^* – двойственное E_Δ пространство.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Форма X_Δ обращается в нуль на любом наборе касательных векторов, содержащем вектор из подпространства $\mathbb{C}_\Delta$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В [3] рассматриваются экспоненциальные тропические многообразия с полиномиальными весами. Поэтому в [3] предполагается, что

оснащение X_Δ – это произведение внешней формы на полиномиальную функцию от точек пространства E_Δ ; соответствующая конструкция тропической геометрии имеется в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Вещественное подпространство E пространства $\mathbb{C}^n$ назовем *вырожденным*, если $\text{codim}_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} < \text{codim } E$, где $E_{\mathbb{C}}$ – максимальное содержащееся в E комплексное подпространство пространства $\mathbb{C}^n$. Назовем клетку Δ полиэдра X *вырожденной*, если вырождено подпространство E_Δ .

При $k = 2n, 2n - 1$ все k -мерные подпространства невырождены. При $k < n$ все k -мерные подпространства вырождены. Для невырожденного k -мерного подпространства E имеем $\dim E - \dim_{\mathbb{R}} E_{\mathbb{C}} = 2n - k$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть Δ – вырожденная k -мерная клетка k -мерного ЕТР X . Тогда $X_\Delta = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Класс эквивалентности ЕТР назовем *экспоненциальным тропическим многообразием* (ETV). Если размерность ЕТР равна k , то определим размерность соответствующего ETV как $k - n$.

Всюду далее запись $X \Rightarrow \mathcal{P}$ означает, что ЕТР X лежит в классе эквивалентности ETV $\mathcal{P}$.

По ЕТР X определим поток $\overline{X}$ по формуле

$$\overline{X}(\varphi) = \sum_{\Delta \in X, \dim \Delta = k} \int_{\Delta} X_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge \varphi. \quad (2.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4. ЕТР X, Y эквивалентны, если и только если $\overline{X} = \overline{Y}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть $\mathcal{P}$ – ETV размерности d . Тогда $\overline{\mathcal{P}}$ – поток бистепени (d, d) . Если $d > 0$, то поток $\overline{\mathcal{P}}$ замкнут.

ПРИМЕР 2.1 (множество углов (corner locus) кусочно линейной функции). Непрерывную функцию $h: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *кусочно линейной*, если она является вещественным многочленом первой степени на каждом из конечного множества выпуклых многогранников, объединение которых равно $\mathbb{C}^n$. Пусть носитель $(2n - 1)$ -мерного полиэдрального множества X состоит из точек негладкости кусочно линейной функции h . Локально любая $(2n - 1)$ -мерная клетка Δ полиэдрального множества X является общей границей полупространств A и B . Положим $h_A = h|_A$ и $h_B = h|_B$. Упорядочение пары полупространств определяет коориентацию клетки Δ . Стандартная ориентация $\mathbb{C}^n$ и коориентация Δ вместе задают ориентацию клетки Δ . Используя эту ориентацию, положим $X_{\Delta, \mathbb{R}} = d^c h_A - d^c h_B$ (напомним: для функции g на комплексном многообразии значение 1-формы $d^c g$ на касательном векторе x_t равно $dg(-ix_t)$). Тогда оснащенное полиэдральное множество X является ЕТР. Легко проверить, что $\overline{\mathcal{P}} = dd^c h$, где $X \Rightarrow \mathcal{P}$. Наоборот, для любого ETV $\mathcal{P}$ размерности $n - 1$ найдется кусочно линейная функция h такая, что $\overline{\mathcal{P}} = dd^c h$ (теорема 3.1).

2.2. Сложение ETV. Пусть X_1, X_2 – k -мерные ЕТР и $X_i \Rightarrow Q_i$. Построим оснащенное k -мерное полиэдральное множество X такое, что:

- 1) $\text{supp } X = \text{supp } X_1 \cup \text{supp } X_2$;
- 2) если $\dim(\Delta \cap \Xi) = k$, где Δ и Ξ – клетки ЕТР X и X_i при i , равном 1 или 2, то $\Delta \subset \Xi$.

Построим оснащение k -мерной клетки Δ как сумму оснащений, содержащих Δ (одной или двух) клеток ЕТР X_i .

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Оснащенное полиэдральное множество X является ЕТР, и $\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$.*

Содержащий X класс эквивалентности ЕТР не зависит от выбора X_1, X_2 в классе эквивалентностей ETV Q_1, Q_2 соответственно (следствие 2.4). Определим ETV $Q_1 + Q_2$ как $X \Rightarrow Q_1 + Q_2$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *ETV фиксированной размерности образуют абелеву группу, и отображение, переводящее ETV $\mathcal{P}$ в поток $\bar{\mathcal{P}}$, является инъективным отображением групп.*

Ниже мы также рассматриваем определенное формально сложение ETV разных размерностей. ETV образуют градуированную группу относительно такого сложения. По определению степень m -мерного ETV в этой градуированной группе равна $n - m$, т. е. k -мерному ЕТР соответствует ETV степени $2n - k$ и размерности $k - n$.

Пусть ω – нечетная внешняя форма объема на пространстве V . Определим объем ограниченной области U как $\int_U \omega$. Объем области не зависит от выбора ориентации пространства. Скажем, что ω положительна или отрицательна, если измеряемый объем тел принимает положительные или отрицательные значения соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть Δ – клетка старшей размерности ЕТР X . Назовем ее *положительной* (или *отрицательной*), если прямой образ формы $X_{\Delta, \mathbb{R}}$ на пространстве $E_{\Delta}/\mathbb{C}_{\Delta}$ является положительной (или отрицательной) формой объема. При определении прямого образа нечетной формы $X_{\Delta, \mathbb{R}}$ используется стандартная ориентация $\mathbb{C}_{\Delta}$ как комплексного векторного пространства (для согласования ориентаций пространств E_{Δ} и $E_{\Delta}/\mathbb{C}_{\Delta}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. ЕТР, все клетки которого неотрицательны, называется *положительным*.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. *Любое ЕТР эквивалентно разности двух положительных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \Rightarrow \mathcal{P}$. Для любой k -мерной клетки $\Delta \in X$ с ненулевым оснащением X_{Δ} рассмотрим одноклеточное ЕТР $\mathcal{E}_{\Delta}$, единственная клетка которого совпадает с содержащим клетку Δ сдвигом подпространства E_{Δ} . Пусть $c_{\Delta} X_{\Delta}$ – оснащение клетки $\mathcal{E}_{\Delta}$, где c_{Δ} – такое вещественное число, что клетка является положительной. Тогда ЕТР $X + \sum_{\Delta} \mathcal{E}_{\Delta}$ при достаточно больших $|c_{\Delta}|$ положительно и $\mathcal{P} = (\mathcal{P} + \sum_{\Delta} \mathcal{Q}^{\Delta}) - (\sum_{\Delta} \mathcal{Q}^{\Delta})$ при $\mathcal{E}_{\Delta} \Rightarrow \mathcal{Q}^{\Delta}$.

Назовем k -мерные клетки Δ, Λ k -мерного полиэдрального множества *соседними*, если они имеют общую $(k-1)$ -мерную грань. Множество k -мерных клеток назовем *связным*, если для любой пары клеток Δ, Λ этого множества существует последовательность клеток $\Delta_1 = \Delta, \Delta_2, \dots, \Delta_m = \Lambda$ такая, что клетки Δ_i, Δ_{i+1} являются соседними.

Пусть $\Xi_1, \dots, \Xi_q$ – все максимальные связные множества клеток k -мерного полиэдрального множества X . Обозначим через Y_i полиэдральное множество, образованное клетками множества Ξ_i и их гранями. Тогда $\text{supp } X = \bigcup_{1 \leq i \leq q} \text{supp } Y_i$. Полиэдральные множества Y_i, Y_j при $i \neq j$ не имеют общих $(k-1)$ -мерных клеток. Если X является ЕТР, то полиэдральные множества Y_i , снабженные унаследованными кратностями, также являются ЕТР. Последнее утверждение – прямое следствие определения 2.2. Будем называть ЕТР Y_i *неразложимыми компонентами* ЕТР X . При $q = 1$ назовем ЕТР X *неразложимым*. Если $X \Rightarrow \mathcal{P}$, то неразложимые компоненты $\text{ETV } \mathcal{P}$ корректно определены.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Любое ETV равно сумме своих неразложимых компонент. Неразложимые компоненты положительного ETV положительны.*

2.3. ETV и многогранники в пространстве $(\mathbb{C}^n)^*$. Для формулировки основных утверждений (теоремы 2.1, 2.2) понадобится несколько элементарных геометрических фактов и определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. *Веером конусов* называется полиэдральное множество, все клетки которого являются конусами с вершиной в точке 0. Веер конусов, являющийся ЕТР, называется *однородным* ЕТР, соответствующее ETV также называется однородным.

Пусть γ – выпуклый многогранник в пространстве $(\mathbb{C}^n)^*$. *Двойственный конус Δ грани δ многогранника γ* по определению состоит из таких точек $z \in \mathbb{C}^n$, что $\max_{z^* \in \gamma} \text{Re}\langle z, z^* \rangle$ достигается при любом $z^* \in \delta$. Если $\dim \delta = m$, то Δ является конусом размерности $2n - m$. Двойственные конусы m -мерных граней многогранника γ образуют $(2n - m)$ -мерный веер конусов $X^{\gamma, 2n-m}$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть U – открытая ограниченная область m -мерного вещественного векторного пространства E . Тогда для любой ориентации α пространства E существует единственный поливектор $p_U(\alpha) \in \bigwedge^m E$ такой, что $\int_U \omega = \omega(p_U(\alpha))$ для любой внешней формы объема ω в пространстве E .*

Ясно, что $p_U(-\alpha) = -p_U(\alpha)$, где $(-\alpha)$ – отличная от α ориентация пространства E , т. е. поливектор p_U является нечетным.

Пусть E_δ – порожденное разностями точек грани δ вещественное подпространство пространства $(\mathbb{C}^n)^*$. Грани многогранника образуют полиэдральный комплекс. Функция $\delta \mapsto p_\delta \in \bigwedge^m E_\delta \subset \bigwedge_{\mathbb{R}}^m (\mathbb{C}^n)^*$ на m -мерных гранях многогранника является m -коцепью со значениями в $\bigwedge_{\mathbb{R}} (\mathbb{C}^n)^*$.

ЛЕММА 2.2. *m -коцепь $\delta \mapsto p_\delta$ является коциклом.*

Утверждение леммы 2.2 эквивалентно условиям Паскаля для $(m+1)$ -мерных граней многогранника γ . (Условия Паскаля для k -мерного многогранника γ

имеют вид $\sum_{\delta} v_{\delta} = 0$, где δ – $(k-1)$ -мерная грань γ , v_{δ} – вектор внешней нормали грани δ в пространстве E_{γ} длины, равной $(k-1)$ -мерной площади δ .

Объем $(m+1)$ -мерного многогранника равен сумме площадей m -мерных граней, умноженных на длины соответствующих высот и деленных на $m+1$. Используя коцикл p_{δ} , можно записать формулу объема в виде

$$p_{\delta} = \frac{1}{m+1} \sum_{\theta \subset \delta, \dim \theta = m} w_{\theta} \wedge p_{\theta}, \quad (2.3)$$

где w_{θ} – любая точка m -мерной грани $\theta \subset \delta$.

ЛЕММА 2.3. Пусть E – овеществление комплексного векторного пространства V . Тогда существует единственный гомоморфизм колец $\varrho: \bigwedge_{\mathbb{R}} E \rightarrow \bigwedge_{\mathbb{C}} V$ такой, что отображение $\varrho: E \rightarrow V$ тождественно.

Пусть $\delta_{\mathbb{C}}$ – минимальное комплексное подпространство в $(\mathbb{C}^n)^*$, содержащее вещественное подпространство E_{δ} . Назовем грань δ многогранника γ вырожденной, если $\dim \delta > \dim_{\mathbb{C}} \delta_{\mathbb{C}}$. Все 0-мерные и 1-мерные грани невырождены. Все грани размерности более n вырождены.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Если грань δ вырождена, то $\varrho(p_{\delta}) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.11. m -коцепь $\delta \mapsto \varrho(p_{\delta})$ на многограннике $\gamma \subset (\mathbb{C}^n)^*$ со значениями в $\bigwedge_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)^*$ является коциклом. При $m > n$ коцикл $\delta \mapsto \varrho(p_{\delta})$ нулевой.

Далее используется комплексный вариант формулы (2.3) (в котором, в отличие от (2.3), рассматривается произведение комплексных поливекторов)

$$\varrho(p_{\delta}) = \frac{1}{m+1} \sum_{\theta \subset \delta, \dim \theta = m} w_{\theta} \wedge \varrho(p_{\theta}). \quad (2.4)$$

При $m \leq n$ определим однородное $(2n-m)$ -мерное ЕТР, соответствующее многограннику $\gamma \subset (\mathbb{C}^n)^*$. Эта конструкция аналогична построению тропических многообразий, соответствующих выпуклому многограннику в пространстве $(\mathbb{R}^N)^*$ (см. § 4). Клетки ЕТР – конусы веера $X^{\gamma, 2n-m}$. Определим оснащение $X_{\Delta}^{\gamma, 2n-m}$ конуса $\Delta \in X^{\gamma, 2n-m}$, двойственной грани δ .

Если грань δ вырождена, то положим $X_{\Delta}^{\gamma, 2n-m} = 0$. Пусть грань δ не вырождена. Рассмотрим поливектор $i^m \varrho(p_{\delta})$ как внешнюю m -форму $W_{\Delta}^{\gamma, 2n-m}$ на пространстве $\mathbb{C}^n$. Знак этой формы зависит от выбора ориентации клетки δ . Далее установлено соответствие между ориентациями пространств E_{Δ} и E_{δ} . Поэтому формы $W_{\Delta}^{\gamma, 2n-m}$ задают оснащение полиэдрального множества $X_{\Delta}^{\gamma, 2n-m}$. Соответствие ориентаций пространств E_{Δ} и E_{δ} устанавливается следующим образом.

Билинейная форма $\text{Im}\langle z, z^* \rangle$ задает невырожденное спаривание $E_{\Delta}/\mathbb{C}_{\Delta} \otimes E_{\delta} \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим на пространстве $E_{\Delta}/\mathbb{C}_{\Delta} \oplus E_{\delta}$ соответствующую симплектическую форму ω и ориентацию, соответствующую форме объема ω^m . Согласуем ориентации пространств $E_{\Delta}/\mathbb{C}_{\Delta}$ и E_{δ} так, что согласованные ориентации сообща дают ориентацию ω^m на пространстве $E_{\Delta}/\mathbb{C}_{\Delta} \oplus E_{\delta}$. Теперь согласуем ориентации пространств $E_{\Delta}/\mathbb{C}_{\Delta}$ и E_{Δ} , выбирая ориентацию пространства $\mathbb{C}_{\Delta}$

как стандартную ориентацию комплексного векторного пространства. Теперь ориентации пространств E_δ и E_Δ также согласованы. Замкнутость оснащенного полиэдрального множества $X^{\gamma, 2n-m}$ вытекает из следствия 2.11.

Таким образом, при $k \geq n$ оснащенные вееры конусов $X^{\gamma, k}$ являются однородными ЕТР. Соответствующие однородные ЕТВ также обозначаются $X^{\gamma, k}$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого k -мерного однородного ЕТВ X существует конечный набор $\{\gamma\}$ выпуклых многогранников в пространстве $(\mathbb{C}^n)^*$ такой, что*

$$X = \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm X^{\gamma, k}. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Для любого k -мерного ЕТВ X существуют конечный набор $\{\gamma\}$ выпуклых многогранников в пространстве $(\mathbb{C}^n)^*$ и набор векторов $\{a_\gamma\}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ такие, что*

$$X = \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm (a_\gamma + X^{\gamma, k}), \quad (2.6)$$

где $a_\gamma + X^{\gamma, k}$ – сдвиг ЕТВ $X^{\gamma, k}$ на вектор a_γ .

В формулах (2.5) и (2.6) через tX (при $t = \pm 1$) обозначено ЕТВ, клетки которого совпадают с клетками ЕТВ X (при представлении его некоторым ЕТР), а оснащения совпадают с оснащениями X , умноженными на t .

2.4. Стабильное пересечение ЕТР и умножение ЕТВ. Полиэдральные множества X, Y *трансверсальны*, если для любых клеток $\Delta \in X, \Lambda \in Y$ с непустым пересечением пространства E_Δ и E_Λ пересекаются трансверсально.

Пусть X и Y – трансверсальные полиэдральные множества размерностей p и q . Тогда попарные пересечения их клеток образуют полиэдральное множество $X \cap Y$ размерности $p + q - 2n$ (если $X \cap Y \neq \emptyset$, то $p + q \geq 2n$). Для трансверсальных ЕТР X, Y на полиэдральном множестве $X \cap Y$ при $\dim X \cap Y \geq n$ можно определить структуру ЕТР следующим образом.

Пусть $\Delta \in X$ и $\Lambda \in Y$ – клетки старших размерностей, $\Xi = \Delta \cap \Lambda$. Далее определена нечетная форма $X_\Delta \wedge Y_\Lambda$ на клетке Ξ . Оснащение клетки Ξ задается как $(X \cap Y)_\Xi = X_\Delta \wedge Y_\Lambda$.

Выберем ориентации α, β клеток Δ, Λ , и пусть X_Δ^α и Y_Λ^β – внешние формы, соответствующие выбранным ориентациям. Определим нечетную форму $X_\Delta \wedge Y_\Lambda$, приписывая форме $X_\Delta^\alpha \wedge Y_\Lambda^\beta$ знак, зависящий от ориентации клетки Ξ следующим образом: будем считать форму $X_\Delta \wedge Y_\Lambda$ положительной (определение 2.5), если формы X_Δ, Y_Λ положительны или отрицательны одновременно. Иначе считаем форму $X_\Delta \wedge Y_\Lambda$ отрицательной.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *При $(p - n) + (q - n) \geq n$ оснащенное полиэдральное множество $X \cap Y$ является ЕТР.*

Действительно, пусть $\Upsilon = \Delta \cap \Gamma - (p + q - 2n - 1)$ -мерная клетка полиэдрального множества $X \cap Y$, где Δ – p -мерная клетка полиэдрального множества X

и Γ – $(q - 1)$ -мерная клетка полиэдрального множества Y . Тогда, используя определение границы полиэдрального множества (формула (2.1)), получаем

$$(\partial(X \cap Y))_{\Gamma} = \sum_{Y \ni \Delta \supset \Gamma} X_{\Delta} \wedge Y_{\Delta} = X_{\Delta} \wedge \sum_{Y \ni \Delta \supset \Gamma} Y_{\Delta} = X_{\Delta} \wedge (\partial Y)_{\Gamma} = 0.$$

Таким образом, замкнутость полиэдрального множества $X \cap Y$ – следствие замкнутости полиэдральных множеств X, Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Назовем $\text{ETV } \mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ *трансверсальными*, если существуют трансверсальные $\text{ETP } X, Y$ такие, что $X \Rightarrow \mathcal{P}$ и $Y \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Пусть $X \Rightarrow \mathcal{P}$ и $Y \Rightarrow \mathcal{Q}$, где $\text{ETP } X$ и Y трансверсальны. Скажем, что $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{X}$, где $X \cap Y \Rightarrow \mathcal{X}$. Произведение трансверсальных ETV корректно определено.

Кроме того, если $\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} < n$, то (для любых ETV) положим $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$. Для определения произведения в общем случае применяется следующий прием.

Аддитивная группа пространства $\mathbb{C}^n$ действует сдвигами на множестве полиэдральных множеств. При фиксированных X, Y пара $X, z + Y$ трансверсальна при почти всех $z \in \mathbb{C}^n$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\text{ETP } X$ и $z_i + Y$ трансверсальны. Тогда при $z_i \rightarrow 0$ поток $X \cap (z_i + Y)$ стремится к не зависящему от выбора последовательности z_i пределу вида $\bar{Z}$, где Z является ETP размерности $p + q - 2n$. Если $X \Rightarrow \mathcal{P}$ и $Y \Rightarrow \mathcal{Q}$, то класс эквивалентности $\text{ETP } Z$ задает $\text{ETV } \mathcal{P}\mathcal{Q}$ размерности $(p - n) + (q - n) - n$, не зависящее от выбора $\text{ETP } X, Y$.

Далее объясняется, что если $\text{ETP } X$ и Y положительны, то $\text{ETP } Z$ из утверждения теоремы 2.3 является стабильным пересечением $\text{ETP } X$ и Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Пусть A, B – произвольные подмножества конечномерного векторного пространства E . Точка $x \in A \cap B$ называется *стабильной*, если любая окрестность точки x при достаточно близком к нулю $y \in E$ содержит точки множества $A \cap (y + B)$. Множество стабильных точек пересечения называется *стабильным пересечением* и обозначается $A \cap^{\text{st}} B$.

Полиэдральное множество в окрестности любой своей точки совпадает с некоторым веером конусов. Действительно, пусть $\Theta \in X$ и $e \in \text{Int } \Theta$, где $\text{Int } \Theta$ – множество внутренних точек клетки Θ (единственная точка 0-мерной клетки считается внутренней). Тогда сдвинутое полиэдральное множество $X - e$ в окрестности нулевой точки совпадает с веером конусов. Обозначим этот веер через X_{Θ} и назовем Θ -*локализацией* X . Веер X_{Θ} не зависит от выбора внутренней точки клетки Θ .

Обозначим через $K_{\min}$ минимальный конус веера K . Минимальный конус веера является подпространством. Конус $K_{\min}$ содержится во всех конусах веера K . Минимальным конусом веера Θ -локализации X_{Θ} является подпространство E_{Θ} . Для любой клетки Θ $\text{ETP } X$ локализация X_{Θ} является однородным ETP , если снабдить клетки полиэдрального множества X_{Θ} наследуемыми от X оснащениями.

СЛЕДСТВИЕ 2.13. Пусть $\Delta \in X$, $\Lambda \in Y$ и $x \in \text{Int } \Delta \cap \text{Int } \Lambda$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $x \in \text{supp } X \cap^{\text{st}} \text{supp } Y$;
- 2) $\Delta \cap \Lambda \subset \text{supp } X \cap^{\text{st}} \text{supp } Y$;
- 3) $(X_\Delta)_{\min} \cap (Y_\Lambda)_{\min} \subset \text{supp } X_\Delta \cap^{\text{st}} \text{supp } Y_\Lambda$.

СЛЕДСТВИЕ 2.14. Если $X \cap^{\text{st}} Y \neq \emptyset$, то $\dim X \cap^{\text{st}} Y \leq \dim X + \dim Y - 2n$.

Пусть K, L – однородные ЕТР, $\dim K = k$, $\dim L = l$. Предположим, что $\text{supp } K \cap^{\text{st}} \text{supp } L = K_{\min} \cap L_{\min}$. Положим $V = K_{\min} \cap L_{\min}$.

ЛЕММА 2.4. Если ЕТР K, L положительны, то $\dim V = k + l - 2n$.

Предположим, что ЕТР K, L положительны. Пусть $\{\Xi_i(z)\}$ – множество непустых пересечений $\Delta \cap (z + \Lambda)$, где $\Delta \in K$ и $\Lambda \in L$ – клетки размерности k и l соответственно. Тогда если полиэдральные множества $K, z + L$ трансверсальны, то $\{\Xi_i(z)\}$ – множество клеток максимальной размерности ЕТР $K \cap (z + L)$ (следствие 2.12). Любая клетка $\Xi_i(z)$ при некотором $z_i \in \mathbb{C}^n$ совпадает с аффинным подпространством $V + z_i$. Поэтому ее оснащения $(K \cap L)_{\Xi_i(z)}$ можно рассматривать как внешние формы на пространстве $\mathbb{C}^n$, нечетно зависящие от ориентации подпространства V . Пусть $W_{K,L}(z)$ – сумма всех этих форм.

ЛЕММА 2.5. Если K, L – положительные однородные ЕТР, то форма $W_{K,L}(z)$ – постоянная функция аргумента z .

Пусть X, Y – положительные ЕТР, $\dim X = k$, $\dim L = l$, $\Theta \subset \text{supp } X \cap^{\text{st}} \text{supp } Y$, $\dim \Theta = k + l - 2n$ и $\text{Int } \Theta = \text{Int } \Delta \cap \text{Int } \Lambda$, где $\Delta \in X, \Lambda \in Y$. Положим $K = X_\Delta$ и $L = Y_\Lambda$. Назначим клетке Θ оснащение $W_{K,L}(z)$ из утверждения леммы 2.5.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть ЕТР X, Y положительны, $\dim X = k$, $\dim L = l$. Тогда все $(k + l - 2n)$ -мерные клетки полиэдрального множества $X \cap^{\text{st}} Y$ с описанными выше оснащениями образуют положительное ЕТР $X \cap^{\text{st}} Y$. Для ЕТР $X \cap^{\text{st}} Y$ все утверждения теоремы 2.3 о ЕТР Z верны.

Теперь определим умножение ЕТВ. Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 – положительные ЕТР и $(X_1 - X_2) \Rightarrow \mathcal{P}$, $(Y_1 - Y_2) \Rightarrow \mathcal{Q}$. Тогда положим

$$(X_1 \cap^{\text{st}} Y_1 - X_1 \cap^{\text{st}} Y_2 - X_2 \cap^{\text{st}} Y_1 + X_2 \cap^{\text{st}} Y_2) \Rightarrow \mathcal{P}\mathcal{Q}.$$

Легко проверить, что произведение ЕТВ определено корректно.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Произведение двух положительных ЕТВ положительно.

2.5. Вектор Бергмана ЕТВ. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ – k -мерный выпуклый многогранник. Обозначим через Δ^∞ выпуклый многогранный конус, образованный предельными точками семейства многогранников $t\Delta$ при $t \rightarrow +0$. Этот конус лежит в подпространстве E_Δ (напомним: подпространство E_Δ порождено разностями точек многогранника Δ). Если Δ – ограниченный многогранник, то $\Delta^\infty = 0$. Иначе $\dim \Delta^\infty > 0$. Любая грань конуса Δ^∞ является конусом вида Λ^∞ , где Λ – грань многогранника Δ .

Для полиэдрального множества X положим $S = \bigcup_{\Delta \in X} \Delta^\infty$. При $\varphi \in S$ обозначим через $L(\varphi)$ полный набор клеток $\Delta \in X$ таких, что $\varphi \in \Delta^\infty$. Точки φ, ψ множества S назовем *эквивалентными*, если $L(\varphi) = L(\psi)$. Классы эквивалентности являются выпуклыми конусами размерности $\leq k$, где $k = \dim X$. Пусть S^∞ – замыкание объединения классов эквивалентности, представленных k -мерными конусами. Если $S^\infty = \emptyset$, то положим $X^\infty = 0$. Иначе существует k -мерный веер конусов X^∞ такой, что:

1) $\text{supp } X^\infty = S^\infty$;

2) каждый из конусов $K \in X^\infty$ лежит в своем классе эквивалентности множества S .

Пусть X – k -мерное оснащенное полиэдральное множество в пространстве $\mathbb{C}^n$. Определим оснащение X_K^∞ k -мерного конуса $K \in X^\infty$ как $\sum_{\Delta \in L(\varphi)} X_\Delta$, где φ – любая внутренняя точка конуса K .

ТЕОРЕМА 2.5. *Если X – ЕТР, то X^∞ является однородным ЕТР, а соответствующее ЕТВ зависит только от класса эквивалентности ЕТР X .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Однородное ЕТВ X^∞ называется *веером Бергмана* $\text{ETV } X$.

ТЕОРЕМА 2.6. *Отображение $\beta: X \rightarrow X^\infty$ является гомоморфизмом кольца ЕТВ на кольцо однородных ЕТВ.*

СЛЕДСТВИЕ 2.16. *Пусть $\text{ETV } X$ представлено в виде (2.6). Тогда $X^\infty = \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm X^{\gamma, k}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.17. *Гомоморфизм β инвариантен относительно сдвигового действия $\mathbb{C}^n$, т.е. $(z + X)^\infty = X^\infty$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$.*

ТЕОРЕМА 2.7. *Если X – положительное ненулевое ЕТВ, то X^∞ также является ненулевым положительным ЕТВ.*

СЛЕДСТВИЕ 2.18. *Пусть X, Y – положительные ЕТВ. Тогда $XY \neq 0$, если и только если $X^\infty Y^\infty \neq 0$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.19. *Пусть $X_1, \dots, X_m$ – положительные ЕТВ. Тогда имеем $X_1 \cdots X_m = 0$, если и только если $(a_1 + X_1) \cdots (a_m + X_m) = 0$ для любых $a_i \in \mathbb{C}^n$.*

§ 3. Смешанный комплексный оператор Монжа–Ампера

3.1. Оператор Монжа–Ампера и ЕТВ. Отображение $(h_1, \dots, h_k) \mapsto dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_k$ называется *смешанным комплексным оператором Монжа–Ампера* (напомним: для функции g на комплексном многообразии значение 1-формы $d^c g$ на касательном векторе x_t равно $dg(-ix_t)$). Далее мы называем это отображение *оператором Монжа–Ампера*.

Значения оператора Монжа–Ампера рассматриваются как потоки (линейные функционалы на пространстве гладких дифференциальных форм с компактным носителем). Если h_i – непрерывные выпуклые функции в пространстве $\mathbb{C}^n$, то поток $dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_k$ корректно определен [5]. Это значит, что при

локально равномерном приближении функций h_i гладкими плюрисубгармоническими (в частности, выпуклыми) функциями последовательность значений операторов Монжа–Ампера сходится к не зависящему от выбора приближения потоку. При этом предельный поток продолжается до функционала на пространстве форм с непрерывными коэффициентами, т. е. является потоком типа меры.

Любая кусочно линейная функция является разностью двух выпуклых кусочно линейных функций. Поэтому действие оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях определено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для кусочно линейных функций поток $dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_k$ зависит только от произведения функций $h_1 \cdots h_k$ [3]. Это специфическое свойство кусочно линейных функций частично остается верным для кусочно плюригармонических функций на любом комплексном многообразии [6].

Пусть B – кольцо, порожденное потоками вида $dd^c g$, где g – кусочно линейные функции в $\mathbb{C}^n$, и потоком $\omega \mapsto \int_{\mathbb{C}^n} \omega$, где ω – форма объема с компактным носителем на пространстве $\mathbb{C}^n$ (последний поток является единицей кольца B). Назовем *степенью* элемента кольца B степень соответствующего полинома от форм вида $dd^c g$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1 [3]. Для любого однородного элемента b кольца B существует $(n - \deg b)$ -мерное ETV $\iota(b)$ такое, что $b = \overline{\iota(b)}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть B – кольцо ETV. Отображение $\iota: B \rightarrow B$ является изоморфизмом градуированных колец.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Утверждение теоремы 3.1 приведено в [3] в виде гипотезы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. 1) Функция $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *положительно однородной степени 1*, если для любого $\lambda \geq 0$ имеем $g(\lambda z) = \lambda g(z)$.

2) Функция $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *$\mathbb{R}$ -порожденной*, если $g(z + y) = g(z)$ для любого $y \in \text{Im } \mathbb{C}^n$.

3) ETV X называется *$\mathbb{R}$ -порожденным*, если $y + X = X$ для любого $y \in \text{Im } \mathbb{C}^n$ ($y + X$ – сдвиг ETV на вектор y).

Следующие утверждения вытекают из теоремы 3.1.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть B_h – кольцо однородных ETV, B_h – кольцо, порожденное потоками $dd^c g$, где g – положительно однородные степени 1 кусочно линейные функции в $\mathbb{C}^n$. Тогда отображение $\iota|_{B_h}$ является изоморфизмом градуированных колец, $\iota|_{B_h}: B_h \rightarrow B_h$.

ТЕОРЕМА 3.3 [7]. Пусть $B^{\mathbb{R}}$ – кольцо $\mathbb{R}$ -порожденных ETV, $B^{\mathbb{R}}$ – кольцо, порожденное потоками $dd^c g$, где g – $\mathbb{R}$ -порожденные кусочно линейные функции в $\mathbb{C}^n$. Тогда отображение $\iota|_{B^{\mathbb{R}}}$ является изоморфизмом градуированных колец, $\iota|_{B^{\mathbb{R}}}: B^{\mathbb{R}} \rightarrow B^{\mathbb{R}}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Кольца B , B_h , $B_h^{\mathbb{R}}$ порождены однородными элементами степени 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1 основано на следующем утверждении [3, теорема 2 и предложение 2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть X – k -мерное ЕТР и $X \Rightarrow \mathcal{P}$, и пусть h – кусочно линейная функция, линейная на каждой клетке ЕТР X . Определим новое оснащение степени $2n - k + 1$ на каждой k -мерной клетке ЕТР X следующим образом:

$$Y_{\Delta} = d^c G_{\Delta} \wedge X_{\Delta},$$

где G_{Δ} – любая линейная функция такая, что $(G_{\Delta})|_{\Delta} = h$. Положим $D_c(hX) = \partial Y$. Тогда:

- 1) $(k - 1)$ -мерное оснащенное полиэдральное множество $D_c(hX)$ является ЕТР и не зависит от выбора функций G_{Δ} ;
- 2) ETV , соответствующее ЕТР $D_c(hX)$, зависит только от класса эквивалентности ЕТР X ;
- 3) $\overline{D_c(hX)} = dd^c(h\overline{\mathcal{P}})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из теоремы 3.1 вытекает, что $d\overline{\mathcal{P}} = d^c\overline{\mathcal{P}} = 0$. Отсюда ETV , соответствующее $D_c(hX)$, равно произведению $\text{ETV } \mathcal{P}$ на ETV , соответствующее угловому множеству (corner locus) кусочно линейной функции h (см. пример 2.1).

Очевидно, что отображение ι определено и биективно на элементах степени 0. Используя индукцию по степени и применяя утверждение 3.2, получаем утверждение 3.1 (детали имеются в [3]). Таким образом, отображение ι определено как гомоморфизм градуированных абелевых групп. По определению отображение ι инъективно. На однородных компонентах степени 0 отображение ι биективно. Поэтому из утверждения 3.2 вытекает, что доказательство биективности отображения ι сводится к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.4. Для любого $(k - 1)$ -мерного $\text{ETV } \mathcal{P}$ существуют конечные наборы:

- a) k -мерных $\text{ETV}\{\mathcal{Q}\}$,
- b) $\text{ETP}\{X_{\mathcal{Q}} \Rightarrow \mathcal{Q}\}$,
- c) кусочно линейных функций $\{h_{\mathcal{Q}}\}$ на пространстве $\mathbb{C}^n$, линейных на каждой клетке $\text{ETP } X_{\mathcal{Q}}$,

такие, что функция $h_{\mathcal{Q}}$ линейна на каждой клетке $\text{ETP } X_{\mathcal{Q}}$ и

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \{\mathcal{Q}\}} D_c(h_{\mathcal{Q}}\mathcal{Q}) = \mathcal{P}. \quad (3.1)$$

Пусть h_{γ} – опорная функция выпуклого многогранника $\gamma \subset (\mathbb{C}^n)^*$ (напомним: это кусочно линейная функция $h_{\gamma}(z) = \max_{z^* \in \gamma} \text{Re}\langle z, z^* \rangle$ в пространстве $\mathbb{C}^n$).

ЛЕММА 3.1. Функция h_{γ} при любом k линейна на любой клетке $\text{ETP } X^{\gamma, k}$, и $D_c(h_{\gamma}X^{\gamma, k}) = (2n - k + 1)X^{\gamma, k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Θ – k -мерный конус, двойственный грани θ многогранника γ . Тогда (по определению отображения D_c)

$$(D_c(h_\gamma X^{\gamma,k}))_\Delta = \sum_{\Theta \supset \Delta} d^c G_\Theta \wedge X_\Theta^{\gamma,k},$$

где G_Θ – вещественная линейная функция в $\mathbb{C}^n$, совпадающая с функцией h_γ на конусе Θ . Положим $G_\Theta(z) = \operatorname{Re}\langle z, w_\theta \rangle$, где w_θ – произвольная точка грани θ . Тогда $d^c G_\Theta = \operatorname{Re}\langle dz, iw_\theta \rangle$.

Пусть δ – двойственная конусу Δ грань многогранника γ . Тогда (по определению) $X_\Delta^{\gamma,k-1} = i^{2n-k+1} \varrho(p_\delta)$. Применяя формулу (2.4), получаем

$$\begin{aligned} X_\Delta^{\gamma,k-1} &= i^{2n-k+1} \varrho(p_\delta) = \frac{1}{2n-k+1} \sum_{\theta \subset \Delta, \dim \theta = 2n-k} (iw_\theta) \wedge ((-i)^{2n-k+1} \varrho(p_\delta)) \\ &= \frac{1}{2n-k+1} \sum_{\Theta \supset \Delta, \dim \Theta = k} d^c G_\Theta \wedge X_\Theta^{\gamma,k} = (D_c(h_\gamma X^{\gamma,k}))_\Delta. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4. Применяя теорему 2.2, представим $\mathcal{P}$ в виде

$$\mathcal{P} = \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm (a_\gamma + X^{\gamma,k-1}).$$

Пусть h_γ – опорная функция многогранника γ и $h_\gamma^{a_\gamma}(z) = h_\gamma(z - a_\gamma)$. Применяя лемму 3.1, получаем равенство вида (3.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm \left(a_\gamma + \frac{1}{2n-k+1} D_c(h_\gamma X^{\gamma,k}) \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm D_c \left(h_\gamma^{a_\gamma} \left(a_\gamma + \frac{1}{2n-k+1} X^{\gamma,k} \right) \right). \end{aligned}$$

Биективность отображения ι доказана.

Теперь остается показать, что отображение ι сохраняет произведение (т.е. является изоморфизмом колец).

Пространство $\mathbb{C}^n$ действует сдвигами аргумента на множестве кусочно линейных функций. Это действие продолжается до непрерывного действия на кольцо $\mathcal{B}$. Аналогично (теорема 2.3), это действие продолжается до непрерывного действия на кольцо $\mathcal{B}$. Поэтому, используя сдвиги, можно свести утверждение о сохранении произведения к случаю трансверсальных пересечений.

Пусть $\text{ETP } X_1, \dots, X_k$ – угловые множества кусочно линейных функций $h_1, \dots, h_k$. Скажем, что $\text{ETP } X_1, \dots, X_k$ трансверсальны, если для любых клеток $\Delta_i \in X_i$ с непустым пересечением касательные пространства E_{Δ_i} клеток Δ_i трансверсальны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если $\text{ETP } X_1, \dots, X_k$ трансверсальны, то

$$\iota(dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_k) = \mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_k,$$

где $X_i \Rightarrow \mathcal{P}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_i \in X_i - (2n-1)$ -мерная клетка. Рассмотрим одноклеточное ЕТР A_i с клеткой E_{Δ_i} , оснащенной как $(X_i)_{\Delta}$. Положим $A_i \Rightarrow \mathcal{A}_i$.

Клетка Δ_i в окрестности каждой своей точки является общей гиперплоскостью двух полупространств B_1, B_2 . Пусть кусочно линейная функция g_i линейна на полупространствах B_1, B_2 и $g_i|_{B_j} = h_i|_{B_j}$ вблизи любой внутренней точки клетки Δ_i .

Из условия трансверсальности вытекает, что утверждение предложения эквивалентно серии равенств

$$\iota(dd^c g_1 \wedge \cdots \wedge dd^c g_k) = \mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_k$$

для любых $(2n-1)$ -мерных клеток $\Delta_1 \in X_1, \dots, \Delta_k \in X_k$. Последнее равенство легко проверить непосредственно.

3.2. Обращение в нуль значения оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях. Пусть H – комплексное p -мерное векторное подпространство пространства $\mathbb{C}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. При $k + p > n$ набор кусочно линейных функций $g_1, \dots, g_k$ назовем H -вырожденным, если существуют линейные функции $\varphi_i: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $\varphi_i(z + h) + g_i(z + h) = \varphi_i(z) + g_i(z)$ при любых $z \in \mathbb{C}^n$ и $h \in H$ (т. е. функции $\varphi_i + g_i$ являются прообразами кусочно линейных функций при отображении $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n/H$). Набор $g_1, \dots, g_k$ называется невырожденным, если не существует подпространства H , при котором набор H -вырожден.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $h_1, \dots, h_k$ – выпуклые кусочно линейные функции. Тогда $dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_k \neq 0$, если и только если набор $h_1, \dots, h_k$ невырожден.

Теорема 3.5 является аналогом критерия равенства нулю смешанного объема выпуклых тел. Объясним это подробнее.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3 [7]. Пусть компактные выпуклые тела A_i лежат в пространстве $\text{Re}(\mathbb{C}^n)^*$ и $h_i: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – их опорные функции. Рассмотрим произвольную евклидову метрику на пространстве $\text{Re} \mathbb{C}^n$, соответствующую эрмитову метрику на пространстве $\mathbb{C}^n$ и двойственную эрмитову метрику на пространстве $(\mathbb{C}^n)^*$. Тогда поток $dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_n$ является мерой с носителем на пространстве $\text{Im} \mathbb{C}^n$, равной мере n -мерной евклидовой площади, умноженной на смешанный объем тел $A_1, \dots, A_n$ и на $n!$.

Критерий равенства нулю смешанного объема формулируется следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) смешанный объем компактных выпуклых тел $A_1, \dots, A_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ равен нулю;
- 2) при некотором $p \leq n$ существует поднабор $B_1, \dots, B_p$ набора $A_1, \dots, A_n$ такой, что при некоторых $a_i \in \mathbb{R}^n$ все сдвинутые тела $a_i + B_i$ принадлежат $(p-1)$ -мерному подпространству пространства $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_i – выпуклые многогранники. Тогда утверждение следствия вытекает из утверждения теоремы 3.5. Для этого достаточно поместить A_i в пространство $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$ и (используя утверждение 3.3) применить утверждение теоремы к опорным функциям многогранников. Для произвольных A_i утверждение следствия вытекает из свойства монотонности смешанного объема: если $B_i \subseteq A_i$, то $V(B_1, \dots, B_n) \leq V(A_1, \dots, A_n)$.

В задаче о количестве общих решений системы n экспоненциальных сумм (см. [2], [8]) роль смешанного объема выпуклых тел $A_1, \dots, A_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ играет смешанный псевдообъем. По определению смешанный псевдообъем тел равен $\int_D dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_n$, где h_i – опорные функции тел A_i , а D – шар радиуса 1 с центром в точке 0. Следующее утверждение является критерием обращения в нуль смешанного псевдообъема выпуклых многогранников.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) смешанный псевдообъем выпуклых многогранников $A_1, \dots, A_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ равен нулю;
- 2) при некотором $p \leq n$ существует поднабор $B_1, \dots, B_p$ набора $A_1, \dots, A_n$ такой, что при некоторых $a_i \in \mathbb{C}^n$ все сдвинутые многогранники $a_i + B_i$ принадлежат $(p-1)$ -мерному комплексному подпространству пространства $\mathbb{C}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Неизвестно, остается ли верным утверждение следствия 3.3 для произвольных выпуклых тел.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Критерий равенства нулю предложен Минковским в [9] (где было впервые введено понятие смешанного объема): смешанный объем тел положителен, если и только если тела содержат линейно независимые отрезки. Из следующих ниже утверждений вытекает, что смешанный псевдообъем многогранников положителен, если и только если тела содержат отрезки, линейно независимые над полем $\mathbb{C}$. Для произвольных выпуклых тел вопрос остается открытым.

Приведем три вспомогательных утверждения, использующихся в доказательстве теоремы 3.5. Первое из них является прямым следствием определения произведения ETV, второе очевидно. Доказательство третьего утверждения приведено после вывода теоремы.

ЛЕММА 3.2. Пусть $X_1, \dots, X_k$ – одноклеточные ненулевые $(2n-1)$ -мерные ETP, E_i – $(2n-1)$ -мерное подпространство $\mathbb{C}^n$, порожденное разностями точек клетки $\Delta_i \in X_i$, $0 \neq \varphi_i \in (\mathbb{C}^n)^*$ – уравнение гиперплоскости E_i , т.е. $\operatorname{Re}\langle z, \varphi_i \rangle = 0$ для любого $z \in E_i$. Обозначим через $\mathcal{P}_i$ ETV, соответствующее ETP X_i . Тогда $\prod_{i=1}^k \mathcal{P}_i = 0$, если и только если векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ линейно зависимы над полем $\mathbb{C}$.

ЛЕММА 3.3. Пусть h – кусочно линейная функция в пространстве $\mathbb{R}^N$, $v_1, \dots$ – векторы двойственного пространства $(\mathbb{R}^N)^*$, равные значениям дифференциала функции h в областях линейности. Предположим, что при любых i, j векторы $v_i - v_j$ принадлежат некоторому подпространству E пространства $(\mathbb{R}^N)^*$. Тогда кусочно линейная функция $h - v_1$ (здесь v_1 рассматривается

как линейная функция в $\mathbb{R}^N$) является обратным образом некоторой кусочно линейной функции при отображении $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N/H$, где H – ортогональное дополнение подпространства E .

При $0 < k \leq n$ назовем набор $A_1, \dots, A_k$ непустых конечных подмножеств n -мерного векторного пространства E (над произвольным полем) *вырожденным*, если любой набор векторов $a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k$ лежит в некотором (зависящем от выбранных векторов) $(k-1)$ -мерном подпространстве E .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть набор $A_1, \dots, A_k$ вырожден. Тогда при некотором $1 \leq p \leq k$ существуют $(p-1)$ -мерное подпространство $H \subset E$ и поднабор $B_1, \dots, B_p$ набора $A_1, \dots, A_k$ такие, что $B_j \subset H$ для любого j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5. Пусть $\text{ETP } X_i$ – угловые множества (corner loci) функций h_i , $A_i \subset (\mathbb{C}^n)^*$ – множество уравнений гиперплоскостей вида E_Δ для всех $(2n-1)$ -мерных клеток $\Delta \in X_i$ (см. формулировку леммы 3.2).

Если кусочно линейная функция h выпукла, то $\text{ETV } dd^c h$ положительно. Поэтому из следствия 2.19 и леммы 3.2 вытекает, что $dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_k = 0$, если и только если набор конечных множеств $A_1, \dots, A_k$ является вырожденным. Применяя предложение 3.2, получаем поднабор $g_1, \dots, g_p$ набора функций $h_1, \dots, h_k$ и $(p-1)$ -мерное комплексное подпространство H пространства $(\mathbb{C}^n)^*$ такие, что каждая из функций g_i удовлетворяет условию леммы 3.3. Теперь утверждение теоремы вытекает из утверждения леммы 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.2. Пусть $\{\bar{C}\} = \{C_1, \dots, C_m\}$ – максимальный невырожденный поднабор набора $\{\bar{A}\} = \{A_1, \dots, A_k\}$. Из условия невырожденности набора $\{\bar{C}\}$ вытекает, что существуют линейно независимые векторы $c_1 \in C_1, \dots, c_m \in C_m$.

ЛЕММА 3.4. Пусть V – m -мерное подпространство, порожденное векторами $c_1, \dots, c_m$, $C \in \{\bar{A}\} \setminus \{\bar{C}\}$ и L – подпространство, порожденное векторами из множества C . Тогда $L \subset V$.

Утверждение леммы 3.4 – следствие максимальности невырожденного поднабора $\{\bar{C}\}$.

ЛЕММА 3.5. Пусть V_i – $(m-1)$ -мерное подпространство E , порожденное векторами $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_m$. Тогда если $C_i \not\subset V$, то $L \subset V_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{V}$ – подпространство, порожденное векторами $c_1, \dots, \tilde{c}_i, \dots, c_{m-1}, c_m$, где $C_i \ni \tilde{c}_i \notin V$. Тогда $\dim \tilde{V} = m$. Поэтому (лемма 3.4) $L \subset \tilde{V}$. Остается заметить, что $V_i = V \cap \tilde{V}$. Лемма доказана.

Перенумеруем набор множеств $\bar{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ так, что $C_i \subset V$ при $i \leq l$ и $C_i \not\subset V$ при $i > l$. Если $l = m$, то нужное утверждение верно при $p = m+1$ для поднабора $C_1, \dots, C_m, C$ и подпространства V .

ЛЕММА 3.6. Пусть Q – l -мерное подпространство, порожденное векторами $c_1, \dots, c_l$. Тогда $L \subset Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.5 имеем $L \subset V_{l+1} \cap \dots \cap V_m = Q$. Лемма доказана.

Заметим, что $l > 0$, так как иначе по лемме 3.6 имеем $L = 0$, что невозможно.

Если $C_i \subset Q$ при $i = 1, \dots, l$, то нужное утверждение верно при $p = l + 1$ для поднабора $C_1, \dots, C_l, C$ и подпространства Q . Предположим, что существует $i \leq l$ такое, что $C_i \not\subset Q$.

ЛЕММА 3.7. Пусть $i \leq l$ и $C_i \not\subset Q$. Тогда $L \subset Q_i$, где Q_i – $(l - 1)$ -мерное подпространство, порожденное векторами $c_1, c_2, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_i \ni \check{c}_i \notin Q$. По условию (так как $i \leq l$) имеем $\check{c}_i \in V$. Рассмотрим разложение

$$\check{c}_i = \sum_{j \leq m} \alpha_j c_j \quad (3.2)$$

по базису $\{c_j\}$ пространства V . Возможны случаи $\alpha_i \neq 0$ и $\alpha_i = 0$.

В случае $\alpha_i \neq 0$ векторы

$$c_1, \dots, c_{i-1}, \check{c}_i, c_{i+1}, \dots, c_m \quad (3.3)$$

линейно независимы (т.е. образуют базис пространства V). Тогда, используя утверждение леммы 3.6, получаем, что L принадлежит как подпространству, порожденному векторами $c_1, \dots, c_i, \dots, c_l$, так и подпространству, порожденному векторами $c_1, c_2, \dots, c_{i-1}, \check{c}_i, c_{i+1}, \dots, c_l$. Отсюда следует, что L принадлежит их пересечению, т.е. подпространству Q_i , что и требуется показать.

В случае $\alpha_i = 0$ векторы (3.3) линейно зависимы. Тогда, поскольку $\check{c}_i \notin Q$, имеем $\alpha_j \neq 0$ при некотором $j > l$. Пусть $V \not\supset \check{c}_j \in C_j$. Тогда векторы

$$c_1, \dots, c_{i-1}, \check{c}_i, c_{i+1}, \dots, c_l, \dots, c_{j-1}, \check{c}_j, c_{j+1}, \dots, c_m \quad (3.4)$$

линейно независимы. Тогда (лемма 3.5) подпространство L принадлежит подпространству $\tilde{Q}$, порожденному векторами

$$c_1, \dots, c_{i-1}, \check{c}_i, c_{i+1}, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_m.$$

Значит, имеем $c_i \notin \tilde{Q}$. Действительно, иначе мы получили бы разложение вида (3.2) с ненулевым α_i . Отсюда следует, что $Q \cap \tilde{Q} = Q_i$ и, значит, $L \subset Q_i$. Лемма доказана.

Переупорядочим набор $C_1, \dots, C_l$ так, что первые q подпространств принадлежат подпространству Q , а остальные не принадлежат. Тогда L принадлежит подпространству, порожденному векторами $c_1, \dots, c_q$, что следует из леммы 3.7, так как это последнее подпространство совпадает с подпространством $Q_{q+1} \cap \dots \cap Q_l$. Поэтому $q + 1$ множеств $C_1, \dots, C_q, C$ лежат в q -мерном подпространстве. Предложение 3.2 доказано.

§ 4. Тропические многообразия и ETV

Используемые далее свойства TV доступны из разных источников (например, [10]). Здесь используются ссылки на [7] и [11].

4.1. Определение тропического многообразия. Пусть X – k -мерное полиэдральное множество в пространстве $\mathbb{R}^N$ с фиксированной ориентацией. Будем называть *цепью степени m* нечетную функцию $\Delta \mapsto X_\Delta \in \bigwedge^m(\mathbb{R}^N)^*$ на множестве k -мерных клеток (напомним, что это функция, значение которой меняет знак при смене ориентации клетки). Полиэдральное множество с фиксированной цепью называем *оснащенным*. Форму X_Δ (с учетом зависимости знака X_Δ от ориентации клетки) называем *оснащением* клетки Δ . Полиэдральное множество X называется *замкнутым*, если $\partial X = 0$ (см. (2.1)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть X – замкнутое оснащенное полиэдральное множество размерности k с оснащением степени $N - k$. Назовем X *тропическим полиэдральным множеством* (ТР), если для любой k -мерной клетки Δ форма X_Δ обращается в нуль на любом наборе касательных векторов, содержащем вектор из подпространства E_Δ , где E_Δ – касательное пространство клетки Δ .

Отождествим пространство $\mathbb{R}^N$ с вещественным подпространством $\operatorname{Re} \mathbb{C}^N$ пространства $\mathbb{C}^N$. Сопоставим ТР X с потоком типа меры $\bar{X}$ в пространстве $\mathbb{C}^N$:

$$\bar{X}(\varphi) = \sum_{\Delta \in X, \dim \Delta = k} \int_{\Delta + \operatorname{Im} \mathbb{C}^N} X_\Delta \wedge \varphi. \quad (4.1)$$

Назовем ТР X и Y *эквивалентными*, если $\bar{X} = \bar{Y}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Класс эквивалентности ТР назовем *тропическим многообразием* (ТВ).

Всюду далее запись $X \Rightarrow \mathcal{P}$ означает, что ТР X лежит в классе эквивалентности $\operatorname{TV} \mathcal{P}$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть носитель $(N - 1)$ -мерного полиэдрального множества X состоит из точек негладкости кусочно линейной функции h . Локально любая $(N - 1)$ -мерная клетка Δ полиэдрального множества X является общей границей полупространств A и B . Пусть dh_A и dh_B – дифференциалы функции h в полупространствах A и B соответственно. Упорядочение пары полупространств определяет коориентацию клетки Δ . Фиксированная ориентация $\mathbb{R}^N$ и коориентация Δ вместе задают ориентацию клетки Δ . Используя эту ориентацию, положим $X_\Delta = dh_A - dh_B$. Тогда оснащенное полиэдральное множество X является ТР. Наоборот, любое ТВ размерности $N - 1$ возникает таким образом.

Перечислим некоторые свойства ТВ, аналогичные приведенным в § 2 свойствам ETV.

Тропические многообразия образуют коммутативное градуированное кольцо. Определение операций сложения и умножения ТВ аналогично определению соответствующих операциям ETV. Нульмерные ТВ (или ТВ степени N) – конечные множества точек, снабженных вещественными кратностями. Положительные ТВ и веер Бергмана ТВ также определены.

Пусть $B_{\mathbb{R}}$ – кольцо, порожденное потоками $dd^c g$, где g – $\mathbb{R}$ -порожденные кусочно линейные функции в $\mathbb{C}^N$ (определение 3.1, 2)). Нетрудно убедиться в том, что следующее утверждение из [7] совпадает с утверждением теоремы 3.3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Для любого однородного потока $b \in B_{\mathbb{R}}$ существует $\text{TV } \iota(b)$ размерности $N - \frac{1}{2} \deg b$ такое, что $b = \iota(\overline{b})$. Отображение ι задает изоморфизм градуированного кольца $B_{\mathbb{R}}$ и градуированного кольца TV .

4.2. TV и выпуклые многогранники. Пусть γ – выпуклый многогранник в пространстве $(\mathbb{R}^N)^*$. Двойственные конусы m -мерных граней многогранника γ образуют $(N - m)$ -мерный веер конусов $X^{\gamma, N-m}$ (напомним, двойственный конус Δ грани δ многогранника γ состоит из таких точек $x \in \mathbb{R}^N$, что $\max_{x^* \in \gamma} \langle x, x^* \rangle$ достигается при любом $x^* \in \delta$).

При $m \leq N$ определим $(N - m)$ -мерное ТР, соответствующее многограннику $\gamma \subset (\mathbb{C}^N)^*$. Клетки ТР – конусы веера $X^{\gamma, N-m}$. Определим оснащение $X_{\Delta}^{\gamma, N-m}$ двойственной грани δ конуса $\Delta \in X^{\gamma, 2n-m}$ следующим образом.

Рассмотрим поливектор p_{δ} (из условия леммы 2.2) как внешнюю m -форму $W_{\Delta}^{\gamma, N-m}$ на пространстве $\mathbb{R}^N$. Знак этой формы зависит от выбора ориентации клетки δ . Далее установлено соответствие между ориентациями пространств E_{Δ} и E_{δ} . Поэтому формы $W_{\Delta}^{\gamma, N-m}$ задают оснащение полиэдрального множества $X_{\Delta}^{\gamma, N-m}$. Соответствие ориентаций пространств E_{Δ} и E_{δ} устанавливается следующим образом.

Билинейная форма $\langle x, x^* \rangle: \mathbb{R}^N \otimes (\mathbb{R}^N)^* \rightarrow \mathbb{R}$ задает невырожденное спаривание $\mathbb{R}^N/E_{\Delta} \otimes E_{\delta} \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^N/E_{\Delta} \oplus E_{\delta}$ соответствующую симплектическую форму ω и ориентацию, соответствующую форме объема ω^m . Согласуем ориентации пространств $\mathbb{R}^N/E_{\Delta}$ и E_{δ} так, что согласованные ориентации сообща дают ориентацию ω^m на пространстве $\mathbb{R}^N/E_{\Delta} \oplus E_{\delta}$. Далее согласуем ориентации пространств $\mathbb{R}^N/E_{\Delta}$ и E_{Δ} , используя фиксированную ориентацию пространства $\mathbb{R}^N$. Теперь ориентации пространств E_{δ} и E_{Δ} также согласованы.

Замкнутость оснащенного полиэдрального множества $X^{\gamma, 2n-m}$ вытекает из следствия 2.11. Таким образом, при $0 \leq k \leq N$ оснащенные вееры конусов $X^{\gamma, k}$ являются однородными ТР. Соответствующие однородные TV также обозначаются $X^{\gamma, k}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Для любого k -мерного однородного TV X существует конечный набор $\{\gamma\}$ выпуклых многогранников в пространстве $(\mathbb{R}^N)^*$ такой, что

$$X = \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm X^{\gamma, k}. \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Для любого k -мерного TV X существуют конечный набор $\{\gamma\}$ выпуклых многогранников в пространстве $(\mathbb{R}^N)^*$ и набор векторов $\{a_{\gamma}\}$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ такие, что

$$X = \sum_{\gamma \in \{\gamma\}} \pm (a_{\gamma} + X^{\gamma, k}), \quad (4.3)$$

где $a_{\gamma} + X^{\gamma, k}$ – сдвиг $\text{TV } X^{\gamma, k}$ на вектор a_{γ} .

В формулах (4.2) и (4.3) через tX обозначено TV, клетки которого совпадают с клетками $\text{TV } X$ (при представлении его некоторым ТР), а оснащения совпадают с оснащениями X , умноженными на t .

Теорема 4.1 доказана в [7]. Теорема 4.2 анонсирована в [11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Пусть $X \Rightarrow \mathcal{P}$. Клетку $\Theta \in X$ назовем m -простой, если однородное $\text{TP } X_\Theta$ (см. п. 2.4) совпадает с суммой конечного числа однородных TP таких, что размерности их минимальных клеток $\geq m$. Если все клетки $\text{TP } X$ m -просты, то $\text{TP } X$ и $\text{TV } \mathcal{P}$ также назовем m -простыми. Заметим, что любое TV является 0-простым.

Мы покажем, что, используя операцию вычитания сдвигов однородных TV , любое k -мерное TV можно сделать k -простым (см. далее лемму 4.2). После этого (см. лемму 4.1) утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.1. Утверждения лемм очевидны.

ЛЕММА 4.1. Пусть k -мерное $\text{TV } \mathcal{P}$ является k -простым. Тогда $\mathcal{P}$ является суммой одноклеточных TV .

ЛЕММА 4.2. Пусть k -мерное $\text{TP } X$ является m -простым, $\Theta \in X$ – m -мерная клетка, $x \in \text{Int } \Theta$. Предположим, что клетка Θ не является $(m+1)$ -простой. Тогда количество не $(m+1)$ -простых клеток $\text{TP } X - (x + X_\Theta)$ строго меньше количества не $(m+1)$ -простых клеток $\text{TP } X$.

4.3. Построение отображения Π . Пусть $k \geq n$, X – k -мерное TP в овеществлении пространства $\mathbb{C}^n$. Используя оснащения $X_\Delta \in \bigwedge_{\mathbb{R}}^{2n-k}(\mathbb{C}^n)^*$ k -мерных клеток $\Delta \in X$, мы построим комплексные оснащения $X_\Delta^{\mathbb{C}} \in \bigwedge_{\mathbb{C}}^{2n-k}(\mathbb{C}^n)^*$ клеток, превращающие $\text{TP } X$ в $\text{ETP } X^{\mathbb{C}}$. Как множества клеток $\text{ETP } X^{\mathbb{C}}$ и $\text{TP } X$ одинаковы.

Из определения 4.1 следует, что форму X_Δ можно представить в виде $\varphi_1^{\text{Re}} \wedge \dots \wedge \varphi_{2n-k}^{\text{Re}}$, где $\varphi_j \in (\mathbb{C}^n)^*$, а $\varphi_j^{\text{Re}}(z) = \text{Re } \varphi_j(z)$. Положим

$$X_\Delta^{\mathbb{C}} = i^{2n-k} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{2n-k}. \quad (4.4)$$

Легко убедиться в том, что форма $X_\Delta^{\mathbb{C}}$ вещественна на пространстве E_Δ и не зависит от выбора $\varphi_j \in (\mathbb{C}^n)^*$ (последнее вытекает из леммы 2.3). Замкнутость оснащенного полиэдрального множества $X^{\mathbb{C}}$ вытекает из условия замкнутости $\text{TP } X$.

Положим $\Pi(X) = X^{\mathbb{C}}$. Положим также $\Pi(X) = 0$ при $\dim X < n$.

Сравнивая определения операций сложения и умножения в кольцах TV и ETV соответственно, а также определения положительности и веера Бергмана TV и ETV , получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.3. 1) Отображение Π является сюръективным гомоморфизмом градуированного кольца TV в овеществлении пространства $\mathbb{C}^n$ на градуированное кольцо ETV .

2) Отображение Π переводит положительные TV в положительные ETV .

3) Пусть $\beta(\mathcal{P})$ – веер Бергмана TV или $\text{ETV } \mathcal{P}$. Тогда $\Pi\beta = \beta\Pi$.

4) Отображение Π коммутирует со сдвиговым действием аддитивной группы пространства $\mathbb{C}^n$.

5) Отображение Π коммутирует с действием группы $\mathbb{R}^*$, умножающей оснащения всех клеток на вещественное число.

Из теоремы 4.3 также вытекает, что теоремы 2.1, 2.2 о структуре ETV являются следствиями соответствующих теорем 4.1, 4.2 о структуре TV .

Список литературы

1. C. De Concini, “Equivariant embeddings of homogeneous spaces”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Berkeley, Calif., 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 369–377.
2. Б. Я. Казарновский, “О нулях экспоненциальных сумм”, *Докл. АН СССР*, **257**:4 (1981), 804–808; англ. пер.: В. Ya. Kazarnovskij, “On the zeros of exponential sums”, *Soviet Math. Dokl.*, **23** (1981), 347–351.
3. Б. Я. Казарновский, “О действии комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях”, *Функц. анализ и его прил.*, **48**:1 (2014), 19–29; англ. пер.: В. Ya. Kazarnovskii, “On the action of the complex Monge–Ampère operator on piecewise linear functions”, *Funct. Anal. Appl.*, **48**:1 (2014), 15–23.
4. A. Esterov, “Tropical varieties with polynomial weights and corner loci of piecewise polynomials”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 55–76.
5. E. Bedford, B. A. Taylor, “The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampère equation”, *Invent. Math.*, **37**:1 (1976), 1–44.
6. B. Kazarnovskii, *On piecewise pluriharmonic functions*, arXiv:1206.3741.
7. Б. Я. Казарновский, “с-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 23–44; англ. пер.: В. Ya. Kazarnovskii, “c-fans and Newton polyhedra of algebraic varieties”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 439–460.
8. Б. Я. Казарновский, “Многогранники Ньютона и корни систем экспоненциальных сумм”, *Функц. анализ и его прил.*, **18**:4 (1984), 40–49; англ. пер.: В. Ya. Kazarnovskii, “Newton polyhedra and zeros of systems of exponential sums”, *Funct. Anal. Appl.*, **18**:4 (1984), 299–307.
9. H. Minkowski, “Theorie der konvexen Körpern, insbesondere der Begründung ihres Oberflächenbegriffs”, *Gesammelte Abhandlungen*, v. 2, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1911, 131–229.
10. I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. Shustin, *Tropical algebraic geometry*, 2nd ed., Oberwolfach Semin., **35**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, x+104 pp.
11. Б. Я. Казарновский, “Мультипликативная теория пересечений и комплексные тропические многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:4 (2007), 19–68; англ. пер.: В. Ya. Kazarnovskii, “Multiplicative intersection theory and complex tropical varieties”, *Izv. Math.*, **71**:4 (2007), 673–720.

БОРИС ЯКОВЛЕВИЧ КАЗАРНОВСКИЙ
(BORIS YA. KAZARNOVSKII)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: kazbori@gmail.com

Поступило в редакцию
04.01.2013
21.10.2013